Universidad Nacional Autónoma de México y Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas
UMSNH-UNAM

Continuidad Automática en Grupos Polacos

T E S I N A

que opta para obtener el grado de

Maestro en Ciencias Matemáticas

Presenta:

Mat. Cristhian Sebastián Heredia Freire

Asesor:

Dr. Ulises Ariet Ramos García

Morelia, Michoacán, México
Agosto 2023

Índice general

Resumen

En el presente trabajo se proporciona una visión general de la continuidad automática en grupos polacos y se presentan algunas herramientas y técnicas importantes para su estudio y aplicación. Se estudia el concepto de continuidad automática en grupos polacos, se repasan los teoremas clásicos que se han desarrollado para abordar el problema de la continuidad automática en grupos polacos, tales como el teorema de Banach-Pettis, Teorema de Steinhaus-Weil, entre otros. Estos teoremas proporcionan condiciones suficientes para la continuidad automática en grupos polacos y son herramientas importantes para la investigación en este tema.
Además, se presentan algunas técnicas que se han creado para resolver la cuestión de la continuidad automática en grupos polacos, como la Propiedad de Steinhaus introducida por Rosendal y Solecki [11], así como también la propiedad *ample generics* introducida y estudiada por Kechris y Rosendal [7]. Esta última es una herramienta poderosa para demostrar continuidad automática como otras consecuencias de interés. También se exploran algunas líneas de investigación para abordar la pregunta de la equivalencia entre la Propiedad de Steinhaus y la continuidad automática, que es un problema no resuelto en este campo.
Por último, se concluye con algunos resultados obtenidos en la investigación, que sugieren que la continuidad automática es una propiedad que puede ser estudiada en grupos polacos más a detalle y que existen oportunidades para encontrar nuevas técnicas y teoremas que permitan abordar este problema de manera más eficiente en el futuro.

Palabras clave: *Ample generics*, continuidad automática, grupos polacos, Propiedad de Steinhaus.

Abstract

This paper provides an overview of automatic continuity in Polish groups and presents some important tools and techniques for its study and application. The concept of automatic continuity in Polish groups is studied, and classical theorems developed to address the problem of automatic continuity in Polish groups, such as the Banach-Pettis theorem, Steinhaus-Weil theorem, among others, are reviewed. These theorems provide sufficient conditions for automatic continuity in Polish groups and are important tools for research in this field.
Furthermore, some techniques that have been created to tackle the question of automatic continuity in Polish groups are presented, such as the Steinhaus property introduced by Rosendal and Solecki [11], as well as the ample generics property introduced and studied by Kechris and Rosendal [7]. The latter is a powerful tool for proving automatic continuity and other related consequences. Additionally, some research directions are explored to address the question of equivalence between the Steinhaus property and automatic continuity, which remains an unresolved problem in this field.
Finally, the paper concludes with some results obtained in research, suggesting that automatic continuity is a property that can be studied in Polish groups in more detail, and there are opportunities to find new techniques and theorems that will enable addressing this problem more efficiently in the future.

Keywords: Ample generics, automatic continuity, Polish groups, Steinhaus property.

Introducción

El concepto de continuidad automática parte de la siguiente pregunta realizada por Cauchy: ¿Cuáles son las funciones $\pi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfacen la ecuación $\pi(x+y) = \pi(x) + \pi(y)$? Claramente, la respuesta son los homomorfismos del grupo aditivo $\mathbb{R}$. Pero la motivación de Cauchy fue conocer cuando la respuesta son solo las funciones con ley de asignación $\pi(x) = rx$ para algún $r \in \mathbb{R}$, lo que es equivalente a que todas las funciones π sean continuas. Una pregunta más general a la anterior está dada por: ¿Cuándo un homomorfismo $\pi\colon G \to H$ entre grupos polacos es continuo? Partiendo de esto último, decimos que un grupo polaco G tiene la propiedad de continuidad automática si para cualquier grupo topológico separable H y todo homomorfismo $\varphi\colon G \to H$, se cumple que φ es continuo.
En [9] Mann explora la relación entre el grupo de difeomorfismos y la propiedad de continuidad automática entre ellos. Esta relación se establece al preguntarse cuándo la estructura del grupo topológico contiene información del grupo. A lo largo de los años, muchos miembros de la comunidad matemática se han interesado en esta pregunta. Actualmente, se sabe que existe una relación entre la continuidad automática y la estructura del grupo, y se ha demostrado la propiedad de continuidad automática para algunos grupos de Lie de interés, utilizando varias técnicas, entre las que destaca el uso de los *ample generics* introducida por Kechris y Rosendal [7]. Mann en el mismo artículo señala que se desconoce la propiedad de continuidad automática para la componente conexa de la identidad de los grupos de difeomorfismos de clase C^r, $Diff(M)^r_0$, cuando $0 < r \leq \infty$ y M es una variedad compacta. Cuando $r = 0$, se tiene que $Diff(M)^0_0 = Homeo(M)_0$, la componente conexa de la identidad de los grupos de homeomorfismos de M. Para este último grupo se conoce que tiene la propiedad de continuidad automática (ver [10]).
Esta es solo una de las aplicaciones e intereses de la continuidad automática, área de investigación muy activa en la actualidad. Por otro lado, se sabe que la continuidad automática entre grupos polacos implica la unicidad de una topología de grupo polaco (la demostración se puede generalizar del caso $Homeo_0(M)$ presentado en [10]). Se sabe que los grupos $Diff(M)^r_0$, cuando $0 < r < \infty$ y M es una variedad compacta tienen una topología de grupo polaco única(ver [5]). Además, se desconoce si la propiedad de continuidad automática se mantiene para ciertos grupos de Lie compactos y todos los grupos profinitos generados finitamente ([9]). Por otro lado, una técnica comúnmente utilizada para demostrar la continuidad automática entre grupos topológicos es la Propiedad de Steinhaus. Rosendal y Solecki demuestran en [11] que la Propiedad de Steinhaus implica continuidad automática. Para demostrar que ciertos grupos topológicos tienen esta propiedad, se utiliza la técnica de los *ample generics*, ya que es bien conocido que si un grupo tiene *ample generics* entonces satisface la Propiedad de Steinhaus [7]. Notemos que la propiedad de continuidad

automática es una propiedad de naturaleza extrínseca, mientras que la Propiedad de Steinhaus es de naturaleza intrínseca. Aquí surge una pregunta natural: ¿Cuál es la propiedad intrínseca del grupo polaco que es equivalente a la propiedad de continuidad automática? Teniendo en cuenta todo lo antes mencionado, un gran candidato a responder esta pregunta es la Propiedad de Steinhaus.

El objetivo del presente trabajo es llevar a cabo un estudio de la propiedad de continuidad automática en grupos polacos. Para ello, nos proponemos investigar posibles técnicas y líneas de investigación que nos permitan abordar la cuestión planteada sobre una potencial equivalencia entre la Propiedad de Steinhaus y la propiedad de continuidad automática. A través de un análisis detallado de las propiedades y características de estos grupos, buscaremos establecer conexiones y explorar diferentes enfoques teóricos con el fin de profundizar en nuestro entendimiento de esta interesante relación.

En el primer capítulo, se presenta una breve introducción a los términos, definiciones y algunos de los prerrequisitos que se utilizarán en el presente documento. Además, se incluye una breve sección sobre seudonormas, una técnica bastante peculiar y atractiva que se puede utilizar para crear nuevas topologías de grupos.

En el segundo capítulo, se aborda una revisión acerca de los orígenes de la continuidad automática, desde la imposición de condiciones de medida y categoría sobre los grupos topológicos considerados hasta la imposición de restricciones sobre los grupos topológicos en el conjunto de llegada de los homomorfismos. Se demostrará el Teorema de Dudley, que resume las condiciones necesarias para que haya continuidad automática en los grupos discretos a partir de un grupo polaco arbitrario.

En el siguiente capítulo, se define la Propiedad de Steinhaus y se demuestra que esta propiedad implica la continuidad automática, resultado debido a Rosendal y Solecki en [11]. Además, se presentan las definiciones básicas de la técnica denominada *ample generics* y algunos ejemplos de grupos topológicos que tienen continuidad automática pero no *ample generics* [12, 11]. Se concluye que existen grupos polacos que tienen la Propiedad de Steinhaus y, por lo tanto, la continuidad automática, pero no *ample generics*.

En el Capítulo 3, se exponen los resultados obtenidos en un primer intento por aprovechar la propiedad de continuidad automática para demostrar la Propiedad de Steinhaus. Se demuestra que los grupos polacos con continuidad automática tienen subgrupo conmutador clopen. Además, se logra demostrar que los grupos polacos con Propiedad de Steinhaus cumplen una especie de dicotomía. Es decir, todo grupo polaco que posee Propiedad de Steinhaus tiene un núcleo perfecto algebraico clopen, o bien admite un cociente isomorfo, algebraicamente y continuo a un subgrupo de S_∞. Estos hallazgos representan un avance significativo en nuestra comprensión de la conexión entre estas dos propiedades y arrojan luz sobre la estructura de los grupos polacos con continuidad automática.

Como es usual en la Teoría de Conjuntos, a lo largo del trabajo al conjunto de los números naturales se lo representará por ω, y se denotará por **OR** a la clase de todos los números ordinales. Por otro lado, dado un espacio topológico X, denotaremos por $\mathcal{BP}(X)$ a los subconjuntos de X que tienen la propiedad de Baire ($A \subseteq X$ tiene la propiedad de Baire si existe $U \subseteq X$ abierto tal que $A \triangle U$ es magro). Igualmente, denotaremos por $\mathcal{BOR}(X)$ a los borelianos de X.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo daremos las definiciones que ocuparemos a lo largo del trabajo, así como algunas proposiciones importantes. La mayoría de definiciones y proposiciones enlistadas en este capítulo se encuentran en [6, 14].
Vamos a relacionar las nociones topológicas de los espacios polacos con nociones algebraicas. Esto nos dará como resultado a los grupos polacos, para ello primero definiremos lo que es un grupo topológico y sus propiedades principales.

DEFINICIÓN 1.1. *Un* grupo topológico *es una tripleta* $(G, \tau, \cdot)$ *donde* (G, τ) *es un espacio topológico y* $(G, \cdot)$ *es un grupo tal que el mapeo de multiplicación* $(x, y) \mapsto xy$ *y el mapeo de inversión* $x \mapsto x^{-1}$ *son continuos.*

OBSERVACIÓN.

1. La condición que los mapeos de multiplicación e inversión sean continuos es equivalente a que el mapeo dado por $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ sea continuo.

2. Denotaremos por e_G a la identidad del grupo G. Cuando no haya confusión, la denotaremos por e.

Recordemos que una familia $\mathcal{B}$ de subconjuntos de un espacio topológico X se dice que es una *base de vecindades* de $x \in X$ si para cada abierto U de X que contiene a x, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq U$. Con esto, tenemos la siguiente proposición para grupos topológicos.

PROPOSICIÓN 1.2. *Sean G un grupo topológico y B una base de vecindades de la identidad e. Entonces para cada $x \in G$ las familias $B_x = \{xB : B \in \mathcal{B}\}$ y $B'_x = \{Bx : B \in \mathcal{B}\}$ son bases de vecindades de x.* □

OBSERVACIÓN. La proposición anterior es de suma importancia, pues nos dice que el describir la topología de un grupo topológico resulta mucho más fácil que describir la topología de un espacio topológico sin estructura algebraica. Más aún, para describir la topología de un grupo topológico basta describir una base local para la identidad del grupo e. Esto incluye la continuidad, basta probar que un homomorfismo es continuo en e para que sea continuo en todo el grupo topológico.

Ahora, vamos a establecer una proposición acerca de vecindades simétricas. Decimos que A un subconjunto de un grupo es *simétrico* si $A = A^{-1}$. La siguiente proposición nos dice que las vecindades simétricas de la identidad forman una base local para e.

PROPOSICIÓN 1.3. *Si G es un grupo topológico y U una vecindad de e, entonces existe V una vecindad de la identidad simétrica tal que $V = V^{-1} \subseteq U$.* $\square$

Por otro lado, usando las proposiciones anteriores se puede demostrar que todo grupo topológico es un espacio regular (separa puntos de cerrados). Con esto, si un grupo topológico es T_0, también es un espacio T_3 y, por ende, es un espacio de Hausdorff. Más aún, en grupos topológicos la condición de ser T_0 es equivalente a ser T_1.
Finalmente, para cerrar la sección de la base local de la identidad, vamos a enunciar un teorema que describe las características de la base local de la identidad y, también, proporciona un método para generar topologías de grupo.

TEOREMA 1.4. *Sea G un grupo topológico de Hausdorff. Existe una base local $\mathcal{V}$ para e que cumple las siguientes condiciones:*

1. $\bigcap \mathcal{V} = \{e\}$;
2. *si* $U, V \in \mathcal{V}$, *entonces existe* $W \in \mathcal{V}$ *tal que* $W \subseteq U \cap V$;
3. *para todo* $U \in \mathcal{V}$ *existe* $V \in V$ *tal que* $VV^{-1} \subseteq U$;
4. *para todo* $U \in \mathcal{V}$ *y todo* $x \in U$ *existe* $V \in \mathcal{V}$ *con* $xV \subseteq U$;
5. *para cada* $U \in \mathcal{V}$ *y* $a \in G$ *existe* $W \in \mathcal{V}$ *tal que* $aWa^{-1} \subseteq U$.

Recíprocamente, si tenemos un grupo G y una familia no vacía $\mathcal{V}$ de subconjuntos de G que contienen a e tales que satisfacen las condiciones $1. - 5.$ *para $\mathcal{V}$, entonces cada una de las familias $\mathcal{V}_x = \{xB : B \in \mathcal{V}\}$ y $\mathcal{V}'_x = \{Bx : B \in \mathcal{V}\}$ es base para una topología de grupo τ para G. Además, $\mathcal{V}$ es una base local para e en (G, τ).* $\square$

1.5. Subgrupos y grupos cocientes

Sean G un grupo topológico y H un subgrupo de G. Si consideramos H con la topología heredada de G, no perdemos la continuidad de las operaciones producto e inversión, por ende, H es un grupo topológico.

PROPOSICIÓN 1.6. *Sean G un grupo topológico y $H \leq G$. Entonces,*

1. *si H es abierto, entonces H es cerrado;*
2. *si H es cerrado de índice finito, H es abierto;*
3. *si H contienen un abierto no vacío, entonces H es abierto.* $\square$

Ahora, sea G un grupo topológico y H un subgrupo de G (no necesariamente normal). Tomamos

$$\begin{aligned} q\colon G &\longrightarrow G/H \\ x &\longmapsto q(x) = xH \end{aligned}$$

mapeo cociente. Al espacio G/H lo dotamos de la topología cociente ($U \subseteq G/H$ es abierto si y solo si $q^{-1}(U)$ es abierto en G). Si, además, H es normal, tiene una estructura natural de grupo. Con esto, juntando con la topología cociente G/H es un grupo topológico.
La siguiente proposición será usada posteriormente. Esta proposición relaciona la topología del grupo cociente con la estructura del subgrupo.

PROPOSICIÓN 1.7. *Sean G un grupo topológico y H un subgrupo cerrado de G. Entonces G/H con la topología cociente es discreto si y solo si H es abierto en G.*

1.8. Grupos metrizables

En esta sección antes de hablar de grupos metrizables vamos a aprovechar para hablar de una herramienta importante en la teoría de grupos topológicos como son las seudonormas. En [14] usan las propiedades de las seudonormas para demostrar el teorema de metrización de Birkhoff-Kakutani.

DEFINICIÓN 1.9. *Sean G un grupo y $N\colon G \to \mathbb{R}^+$ una función. Diremos que N es una* seudonorma *en G si satisface las siguientes condiciones:*

1. *$N(e) = 0$;*
2. *para todo $x, y \in G$, se cumple*
$$N(xy^{-1}) \leq N(x) + N(y).$$

OBSERVACIÓN.

1. En la definición anterior, si además se cumple que $N(x) \neq 0$ para todo $x \neq e$, diremos que N es una norma en G.
2. Para todo $x \in G$, $N(x^{-1}) = N(x)$.

Una forma interesante de generar seudonormas es partiendo de una función acotada sobre el grupo.

PROPOSICIÓN 1.10. *Sea f función real acotada con dominio G, la función definida por*
$$N(x) = \sup_{y \in G} |f(yx) - f(y)|$$
es seudonorma. □

DEFINICIÓN 1.11. *Sean G un grupo y N seudonorma en G. Diremos que N es* seudonorma invariante *si $N(x) = N(y^{-1}xy)$ para todo $x, y \in G$.*

DEFINICIÓN 1.12. *Decimos que una seudonorma es* continua *si es continua como función.*

Ahora en adelante, consideraremos grupos topológicos y seudonormas continuas.

OBSERVACIÓN. Una seudonorma N en un grupo topológico es continua si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ existe U vecindad de la identidad tal que para todo $x \in U$, $N(x) < \varepsilon$. Esto debido a que para que una función sobre un grupo topológico sea continua basta verificarlo en la identidad.

La demostración del Teorema de Birkhoff-Kakutani, hace uso fuertemente de las propiedades de seudonormas. Por cuestión de brevedad, plantearemos los lemas importantes que caracterizan los abiertos de la identidad de un grupo topológico por medio de seudonormas y se invita al lector a revisar en [14] sus demostraciones. Para definir el análogo a una bola abierta y cerrada dada por una seudonorma denotemos $B_N(\varepsilon) = \{x \in G : N(x) < \varepsilon\}$, mientras que $\overline{B_N}(\varepsilon) = \{x \in G : N(x) \leq \varepsilon\}$.

LEMA 1.13. *Supongamos que $\{U_i\}_{i\in\omega}$ es un sucesión decreciente de vecindades simétricas de la identidad tales que*

$$U_{i+1}^2 \subseteq U_i.$$

Entonces existe N seudonorma tal que

$$B_N\left(\frac{1}{2^i}\right) \subseteq U_i \subseteq \overline{B_N}\left(\frac{1}{2^i}\right).$$

Si, además, los U_i tiene la propiedad

$$(\forall y \in G)(\forall i \in \omega)y^{-1}U_i y = U_i,$$

entonces N es invariante. □

COROLARIO 1.14. *Sean G un grupo topológico y $U \in \eta(e)$, donde $\eta(e)$ es la base de vecindades de e. Entonces existe una seudonorma continua N sobre G tal que*

$$U_N = \{x \in G : N(x) < 1\} \subseteq U.$$

□

Con esto, se tiene el teorema de metrización de Birkhoff-Kakutani, la demostración se puede revisar en [14].

TEOREMA 1.15 (Birkhoff-Kakutani)**.** *Todo grupo topológico de Hausdorff G que es primero numerable posee una métrica invariante por la izquierda que genera la topología. Esto es, existe d métrica compatible tal que para todo $g, x, y \in G$*

$$d(gx, gy) = d(x, y).$$

□

En [15] se muestra una descripción del proceso de completación para grupos metrizables, haciendo énfasis en el siguiente teorema.

TEOREMA 1.16. *Sea G un grupo topológico con métrica compatible invariante por la izquierda d. Tomando*

$$D(x, y) = d(x, y) + d(x^{-1}, y^{-1}),$$

se tiene que D también es compatible con G y si $(\widehat{G}, \widehat{D})$ es la completación de (G, D), entonces la operación de multiplicación se extiende de manera única a $\widehat{G}$, así $(\widehat{G}, \widehat{D})$ es un grupo topológico. □

1.17. Grupos polacos

Un grupo polaco es un grupo topológico cuya topología es polaca. Es decir, es un grupo topológico completamente metrizable y separable. Más aún, un grupo polaco admite una métrica invariante por izquierda. Sin embargo, puede no admitir una métrica completa invariante por izquierda.

PROPOSICIÓN 1.18. *Un subgrupo H de un grupo polaco G es polaco en la topología heredada si y solo si H es cerrado.* $\square$

Como corolario del teorema anterior tenemos una forma de generar métricas compatibles y completas para grupos polacos.

COROLARIO 1.19. *Sea G un grupo polaco con d su métrica compatible invariante por izquierda. Entonces*

$$D(x,y) = d(x,y) + d(x^{-1}, y^{-1})$$

es métrica compatible y completa para G. Más aún, si d es invariante por izquierda y derecha (bi-invariante), entonces d es completa. $\square$

Ahora, juntando lo hecho en la sección de grupos cocientes, tenemos la siguiente proposición acerca del cociente de un grupo polaco.

PROPOSICIÓN 1.20. *Sean G grupo polaco y $H \subseteq G$ subgrupo cerrado. Entonces G/H es un espacio polaco con la topología cociente, por tanto, si además H es normal, G/H es un grupo polaco.* $\square$

1.21. Continuidad automática

Como se mencionó en la Introducción, el concepto de continuidad automática parte de la siguiente pregunta realizada por Cauchy: ¿Cuáles son las funciones $\pi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfacen la ecuación $\pi(x+y) = \pi(x) + \pi(y)$? Claramente, la respuesta son los homomorfismos del grupo aditivo $\mathbb{R}$. Pero la motivación de Cauchy fue conocer cuando la respuesta son solo las funciones con ley de asignación $\pi(x) = rx$ para algún $r \in \mathbb{R}$, lo que es equivalente a que todas las funciones π sean continuas.
Una pregunta más general a la anterior está dada por: ¿Cuándo un homomorfismo $\pi\colon G \to H$ entre grupos polacos es continuo? Esta pregunta es mucho más general que la primera establecida por Cauchy. Más aún, la pregunta es no trivial, pues se puede definir homomorfismos discontinuos entre grupos polacos. Para exhibir estos contraejemplos es necesario el Axioma de Elección o alguna de sus variantes (ya sea usando la existencia de bases de Hamel o existencia de ultrafiltros).

EJEMPLO 1 (Usando bases de Hamel)**.** Podemos ver a $(\mathbb{R}, +)$ y $(\mathbb{R}^2, +)$ como $\mathbb{Q}$-espacios vectoriales. Usando el Axioma de Elección, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$ tienen $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ bases de Hamel como $\mathbb{Q}$-espacios vectoriales, respectivamente. Como $|\mathcal{B}_1| = 2^{\aleph_0} = |\mathcal{B}_2|$, se sigue que $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$ son isomorfos como $\mathbb{Q}$-espacios vectoriales (esto puesto que dos $\mathbb{Q}$-espacios vectoriales son isomorfos si y solo si sus bases tienen la misma cardinalidad). Por otro lado, notemos que $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$ son isomorfos como grupos pero no topológicamente.

Ahora bien, con todas estas ideas en mente definiremos formalmente lo que significa que un grupo polaco tenga continuidad automática.

DEFINICIÓN 1.22 ([11])**.** *Sea G un grupo polaco, decimos que G tiene la propiedad de* continuidad automática *si todo homomorfismo de G a cualquier grupo separable es continuo.*

Capítulo 2

Homomorfismos medibles

Para delimitar el problema planteado en el capítulo anterior, empezaremos estableciendo restricciones sobre los homomorfismos. En este capítulo abordaremos la siguiente pregunta:
¿Si $\pi\colon G \to H$ es un homomorfismo entre grupos polacos que es definible o si se asume con ciertas propiedades de regularidad es π continua?

2.1. El caso de categoría

Para homomorfismos Baire medibles, la pregunta es simple y la solución está dada por Pettis. Antes de mostrar la solución al problema, definiremos el cuasiinterior de un conjunto y demostraremos dos lemas previos.

DEFINICIÓN 2.2. *Sea X un espacio métrico separable. Dado $A \subseteq X$ definimos el* cuasiinterior *de A en X como*

$$U(A) = \bigcup\{U : U \text{ es abierto y } U \setminus A \in \mathcal{M}(X)\},$$

donde $\mathcal{M}(X)$ es el ideal de los subconjuntos magros de X.

OBSERVACIÓN. Notemos que en la definición anterior, $U(A)$ es el abierto más grande de X en el cual A es comagro.

LEMA 2.3 (Pettis). *Supongamos que G es un grupo polaco y $A, B \subseteq G$. Entonces*

$$U(A)U(B) \subseteq AB.$$

Demostración. Notemos que si $x \in U(A)U(B)$, tomando $V = xU(B)^{-1} \cap U(A) = U(xB^{-1}) \cap U(A)$, tenemos que $V \neq \varnothing$. En efecto, tomando $x = ab$ con $a \in U(A)$ y $b \in U(B)$, por tanto $xb^{-1} = a \in xU(B)^{-1} \cap U(A)$. Con esto, como V es abierto y tanto xB^{-1} como A son comagros en V, por ende, $xB^{-1} \cap A \neq \varnothing$. Concluyendo que $x \in AB$, como deseábamos. □

Antes de demostrar el Teorema de Banach-Pettis demostraremos un lema que se usará tanto en el Teorema de Banach-Pettis como en el Teorema de Steinhaus-Weil y otros teoremas posteriores.

LEMA 2.4. *Sea G grupo topológico con la condición de la cadena numerable (ccc). Entonces para todo U vecindad de e, existe $C \subseteq G$ numerable tal que*

$$G = \bigcup_{g \in C} gU = CU.$$

Demostración. Por contradicción, supongamos que para todo $C \subseteq G$ numerable $G \neq CU$. Vamos a construir una sucesión $\{x_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ tal que

$$x_\beta \notin x_\alpha U,$$

para todo $\alpha, \beta \in \omega_1$ distintos. Esto lo haremos por recursión, tomemos $x_0 = e$ y supongamos que hemos definido x_α para todo $\alpha < \gamma$ satisfaciendo $x_\beta \notin x_\alpha U$ para todo $\beta, \alpha < \gamma$ distintos. Tomemos

$$x_\gamma \in G \setminus (\{x_\alpha : \alpha < \gamma\} \cdot U).$$

Por como se construyó la sucesión $\{x_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ cumple la propiedad antes mencionada. Tomemos ahora una vecindad V de e tal que $VV^{-1} \subseteq U$. Vamos a demostrar que la familia $\{x_\alpha V : \alpha \in \omega_1\}$ es ajena dos a dos. Por contradicción, supongamos que existen $\alpha, \beta \in \omega_1$ distintos tales que $z \in x_\beta V \cap x_\alpha V$. Con esto, $x_\alpha = x_\beta v_1 v_2^{-1}$ donde $v_1, v_2 \in V$ pero por como se tomó la vecindad V, tendríamos que $x_\alpha \in x_\beta U$, lo cual contradice la propiedad establecida al inicio de la demostración. De esta forma, hemos construido una familia no numerable de abiertos ajenos dos a dos, pero como G tiene la condición de la cadena numerable, tenemos una contradicción. □

Con estos dos lemas, estamos listos para demostrar nuestro primer teorema clásico acerca de continuidad automática.

TEOREMA 2.5 (Banach-Pettis)**.** *Todo homomorfismo Baire medible $\pi \colon G \to H$ entre grupos polacos es continuo.*

Demostración. Es suficiente demostrar que π es continua en e_G. Es decir, para todo abierto $V \subseteq H$ tal que $e_H \in V$, $\pi^{-1}(V)$ es una vecindad de e_G en G. Sea $e_H \in V \subseteq H$, podemos hallar un abierto de e_H, W, tal que $e_H \in W$ y $WW^{-1} \subseteq V$. Como π es Baire medible, $\pi^{-1}(W) \in \mathcal{BP}(G)$. Además, $\pi^{-1}(W)$ es no magro: en efecto, como W es una vecindad de e_H, tomemos U una vecindad simétrica de e_H tal que $U^2 \subseteq W$ y dado que H es separable, del lema anterior, tenemos que existe $\{h_n : n \in \omega\} \subseteq H$ tal que

$$H = \bigcup_{n \in \omega} h_n U.$$

Para cada $n \in \omega$ tal que $h_n U \cap \pi(G) \neq \varnothing$, tomamos $g_n \in G$ tal que $\pi(g_n) \in h_n U \cap \pi(G)$. Notemos que $h_n \in \pi(g_n)U^{-1}$, así

$$h_n U \subseteq \pi(g_n)U^{-1}U = \pi(g_n)U^2,$$

lo que implica que

$$\pi(G) \subseteq \bigcup_{n \in \omega} \pi(g_n)U^2 \subseteq \bigcup_{n \in \omega} \pi(g_n)W.$$

Con lo anterior, tenemos que

$$G \subseteq \bigcup_{n \in \omega} g_n \pi^{-1}(W),$$

pero si $\pi^{-1}(W)$ fuera magro, tendríamos que G es magro, lo que es imposible. Así, $U(\pi^{-1}(W))$ es un abierto no vacío y, por el Lema de Pettis,

$$e_G \in U(\pi^{-1}(W))U(\pi^{-1}(W))^{-1} \subseteq \pi^{-1}(W)\pi^{-1}(W)^{-1} \subseteq \pi^{-1}(V).$$

Por ende, $e_G \in \text{int}(\pi^{-1}(V))$. $\square$

OBSERVACIÓN.

1. Recordemos que un homomorfismo Borel medible es Baire medible, por tanto, el Teorema de Banch-Pettis se cumple, en particular, para homomorfismos Borel medibles.

2. Un resultado clásico de Solovay [13], muestra que es relativamente consistente con ZF que todos los subconjuntos de los reales son Baire medibles, lo cual implica que todos los subconjuntos de grupos polacos son Baire medibles. Así, por el teorema anterior, es consistente con ZF que todos los homomorfismos entre grupos polacos son continuos.

Como consecuencias de la continuidad automática en el caso de categoría tenemos el siguiente lema y corolario.

LEMA 2.6. *Sean G un grupo polaco y H subgrupo de G no magro tal que $H \in \mathcal{BP}(G)$. Entonces H es clopen.*

Demostración. Como G es grupo polaco, para demostrar que H es clopen, basta demostrar que H es abierto. Del Lema de Pettis, como H es no magro, tenemos que $H^{-1}H$ contiene una vecindad de e_G. Con esto, existe V vecindad de e_G tal que $V \subseteq H^{-1}H$, por tanto, $HV \subseteq H$. De esto último, tenemos que para todo $h \in H$, se sigue que $hV \subseteq H$, como hV es una vecindad abierta en H, por ende, H es abierto. Concluyendo que H es clopen. $\square$

PROPOSICIÓN 2.7. *En el teorema clásico de continuidad automática (Banach-Pettis) si además $\varphi(G)$ es no magro, entonces φ es abierto.*

Demostración. En primer lugar, notemos que $\varphi(G) \in \mathcal{BOR}(H)$. Para ello, tomemos $G_0 = \varphi^{-1}(e_H)$, de esta forma, tenemos que G_0 es cerrado, puesto que φ es continua. Además, G_0 es normal, por ende, G/G_0 es un grupo polaco. Con esto en mente, definamos:

$$\begin{aligned} \overline{\varphi}\colon G/G_0 &\longrightarrow H \\ gG_0 &\longmapsto \overline{\varphi}(gG_0) = \varphi(g). \end{aligned}$$

Notemos que la función anterior está bien definida. En efecto, sean $g, h \in G$

$$\begin{aligned} gG_0 = hG_0 &\iff gh^{-1} \in G_0 \\ &\iff \varphi(gh^{-1}) = e_H \\ &\iff \varphi(g)\varphi(h)^{-1} = e_H \\ &\iff \varphi(g) = \varphi(h). \end{aligned}$$

De lo anterior, también tenemos que $\overline{\varphi}$ es inyectiva. Ahora, veamos que $\overline{\varphi}$ es una función continua, para ello notemos que como π es el mapeo cociente, $\overline{\varphi}$ es continua si y solo si $\overline{\varphi} \circ \pi$ es continua, pero $\overline{\varphi} \circ \pi = \varphi$ que es continua, teniendo así lo deseado.

Por otro lado, dado que $\overline{\varphi}$ es continua e inyectiva, del Teorema de Lusin-Souslin [1], junto con el hecho de que G/G_0 es polaco (en particular es boreliano), tenemos que $\overline{\varphi}(G/G_0) = \varphi(G) \in \mathcal{BOR}(H)$. Además, dado que todo boreliano tiene la propiedad de Baire, concluimos que $\varphi(G) \in \mathcal{BP}(H)$. Más aún, como $\varphi(G)$ es no magro, del lema anterior, $\varphi(G)$ es clopen, en particular, $\varphi(G)$ es polaco.
Ahora, veamos que

$$\overline{\varphi^{-1}} \colon \varphi(G) \to G/G_0$$

es Baire medible. En efecto, sea $W \subseteq G/G_0$ abierto, vamos a demostrar que $\overline{\varphi^{-1}}^{-1}(W)$ tiene la propiedad de Baire en H, lo que es equivalente a demostrar que $\overline{\varphi}(W) \in \mathcal{BP}(H)$. Nuevamente, como $\overline{\varphi}$ es continua e inyectiva, del Teorema de Lusin-Souslin, tenemos que $\overline{\varphi}(W) \in \mathcal{BOR}(H)$, teniendo así lo deseado.
Por último, por el Teorema de continuidad automática de Banach-Pettis, tenemos que $\overline{\varphi^{-1}}$ es continua, es decir, $\overline{\varphi}$ es abierto. Concluyendo así que $\varphi \colon G \to \varphi(G)$ es abierto, pues si $E \subseteq G$ abierto, como π es un mapa abierto, se sigue que

$$\varphi(E) = \overline{\varphi}(\pi(E)).$$ □

2.8. El caso de medida

Para el caso de medida, empezaremos enunciando algunas definiciones que usaremos a lo largo de la sección. Luego, estableceremos condiciones sobre el grupo polaco de tal forma que se tenga continuidad automática.

DEFINICIÓN 2.9. *Sea X espacio topológico. Una* medida de Borel *sobre X es una medida sobre $(X, \mathcal{BOR}(X))$.*

DEFINICIÓN 2.10. *Sea G un grupo topológico. Una* medida izquierda de Haar *(respectivamente derecha) sobre G es una medida μ Borel regular no nula sobre G tal que $\mu(gA) = \mu(A)$ (resp. $\mu(Ag) = \mu(A)$) para todo $g \in G$ y todo subconjunto medible A de G.*

OBSERVACIÓN. Gleason en [3] demuestra la existencia y unicidad de una medida izquierda de Haar para todo grupo topológico localmente compacto.

Con esto, estamos listos para probar un primer teorema que involucra la medida izquierda de Haar.

TEOREMA 2.11 (Steinhaus-Weil). *Supongamos que G es grupo polaco localmente compacto con medida izquierda de Haar λ. Entonces para todo $\lambda-$medible $A \subseteq G$ de medida positiva tenemos que AA^{-1} es vecindad de e.*

Demostración. Por la regularidad interior y exterior de λ existe un compacto K y un abierto U tal que

$$K \subseteq A \subseteq U \quad \text{y} \quad \lambda(U) < 2\lambda(K).$$

Ahora, tomemos un abierto V de e tal que $VK \subseteq U$. En efecto, como $K \subseteq U$, para cada $k \in K$, existe W_k una vecindad de e tal que $W_k k \subseteq U$. Más aún, existe V_k una

[1]Sea $f \colon X \to Y$ una función Borel entre espacios polacos. Si $A \in \mathcal{BOR}(X)$ y $f|_A$ es una función inyectiva, entonces $f(A) \in \mathcal{BOR}(Y)$, se invita al lector a revisar [6] para su demostración.

vecindad de e tal que $V_k V_k \subseteq W_k$. Así, la familia $\{V_k k : k \in K\}$ es un recubrimiento abierto de K. Dado que K es compacto, tomamos $V_{k_1} k_1, \ldots, V_{k_n} k_n$. Definamos $V = V_{k_1} \cap V_{k_2} \cap \ldots \cap V_{k_n}$ y notemos:

$$\begin{aligned} VK &\subseteq V[(V_{k_1} k_1) \cup (V_{k_2} k_2) \cup \ldots \cup (V_{k_n} k_n)] \\ &\subseteq (V_{k_1}^2 k_1) \cup (V_{k_2}^2 k_2) \cup \ldots \cup (V_{k_n}^2 k_n) \\ &\subseteq (W_{k_1} k_1) \cup (W_{k_2} k_2) \cup \ldots \cup (W_{k_n} k_n) \subseteq U. \end{aligned}$$

Así, si $g \in V$, tenemos que $gK \subseteq U$ con medida $\lambda(gK) = \lambda(K)$ y, como $\lambda(K) > \dfrac{\lambda(U)}{2}$, tenemos que $K \cap gK \neq \varnothing$. Así, $g \in KK^{-1} \subseteq AA^{-1}$, concluyendo que $V \subseteq AA^{-1}$. □

Este teorema es una generalización del clásico teorema de Steinhaus para conjuntos de reales Lebesgue medibles de medida positiva y es la herramienta principal para demostrar continuidad automática en grupos polacos localmente compactos. Para esto, primero daremos algunas definiciones necesarias.

DEFINICIÓN 2.12. *Un conjunto $A \subseteq X$ donde X es un espacio polaco, se dice que es* universalmente medible *si es μ-medible para toda μ medida de Borel σ-finita sobre X. Una función $f\colon X \to Y$ entre espacios polacos es* universalmente medible *si f es μ-medible para toda μ medida de Borel σ-finita sobre X.*

Con esto, estamos listos para obtener nuestro resultado de continuidad automática en grupos polacos localmente compactos.

COROLARIO 2.13. *Todo homomorfismo universalmente medible de un grupo polaco localmente compacto G en un grupo polaco H es continuo.*

Demostración. Sean $\varphi\colon G \to H$ universalmente medible y V una vecindad de e_H. Como G es localmente compacto, tomamos λ su medida izquierda de Haar. Por la medibilidad universal, $\varphi^{-1}(V) \subseteq G$ es $\lambda-$medible. Si $\varphi^{-1}(V)$ tiene medida positiva, por el teorema anterior, $\varphi^{-1}(V)\varphi^{-1}(V)^{-1}$ es vecindad de e_G. Teniendo lo deseado. Ahora, veamos que no es posible que $\varphi^{-1}(V)$ tenga medida nula. Supongamos que su medida fuera nula, usando un argumento similar al Teorema 2.5, se tiene que

$$G = \bigcup_{n \in \omega} g_n \varphi^{-1}(V),$$

para algún $\{g_n : n \in \omega\} \subseteq G$. Pero, con esto tendríamos que $\lambda(G) = 0$, lo que es imposible. □

El demostrar continuidad automática para grupos localmente compactos es relativamente sencillo usando las ideas de Weil, pero lastimosamente los únicos grupos topológicos que admiten medidas de Borel $\sigma-$finitas, invariantes y no cero son los grupos polacos localmente compactos. En efecto, si G es un grupo polaco con una medida λ como antes, por la regularidad interna y $\sigma-$finitud, existe $M \subseteq G$ un $\sigma-$compacto tal que $\lambda(G \setminus M) = 0$. Así, si $g \in G$, tenemos que $\lambda(gM) = \lambda(M) > 0$ y, por ende, $gM \cap M \neq \varnothing$. Esto implica que $g \in MM^{-1}$, lo que nos dice que $G = MM^{-1}$ es un grupo polaco $\sigma-$compacto. Por el Teorema de Categoría de Baire, tenemos que G es localmente compacto.

Capítulo 3

Propiedad de Steinhaus

En este capítulo abordaremos una propiedad importante para hablar de continuidad automática. La Propiedad de Steinhaus relaciona conjuntos *σ-syndetic* y el grupo polaco. Se demostrará que todo grupo polaco con dicha propiedad tiene continuidad automática. Más aún, definiremos una condición fuerte de grupos polacos con muchas implicaciones importantes, una de ellas la Propiedad de Steinhaus y, por ende, continuidad automática.

DEFINICIÓN 3.1. *Un subconjunto A de un grupo G se dice que es σ-syndetic si existe $(g_n)_{n\in\omega} \subseteq G$ tal que $G = \bigcup\limits_{n\in\omega} g_n A$. Es decir, A cubre G por una cantidad numerable de traslaciones de A.*

DEFINICIÓN 3.2. *Un grupo polaco G tiene la* Propiedad de Steinhaus *si existe $k \geq 1$ tal que para todo $A \subseteq G$ simétrico y σ-syndetic que contiene a e_G, se tiene que*

$$e_G \in Int(A^k).$$

Al número k se le conoce como el exponente de Steinhaus de G.

Con estas definiciones, estamos listos para demostrar que la Propiedad de Steinhaus implica continuidad automática.

TEOREMA 3.3 (Rosendal-Solecki [11])**.** *Si G es un grupo polaco con la Propiedad de Steinhaus, entonces G tiene continuidad automática.*

Demostración. Sean H grupo separable y $\pi\colon G \to H$ un homomorfismo. Vamos a demostrar que π es continuo en e_G. Sea $U \subseteq H$ vecindad abierta de e_H, dado que G tiene la propiedad de Steinhaus, existe $k \geq 1$ testigo de la Propiedad de Steinhaus y podemos hallar V vecindad abierta simétrica de e_H tal que

$$e_H \in V \subseteq V^{2k} \subseteq U \subseteq H.$$

Como H es separable, del Lema 2.4, se tiene que

$$H = \bigcup_{n\in\omega} h_n V,$$

para algún conjunto numerable $\{h_n : n \in \omega\} \subseteq H$. Ahora, para cada $n \in \omega$ tal que $h_n V \cap \pi(G) \neq \varnothing$, tomamos $g_n \in G$ tal que $\pi(g_n) \in h_n V \cap \pi(G)$. Notemos que

$$h_n V \subseteq \pi(g_n) V^{-1} V = \pi(g_n) V^2,$$

lo que implica que

$$\pi(G) \subseteq \bigcup_{n\in\omega} \pi(g_n)V^2.$$

Con lo anterior, tenemos que

$$G \subseteq \bigcup_{n\in\omega} g_n\pi^{-1}(V^2),$$

es decir, $\{g_n\pi^{-1}(V^2)\}$ recubre G. De esta forma, $W = \pi^{-1}(V^2)$ es simétrico y σ-*syndetic* y como G tiene la Propiedad de Steinhaus, $e_G \in Int(W^k)$. Por otro lado, $\pi(W^k) \subseteq V^{2k} \subseteq U$ y, por ende, $e_G \in Int(\pi^{-1}(U))$ lo que implica que π es continua en e_G. □

OBSERVACIÓN. Notemos que para tener el resultado de la proposición anterior, basta que H sea $\aleph_0$ *acotado*, esto es, que cualquier vecindad de e_H cubra H por una cantidad numerable de traslaciones (ver [14]).

En [11], se demuestra que los siguientes grupos tienen Propiedad de Steinhaus.

EJEMPLO 2.

- $Homeo(2^\omega)$ con la topología compacto abierta tiene la Propiedad de Steinhaus, además su exponente de Steinhaus es 28.
- $Homeo(2^\omega)^\omega$ con la topología producto es Steinhaus y su exponente es 108.

Como una consecuencia directa del teorema anterior, tenemos el siguiente corolario.

COROLARIO 3.4. *Sean G y H grupos polacos. Si G tiene la Propiedad de Steinhaus y existe $\varphi\colon G \to H$ homomorfismo tal que $\varphi(G)$ es no magro, entonces $\varphi(G)$ tiene la Propiedad de Steinhaus.*

Demostración. Por la proposición anterior, φ es una función continua, en particular, es Baire medible. Además, como $\varphi(G)$ es no magro, por la Proposición 2.7, φ es un mapeo abierto.
Ahora, sea $W \subseteq H$ simétrico que contiene a e_H y σ-*syndetic* para $\varphi(G)$, no es difícil ver que $\varphi^{-1}(W)$ es simétrico y σ-*syndetic* para G puesto que $\varphi(G)$ es separable y como G tiene la Propiedad de Steinhaus para G, se sigue que $\varphi(G)$ tiene la Propiedad de Steinhaus con el mismo exponente de G. □

OBSERVACIÓN. Notemos que si φ es sobreyectiva en el corolario anterior, entonces H tiene la Propiedad de Steinhaus.

Ahora, vamos a demostrar que la Propiedad de Steinhaus es una propiedad hereditaria para subgrupos abiertos.

LEMA 3.5. *Sean G un grupo polaco con la Propiedad de Steinhaus y H un subgrupo abierto de G. Entonces H tiene la Propiedad de Steinhaus.*

Demostración. Sea $W \subseteq H$ un conjunto simétrico, σ-*syndetic* para H y que contiene a e. Con esto, existe $(h_n)_{n\in\omega} \subseteq H$ tal que

$$H = \bigcup_{n\in\omega} h_nW.$$

Por otro lado, como H es una vecindad abierta de e y G es separable, del Lema 2.4, existe $(g_n)_{n\in\omega} \subseteq G$ tal que
$$G = \bigcup_{n\in\omega} g_n H.$$
Ahora, vamos a definir la siguiente función:
$$\begin{aligned}\psi\colon \omega\times\omega &\longrightarrow G\\ (n,m) &\longmapsto \psi((n,m)) = g_n h_m.\end{aligned}$$
Notemos que $Img(\psi)$ es numerable, por tanto, podemos tomar $\{\psi_n : n \in \omega\}$ una enumeración de $Img(\psi)$. Con esto, tenemos lo siguiente:
$$\begin{aligned}G &= \bigcup_{n\in\omega} g_n H\\ &= \bigcup_{n\in\omega} g_n \left(\bigcup_{m\in\omega} h_m W\right)\\ &= \bigcup_{n\in\omega} \left(\bigcup_{m\in\omega} g_n h_m W\right)\\ &= \bigcup_{n\in\omega} \psi_n W.\end{aligned}$$
Esto nos dice que W es σ-*syndetic* para G y dado que G tiene la Propiedad de Steinhaus, existe $k \geq 1$, exponente de Steinhaus, tal que $e \in Int(W^k)$. □

Siguiendo la línea de las técnicas que fueron usadas para demostrar que varios grupos polacos tienen la Propiedad de Continuidad Automática, vamos a definir una propiedad fuerte que fue introducida por primera vez por Hodges et al. en [4] y, posteriormente, formalizada por Kechris-Rosendal en [7].

Definición 3.6. *Sea G un grupo polaco que actúa sobre un espacio polaco X, para cada $n \in \omega$ vamos a definir la* acción diagonal $G \curvearrowright X^n$ *por*
$$g\cdot(x_1,\ldots,x_n) = (g\cdot x_1,\ldots,g\cdot x_n).$$
Diremos que la acción tiene ample generics *si para todo $n \geq 1$ existe una órbita comagra en G^n bajo la acción diagonal de conjugación de G.*

Esta definición nos dice que los grupos polacos que tienen *ample generics* son grupos que tienen clases de conjugación "grandes". En [7], se demuestra que los grupos polacos que tienen *ample generics*, tienen también la Propiedad de Steinhaus con exponente $k = 10$. A continuación se enlista algunos grupos que tienen *ample generics*:

Ejemplo 3.

- S_∞.
- $Aut(\omega^\omega)$.

Esto nos daría la idea que los grupos que tienen *ample generics* son grupos "grandes", lo cual no es cierto. Existen grupos topológicos "grandes" que no tienen *ample*

generics, pero sí tienen la Propiedad de Steinhaus. Tal es el caso de $Iso(\mathbb{U})$ el grupo de las isometrías del espacio universal de Urysohn dotado de la topología de la convergencia puntual. $Iso(\mathbb{U})$ es un grupo polaco universal para los grupos topológicos segundo numerables, es decir, todo grupo topológico segundo numerable se encaja en $Iso(\mathbb{U})$ como subgrupo topológico. Kechris afirmó que $Iso(\mathbb{U})$ tiene todas sus clases de conjugación magras (la demostración se puede encontrar en [2]), concluyendo que no tiene *ample generics*. Por otro lado, al asociarle a $Iso(\mathbb{U})$ una estructura métrica se demuestra que éste tiene la Propiedad de Steinhaus y, por ende, continuidad automática (la demostración se puede encontrar en [12]).
Una pregunta bastante natural que surge estudiando estas propiedades es: ¿Si la Propiedad de Steinhaus es la propiedad intrínseca en un grupo polaco que es equivalente a tener continuidad automática en dicho grupo lo que es de naturaleza extrínseca?
En el siguiente capítulo del presente trabajo revisaremos las posibles ideas y caminos que se pueden tomar para responder dicha pregunta.

Capítulo 4

Relación entre continuidad automática y Propiedad de Steinhaus

Es conocido y se dio la prueba en el capítulo anterior que todo grupo polaco que tiene Propiedad de Steinhaus también tiene continuidad automática, pero aún es una pregunta abierta si todo grupo polaco que tiene continuidad automática también tiene la Propiedad de Steinhaus. En este capítulo, presentamos algunos resultados parciales obtenidos al abordar dicha pregunta. Las líneas de investigación que han surgido de estos resultados aún se encuentran en progreso, además de tener una estrecha relación con otras preguntas abiertas relacionadas con el tema de continuidad automática.

DEFINICIÓN 4.1. *Sean G un grupo polaco y H un grupo topológico separable, diremos que G tiene* continuidad automática para H *si todo homomorfismo $\varphi\colon G \to H$ es continuo.*

Para hacer uso de la continuidad automática y ganar información a partir de esta propiedad, vamos a definir el subgrupo conmutador de un grupo. El subgrupo conmutador de un grupo es de interés y estudio para demostrar la propiedad de *ample generics*, así también como para el estudio de continuidad automática.

DEFINICIÓN 4.2. *Sean G un grupo y $g, h \in G$, definimos el* conmutador *de g, h como $[g, h] = g^{-1}h^{-1}gh$. Si denotamos por S al conjunto de todos los conmutadores de G, definimos el subgrupo conmutador de G como:*

$$G' = [G, G] = \langle S \rangle.$$

OBSERVACIÓN. El subgrupo conmutador de un grupo es un subgrupo normal. Más aún, G' es el subgrupo más pequeño tal que G/G' es abeliano. A G/G' le conocemos como la abelianización de G y lo denotaremos por G^{ab}.

Recursivamente, podemos definir los subgrupos conmutadores para ordinales.

DEFINICIÓN 4.3. *Sea G un grupo. Para un ordinal α, definimos el α-ésimo subgrupo conmutador de G, denotado por $G^{(\alpha)}$, como:*

- $G^{(0)} = G$;
- $G^{(\alpha+1)} = [G^{(\alpha)}, G^{(\alpha)}]$, *para todo ordinal α;*

- $G^{(\alpha)} = \bigcap\limits_{\gamma<\alpha} G^{(\gamma)}$*, para todo ordinal límite* $\alpha \neq 0$.

OBSERVACIÓN. Diremos que un grupo es *algebraicamente perfecto* cuando $G = G'$. Además, diremos que $\alpha \in \mathrm{OR}$ es el *rango perfecto algebraico* de G si α es el mínimo ordinal tal que $G^{(\alpha)}$ es algebraicamente perfecto. Y con esto, llamaremos el *núcleo perfecto algebraico* a $G^{(\alpha)}$.

Ahora, vamos a explorar la propiedad de continuidad automática cuando el grupo topológico separable es $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Para el siguiente lema recurriremos a la topología de Bohr, para un estudio detallado de dicha topología se invita al lector a revisar [1, Capítulo 9.]

LEMA 4.4. *Sea G un grupo polaco con la propiedad de continuidad automática para $\mathbb{T}$. Entonces G' es clopen.*

Demostración. Consideremos a G^{ab} con la topología de grupo τ_q inducida por el mapeo cociente $q\colon G \to G/G'$. Notemos que $\tau_{Bohr} \subseteq \tau_q$. En efecto, como τ_{Bohr} es la topología de grupo más pequeña que hace continuo a todo homomorfismo $\varphi\colon G^{ab} \to \mathbb{T}$, basta demostrar que todo homomorfismo $\varphi\colon G^{ab} \to \mathbb{T}$ con la topología τ_q es continuo. Tomemos $\varphi\colon G^{ab} \to \mathbb{T}$ con φ cualquier homomorfismo. Notemos que $\varphi \circ q$ es continua, pues G tiene la propiedad de continuidad automática para $\mathbb{T}$.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi\circ q"] \arrow[d, "q"] & \mathbb{T} \\ G^{ab} \arrow[ur, "\varphi"] & \end{tikzcd}$$

Por otro lado, $\varphi\colon G^{ab} \to \mathbb{T}$ es continua con respecto a la topología τ_q, pues si $U \subseteq \mathbb{T}$ es abierto, por la propiedad de continuidad automática $q^{-1}(\varphi^{-1}(U))$ es abierto en G, lo que implica que $\varphi^{-1}(U) \in \tau_q$. Con esto, hemos demostrado que $\tau_{Bohr} \subseteq \tau_q$.
Ahora bien, como la topología de Bohr es una topología de grupo Hausdorff, tenemos que $\{q(e_G)\}$ es τ_q-cerrado, lo que implica que $G' = q^{-1}(\{q(e_G)\})$ es subgrupo cerrado. Con esto, de la Proposición 1.20, (G^{ab}, τ_q) es un grupo polaco. Por otro lado, dado que $\tau_{Bohr} \subseteq \tau_q$ y τ_{Bohr} no tiene sucesiones convergentes no triviales (ver [1, Teorema 9.9.30]), tenemos que τ_q es una topología discreta y, por ende, G^{ab} es numerable. Más aún, de la Proposición 1.7, G' es abierto, lo que implica que G' es clopen. □

OBSERVACIÓN.

1. Notemos que el lema anterior nos dice que si un grupo polaco es abeliano con continuidad automática, el grupo mencionado es necesariamente numerable y discreto. Esto es, el fenómeno de continuidad automática (no trivial) en grupos polacos es de naturaleza no abeliana.

2. Más aún, si tenemos G un grupo polaco conexo con continuidad automática, G debe ser un grupo algebraicamente perfecto ($G = G'$).

La idea de la procedencia del Lema 4.4 fue pensado en un primer intento para obtener información para demostrar la equivalencia entre continuidad automática y Propiedad de Steinhaus. En ese primer intento, se notó que usando el lema mencionado podemos clasificar a los grupos con Propiedad de Steinhaus dependiendo de su comportamiento con los derivados. En virtud de esto, tenemos el siguiente teorema que nos entrega una "especie de dicotomía" para grupos polacos con Propiedad de Steinhaus.

TEOREMA 4.5. *Si G es un grupo polaco con Propiedad de Steinhaus, entonces*

1. *El núcleo perfecto algebraico es clopen en G, o bien*

2. *G admite un cociente isomorfo, algebraicamente y continuo a un subgrupo de S_∞.*

Demostración. Sea α el rango perfecto algebraico de G. Vamos a demostrar lo deseado por casos:

1. Si $G^{(\alpha)}$ es clopen, tenemos lo deseado.

2. Ahora, supongamos que el núcleo perfecto de G no es clopen. Sea

$$\Gamma = \{\gamma \leq \alpha : \forall \beta \leq \gamma \ G^{(\beta)} \text{ es cerrado y } G^{(\gamma)} \text{ es nunca denso}\}.$$

Vamos a demostrar que $\Gamma \neq \varnothing$. Nuevamente, procederemos la demostración por casos:

- Supongamos que para todo $\gamma \leq \alpha$, $G^{(\gamma)}$ es cerrado. En particular, $G^{(\alpha)}$ es cerrado, como $G^{(\alpha)}$ no es clopen, tenemos que $G^{(\alpha)}$ es cerrado nunca denso. Con esto, $\alpha \in \Gamma$.

- Ahora, supongamos que existe $\theta_0 \leq \alpha$ tal que $G^{(\theta_0)}$ no es cerrado. Tomemos

$$\delta = \min\{\theta \leq \alpha : G^{(\theta)} \text{ no es cerrado}\}.$$

Notemos que δ es un ordinal sucesor. En efecto, si δ no fuera sucesor, por la minimalidad de δ y la definición de $G^{(\delta)}$, tendríamos que $G^{(\delta)}$ sería cerrado al ser intersección de cerrados. Con esto, existe $\gamma < \delta$ tal que $\delta = \gamma + 1$. Ahora, notemos que $G^{(\gamma)}$ es cerrado nunca denso, pues de no serlo tendríamos que $G^{(\gamma)}$ sería clopen. Dado que G tiene la Propiedad de Steinhaus y del Lema 3.5, tendríamos que $G^{(\gamma)}$ también tendría la Propiedad de Steinhaus, por ende, tendría continuidad automática. Luego, del Lema 4.4, se tendría que $G^{(\gamma+1)} = G^{(\delta)}$ sería clopen, lo cual contradice que $G^{(\delta)}$ no es cerrado. Por tanto, tenemos que $\gamma \in \Gamma$.

Con esto, tomemos

$$\beta = \min \Gamma.$$

Ahora, notemos que β es un ordinal límite. En efecto, por contradicción, supongamos que $\beta = \gamma + 1$ con $\gamma < \beta$. De la definición de β y como $\gamma < \beta$, se sigue que $G^{(\gamma)}$ es clopen en G. Ahora, como $G^{(\gamma)} \leq G$ y G tiene la Propiedad de Steinhaus, por el Lema 3.5, $G^{(\gamma)}$ también tiene la Propiedad de Steinhaus.

Por otro lado, del Teorema 3.3, tenemos que $G^{(\gamma)}$ tiene la propiedad de continuidad automática, en particular, $G^{(\gamma)}$ tiene la propiedad de continuidad automática para $\mathbb{T}$ y usando el Lema 4.4, tenemos que $(G^{(\gamma)})' = G^{(\gamma+1)} = G^{(\beta)}$ es clopen en $G^{(\gamma)}$, luego también clopen en G, contradiciendo el hecho que $G^{(\beta)}$ es nunca denso en G.

Por otro lado, notemos que $\mathrm{cf}(\beta) \in \omega_1$, donde $cf(\beta)$ representa la cofinalidad de β. Esto se debe a que $(G^{(\gamma)})_{\gamma<\beta}$ forma una sucesión estrictamente decreciente de subgrupos clopen de G. De esta forma podemos construir una sucesión $(U_\gamma)_{\gamma<\beta}$ de abiertos ajenos por pares en G. Pero como G es separable, $\mathrm{cf}(\beta)$ necesariamente es numerable. Con esto último, podemos tomar una sucesión creciente de ordinales $(\beta_n)_{n\in\omega}$ tales que $\beta = \sup_{n\in\omega} \beta_n$. Además, cada $G^{(\beta_n)}$ es clopen en G.

El cociente a encajar en S_∞ es $G_\beta := G/G^{(\beta)}$. Para esto, notemos que G_β admite una sucesión decreciente de subgrupos abiertos, esto debido a que G admite una sucesión decreciente de subgrupos abiertos

$$G^{(\beta)} \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq G^{(\beta_{k+1})} \trianglelefteq G^{(\beta_k)} \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq G^{(\beta_1)} \trianglelefteq G^{(0)} = G.$$

Así, tomando $\left(q(G^{(\beta_n)})\right)_{n\in\omega}$ donde q es el mapeo cociente, que es un mapeo abierto, tenemos lo indicado. Más aún, tenemos que

$$\bigcap_{n\in\omega} q(G^{(\beta_n)}) = \{q(e_G)\}.$$

Esto último nos indica, que al tomar $\tau_{<>}$ la topología sobre G_β generada por la sucesión decreciente de subgrupos abiertos $\left(q(G^{(\beta_n)})\right)_{n\in\omega}$, $\tau_{<>}$ es una topología de Hausdorff, primera numerable. Además, $(G_\beta, \tau_{<>})$ es separable, puesto que $\tau_{<>} \subseteq \tau_q$, donde τ_q es la topología cociente inducida por q y (G_β, τ_q) forma un grupo polaco no discreto. Como $\tau_{<>}$ es primero numerable, por el Teorema de Birkhoff-Kakutani, $(G_\beta, \tau_{<>})$ también es metrizable y, como $\tau_{<>}$ es separable, también es segundo numerable.

Ahora bien, lo que buscamos es poder encajar de forma algebraica (G_β, τ_q) en S_∞. Para esto, tomemos $\mathcal{N} = \{H_n := q(G^{\beta_n}) \leq G_\beta : n \in \omega\}$, la cual es una base del neutro en $(G_\beta, \tau_{<>})$. Notemos que como las clases laterales izquierdas de H_n inducen una partición de G_β en abiertos, así al tomar

$$\mathcal{B} := \{gH : H \in \mathcal{N}, g \in G_\beta\},$$

esta forma una base numerable de la topología $\tau_{<>}$ cerrada bajo multiplicación izquierda por elementos del grupo G_β. Sea $\{U_n : n \in \omega\}$ una enumeración de $\mathcal{B}$, se tiene que para todo $n \in \omega$ y todo $g \in G_\beta$ existe $m < \omega$ tal que $gU_n = U_m$. Definamos $\phi : G_\beta \to S_\infty$ de tal modo que $\phi(g)(n) = m$ si y solo si $gU_n = U_m$, para $n \in \omega$. La función $\phi(g)$ está bien definida y es trivialmente biyectiva para todo $g \in G_\beta$. Por lo tanto, ϕ está bien definida. Es fácil notar que se trata de un homomorfismo de grupos. Tomemos $g \in G_\beta \setminus \{e_{G_\beta}\}$. Sea $n \in \omega$ tal que $e_{G_\beta} \in U_n$ y $g \notin U_n$. Entonces $\phi(g)(n) \neq n$. Se concluye que el núcleo de ϕ es trivial y, por lo tanto, es un homomorfismo inyectivo. Con esto, tenemos que

$$G_\beta \hookrightarrow S_\infty \text{ de forma algebraica.}$$

Por último, notemos que el encaje anterior es continuo, esto se debe a que G tiene Propiedad de Steinhaus y del Corolario 3.4, G_β también tiene Propiedad de Steinhaus y, por ende, tiene continuidad automática. $\square$

OBSERVACIÓN. Notemos que en el resultado anterior, usando el Teorema de Lusin-Souslin, el cociente encajado en S_∞ es un conjunto Borel de S_∞.

PREGUNTA ABIERTA 4.6. *Con todo lo antes mencionado, podemos preguntarnos lo siguiente: ¿Si partimos de G un grupo polaco con continuidad automática, $G^{(\beta)}$ cerrado nunca denso y G_β grupo polaco con Propiedad de Steinhaus, entonces G tiene Propiedad de Steinhaus?*

Volviendo a los intentos para demostrar la equivalencia entre las propiedades deseadas, notemos que el Lema 4.4 es solo una primera intención de explorar la propiedad de continuidad automática, en este caso, para el grupo topológico $\mathbb{T}$. Se podría cambiar de grupo topológico separable para estudiar que otras propiedades interesantes arroja la propiedad de continuidad automática. Para hacer esto es necesario tomar un grupo topológico que nos asegure la existencia de varios homomorfismos. En el caso de $\mathbb{T}$ podemos asegurarnos esto por como se define la topología de Bohr. Más aún, se podría intentar construir una familia de seudonormas para con ellas generar una topología de grupo separable.
Ahora, usando las técnicas de las seudonormas y las ideas dadas por el Corolario 1.14, un posible camino para abordar la equivalencia entre la Propiedad de Steinhaus y la propiedad de continuidad automática está dado por la siguiente pregunta.

PREGUNTA ABIERTA 4.7. *Sea G grupo polaco con continuidad automática. Entonces existe $k \geq 1$ tal que para todo $A \subseteq G$ simétrico y σ-syndetic con $e \in A$ existe $N \colon G \to \mathbb{R}$ seudonorma tal que $U_N \subseteq A^k$.*

Conclusiones

1. La propiedad de continuidad automática es una propiedad que puede ser explorada no solo para describir la estructura algebraica del grupo polaco, también tiene otras consecuencias interesantes como la unicidad de la topología de grupo polaco, la propiedad del índice pequeño, la amenabilidad extrema, etc. (Ver [7, 11]).

2. Mann en [9] plantea que además de desconocer la continuidad automática para el grupo $Diff(M)_0^r$, cuando $0 < r < \infty$, se desconoce también si $Diff(M)_0^r$ es algebraico perfecto cuando $r = dim(M) + 1$. Más aún, no se sabe si $Diff(S^1)_0^2$ es algebraico perfecto ; en caso de que $Diff(S^1)_0^2$ tenga continuidad automática, del Lema 4.4, tendríamos que tiene que ser algebraico perfecto.

   Por otro lado, en el mismo artículo, Mann afirma que también se desconoce la simplicidad (un grupo es simple si no tiene subgrupos normales no triviales) de $Diff(M)_0^r$ cuando $r = dim(M) + 1$. Nuevamente, si estos grupos llegaran a tener continuidad automática, al responder la perfección algebraica de los grupos por medio del Lema 4.4, también se respondería la simplicidad de los grupos.

3. En el Teorema 4.5, al decir que se da una "especie de dicotomía" nos referimos a que los grupos polacos con Propiedad de Steinhaus deben cumplir al menos una de las condiciones planteada. El grupo simétrico S_∞ cumple las dos condiciones. Por otro lado, sería deseado encontrar un ejemplo de un grupo polaco que cumpla la segunda condición, pero no la primera.

4. Igualmente, el Teorema 4.5 nos sugiere intentar demostrar la equivalencia entre continuidad automática y Propiedad de Steinhaus para subgrupos del grupo S_∞.

5. La propiedad de *ample generics*, junto con las técnicas usadas (por ejemplo en [12, 7, 8, 11]) para demostrar que varios grupos polacos tienen continuidad automática sugieren que una buena idea es empezar a estudiar más a fondo el subgrupo conmutador de los grupos polacos.

6. Al responder la Pregunta Abierta 4.7, se responde la equivalencia entre la propiedad de Steinhaus y la continuidad automática, pues U_N sería un abierto de la identidad siempre que N fuera continua; sin embargo, es de interés encontrar tal seudonorma aunque no fuera continua.

7. La continuidad automática es una herramienta poderosa para tener consecuencias interesantes sobre la estructura, ya sea algebraica o topológica, de un grupo polaco. La continuidad automática aún no está muy estudiada del todo, tiene muchas aplicaciones y consecuencias interesantes en otras áreas de la matemática, aún hay más preguntas relacionadas con el tema por estudiar.

Bibliografía

[1] Arhangel'skii, A. y Tkachenko, M. *Topological groups and related structures*. Atlantis Press, Francia, 2008.

[2] Eli Glasner, B. W. Topological groups with rokhlin properties. *Colloquium Mathematicae*, 110:51–80, 2008.

[3] Gleason, J. Existence and Uniqueness of Haar Measure. *University of Chicago*, 30, 2010.

[4] Hodges, W., Hodkinson, I. M., Lascar, D., y Shelah, S. The small index property for ω-stable ω-categorical structures and for the random graph. *Journal of The London Mathematical Society-second Series*, págs. 204–218, 1993.

[5] Kallman, R. The topology of compact simple lie groups is essentially unique. *Advances in Mathematics*, 12:416–417, 1974.

[6] Kechris, A. *Classical Descriptive Set Theory*. Springer-Verlag, Estados Unidos, 1995.

[7] Kechris, A. S. y Rosendal, C. Turbulence, amalgamation, and generic automorphisms of homogeneous structures. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 94, 2004.

[8] Mann, K. Automatic continuity for homeomorphism groups of noncompact manifolds. *arXiv: Geometric Topology*, 2020.

[9] Mann, K. The structure of homeomorphism and diffeomorphism groups. *Notices of the American Mathematical Society*, 2021.

[10] Mann, K. Automatic continuity for homeomorphism groups and applications. *Geometry and Topology*, 20(5):3033–3056, 2016.

[11] Rosendal, C & Solecki, S. Automatic continuity of homomorphisms and fixed points on metric compacta. *Israel Journal of Mathematics*, 162:349–371, 2007.

[12] Sabok, M. Automatic continuity for isometry groups. *Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu*, 21:2253 – 2255, 2021.

[13] Solovay, R. M. A model of set-theory in which every set of reals is lebesgue measurable. *Annals of Mathematics*, 92(1):1–56, 1970.

[14] Tkachenko, M. *Grupos topológicos*. SEP, México, 1997.

[15] Topsoe, F. Hoffman-Jorgensen, J. Analytic spaces and their Application in Analytic Sets. *Academic Press, London*, págs. 317–403, 1980.