



UNIVERSIDAD MICHOACANA  
DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO



FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA  
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

**MODELADO DE SISTEMAS LINEALES VARIANTES  
EN EL TIEMPO Y NO LINEALES SINGULARMENTE  
PERTURBADOS EN BOND GRAPH**

**TESIS**

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

**DOCTOR EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA**

PRESENTA:

**M. C. JOSÉ AARÓN PADILLA GARCÍA**

DIRECTOR DE TESIS:

**DR. GILBERTO GONZÁLEZ AVALOS**

MORELIA, MICHOACÁN

AGOSTO 2016





## MODELADO DE SISTEMAS LINEALES VARIANTES EN EL TIEMPO Y NO LINEALES SINGULARMENTE PERTURBADOS EN BOND GRAPH

Los Miembros del Jurado de Examen de Grado aprueban la Tesis de Doctorado en Ciencias en Ingeniería Eléctrica, Opción en Sistemas de Control de *José Aurón Padilla García*

Dr. Claudio Rubén Fuerte Esquivel  
*Presidente del Jurado*

Dr. Gilberto González Ávalos  
*Director de Tesis*

Gilberto González

Dr. Juan Anzures Marin  
*Vocal*

Dr. Roberto Tapia Sánchez  
*Vocal*

Dr. Crisanto Mendoza Covarrubias  
*Revisor Externo*

Dr. Félix Calderón Solorio  
*Jefe de la División de Estudios de Posgrado  
de la Facultad de Ingeniería Eléctrica, UMSNH  
(Por reconocimiento de firmas)*



# Agradecimientos

Es necesaria la misma capacidad analítica para redactar una tesis que para escoger las palabras adecuadas y agradecer a todos aquellos que me han brindado el apoyo necesario para llevar a buen término este gran paso en mi vida.

Un agradecimiento especial a mi Asesor el Dr. Gilberto González Avalos, por sus valiosas enseñanzas, su paciencia y su dedicación que me brindó durante el tiempo que tomó la realización del presente trabajo y por confiar en mí hasta el último minuto.

Al jurado calificador, doctores Claudio Rubén Fuerte Esquivel, Juan Anzures Marín, Roberto Tapia Sánchez y Crisanto Mendoza Covarrubias, por aceptar ser parte de este gran momento de mi vida, por su paciencia, comprensión y exigencias que me hicieron ver mis límites como estudiante, ayudándome a enriquecer el trabajo final.

A mi familia ya que son las personas más importantes en mi vida, a mis padres y a mis hermanos por siempre haber estado junto a mí en cada momento de mi vida, por su preocupación, apoyo y cariño, y en especial a mi esposa Beatriz López Villafaña y a mi hija Nora Samantha por ser mis compañeras de viaje en cada momento, motivándome a no rendirme nunca, y por su cariño infinito. A ustedes les dedico este trabajo.

A todos y cada uno de los Profesores que tuve en mis estudios de Doctorado en la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería Eléctrica de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo por sus enseñanzas.

Y finalmente, A CONACYT quien con su apoyo económico me permitió realizar esta Tesis.



# Resumen

En este trabajo de tesis se propone un método para el análisis y obtención del modelo en estado cuasi-estacionario de algunas clases de sistemas no lineales singularmente perturbados utilizando bond graph. El bond graph es una técnica de modelado que puede aplicarse a la mayoría de los sistemas físicos, siempre y cuando exista intercambio de energía entre sus elementos. Los sistemas singularmente perturbados son una clase de sistemas en los cuales se puede realizar una separación de sus dinámicas en lentas y rápidas, lo que se conoce como escala de dos tiempos, existen muchos ejemplos de este tipo de sistemas físicos, prácticamente todos los sistemas electromecánicos cumplen con esta característica, ya que generalmente la parte eléctrica suele contener dinámicas rápidas y la sección mecánica dinámicas lentas. Otra aportación de esta tesis es la obtención del estado estacionario de sistemas no lineales usando la asignación de causalidad derivativa en los elementos almacenadores de energía, cabe mencionar que en los sistemas no lineales, a diferencia con los lineales, se pueden obtener uno o más estados estables para cada variable, dependiendo de las condiciones iniciales y las entradas al sistema. En este trabajo de investigación además se realiza la prueba de estabilidad interna de sistemas no lineales usando la representación en espacio de estado obtenida a partir del bond graph. Los dos métodos propuestos son verificadas usando como base para los ejemplos la máquina síncrona y la máquina de inducción.

Este trabajo también se propone un método para la obtención del modelo lento para una clase de sistemas lineales variantes en el tiempo, en la cual las dinámicas rápidas son no variantes en el tiempo, aplicando dicho método a un ejemplo no real con fines demostrativos.

**Palabras clave:** Sistemas singularmente perturbados, sistemas variantes en el tiempo, sistemas no lineales, estado estacionario, modelado, enlaces de grafos.



# Abstract

In this research work is proposing a procedure from analysis and obtaining of the quasi-steady state model of some class of nonlinear singularly perturbed systems using bond graph. bond graph is a technique of modelling that can apply to majority of physical systems, provided that an energy exchange exists between their elements. Singularly perturbed systems are a class of systems which we can make a distinction of their slow and fast dynamic, this is called two-scale-time, there are many examples of this class of physical systems, practically every electromechanic systems have this feature, because usually the electric part contains fast dynamics and mechanic section have slow dynamics. One more contribution of this thesis is the obtaining of the steady-state of nonlinear systems using derivative causality assignment to energy storage elements. Note that nonlinear systems, in contrast to linear systems, can have one or more steady-states for each variable, depending of initial conditions and inputs to system. Furthermore, in this work verification of internal stability of nonlinear systems is done, using the state space representation obtained by bond graph. The two propose procedures are verified by some examples, these examples uses synchronous machine and induction machine as base.

This work also a procedure for obtaining of slow model for a class of linear time-varying systems, which fast dynamics are not time-varying, this proposed metod is applied to a ctitious example in order to prove this metod.

**Key words:** Singularly perturbed systems, time-varying systems, nonlinear systems, steady-state, modeling, bond graph.



# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>I</b>
<b>Abstract</b>	<b>III</b>
<b>Índice de figuras</b>	<b>VII</b>
<b>Índice de tablas</b>	<b>IX</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Objetivo . . . . .	3
1.2. Metodología . . . . .	3
1.3. Justificación . . . . .	3
1.4. Estado del Arte . . . . .	4
1.4.1. Metodología de Sistemas con Perturbaciones Singulares . . . . .	4
1.4.2. Bond Graph en Sistemas Singularmente Perturbados . . . . .	8
1.5. Contribuciones . . . . .	11
1.6. Estructura de la tesis . . . . .	11
<b>2. Metodología de Sistemas con Perturbaciones Singulares</b>	<b>13</b>
2.1. Introducción . . . . .	13
2.2. Representación Típica de un Sistema con Perturbaciones Singulares . . . . .	18
2.3. Propiedades Temporales del Modelo Típico Singularmente Perturbado . . . . .	21
2.4. Punto de Vista Geométrico del Problema de Perturbaciones Singulares . . . . .	24
2.5. Variedades Lentas y Rápidas . . . . .	30
<b>3. Sistemas No-Lineales Singularmente Perturbados Modelados en Bond Graph</b>	<b>35</b>
3.1. Introducción . . . . .	35
3.2. Análisis de estabilidad en sistemas singularmente perturbados estacionarios . . . . .	37
3.3. Modelado en bond graph de una clase de sistemas no lineales con perturbaciones singulares . . . . .	39
3.3.1. Modelo de perturbación singular estándar en bond graph . . . . .	44
3.4. Casos de Estudio . . . . .	51

3.4.1.	Introducción . . . . .	51
3.5.	Caso de Estudio 1: Clase de sistema no-lineal cuando exis-te multiplicación de estados . . . . .	51
3.5.1.	Ejemplo 1: Turbogenerador con máquina síncrona . . . . .	51
3.5.2.	Modelo de estado cuasi-estacionario del turbogenerador con un enfoque de bond graph . . . . .	61
3.5.3.	Comparación de los resultados obtenidos . . . . .	69
3.5.4.	Ejemplo 2: La máquina de inducción . . . . .	76
3.5.5.	Comparación de los resultados obtenidos . . . . .	87
3.6.	Caso de Estudio 2: El aerogenerador con máquina de inducción considerando fricción no lineal . . . . .	91
3.6.1.	Diagrama esquemático del modelo equivalente de tres masas de una turbina de viento . . . . .	92
3.6.2.	Aerogenerador con máquina de inducción considerando rozamiento no lineal con un enfoque de bond graph . . . . .	93
3.6.3.	Diagrama esquemático del modelo equivalente de tres masa de una turbina de viento considerando el rozamiento no lineal . . . . .	94
3.6.4.	Un modelo de estado cuasi-estacionario de la turbina de viento con un enfoque de bond graph . . . . .	97
3.6.5.	Comparación de los resultados obtenidos . . . . .	101
<b>4.</b>	<b>Sistemas Lineales Singularmente Perturbados Variantes en el Tiempo en Bond Graph</b>	<b>107</b>
4.1.	Sistemas que Varían Lentamente . . . . .	108
4.2.	Sistemas Lineales Variantes en el Tiempo modelados en Bond Graph . . . . .	110
4.2.1.	Procedimiento propuesto para obtener el estado cuasi-estacionario en bond graph . . . . .	113
4.2.2.	Ejemplo demostrativo del procedimiento propuesto . . . . .	117
4.2.3.	Comparación de los resultados obtenidos . . . . .	124
<b>5.</b>	<b>Estado Estacionario de Sistemas No Lineales en Bond Graph</b>	<b>127</b>
5.1.	Introducción . . . . .	127
5.2.	Modelado de una clase de sistemas no lineales en bond graph . . . . .	128
5.3.	Estado estacionario de una clase de sistemas no lineales modelado en bond graph	130
5.3.1.	El método iterativo de Newton-Raphson . . . . .	131
5.4.	Ejemplo 1: Obtención del estado estacionario de una máquina síncrona en bond graph . . . . .	133
5.4.1.	Comparación de los resultados obtenidos . . . . .	138
5.5.	Ejemplo 2: Obtención del estado estacionario de un aerogenerador con máquina de inducción con bond graph . . . . .	142
5.5.1.	Comparación de los resultados obtenidos . . . . .	153
<b>6.</b>	<b>Conclusiones y Trabajos Futuros</b>	<b>159</b>

6.1. Conclusiones . . . . .	159
6.2. Trabajos futuros . . . . .	161
<b>Bibliografía</b>	<b>163</b>
<b>A. Modelado de Sistemas en Bond Graph</b>	<b>177</b>
A.1. Antecedentes de Bond Graph . . . . .	177
A.1.1. Introducción . . . . .	177
A.1.2. Presentación del lenguaje bond graph . . . . .	178
A.1.3. Representación de las transferencias de potencia . . . . .	178
A.1.4. Variables generalizadas . . . . .	181
A.1.5. Tetraedro de estado . . . . .	182
A.1.6. Elementos básicos del lenguaje bond graph . . . . .	184
A.2. La causalidad . . . . .	205
A.2.1. El concepto de causalidad . . . . .	205
A.2.2. Reglas de asignación de la causalidad . . . . .	206
A.2.3. Procedimiento de Asignación de la Causalidad . . . . .	206
A.2.4. La causalidad derivativa en un bond graph . . . . .	207
A.3. Campos Multipuerto . . . . .	209
A.3.1. Campos de Almacenamiento de Energía . . . . .	210
A.3.2. Campos-C . . . . .	210
A.3.3. Campos-I . . . . .	213
A.3.4. Campos-R . . . . .	215
A.4. Ejemplos de Sistemas Simples en Bond Graph . . . . .	217
A.5. Obtención de las Ecuaciones de Estado en Bond Graph . . . . .	221
A.5.1. Reglas Generales . . . . .	221
A.5.2. Traslación Mecánica . . . . .	224
A.5.3. Rotación Mecánica . . . . .	228
A.5.4. Circuitos Eléctricos . . . . .	232
A.5.5. Circuitos Hidráulicos . . . . .	236
A.5.6. Sistemas mezclados . . . . .	239
A.5.7. Modelos matemáticos deducidos de un bond graph . . . . .	242
<b>B. Transformación de Park en Bond Graph</b>	<b>251</b>
B.1. Transformación de Park o dq0 . . . . .	251
B.1.1. Modelo en bloques y simulación de la transformación de Park . . . . .	253
B.1.2. Modelado en Bond Graph de la transformación de Park . . . . .	254
<b>C. Publicaciones</b>	<b>257</b>



# Índice de figuras

2.1. (a) Convergencia uniforme; (b) convergencia no uniforme. . . . .	15
2.2. Conceptos básicos de perturbaciones singulares y escala de tiempos. . . . .	17
2.3. Sistema retroalimentado de alta ganancia para el Ejemplo 2.2. . . . .	20
2.4. Sistema retroalimentado de alta ganancia reducido para el Ejemplo 2.2. . . . .	20
2.5. Retrato de fase aproximado del Ejemplo 2.2 cuando $\varepsilon = 0$ . . . . .	28
2.6. Retrato de fase del Ejemplo 2.2 cuando $\varepsilon = 0.1$ . . . . .	29
2.7. Trayectorias del sistema (2.61) . . . . .	33
3.1. Estructura unión de un BGI para una clase de sistemas no lineales con elementos disipadores no lineales. . . . .	39
3.2. Estructura unión de un SPNBG para una clase de sistemas no lineales con elementos disipadores no lineales. . . . .	45
3.3. Diagrama del circuito de estator y rotor de la máquina síncrona. . . . .	52
3.4. Un bond graph de la máquina síncrona con asignación de causalidad integral. . . . .	54
3.5. Turbogenerador térmico de dos secciones. . . . .	54
3.6. Modelo de masas y muelles equivalente sin amortiguamiento del turbogenerador térmico de dos secciones. . . . .	55
3.7. Modelo en bond graph con causalidad integral asignada de un turbogenerador con máquina síncrona. . . . .	56
3.8. Representación a bloques de la estructura unión del SPBG. . . . .	62
3.9. Modelo en bond graph con causalidad derivativa asignada a los almacenadores relacionados con las dinámicas rápidas de un turbogenerador. . . . .	64
3.10. Diagrama en 20-Sim para la simulación y comparación de la respuesta del modelo original y el conjunto de ecuaciones obtenido con el SPNBG. . . . .	70
3.11. Obtención del modelo de estado cuasi-estacionario del turbogenerador. . . . .	71
3.12. Dinámica de la variable de estado del modelo original en bond graph ( $p_{18}$ ) y la obtenida con el modelo de estado cuasi-estacionario ( $\overline{p_{18}}$ ). . . . .	73
3.13. Dinámica de la variable de estado del modelo original en bond graph ( $p_{23}$ ) y la obtenida con el modelo de estado cuasi-estacionario ( $\overline{p_{23}}$ ). . . . .	74
3.14. Dinámica de la variable de estado del modelo original en bond graph ( $p_{30}$ ) y la obtenida con el modelo de estado cuasi-estacionario ( $\overline{p_{30}}$ ). . . . .	75

3.15. Dinámica de la variable de estado del modelo original en bond graph ( $q_{21}$ ) y la obtenida con el modelo de estado cuasi-estacionario ( $\overline{q_{21}}$ ). . . . .	75
3.16. Dinámica de la variable de estado del modelo original en bond graph ( $q_{31}$ ) y la obtenida con el modelo de estado cuasi-estacionario ( $\overline{q_{31}}$ ). . . . .	76
3.17. Diagrama esquemático de la máquina asíncrona trifásica. . . . .	77
3.18. Circuitos equivalentes en el marco de referencia arbitrario $dq0$ para la máquina de inducción. . . . .	78
3.19. Bond graph en causalidad integral asignada de la máquina de inducción. . . . .	79
3.20. Bond graph para encontrar el sistema cuasi-estacionario de la máquina de inducción. . . . .	80
3.21. Dinámicas de la máquina de inducción con variables de estado clásicas. . . . .	88
3.22. Diagrama en 20-Sim para la simulación y comparación de la respuesta del modelo original y la ecuación obtenida con el SPNMG para la máquina de inducción. . . . .	89
3.23. Diagrama esquemático para la simulación del sistema cuasi-estacionario del modelo de la máquina de inducción. . . . .	90
3.24. Dinámica de la velocidad angular del modelo original en bond graph y la obtenida con el modelo de estado cuasi-estacionario. . . . .	90
3.25. Diagrama esquemático del modelo equivalente de tres masas de una turbina de viento. . . . .	92
3.26. Diagrama esquemático del modelo equivalente de tres masas de una turbina de viento considerando el rozamiento no lineal. . . . .	95
3.27. Bond graph con causalidad integral asignada de la turbina de viento considerando rozamiento no lineal. . . . .	96
3.28. SPNMG de la turbina de viento considerando rozamiento no lineal. . . . .	97
3.29. Dinámica de la variable de estado del modelo completo original ( $p_{13}$ ) y la obtenida con el modelo de estado cuasi-estacionario ( $\overline{p_{13}}$ ). . . . .	102
3.30. Dinámica de la variable de estado del modelo completo original ( $p_{29}$ ) y la obtenida con el modelo de estado cuasi-estacionario ( $\overline{p_{29}}$ ). . . . .	103
3.31. Dinámica de la variable de estado del modelo completo original ( $p_{36}$ ) y la obtenida con el modelo de estado cuasi-estacionario ( $\overline{p_{36}}$ ). . . . .	103
3.32. Dinámica de la variable de estado del modelo completo original ( $q_{26}$ ) y la obtenida con el modelo de estado cuasi-estacionario ( $\overline{q_{26}}$ ). . . . .	104
3.33. Dinámica de la variable de estado del modelo completo original ( $q_{33}$ ) y la obtenida con el modelo de estado cuasi-estacionario ( $\overline{q_{33}}$ ). . . . .	104
4.1. Estructura unión de un BGI para una clase de sistemas lineales con elementos que tiene parámetros variantes en el tiempo. . . . .	111
4.2. Estructura unión de un SPVBG para una clase de sistemas lineales con elementos disipadores variantes en el tiempo. . . . .	114
4.3. Modelo del motor de CD para fines demostrativos con dependencia del tiempo en un elemento almacenador, en un disipador y en el girador. . . . .	118
4.4. Modelo en bond graph de la Figura 4.3. . . . .	118
4.5. Modelo SPVBG de la Figura 4.3. . . . .	122
4.6. Diagrama esquemático para la simulación del sistema cuasi-estacionario del modelo de ejemplo demostrativo. . . . .	125

4.7.	Dinámica de la variable de estado del modelo original ( $q_7$ ) y la obtenida con el modelo de estado cuasi-estacionario ( $\overline{q_7}$ ). . . . .	125
4.8.	Dinámica de la variable de estado del modelo original ( $p_8$ ) y la obtenida con el modelo de estado cuasi-estacionario ( $\overline{p_8}$ ). . . . .	126
5.1.	Estructura unión de un Bond Graph en cuasalidad Integral (BGI). . . . .	128
5.2.	Estructura unión de un Bond Graph en cuasalidad Derivativa (BGD). . . . .	130
5.3.	Un bond graph de la máquina síncrona con asignación de causalidad integral. . . . .	133
5.4.	Un bond graph de la máquina síncrona con asignación de causalidad derivativa. . . . .	135
5.5.	Enlace de flujo $p_3$ en $L_d$ y su valor en estado estacionario. . . . .	139
5.6.	Enlace de flujo $p_5$ en $L_F$ y su valor en estado estacionario. . . . .	140
5.7.	Enlace de flujo $p_{11}$ en $L_q$ y su valor en estado estacionario. . . . .	140
5.8.	Momento angular $p_{18}$ en $T_J$ y su valor en estado estacionario. . . . .	141
5.9.	Bond graph con causalidad integral asignada de la turbina de viento. . . . .	142
5.10.	Bond graph con causalidad derivativa asignada de la turbina de viento. . . . .	146
5.11.	Enlace de flujo $p_4$ ( $\lambda_{ds}$ ) y su valor en estado estacionario. . . . .	153
5.12.	Enlace de flujo $p_5$ ( $\lambda_{dr}$ ) y su valor en estado estacionario. . . . .	154
5.13.	Enlace de flujo $p_6$ ( $\lambda_{qs}$ ) y su valor en estado estacionario. . . . .	154
5.14.	Enlace de flujo $p_7$ ( $\lambda_{dr}$ ) y su valor en estado estacionario. . . . .	155
5.15.	Momento de torsión angular $p_{13}$ en la flecha del generador y su valor en estado estacionario. . . . .	155
5.16.	Ángulo de torsión $q_{26}$ entre la flecha del generador y el buje, y su valor en estado estacionario. . . . .	156
5.17.	Momento de torsión angular $p_{29}$ en el buje y su valor en estado estacionario. . . . .	156
5.18.	Ángulo de torsión $q_{33}$ entre el buje y el eje de las aspas, y su valor en estado estacionario. . . . .	157
5.19.	Momento de torsión angular $p_{36}$ en el eje de las aspas del aerogenerador y su valor en estado estacionario. . . . .	157
A.1.	Esquemas físicos y representación de transferencia de potencia. . . . .	179
A.2.	Esquema físico. . . . .	180
A.3.	Bond graph asociado al esquema de la Figura A.2. . . . .	180
A.4.	Tetraedro de estado. . . . .	183
A.5.	Elementos puerto-1, ejemplos de elemento-R (a) un amortiguador mecánico; (b) un cojinete de rodillos; (c) una resistencia eléctrica; y (d) una válvula hidráulica. . . . .	185
A.6.	Elementos puerto-1 lineales, representación de elementos-R, (a) un bond graph con esfuerzo de entrada, (b) un diagrama a bloques con esfuerzo de entrada; (c) un bond graph con flujo de entrada, y (d) un diagrama a bloques con flujo de entrada. . . . .	187
A.7.	Elementos de puerto-1, ejemplos de elementos-C, (a) un resorte, (b) una barra de torsión, (c) un capacitor eléctrico, y (d) un acumulador hidráulico. . . . .	188
A.8.	Elementos puerto-1 lineales, representación de elementos-C, (a) un bond graph en causalidad derivativa, (b) un diagrama a bloques de una causalidad derivativa; (c) un bond graph con causalidad integral, y (d) un diagrama a bloques de una causalidad integral. . . . .	189

A.9. Elementos de puerto-1, ejemplos de elementos-I, (a) una masa, (b) una inercia rotacional, (c) un inductor, y (d) un tapón de fluido. . . . .	191
A.10. Elementos puerto-1 lineales, representación de elementos-I, (a) un bond graph en causalidad integral, (b) un diagrama a bloques de una causalidad integral; (c) un bond graph con causalidad derivativa, y (d) un diagrama a bloques de una causalidad derivativa. . . . .	192
A.11. Ejemplos de fuentes de esfuerzo y fuentes de flujo, (a) una fuente de voltaje, (b) una fuente de corriente, (c) una fuerza de entrada externa, y (d) una velocidad de entrada externa. . . . .	194
A.12. Elementos fuente de esfuerzo y fuentes de flujo, (a) un bond graph de una fuente de esfuerzo, (b) un diagrama a bloques de una fuente de esfuerzo; (c) un bond graph de una fuente de flujo, y (d) un diagrama a bloques de una fuente de flujo. . . . .	194
A.13. Ejemplos de elementos-TF, (a) un nivelador rígido, (b) un par de engranes, (c) un transformador eléctrico, y (d) un ariete hidráulico. . . . .	195
A.14. Representación de elementos-TF, (a) un bond graph de un esfuerzo de entrada-esfuerzo de salida, (b) un diagrama de un esfuerzo de entrada-esfuerzo de salida; (c) un bond graph de un flujo de entrada-flujo de salida, y (d) un diagrama de un flujo de entrada-flujo de salida; (e) un bond graph de potencia de entrada-potencia de salida, y (f) un bond graph de potencia de salida-potencia de entrada. . . . .	197
A.15. Representación de elementos-GY, (a) un motor eléctrico ideal y (b) una bomba centrífuga ideal. . . . .	198
A.16. Representación de elementos-GY, (a) un bond graph de flujo de entrada-esfuerzo de salida, (b) un diagrama de flujo de entrada-esfuerzo de salida; (c) un bond graph de un esfuerzo de entrada-flujo de salida, y (d) un diagrama de un esfuerzo de entrada-flujo de salida; (e) un bond graph de potencia de entrada-potencia de salida y (f) un bond graph de potencia de salida-potencia de entrada. . . . .	199
A.17. (a)-(c) Ejemplos de uniones-0 y (d)-(f) ejemplos de uniones-1. . . . .	200
A.18. (a) bond graph de una unión-0, (b) diagrama de bloques de una unión-0, (c) bond graph de una unión-1, (b) diagrama de bloques de una unión-1. . . . .	202
A.19. Consideraciones de causalidad para los elementos en bond graph. . . . .	207
A.20. Ejemplo de causalidad derivativa. . . . .	208
A.21. Circuito RLC en paralelo con causalidad derivativa. . . . .	209
A.22. Símbolo de un campo-C con $n$ puertos. . . . .	210
A.23. Un Campo-C compuesto por elementos de puertos-1, -C y uniones, (a) ejemplo mecánico; (b) ejemplo eléctrico. . . . .	211
A.24. Un campo-C con $n$ puertos con causalidad completamente integral. . . . .	212
A.25. Un campo-C con $n$ puertos con causalidad completamente derivativa. . . . .	212
A.26. Un campo-C con $n$ puertos con causalidad mezclada integral-derivativa. . . . .	212
A.27. Símbolo de un campo-I con $n$ puertos. . . . .	213
A.28. Inductancia mutua en sistemas eléctricos, (a) y (b) campos-I con diferente orientación de embobinado; (c) un campo-I con tres puertos. . . . .	214
A.29. El campo-R (a) en forma de resistencia; (b) en forma de conductancia. . . . .	215
A.30. (a) Ejemplo de un campo-R en forma de resistencia; y (b) su representación reducida. . . . .	216

A.31.(a) Ejemplo de un campo-R en forma de conductancia; y (b) su representación reducida.	216
A.32.(a) - (c) Diagrama esquemático, bond graph y diagrama de bloques para un sistema amortiguador-resorte-masa con esfuerzo común; (d) - (f) Diagrama esquemático, bond graph y diagrama de bloques para un sistema amortiguador-resorte-masa con flujo común. . . . .	218
A.33.(a) - (c) Diagrama esquemático, bond graph y diagrama de bloques para un circuito eléctrico con esfuerzo común; (d) - (f) Diagrama esquemático, bond graph y diagrama de bloques para un circuito eléctrico con flujo común. . . . .	220
A.34.Direcciones de potencia asumidas generalmente para elementos disipadores y elementos almacenadores de energía. . . . .	222
A.35.a) unión-0 de dos puertos, (b) unión-1 de dos puertos, (c) uniones-0 adyacentes y (d) uniones-1 adyacentes. . . . .	223
A.36.(a) Sistema amortiguador-resorte-masa y (b) modelo simple de un cuarto de la suspensión de un vehículo. . . . .	224
A.37.Ejemplo de sistema mecánico de traslación. . . . .	227
A.38.Ejemplo de sistema rotacional simple. . . . .	231
A.39.Ejemplo de circuito eléctrico con transformador. . . . .	235
A.40.Ejemplo de circuito hidráulico. . . . .	238
A.41.Ejemplos de transductores que incluyen (a) un motor ideal, (b) una bomba centrífuga, y (c) un piñón y cremallera. . . . .	240
A.42.Modelo de un motor de corriente directa de imán permanente (PMDC). . . . .	241
A.43.Diagrama a bloques de la estructura de unión de un bond graph. . . . .	243
A.44.(a) Sistema mecánico, y (b) su bond graph correspondiente. . . . .	246
B.1. Sistema de referencia trifásico y la referencia dq0. . . . .	252
B.2. Modelo en bloques de la transformada de Park. . . . .	253
B.3. Simulación del modelo en bloques de la transformación de Park de la Figura B.2. . . . .	254
B.4. Modelado en Bond Graph de la transformación de Park para esfuerzos. . . . .	255
B.5. Modelado en Bond Graph de la transformación de Park para flujos. . . . .	255
B.6. Transformación de Park en bond graph usando un sólo transformador modulado. . . . .	256



# Índice de tablas

3.1. Parámetros para la simulación y obtención del modelo de estado cuasi-estacionario de un turbogenerador. . . . .	72
3.2. Parámetros para la simulación de la máquina de inducción. . . . .	88
3.3. Parámetros para la simulación para la máquina de inducción y el modelo mecánico de la turbina de viento. . . . .	101
4.1. Parámetros para la simulación del ejemplo demostrativo variante en el tiempo. . . . .	124
5.1. Parámetros para la simulación de la máquina síncrona. . . . .	139
5.2. Parámetros para la simulación del aerogenerador. . . . .	149
A.1. Significado de las variables generalizadas para diferentes dominios de la física. . . . .	184
A.2. Resistencia de los Elemento-R lineales. . . . .	187
A.3. Elasticidad de los Elementos-C lineales. . . . .	190
A.4. Inercia de los Elementos-I lineales. . . . .	193
A.5. Resumen de las condiciones de las uniones. . . . .	204
A.6. Resumen de las condiciones secundarias en las uniones en dominios de energía específicos. . . . .	205



# Capítulo 1

## Introducción

Dentro de prácticamente todos los campos de la ciencia, el poder representar un sistema físico mediante un modelo es un objetivo primordial para el análisis y control de dicho sistema. Un modelo se puede definir como una abstracción teórica de un sistema del mundo real, el cuál tiene dos utilidades fundamentales: la primera, hacer predicciones concretas, es decir, mediante la simulación del modelo se puede saber como se comportará el sistema a diferentes condiciones y parámetros de entrada sin necesidad de realizar las pruebas en el sistema real, y la segunda, permitir una reducción en la complejidad del sistema, esto es, el modelo permite determinar cuales son las características más importantes del sistema, ignorando los detalles que no tienen mayor afectación en la dinámica del sistema, pero si lo hacen, de forma innecesaria, mucho más laborioso de analizar.

Cuando ya se tiene un modelo o representación de un sistema en particular, generalmente matemático, es importante determinar si se puede o no hacer una reducción de dicho modelo, esto es, quitar elementos del modelo que no representan un efecto significativo en el comportamiento del sistema pero qué, aún haciendo esta reducción, el modelo reducido permita analizar y/o controlar un fenómeno determinado de una forma más sencilla, es decir, la reducción de orden dependerá de que variable es la que se desea conocer o controlar de dicho sistema.

La reducción de orden de sistemas singularmente perturbados es posible ya que son sis-

temas que tienen múltiples escalas de tiempo, esto es, son sistemas en los cuales pueden ser distinguibles de manera clara las dinámicas lentas de las rápidas, por ejemplo los sistemas electromecánicos, generalmente cumplen con esta condición, ya que contienen variables rápidas debidas a la sección eléctrica y variables lentas que se encuentran en la parte mecánica del sistema. La metodología de perturbaciones singulares proporciona una base para el análisis y/o control de sistemas que contienen elementos despreciables, para así tener un modelo más simple pero que cumpla con los requisitos de identificación del sistema real. Los sistemas singularmente perturbados han sido estudiados desde finales de los años 50's y principios de los 60's por Andreï N. Tikhonov y Adelaida B. Vasil'eva [Tikhonov, 1948, Tikhonov, 1952, Vasil'eva, 1963].

Existen diferentes metodologías para obtener un modelo de un sistema físico. El modelado con la técnica bond graph, la cuál fue ideada por el profesor Henry Paynter en 1959 y después desarrollada y formalizada por sus estudiantes Dean Karnoop, Donald Margolis y Roland Rosenberg, ofrece entre sus principales ventajas la unificación de diferentes dominios físicos en uno generalizado donde se exhibe el intercambio de potencia (y conservación de la misma) dentro de un sistema. Además de la posibilidad de encapsular modelos en bond graph y conectarlos a otros por medio de puertos externos lo cual convierte a esta técnica en una herramienta valiosa para la representación y manipulación de sistemas complejos [Cellier, 1992].

En algunas ocasiones, dependiendo del sistema analizado, no importa tanto el comportamiento dinámico de las variables, pero sí el estado final al que llegan dichas variables cuando el tiempo tiende a infinito, este valor es conocido como estado estacionario del sistema, en sistemas no lineales es más conocido como puntos de equilibrio, ya que a diferencia de los sistemas lineales, no existe solo un valor final sino que dependiendo de la clase de sistema y de las condiciones iniciales las dinámicas tenderán a diferentes puntos de estabilidad, es decir, en los sistemas no lineales pueden existir uno o más estados estacionarios para cada variable.

## 1.1. Objetivo

Desarrollar un procedimiento para modelar y analizar algunas clases de sistemas singularmente perturbados no lineales y lineales variantes en el tiempo usando bond graph.

Aplicar el modelado de bond graph en causalidad derivativa para determinar el estado estacionario de una clase de sistemas no lineales con producto de estados.

## 1.2. Metodología

La metodología de investigación empleada para el desarrollo del proyecto consiste realizar una revisión del estado del arte en el marco teórico de la metodología de bond graph y de los sistemas singularmente perturbados, para después proponer un método para el modelado y análisis de dichos sistemas, y finalmente, demostrar y verificar la funcionalidad del método propuesto mediante varios ejemplos. Esto último, haciendo uso de herramientas computacionales como son MATLAB<sup>®</sup> y 20-SIM<sup>®</sup>, el primero se utiliza para resolver sistemas de ecuaciones no lineales con el método de Newton-Raphson, y el segundo es empleado para la simulación de los modelos obtenidos en bond graph.

## 1.3. Justificación

Las necesidades actuales dentro de la industria y de la ingeniería, de tener un modelo lo más cercano y simple posible a un sistema físico, que pueda describir y predecir el comportamiento del mismo, con la finalidad de poder realizar una simulación sin tener la necesidad de realizar pruebas en el sistema real tiene una importancia enorme, por ejemplo, cuando el sistema modelado es muy caro y/o muy sensible a un posible daño grave a determinados parámetros de entrada, así, una simulación del modelo evita correr un riesgo de daño en pruebas innecesarias. El modelado de sistemas con bond graph esta siendo ampliamente aceptado en muchas áreas de la ingeniería, como son la eléctrica, la mecánica, la hidráulica, etc. En el análisis de sistemas singularmente perturbados, los cuales existen en gran cantidad. Por ejemplo en el dominio eléctrico, una red RC en la cuál se tenga una diferencia notoria entre

los valores de las capacitancias, es decir que exista alguna o algunas capacitancias parásitas o muy pequeñas. En sistemas mecánicos un ejemplo son los sistemas de amortiguadores en automóviles donde la masa del auto es más significativa que la masa del amortiguador. La presente tesis se enfoca en los sistemas electromecánicos ya que prácticamente casi todos son sistemas singularmente perturbados. Bond graph provee una herramienta útil y relativamente fácil para obtener modelos reducidos sin alejarse demasiado del comportamiento del sistema original, esto independientemente si el sistema es lineal o no lineal, variante o invariante en el tiempo.

Cuando el profesor Henry Paynter inventó el bond graph intentaba crear una metodología en la cuál se pudieran modelar *todos* los sistemas físicos, aunque el objetivo haya sido muy ambicioso, esta técnica puede aportar mucho al modelado de distintos fenómenos físicos, principalmente los que manejan interacción de distintos tipos de energía, que son una mayoría en la realidad, por lo anterior, en la presente investigación se decidió utilizar la metodología del bond graph para modelar y analizar los sistemas singularmente perturbados.

## 1.4. Estado del Arte

### 1.4.1. Metodología de Sistemas con Perturbaciones Singulares

El estudio de los sistemas singularmente perturbados se remonta a una disertación en 1904 y después su publicación en 1905, donde Ludwig Prandtl presentó un nuevo concepto que revolucionó el estudio y análisis de los fluidos dinámicos, él introdujo el concepto de *capa límite*, el cuál establece que en ciertos sistemas, como son los de dinámica de fluidos, existe una clara diferencia de los efectos de la fricción que actúan en una región pequeña y cercana a la superficie del fluido, y que fuera de esta capa límite el flujo depende de la viscosidad del fluido [Cowley, 2000], es decir, se tienen sistemas de escala de tiempos, donde se involucran variables lentas y variables rápidas.

Años después, el concepto de capa límite o región de transición rápida es ampliamente estudiado en literatura matemática [Tikhonov, 1952, Levinson, 1950, O'Malley, 1971], donde se explica el modelo estándar de perturbaciones singulares, el cuál es una representación explíci-

ta de variables de estado donde las derivadas de algunos estados son multiplicadas por un valor escalar positivo muy pequeño que representa algunos parámetros parásitos que pueden ser despreciados [Kokotovic, 1986], y con esto conseguir un modelo reducido.

Como la dinámica de muchos sistemas es descrita mediante ecuaciones diferenciales de alto orden. Frecuentemente, la presencia de pequeños parámetros tales como constantes de tiempo, masas y momentos de inercia son la fuente del incremento del orden del sistema [Naidu, 1988]. Entonces, un sistema singularmente perturbado es un sistema en el cuál se suprimen todos los parámetros pequeños, ocasionando con esto la reducción del orden del sistema. El propósito principal de la aproximación de la perturbación singular al análisis y diseño es el alivio de la alta dimensionalidad (la cuál era muy importante anteriormente porque no existía mucho poder computacional) y el mal condicionamiento que resulta de la iteración de las dinámicas lentas y rápidas. Esta aproximación de escala de tiempo es asintótica, es decir, las dinámicas rápidas tiende a cero [Saksena, 1984]. En [Khalil, 1979] la teoría de la perturbación singular es extendida a sistemas que contienen varios parámetros pequeños con los cuales se puede cambiar el orden del sistema, además se analizan los problemas de estabilidad en la capa límite debida a estos pequeños parámetros. Un nuevo método, mediante solución numérica con diferencias finitas, es desarrollado en [Li, 2007] para detectar la región de transición rápida de la solución de un problema de perturbación singular, los resultados analíticos encontrados son respaldados con experimentos numéricos. En [Parul, 2011] se concentran los métodos básicos y la literatura para resolver los problemas de perturbación singular con sus respectivos estudios comparativos.

Una gran cantidad de trabajos de investigación han sido publicados para resolver diferentes problemas de análisis y control usando la teoría de los sistemas singularmente perturbados. En [Porter, 1974] son utilizados los métodos de perturbaciones singulares para reducir el diseño de controladores de retroalimentación estabilizante para una clase de sistemas lineales multivariable de orden  $(n + m)$  a un diseño de controladores de retroalimentación estabilizante para una clase sistemas relacionado de orden  $(n)$ , que se obtiene ignorando los elementos parásitos los cuáles corresponden a la presencia de parámetros relativamente pequeños en las ecuaciones

de estado del sistema original de orden  $(n + m)$ . Una aproximación simple para determinar las condiciones de estabilidad de sistemas retroalimentados sujetos a perturbaciones en los operadores que describen esos sistemas es determinada en [Sandell, 1979]. En [Khalil, 1981] se emplea el análisis de perturbaciones singulares para determinar la robustez de las estrategias de control por retroalimentación de la salida para sistemas invariantes en el tiempo, se resalta el efecto de diseñar la estrategia de control usando un modelo que desprecia elementos parásitos desconocidos, demostrando que este tipo de estrategia, generalmente, puede desestabilizar el sistema aún cuando los modos despreciados sean asintóticamente estables. Siguiendo con el estudio de estabilidad, en [Suzuki, 1981] se demuestra que la controlabilidad y la estabilidad de un sistema reducido que pertenece a un sistema no lineal singularmente perturbado son invariantes a la clase de controles de retroalimentación del subsistema rápido, es decir, es posible un control compuesto (un diseño de control para el subsistema lento y otro el subsistema rápido) sin afectar estas propiedades del sistema original. En [Rajagopalan, 1981] se entrega un método para el diseño de controles óptimos en lazo abierto y en lazo cerrado de sistemas continuos singularmente perturbados mediante sus modelos discretos, donde la representación por modelo discreto provee una ventaja sobre la reducción de orden clásica por la naturaleza recursiva de las soluciones en sistemas discretos. También con respecto a control óptimo, en [Mahmoud, 1982] es desarrollado un procedimiento computacional para el diseño de retroalimentación aproximada de una clase de reguladores lineales singularmente perturbados, empleando una aproximación para separar el diseño total en tres regiones, las cuáles corresponden a la escala de tiempo lenta, media y rápida, mediante un ejemplo de orden 9 se ilustran los resultados teóricos obtenidos. En [Javid, 1982] se elabora un observador basado en el sistema lento de orden reducido de un sistema variante en el tiempo de orden completo, el sistema completo es estabilizado mediante retroalimentación lineal del estado lento del observador. También es posible diseñar controladores estabilizadores para sistemas singularmente perturbados basándose en modelos simplificados, y como resultado entrega un método para generar la clase de controladores estabilizantes necesarios para un sistema singularmente perturbado determinado [Vidyasagar, 1985]. Así como en [Abed, 1985] se establece un teorema para determinar la cota superior del valor de  $\varepsilon$  (parámetro parásito que se puede despreciar)

sin perder estabilidad asintótica del sistema singularmente perturbado. En [Wang, 1993] el problema de la robustez de la dinámica del control de salida de retroalimentación es resuelto mediante el diseño simultáneo de controladores de retroalimentación estáticos para el subsistema rápido y otros para uno llamado sistema auxiliar utilizado en el subsistema lento. Siguiendo con los estudios realizados en sistemas de control, en [Li, 1995] se presenta un método simple de diseño de control de modos deslizantes para sistemas singularmente perturbados, el método es ilustrado con un ejemplo de un sistema inestable. En [Shao, 2010] es analizado un método de control inteligente de un manipulador flexible basado en el método de perturbaciones singulares, lo cuál permite separar en subsistemas en escala de tiempo y controlar de manera separada las dinámicas lenta y rápida. Así como en [Fakharian, 2011] se propone una nueva aproximación para resolver el problema de control  $H_\infty$ , (también llamado control robusto) usando retroalimentación de estado estática para sistemas singularmente perturbados lineales e invariantes en el tiempo, el algoritmo propuesto, resuelve un conjunto de matrices de desigualdades que son independientes del parámetro singular  $\varepsilon$ , se hace además un comparativo entre la técnica propuesta y otros métodos mediante un ejemplo ilustrativo, en [Ji, 2011] se trata el mismo problema que en [Fakharian, 2011] pero aplicado a un sistema singularmente perturbado lineal incierto con retardo de tiempo. En [Yang, 2012] se analizan dos métodos para obtener el margen de perturbación singular (SPM), es decir cuál es el valor máximo del parámetro singular  $\varepsilon$ , el cuál define el margen de estabilidad del sistema desde el punto de vista de separación de escala de tiempo, un método es cuantitativo y ofrece mayor exactitud para estimar el SPM que el método cualitativo. La efectividad de los dos métodos es demostrada mediante un ejemplo. Finalmente en [Yu, 2014] se analiza la estabilidad de una clase de sistemas lineales singularmente perturbados por medio de retroalimentación de salida, mostrando además, que los sistemas completos de lazo cerrado deben ser exponencialmente estables cuando el parámetro singular  $\varepsilon$  tiende a cero, si esto no se cumple, el sistema no podrá ser estabilizado por ningún controlador.

Dentro de la aplicación de la técnica de sistemas con perturbaciones singulares en sistemas de potencia, en [Winkelman, 1980] se describe un procedimiento de separación en escala de tiempos para obtener modelos reducidos, este procedimiento es aplicado a un sistema de potencia

con tres máquinas interconectadas, en las cuáles se modelan las dinámicas de los enlaces de flujo y el regulador de voltaje. Las propiedades de conservación de energía y equilibrio son utilizadas para la obtención de modelos de perturbación singular no lineal con separación explícita de escala de tiempos, aplicado a sistemas de potencia y redes dinámicas similares en [Peponides, 1982]. La metodología de sistemas singularmente perturbados en [Naidu, 1985] es aplicada a un modelo discreto de un sistema generador de potencia con vapor de quinto orden. En [Sauer, 1987] se utiliza para realizar una descomposición en escala de tiempos para reducir el orden de los modelos interconectados a un sistema de potencia multimáquina, el método propuesto es ilustrado con dos ejemplos. Mientras que en [Kokotovic, 1989] se presentan los conceptos de variedad lenta como una herramienta para la descomposición y reducción de orden del modelado de sistemas no lineales, usando como ejemplo la máquina síncrona. Otro ejemplo de aplicación en sistemas de potencia se da en [Chow, 1990] donde haciendo uso de esta metodología se obtienen modelos simplificados de sistemas de potencia de gran escala para realizar análisis de estabilidad y diseño de sistemas de control, usando también como ejemplo el modelado de la máquina síncrona y sus modelos equivalentes de dinámicas rápidas y lentas conectados a redes de potencia grandes, así como en [Singh, 1986] se utiliza también la máquina síncrona como ejemplo de aplicación de sistemas singularmente perturbados para proponer un método iterativo mediante el cuál se obtiene el modelo reducido, el resultado se compara con el obtenido con la técnica clásica del modelo de estado cuasi-estacionario. Finalmente en [Xu, 1998] se aplica esta metodología para simular sistemas de potencia enfocándose, principalmente, en los estados rápidos asociados con los generadores y sus respectivos controles, los modelos singularmente perturbados obtenidos son implementados en un sistema de potencia con cuatro máquinas generadoras.

#### **1.4.2. Bond Graph en Sistemas Singularmente Perturbados**

La metodología de bond graph propone una aproximación generalizada para modelar sistemas, en la cuál se unifican los sistemas físicos de todos los dominios de energía en uno llamado generalizado [Gawthrop, 1996]. Está basado en la representación de la potencia, esto

permite la descripción del sistema mediante elementos de disipación y almacenamiento de energía [Karnopp, 1999].

A diferencia de la sección anterior, la cantidad de trabajos de investigación sobre los sistemas singularmente perturbados en el marco teórico de bond graph no es tan extensa, existen algunas referencias entre las cuales se encuentran los siguientes: [Rosenberg, 1981] en donde de manera teórica, se comienzan a utilizar el bond graph en sistemas singularmente perturbados de escala de dos tiempo. En [Dauphin-Tanguy, 1985] donde el método de perturbación singular es aplicado a un proceso de multi-escala de tiempo permitiendo la reducción de la dimensionalidad considerando sólo una parte del sistema (ya sea la parte rápida o la parte lenta del sistema) dependiendo del dominio de frecuencia de interés, los modelos de las dinámicas lentas y rápidas son estimados mediante la determinación de la ganancia de lazos causales. En [Sueur, 1991] se muestra como el modelo en bond graph es una herramienta útil para el análisis de sistemas, en este caso, en la simplificación del modelado de sistemas de escala de dos tiempos, donde las ecuaciones de estado pueden ser encontradas de manera gráfica y los modelos matemáticos reducidos son exactamente los mismos que los obtenidos mediante la aplicación del método clásico de perturbaciones singulares. De igual forma, en [Zeid, 1995] se detallan la formalización con la metodología de bond graph de sistemas multicuerpo, como son las uniones mecánicas en los brazos robóticos, desde el punto de vista de sistemas singularmente perturbados, para obtener un conjunto de ecuaciones diferenciales con un orden menor en escala de dos tiempo que el orden del sistema completo, en el cuál se pueden investigar propiedades no lineales de las uniones, tales como la fricción y la separación entre ellas.

Continuando con la reducción de orden de sistemas, ya teniendo el sistema modelado en bond graph, en [Edström, 1998] se considera la causalidad derivativa como una consecuencia de simplificación del modelo ignorando la disipación de energía. Es decir, si la disipación de energía es suficientemente pequeña se convierte en una simplificación natural removiendo la causalidad derivativa del modelo, mediante la inserción de un elemento disipador de energía lineal ( $-R$ ) que tendrá un valor pequeño. Utilizando un punto de vista diferente, en [Omara, 2001] se muestra la manera en que el método de perturbación singular se puede

utilizar para comprender el comportamiento y propiedades del modelo reducido en escala de dos tiempo, lo anterior, mediante la selección del parámetro de perturbación  $\varepsilon$ . Además, se demuestra que un modelo en bond graph con causalidad derivativa puede ser convertido en un sistema en la forma estándar singularmente perturbado mediante una transformación matricial apropiada. Otro método para obtener el modelo reducido de un sistema se propone en [Orbak, 2003], el cuál está basado en la identificación de subsistemas dentro de un sistema físico usando la metodología de bond graph, la decisión de cuales subsistemas son eliminados está basada en procedimientos de descomposición y residuos de expansión en fracciones parciales del sistema físico para finalmente obtener el modelo de orden reducido, la verificación del procedimiento propuesto se ilustra mediante ejemplos de sistemas físicos lineales.

En el trabajo de tesis [Gandanegara, 2003] se realiza la reducción de orden de un sistema utilizando dos métodos de simplificación de modelos, el *método de perturbaciones singulares* que está basado en el análisis dinámico de los elementos, y el *algoritmo de reducción de orden de un modelo* que se basa en la actividad energética del sistema, los dos procedimientos son verificados y comparados mediante un sistema de tracción de una vía férrea industrial, dentro de este trabajo también se realiza un análisis de estabilidad mediante la localización de las raíces y usando el segundo método de Lyapunov con la metodología de bond graph. En trabajos más actuales, en [Gonzalez, 2011] se presenta un método directo para obtener el estado cuasi-estacionario, también llamado modelo de orden reducido o modelo lento, de un sistema lineal singularmente perturbado, mediante la asignación de causalidad derivativa en los elementos almacenadores relacionado con las dinámicas rápidas, lo anterior se ilustra con dos ejemplos, un motor de C.D. y una red RC. Finalmente en [Barrera, 2012] se propone un procedimiento en bond graph para realizar un cambio de coordenadas a la forma de bloques triangular llamada forma actuador de un sistema para lograr el desacoplamiento total de las diámicas lentas y rápidas.

## 1.5. Contribuciones

En el presente trabajo se da un avance al estudio de los sistemas no lineales y lineales variantes en el tiempo con perturbaciones singulares usando la metodología de bond graph, desarrollando un procedimiento para obtener su modelo lento, también llamado modelo de estado cuasi-estacionario (QSS del inglés Quasi-Steady State [Grenier, 2005, Ramirez, 2011, Xiaozhe, 2014]), de manera relativamente fácil y directa. Así como el modelado en Bond Graph en causalidad Derivativa (BGD) para obtener el estado estacionario de una clase de sistemas no lineales con multiplicación de estados. En el Apéndice C se muestran los artículos generados de este trabajo de investigación.

## 1.6. Estructura de la tesis

La presente tesis se encuentra organizada de la siguiente manera:

El capítulo 2 contiene la metodología de los sistemas con perturbaciones singulares, su modelo estándar, algunos ejemplos demostrativos de este tipo de sistemas, además de las propiedades de escala de tiempo de dicho modelo.

El capítulo 3 contiene el método para obtener del modelo de estado cuasi-estacionario una clase de sistemas no lineales singularmente perturbados utilizando bond graph, este capítulo también contiene la prueba necesaria para determinar estabilidad interna de los sistemas, así como los casos de estudio, con varios ejemplos con su respectiva verificación de resultados.

En el capítulo 4 se presenta un procedimiento para obtener el estado cuasi-estacionario de una clase sistemas lineales que contienen elementos almacenadores y/o disipadores de energía que contiene parámetros variantes en el tiempo, presentado un ejemplo demostrativo para verificar la eficacia del método propuesto.

En el capítulo 5 se presenta la obtención del estado estacionario de sistemas no lineales con bond graph, mediante dos ejemplos con sus respectivas simulaciones y comparación de resultados.

El capítulo 6 contiene las conclusiones y los trabajos propuestos a futuro.



## Capítulo 2

# Metodología de Sistemas con Perturbaciones Singulares

### 2.1. Introducción

Cuando un ingeniero de control utiliza métodos de perturbaciones singulares para resolver problemas en su campo, el primer problema es el modelado, esto es, como describir matemáticamente el sistema a ser controlado. El modelado para control es parsimonioso e implícito; es parsimonioso debido a que el modelo no debería ser más detallado que lo requerido para el propósito de control específico. Es implícito debido a la ausencia de detalles necesarios que no son conocidos [Kokotovic, 1986].

Los objetivos del control típico son el seguimiento y la regulación óptima, es decir, un determinado comportamiento a seguir de acuerdo a las condiciones y necesidades del sistema, y a partir de estos objetivos es inevitable la presencia de perturbaciones desconocidas, variaciones en los parámetros y otras incertidumbres, el sistema de control debe poseer un grado suficiente de robustez o insensibilidad a los efectos externos.

La contribución clave de las técnicas de perturbaciones singulares, a partir de la cuál le siguen otros beneficios, es el nivel de modelado. Los ingenieros de control han estado simplificando sus modelos, antes de que se dijera que lo que estaban haciendo era una perturbación singular.

Para el ingeniero de control, las perturbaciones singulares legitiman las simplificaciones de los modelos dinámicos. Una de ellas es desprestigiar pequeñas constantes, masas, capacitancias y parámetros parásitos similares, las cuales incrementan el orden dinámico del modelo. Sin embargo, un diseño basado en el modelo simplificado puede resultar en un sistema lejano a la realidad a partir de su comportamiento deseado o resultar en un sistema inestable. Debido a que la mayoría de los sistemas de control son dinámicos, se requiere la descomposición en etapas para una separación de escalas de tiempo. Por ejemplo en sistemas eléctricos de potencia los transitorios de voltaje y frecuencia están dentro de un intervalo de segundos (regulador de voltaje, gobernador de velocidad y almacenamiento de energía en el eje) a varios minutos (dispositivo motriz, tiempo de transferencia de combustible y almacenamiento de energía térmica). En sistemas mecánicos los amortiguadores de un automóvil pueden calificarse como sistemas singularmente perturbados ya que la masa del amortiguador es menos significativa que la masa del auto completo.

Típicamente, el modelo reducido representa el fenómeno más lento, el cuál en la mayoría de las aplicaciones es dominante. por ejemplo en un motor de CD relativamente grande la inercia del eje sería el fenómeno lento y la corriente de armadura representaría la dinámica rápida. Los modelos de capas limitadas envuelven en escalas de tiempo rápidas y representan las desviaciones del comportamiento lento predefinido [Kokotovic, 1986].

Con la finalidad de que el concepto de *sistemas singularmente perturbados* quede un poco más claro, se utilizará el siguiente ejemplo. Si se tiene un sistema representado matemáticamente por la ecuación diferencial [Naidu, 2001]

$$\begin{aligned} \varepsilon \ddot{x}(t, \varepsilon) + \dot{x}(t, \varepsilon) + \varepsilon x(t, \varepsilon) &= 0 \\ x(t=0) = x(0), \quad \dot{x}(t_0) = \dot{x}(0), \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde  $\varepsilon$  es el parámetro pequeño que multiplica a la derivada de mayor orden, el punto y el doble punto indican la primera y la segunda derivada con respecto al tiempo, respectivamente. El sistema degenerado o de orden reducido se obtiene al suprimir el parámetro pequeño  $\varepsilon$  de (2.1),

$$\dot{x}^{(0)}(t) + x^{(0)}(t) = 0, \quad x^{(0)}(t_0) = x(0) \tag{2.2}$$

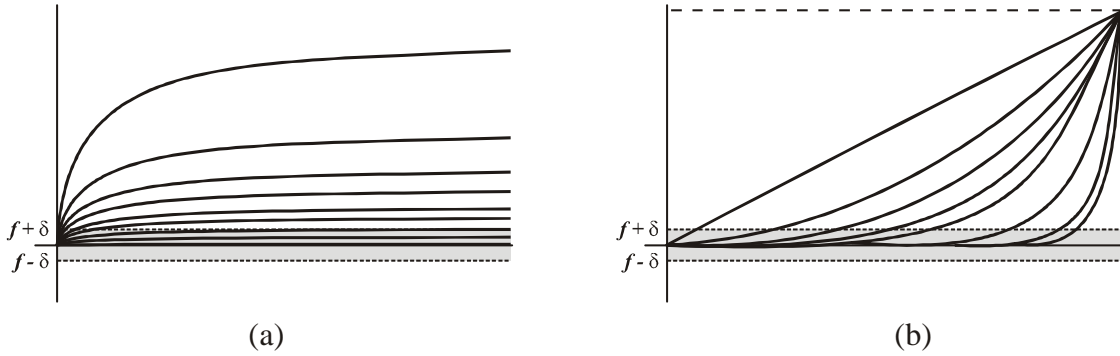


Figura 2.1: (a) Convergencia uniforme; (b) convergencia no uniforme.

y su solución es

$$x^{(0)}(t) = x^{(0)}(0) e^{-t} = x(0) e^{-t} x(0) \quad (2.3)$$

como el problema degenerado en (2.2) es de primer orden no se puede esperar que satisfaga ambas condiciones iniciales proporcionadas en (2.1), la condición inicial  $\dot{x}(0)$  es sacrificada en el proceso de reducción de orden. El problema proporcionado por (2.1) donde el parámetro pequeño  $\varepsilon$  está multiplicando la derivada de mayor orden es llamado *problema singularmente perturbado* o *problema de perturbación singular*, donde el orden del problema se reduce haciendo  $\varepsilon = 0$ .

Las características más importantes de las perturbaciones singulares se agrupan como sigue [Naidu, 2001]:

- La perturbación tiene lugar cuando se describe el sistema mediante una ecuación diferencial donde la derivada de mayor orden es multiplicada por el parámetro pequeño  $\varepsilon$ , donde  $\varepsilon \neq 0$ .
- La solución de los sistemas singularmente perturbados tiene convergencia no uniforme, esto quiere decir que las respuestas de los sistemas original y reducido no son semejantes, la convergencia uniforme se da cuando se suma o resta un pequeño escalar  $\delta$  a una función y su solución se encuentra dentro del rango  $f + \delta$  y  $f - \delta$ , en la Figuras 2.1(a) y 2.1(b), se ilustra una convergencia uniforme y no uniforme, respectivamente [Peponides, 1982].
- Existe una región de transición rápida o capa límite donde la solución cambia rápida-

mente. Esto es, las condiciones en la frontera de esta región que se pierden durante el proceso de degeneración quedan ocultas dentro de la región de transición rápida, es decir, existe un comportamiento bastante diferente del las respuestas del sistema dentro y fuera de la región marcada como capa límite.

- Para recuperar las condiciones iniciales pérdidas se requiere *alargar* la región de transición rápida usando una transformación de elongación tal como  $\tau = t/\varepsilon$ .
- El problema degenerado o reducido, también es conocido como problema *inperturbable*, es de orden reducido y no puede satisfacer todas las condiciones límite determinadas para el problema original.
- El problema singularmente perturbado descrito en (2.1) tiene dos raíces características ampliamente separadas lo que ocasiona el surgimiento de componentes rápidas y lentas en su solución, es decir, el problema tiene propiedades de escala de dos tiempos.

La presencia simultánea de dos fenómenos uno lento y otro rápido hacen que el problema sea difícil desde el punto de vista de una solución numérica. Para ilustrar estas características, se reconsidera el problema singularmente perturbado proporcionado en (2.1), en variables de estado tiene la forma

$$\begin{aligned} \frac{dx(t, \varepsilon)}{dt} &= z(t, \varepsilon), & x(t=0) &= x(0) \\ \varepsilon \frac{dz(t, \varepsilon)}{dt} &= -x(t, \varepsilon) - z(t, \varepsilon), & z(t=0) &= z(0) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Para este problema, asignando valores específicos de  $\varepsilon = 0.1$ ,  $x(0) = 2$  y  $z(0) = 3$ , en la Figura 2.2 se muestran las diferentes soluciones, remarcando los siguientes puntos [Naidu, 2001]:

- Para  $\varepsilon = 0.1$  los eigenvalores de (2.4) son -1.127 y -8.873 que corresponden a las soluciones lenta y rápida, respectivamente.
- La solución predominantemente lenta es  $x(t, \varepsilon)$  y la solución predominantemente rápida es  $z(t, \varepsilon)$ , la cuál está asociada (multiplicada) con  $\varepsilon$ , son obtenidas mediante la solución del problema de orden completo o exacto dado por (2.4).
- La región de transición rápida existe cerca del punto inicial  $t = 0$ .
- En este caso,  $x^{(0)}(t)$  y  $z^{(0)}(t)$  son soluciones degeneradas de  $x(t, \varepsilon)$  y  $z(t, \varepsilon)$ , respecti-

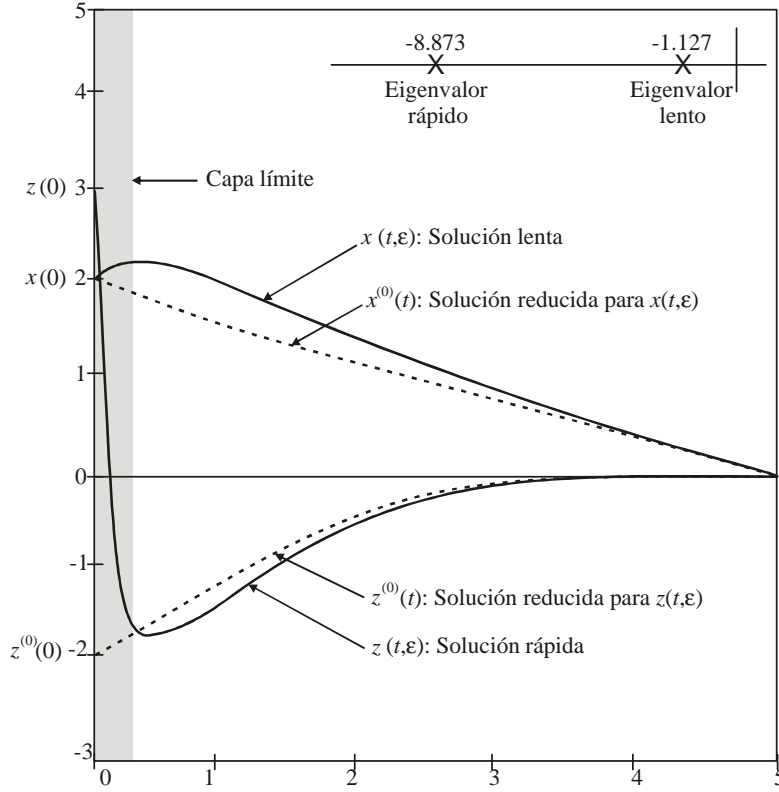


Figura 2.2: Conceptos básicos de perturbaciones singulares y escala de tiempos.

vamente, obtenidas resolviendo el problema degenerado con  $\varepsilon = 0$  en (2.4) como

$$\frac{dx^{(0)}(t)}{dt} = z^{(0)}(t), \quad x^{(0)}(t_0) = x(0)$$

$$0 = -x^{(0)}(t) - z^{(0)}(t) \tag{2.5}$$

- Para este caso,  $z^{(0)}(t) = -x^{(0)}(t)$  y  $z^{(0)}(t_0) \neq z(0)$ , esto ocurre como norma general.
- La solución degenerada  $z^{(0)}(t)$  está cercana a la solución exacta  $z(t, \varepsilon)$  únicamente fuera de la región de transición rápida.
- Una condición inicial  $[z(0)]$  de las dos condiciones  $x(0)$  y  $z(0)$  determinadas inicialmente es sacrificada o anulada en el proceso de reducción de orden o, en otras palabras,  $z(t, \varepsilon)$  pierde su condición inicial  $z(0)$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

## 2.2. Representación Típica de un Sistema con Perturbaciones Singulares

Existe una gran cantidad de bibliografía y artículos de investigación donde se entregan las bases y características de los sistemas dinámicos analizados mediante la técnica del modelo singularmente perturbado [Tikhonov, 1948, Tikhonov, 1952, Levinson, 1950, Vasil'eva, 1963, Wason, 1965, Hoppensteadt, 1971, O'Malley, 1971]. En la mayoría de ellas, se divide el sistema en dos ecuaciones, una que representa las dinámicas *lentas* y otra ecuación que contiene las variables *rápidas*, la segunda de ellas es multiplicada por un pequeño escalar positivo  $\varepsilon$ , es decir, el modelo estándar está en la forma

$$\dot{x} = f(x, z, \varepsilon, t), \quad x(t_0) = x(0), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.6)$$

$$\varepsilon \dot{z} = g(x, z, \varepsilon, t), \quad z(t_0) = z(0), \quad z \in \mathbb{R}^m. \quad (2.7)$$

donde (2.6) y (2.7) representan las dinámicas lentas y rápidas, respectivamente, y el punto encima de la  $x$  y de la  $z$  denotan una primera derivada con respecto a la variable tiempo  $t$ , además de que se asume que las funciones  $f$  y  $g$  son continuamente diferenciables de sus argumentos. El escalar multiplicador en las dinámicas rápidas  $\varepsilon$  es la perturbación y representa todos los parámetros pequeños que serán despreciados para lograr una reducción en el orden del sistema [Kokotovic, 1986].

Cuando se hace  $\varepsilon = 0$  causa un cambio abrupto en las propiedades dinámicas del sistema (2.6), (2.7); ya que la ecuación diferencial (2.7) decae o se degenera en la ecuación algebraica

$$0 = g(\bar{x}, \bar{z}, 0, t), \quad (2.8)$$

lo que provoca que el orden del sistema se reduzca de  $n + m$  a  $n$ . La barra encima de la  $x$  se utiliza para indicar que las variables pertenecen a un sistema diferente del modelo estándar original (2.6), (2.7). Para poder decir que el sistema representado por (2.6), (2.7) está en la forma estándar, se debe cumplir la siguiente hipótesis que involucra a (2.8).

**Hipótesis 2.1.** En un dominio de interés (2.8) tiene  $k \geq 1$  raíces reales distintas o aisladas [Kokotovic, 1986],

$$\bar{z} = \bar{\Phi}_i(\bar{x}, t), \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (2.9)$$

La hipótesis anterior, asegura que se tendrán un modelo reducido para cada una de las raíces (2.9). Sustituyendo (2.9) en (2.6) se obtiene

$$\dot{\bar{x}} = f(\bar{x}, \bar{\Phi}_i(\bar{x}, t), 0, t), \quad \bar{x}(t_0) = x(0), \quad (2.10)$$

el cuál es el modelo reducido  $i$ -ésimo, como ya se explicó anteriormente, la condición inicial para la variable de estado  $\bar{x}(t)$  y para  $x(t)$  es la misma. Escribiendo de manera compacta (2.10) se obtiene

$$\dot{\bar{x}} = f(\bar{x}, t), \quad \bar{x}(t_0) = x(0). \quad (2.11)$$

Dado que el valor pequeño de  $\varepsilon$  permite una rápida convergencia de  $z$  (cuya velocidad  $\dot{z} = g/\varepsilon$  puede ser muy elevada cuando  $\varepsilon$  es pequeño y  $g \neq 0$ ) a alguna de las raíces de (2.8), las cuáles son los puntos de equilibrio de (2.7). El modelo reducido (2.11) se suele llamar *modelo de estado cuasi-estacionario* o *modelo lento* [Kokotovic, 1986].

La conveniencia de usar un parámetro con la finalidad de lograr una reducción de orden tiene un inconveniente: no siempre es claro cuál de los parámetros elegir para ser considerado como pequeño. Afortunadamente, en muchas aplicaciones el conocimiento de los proceso y componentes físicos de los sistemas nos indican la elección correcta. Esto se ilustra más claramente mediante un ejemplo. El sistema que históricamente despertó el interés por este tipo de problemas es el motor de CD donde el parámetro  $\varepsilon$  es una pequeña constante de tiempo [Barrera, 2011].

**Ejemplo 2.1.** En el sistema retroalimentado de la Figura 2.3 con un amplificador de alta ganancia  $K$  y un bloque no lineal  $N(z)$ , la selección de  $\varepsilon$  no es tan obvia, sin embargo se puede seleccionar  $\varepsilon = 1/K$ , donde  $K$  es la ganancia del amplificador, se obtiene [Kokotovic, 1986]

$$\dot{x} = z, \quad (2.12)$$

$$\varepsilon \dot{z} = -x - \varepsilon z - N(z) + u. \quad (2.13)$$

Ahora, sea  $N(z) = e^z - 1$ , haciendo  $\varepsilon = 0$  y sustituyendo lo anterior en (2.13), se obtiene  $0 = -\bar{x} - 0 - e^{\bar{z}} + 1 + u$ , ó

$$\bar{z} = [N(u, \bar{x})]^{-1} = \ln(1 + u - \bar{x}). \quad (2.14)$$

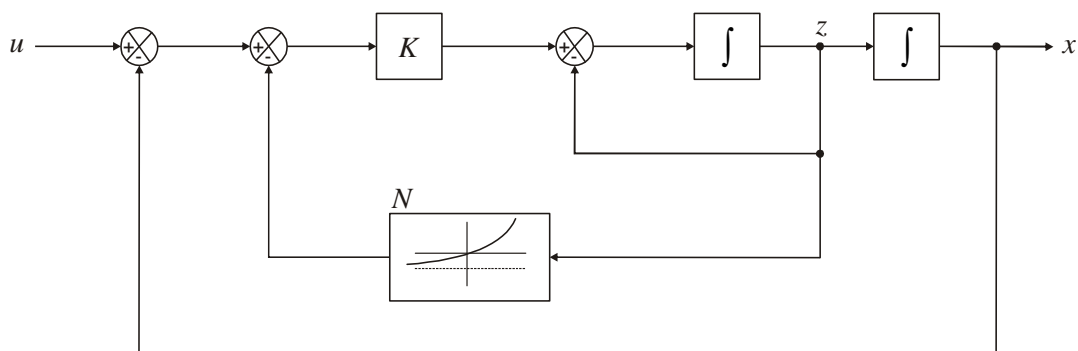


Figura 2.3: Sistema retroalimentado de alta ganancia para el Ejemplo 2.2.

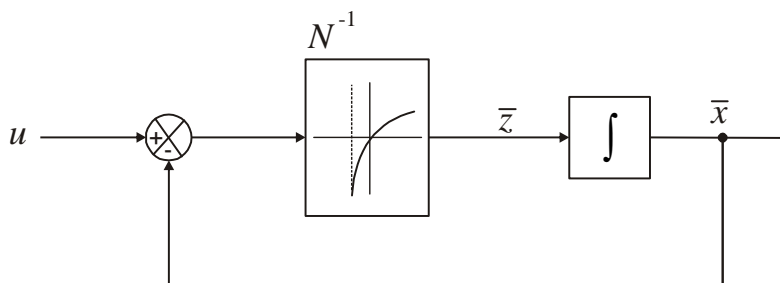


Figura 2.4: Sistema retroalimentado de alta ganancia reducido para el Ejemplo 2.2.

Analizando (2.14) se puede determinar que la Hipótesis 2.1 es satisfecha para cualquier  $u - \bar{x} > -1$ . Por lo que el modelo reducido o modelo cuasi-estacionario es

$$\dot{\bar{x}} = \ln(1 + u - \bar{x}). \quad (2.15)$$

El modelo anterior es representado por el diagrama de bloques de la Figura 2.4 en el cuál el lazo con ganancia infinita  $\varepsilon = 0$  es reemplazado por el inverso del operador en la trayectoria de retroalimentación.

### 2.3. Propiedades Temporales del Modelo Típico Singularmente Perturbado

El análisis y control de sistemas de gran escala siempre ha sido una tarea bastante compleja, ésto no solo se debe al alto orden del sistema, sino también al hecho de que la mayoría de estos sistemas poseen una interacción de fenómenos dinámicos dentro de un extenso rango de velocidades diferentes lo que ocasiona que los valores propios o eigenvalores del sistema también estén ampliamente separados [Naidu, 1988].

La interacción de fenómenos lentos y rápidos en sistemas de alto orden provocan que estos sistemas sean *rígidos*, los cuáles requieren de rutinas numéricas *costosas*, computacionalmente hablando. Un sistema rígido tiene propiedades de escala de dos tiempos (lenta y rápida) y no necesita tener la estructura de perturbaciones singulares con un parámetro pequeño multiplicando la derivada de mayor orden o multiplicando algunas variables de estado de la ecuación de estados. En otras palabras, el sistema singularmente perturbado es solo una forma del sistema rígido o sistema de escala de dos tiempo [Naidu, 1988]. Esto quiere decir, que la respuesta ante estímulos externos de un sistema dinámico modelado con perturbaciones singulares se caracteriza por la presencia de dos escalas de tiempo. Donde el modelo reducido (2.11) hace una buena aproximación de la variable lenta, mientras que la diferencia entre la respuesta del modelo reducido y la del modelo completo (2.6), (2.7) es la respuesta rápida. Cuando se obtiene el modelo reducido, la dinámica rápida  $z$  es sustituida por su “estado cuasi-estacionario”  $\bar{z}$ . En el cuál, generalmente, su condición inicial es muy diferente a la condición inicial de  $z$  [Kokotovic, 1986], es decir

$$\bar{z}(t_0) = \bar{\Phi}(\bar{x}(t_0), t_0). \quad (2.16)$$

Por lo tanto,  $\bar{z}$  puede no ser una buena aproximación de  $z$  (cerca del valor inicial),

$$z = \bar{z}(t) + O(\varepsilon), \quad (2.17)$$

donde  $O(\varepsilon)$  es la función que representa la discrepancia entre  $z$  y  $\bar{z}$ . Esta aproximación se mantendrá en un intervalo  $t \in [t_1, T]$  donde  $t_1 > t_0$ . Por otro lado, si se podrá asegurar que

el estado cuasi-estacionario  $\bar{x}$  iniciará en la misma condición inicial que  $x(t_0)$ , por lo que la aproximación  $\bar{x}$  de la dinámica lenta original  $x$  suele ser uniforme, es decir

$$x = \bar{x}(t) + O(\varepsilon) \quad (2.18)$$

es válida para el intervalo  $t \in [t_0, T]$  en el cuál  $\bar{x}(t)$  existe.

Como la velocidad de la dinámica rápida suele ser grande,  $\dot{z} = g/\varepsilon$ , haciendo  $\varepsilon = 0$  se puede tener un transitorio prácticamente instantáneo de  $z$  mientras  $g \neq 0$ . Ahora, para demostrar que  $z$  no tenderá a infinito durante este transitorio, analizando el producto  $\varepsilon \dot{z}$ , el cuál puede permanecer finito, aún cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  y  $\dot{z} \rightarrow \infty$ , para analizar el comportamiento de las dinámicas en la región de transición rápida o capa límite es conveniente cambiar la escala de tiempo introduciendo una nueva variable temporal  $\tau$ ,

$$\varepsilon \frac{dz}{dt} = \frac{dz}{d\tau}, \quad (2.19)$$

por lo que  $\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\varepsilon}$ , y eligiendo como valor inicial de la nueva variable  $\tau = 0$  en  $t = t_0$ , se tiene que

$$\tau = \frac{t - t_0}{\varepsilon}, \quad (2.20)$$

En la ecuación anterior se observa que si  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $\tau \rightarrow \infty$  aún para valores de  $t$  ligeramente más grandes que  $t_0$  (siempre que esta diferencia sea independiente de  $\varepsilon$ ). En cambio,  $x$  se mantiene muy cerca de su valor inicial  $x^0$ , mientras  $z$  y  $\tau$  cambian de forma instantánea. Para describir el comportamiento de  $z$  en función de la nueva variable de tiempo  $\tau$ , se utiliza la llamada *corrección de capa límite*  $\hat{z} = z - \bar{z}$  que satisface el sistema

$$\frac{d\hat{z}}{d\tau} = g(x^0, \hat{z}(\tau) + \bar{z}(t_0), 0, t_0), \quad (2.21)$$

utilizando como parámetros fijos las condiciones iniciales  $z^0 - \bar{z}(t_0)$ ,  $x^0$  y  $t_0$ . La solución  $\hat{z}(\tau)$  de este problema de valor inicial es utilizada como una corrección de *capa límite* de (2.17) para tener una posible aproximación uniforme de  $z$ : [Kokotovic, 1986]

$$z = \bar{z}(t) + \hat{z}(\tau) + O(\varepsilon). \quad (2.22)$$

De la ecuación anterior se observa que  $\bar{z}(t)$  y  $\hat{z}(\tau)$  son el transitorio lento y el transitorio rápido de  $z$ , respectivamente. Para que después de un corto periodo la aproximación corregida

(2.22) converja a la aproximación lenta (2.17), la corrección  $\widehat{z}(\tau)$  debe igualar a la cantidad  $O(\varepsilon)$  cuando  $\tau$  tiende a infinito. Se debe notar que en la escala de tiempo lento  $t$ , el descenso o caída de  $\widehat{z}(\tau)$  es rápido dado que,

$$\frac{d\widehat{z}(\tau)}{dt} = \frac{d\widehat{z}(\tau)}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{d\widehat{z}(\tau)}{d\tau}. \quad (2.23)$$

Mediante dos hipótesis se establecen las propiedades de estabilidad del sistema de capa frontera dado en (2.21), las cuáles son cruciales para que se puedan mantener las aproximaciones (2.17), (2.18) y (2.22).

**Hipótesis 2.2.** El equilibrio  $\widehat{z}(\tau) = 0$  de (2.21) es asintóticamente uniformemente estable en  $x^0$  y  $t_0$ , y  $z^0 - \bar{z}(t_0)$  pertenece a su dominio de atracción, entonces existe  $\widehat{z}(\tau)$  para  $\tau \geq 0$  [Kokotovic, 1986].

Si esta suposición se satisface, entonces,

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \widehat{z}(\tau) = 0 \quad (2.24)$$

es uniforme en  $x^0$ ,  $t_0$ , es decir,  $z$  estará próximo a su estado cuasi-estacionario  $\bar{z}$  en algún tiempo  $t_1 > t_0$ . Para asegurar que  $z$  permanece próxima a  $\bar{z}$ , se puede pensar como si cualquier instante  $t \in [t_1, T]$  puede ser el instante inicial y hacer la siguiente hipótesis sobre la linealización de (2.21).

**Hipótesis 2.3.** Los eigenvalores o valores propios del Jacobiano  $\partial g / \partial z$  evaluados, para  $\varepsilon = 0$  a lo largo de  $\bar{x}(t)$ ,  $\bar{z}(t)$  tienen partes reales más pequeñas que un número negativo predefinido [Kokotovic, 1986], esto es

$$\operatorname{Re} \lambda \left\{ \frac{\partial g}{\partial z} \right\} \leq -c < 0. \quad (2.25)$$

Ambas Hipótesis (2.2 y 2.3) describen una fuerte estabilidad de sistema de capa límite (2.21). Si se asume que  $z^0$  está suficientemente cerca a  $\bar{z}(t_0)$ , entonces la Hipótesis 2.3 incluye a la Hipótesis 2.2. Se puede notar a partir de (2.25) que la no singularidad de  $\partial g / \partial z$  implica que la raíz  $\bar{z}(t)$  es distinta como se requiere en la Hipótesis 2.1.

Estas hipótesis son comunes en la mayoría de la literatura de perturbaciones singulares [Tikhonov, 1948, Tikhonov, 1952, Levinson, 1950, Vasil'eva, 1963, Hoppensteadt, 1971]. Estas referencias contienen la prueba y los refinamientos del siguiente teorema fundamental.

**Teorema 2.1.** Si las Hipótesis 2.2 y 2.3 son satisfechas, entonces la aproximación (2.21), (2.22) es válida para todo  $t \in [t_0, T]$  y existe  $t_1 \geq t_0$  tal que (2.17) es válida para todo  $t \in [t_1, T]$  [Kokotovic, 1986].

## 2.4. Punto de Vista Geométrico del Problema de Perturbaciones Singulares

Para el análisis geométrico del problema de perturbaciones singulares incluyendo el modelo reducido, es necesario, como primer paso, familiarizarse con el concepto de *variedad integral* (o variedad invariante)[Monshizadeh, 2008].

Considerando la ecuación diferencial

$$\dot{x} = N(X, t), \quad (2.26)$$

donde  $X$  y  $N$  pertenecen al conjunto  $\mathbb{R}^n$ . Entonces el conjunto  $M$  que está incluido en  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  se conoce como variedad integral si para todo  $(X_0, t_0)$  que pertenece al conjunto  $M$ , la solución  $(x(t), t)$ , para  $X(t_0) = X_0$ , está en  $M$  para todo  $t \in R$ . ahora bien, si solo se cumple para un intervalo de tiempo finito  $(x(t), t) \in M$ , entonces se dice que  $M$  es una *variedad integral local* [Monshizadeh, 2008].

En esta sección se analiza el comportamiento en dos escalas de tiempo desde un punto de vista geométrico de las soluciones del sistema (2.6), (2.7) como trayectorias en  $\mathbb{R}^{n+m}$  [Khalil, 2002]. Una variedad  $k$ -dimensional en  $\mathbb{R}^n$  (cuando  $1 \leq k < n$ ) tiene una definición matemática precisa. Para este trabajo es suficiente con precisar que una variedad  $k$ -dimensional es la solución de la ecuación  $\eta(x) = 0$ , donde  $\eta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  es suficientemente suave, es decir, varias veces continuamente diferenciable. Con la finalidad de que lo anterior quede un poco más claro, usando el ejemplo del círculo unitario  $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$  es una variedad de dimensión 1 en  $\mathbb{R}^2$ . De manera similar, la esfera unitaria  $\left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\right\}$  es una variedad de dimensión  $(n - 1)$  en  $\mathbb{R}^n$ . Una variedad  $\{\eta(x) = 0\}$  será una variedad invariante del sistema  $\dot{x} = f(x)$  si  $\eta(x(0)) = 0 \Rightarrow \eta(x(t)) \equiv 0$  para todo  $t > t_0$  (en cualquier intervalo de tiempo en el cuál la solución  $x(t)$  está definida), es decir, si la condición inicial del sistema

está sobre la variedad, la solución permanecerá sobre dicha variedad para todo  $t > t_0$ . Con la finalidad de usar el concepto de *variedades invariantes*, se restringue el estudio a los sistemas autónomos (no dependen del tiempo). además, para simplificar la notación, se supone que  $f$  y  $g$  no dependen de  $\varepsilon$ . Entonces, una forma más simple de representar el sistema singularmente perturbado (2.6), (2.7) es [Khalil, 2002]:

$$\dot{x} = f(x, z), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.27)$$

$$\varepsilon \dot{z} = g(x, z), \quad z \in \mathbb{R}^m. \quad (2.28)$$

Cuando se hace  $\varepsilon = 0$ ,  $z = h(x)$  será una raíz aislada de  $0 = g(x, z)$ , la cuál satisface la Hipotesis 2.1. La ecuación  $z = h(x)$  describe una variedad  $n$ -dimensional en el espacio de estados de dimensión  $(m + n)$  de  $(x, z)$ , ésta es una variedad invariante para el sistema

$$\dot{x} = f(x, z), \quad (2.29)$$

$$0 = g(x, z), \quad (2.30)$$

dado que una trayectoria del sistema (2.29), (2.30) que comienza en la variedad  $z = h(x)$  permanecerá en esta variedad para todo tiempo futuro para el cuál la solución exista. Por lo tanto, el comportamiento sobre esta variedad es descrito mediante el modelo reducido

$$\dot{x} = f(x, h(x)). \quad (2.31)$$

La Hipótesis 2.1 muestra que las trayectorias de (2.27), (2.28) las cuáles inician en una vecindad  $O(\varepsilon)$  de  $z = h(x)$ , permanecerán dentro de esa vecindad  $O(\varepsilon)$ . Esta variedad es para cuando  $\varepsilon = 0$ . Ahora, se buscará una variedad invariante para el sistema (2.27), (2.28) cuando  $\varepsilon > 0$  en la forma

$$z = H(x, \varepsilon), \quad (2.32)$$

donde  $H$  debe de ser diferenciable las suficientes veces que sea necesario en función de sus argumentos  $x$  y  $\varepsilon$ . La expresión (2.32) define una variedad de dimensión  $n$ , que depende de  $\varepsilon$ , en el espacio de estados de dimensión  $(n + m)$  de  $(x, z)$ . Entonces, para que  $z = H(x, \varepsilon)$  sea una variedad invariante del sistema (2.27), (2.28) se debe cumplir que

$$z(0, \varepsilon) - H(x(0, \varepsilon), \varepsilon) = 0 \Rightarrow z(t, \varepsilon) - H(x(t, \varepsilon), \varepsilon) \equiv 0 \quad (2.33)$$

para todo tiempo  $t \in J \subset [0, \infty)$ , donde  $J$  es cualquier intervalo de tiempo en el cual la solución  $[x(t, \varepsilon), z(t, \varepsilon)]$  existe.

Diferenciando con respecto al tiempo ambos lados de (2.32), multiplicando por  $\varepsilon$ , y sustituyendo  $\dot{x}$ ,  $\varepsilon\dot{z}$ , y  $z$  de (2.27), (2.28) y (2.32), respectivamente, se obtiene lo que se conoce como *la condición de variedad* [Khalil, 2002]

$$0 = g(x, H(x, \varepsilon)) - \varepsilon \frac{\partial H}{\partial x} f(x, H(x, \varepsilon)), \quad (2.34)$$

en la cuál,  $H(x, \varepsilon)$  debe satisfacerla para todo  $x$  dentro de la región de interés y para todo  $\varepsilon$  que pertence al intervalo  $[0, \varepsilon_0]$ . Cuando  $\varepsilon = 0$  la ecuación diferencial parcial (2.34) se convierte en

$$0 = g(x, H(x, 0)), \quad (2.35)$$

la cuál muestra que  $H(x, 0) = h(x)$ . Como (2.30) puede tener más de una raíz aislada  $z = h(x)$ , entonces se puede buscar una variedad invariante para el sistema (2.27), (2.28) en la vecindad de cada raíz. Se puede demostrar que existe un valor de  $\varepsilon^* > 0$  y una función  $H(x, \varepsilon)$  que satisfacen la condición de variedad (2.34) para todo  $\varepsilon$  que pertence al intervalo  $[0, \varepsilon^*]$  tal que

$$H(x, \varepsilon) - h(x) = O(\varepsilon), \quad (2.36)$$

para valores de  $x$  limitados. La variedad invariante  $z = H(x, \varepsilon)$  es conocida como una *variedad lenta* para el sistema (2.27), (2.28). por cada variedad lenta, existe un correspondiente modelo lento

$$\dot{x} = f(x, H(x, \varepsilon)), \quad (2.37)$$

el cuál describe de manera *exacta* el comportamiento en esa variedad.

En la mayoría de los caso, no es posible resolver de manera exacta la condición de variedad (2.34), pero se puede hacer una aproximación de  $H(x, \varepsilon)$  de manera arbitraria tan cercana como se desee utilizando una serie de Taylor en la proximidad de  $\varepsilon = 0$ . El procedimiento de aproximación inicia sustituyendo una serie de Taylor para  $H(x, \varepsilon)$  en la condición de variedad, concretamente

$$H(x, \varepsilon) = H_0(x) + \varepsilon H_1(x) + \varepsilon^2 H_2(x) + \varepsilon^3 H_3(x) + \dots, \quad (2.38)$$

y en seguida, calcular  $H_0(x)$ ,  $H_1(x)$ , y así sucesivamente, mediante la igualación de términos que tiene la misma potencia de  $\varepsilon$ . Lo anterior, requiere que las funciones  $f$  y  $g$  sean continuamente diferenciables en función de sus argumentos la cantidad de veces que sea necesario. De (2.38) se puede observar que  $H_0(x) = H(x, 0) = h(x)$ . Ahora para la ecuación de  $H_1(x)$  se tiene que

$$\frac{\partial g(x, h(x))}{\partial z} H_1(x) = \frac{\partial h}{\partial x} f(x, h(x)), \quad (2.39)$$

la cuál tiene solución única si el Jacobiano  $(\partial g/\partial z)$  es no singular en  $z = h(x)$ . La no singularidad del Jacobiano está implícita mediante la condición de los valores propios en (2.25). De forma similar que para  $H_1$ , las ecuaciones para los términos de orden superior serán lineales y tendrán solución si el Jacobiano  $(\partial g/\partial z)$  es no singular [Khalil, 2002].

Ahora para introducir la noción de una *variedad rápida*, se examina el sistema (2.27), (2.28) en la escala de tiempo  $\tau = t/\varepsilon$ . En  $\varepsilon = 0$ , entonces  $x(\tau) \equiv 0$ , mientras que  $z(\tau)$  evoluciona de acuerdo con

$$\frac{dz}{d\tau} = g(x(0), z) \quad (2.40)$$

acercandose al punto de equilibrio  $z = h(x(0))$ . Esta dinámica describe trayectorias  $(x, z)$  en el espacio  $\mathbb{R}^{n+m}$ , Las cuáles para cada  $x(0)$  dado caen en una variedad rápida  $F_x$  definida por  $x = x(0) = \text{constante}$ , y desciende de forma rápida a la variedad  $z = h(x)$ . Para valores de  $\varepsilon$  pequeños pero más grandes que cero, las variedades rápidas son *laminaciones* de las soluciones que se aproximan rápidamente a la variedad lenta [Khalil, 2002].

Con la finalidad de que los conceptos anteriores queden más claros, se utilizan los siguientes ejemplos.

**Ejemplo 2.2.** Para el siguiente sistema singularmente perturbado [Khalil, 2002]

$$\dot{x} = -x + z, \quad (2.41)$$

$$\varepsilon \dot{z} = \tan^{-1}(1 - z - x). \quad (2.42)$$

Cuando  $\varepsilon = 0$ , la única raíz de (2.30) es  $z = h(x) = 1 - x$ , la cuál es la variedad lenta del sistema. Entonces, el modelo lento correspondiente es

$$\dot{x} = -2x + 1, \quad (2.43)$$

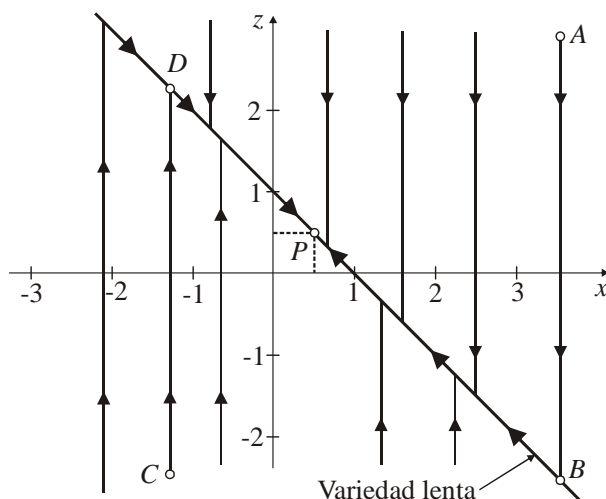


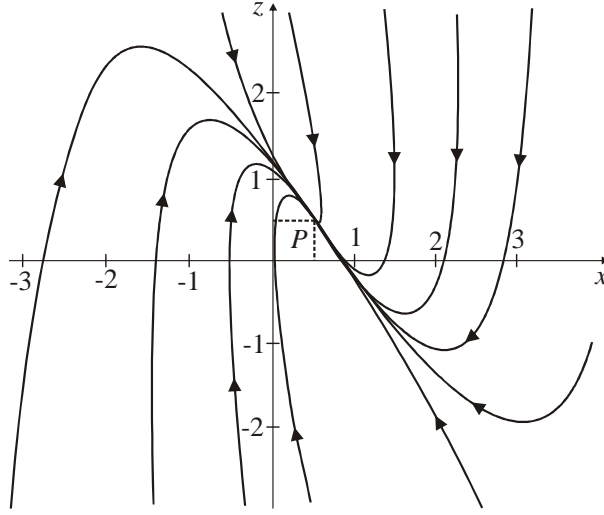
Figura 2.5: Retrato de fase aproximado del Ejemplo 2.2 cuando  $\varepsilon = 0$ .

el cuál tiene un punto de equilibrio asintóticamente estable en  $x = 0,5$ . Por eso las trayectorias sobre la variedad lenta estarán llenando hacia el punto de equilibrio  $P = (0,5,0,5)$ , como se indica en la Figura 2.5 mediante puntas de flecha.

Las variedades lentas cuando  $\varepsilon$  es igual a cero son paralelas al eje  $z$ , con las trayectorias dirigiéndose hacia la variedad lenta  $z = 1 - x$ . Con esta información se puede construir un retrato de fase aproximado del sistema. Por ejemplo una trayectoria que inicia en el punto  $A$  se moverá hacia abajo de manera vertical hasta que colisiona con la variedad lenta en el punto  $B$ . Desde allí (punto  $B$ ) la trayectoria se mueve a lo largo de la variedad hacia el punto de equilibrio  $P$ . De forma similar, una trayectoria que inicia en el punto  $C$  se moverá hacia arriba verticalmente hasta el punto  $D$  y después se moverá sobre la variedad hasta el punto de equilibrio  $P$ . Para valores pequeños de  $\varepsilon$  pero mayores que cero, el retrato de fase del sistema será similar al obtenido para  $\varepsilon = 0$ . En la Figura 2.6 se muestra el retrato de fase para  $\varepsilon = 0,1$ .

Se puede notar que los dos retratos de fase (Figura 2.5 y Figura 2.6) tiene mucha similitud [Khalil, 2002].

**Ejemplo 2.4.** Para ilustrar la posibilidad de que exista más de una variedad lenta, se


 Figura 2.6: Retrato de fase del Ejemplo 2.2 cuando  $\varepsilon = 0.1$ .

considera el siguiente sistema [Kokotovic, 1986],

$$\dot{x} = -xz, \quad (2.44)$$

$$\varepsilon \dot{z} = -(z - \sin^2 x)(z - e^{\alpha x})(z - 2e^{2\alpha x}), \quad (2.45)$$

donde  $\alpha > 0$ . La condición de variedad (2.34) (donde se cambia  $H$  mayúscula por  $h$  minúscula para indicar que es una variedad invariante cuando  $\varepsilon = 0$ ) es

$$\varepsilon \frac{\partial h}{\partial x}(-xh) = -(h - \sin^2 x)(h - e^{\alpha x})(h - 2e^{2\alpha x}), \quad (2.46)$$

se puede demostrar que para  $\varepsilon = 0$  se tienen tres variedades de equilibrio definidas por

$$z_1 = h_1(x, 0) = \sin^2 x, \quad z_2 = h_2(x, 0) = e^{\alpha x}, \quad z_3 = h_3(x, 0) = 2e^{2\alpha x}, \quad (2.47)$$

estas variedades de equilibrio se intersecan en algunos valores negativos de  $x$ , se asume que solamente son de interés cuando  $x \geq 0$ . A partir de

$$\frac{\partial g}{\partial z} = -(z - e^{\alpha x})(z - 2e^{2\alpha x}) - (z - \sin^2 x)(z - 2e^{2\alpha x}) - (z - \sin^2 x)(z - e^{\alpha x}), \quad (2.48)$$

sustituyendo, se puede demostrar que  $h_1(x, 0)$  y  $h_3(x, 0)$  son estables, mientras que  $h_2(x, 0)$  es inestable.

## 2.5. Variedades Lentas y Rápidas

Se debe recordar que las soluciones  $x(t, \varepsilon)$ ,  $z(t, \varepsilon)$  del sistema singularmente perturbado (2.6), (2.7) son funciones del tiempo, y consisten de una capa frontera rápida y un estado cuasi-estacionario lento. Es decir, la capa es significativa solamente en  $z(t, \varepsilon)$ , mientras que  $x(t, \varepsilon)$  es predominantemente lento a partir de que su capa no es mayor que  $O(\varepsilon)$ . Entonces para dar un punto de vista geométrico del comportamiento de las dos escalas de tiempo de  $x(t, \varepsilon)$ ,  $z(t, \varepsilon)$  como trayectorias en  $\mathbb{R}^{n+m}$ . Se puede considerar una forma más simple del sistema (2.6), (2.7) concretamente el sistema representado en (2.27), (2.28), donde para poder considerar variedades invariantes en el tiempo se elimina la dependencia de  $t$  y en lo que concierne a  $\varepsilon$ , se remueve solamente para simplificar la notación [Kokotovic, 1986].

En el espacio de estados  $(n+m)$ -dimensional de  $x$  y  $z$ , una variedad de dimensión  $n$  denotada por  $M_\varepsilon$ , la cual es dependiente del parámetro escalar  $\varepsilon$ , puede ser definida por la expresión [Kokotovic, 1986],

$$M_\varepsilon : z = \phi(x, \varepsilon); \quad x \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}^m; \quad (2.49)$$

donde se asume que  $\phi$  es una función continuamente diferenciable con respecto de  $x$  y  $\varepsilon$ , esta diferenciación debe de ser las suficientes veces que sea necesaria. Con lo anterior la dimensión del espacio de estado se reduce de  $n+m$  a  $n$ , limitando a la variable de estado a permanecer en la variedad  $M_\varepsilon$ . Por ejemplo, si en  $\mathbb{R}^3$  se tiene  $n=2$  y  $m=1$ , entonces  $M_\varepsilon$  será una superficie definida por una ecuación escalar (2.49), mientras que para  $n=1$  y  $m=2$  las dos ecuaciones escalares (2.49) definirán una curva. Si la expresión (2.49) se mantiene para todo  $t > t^*$ , entonces se puede concluir que  $M_\varepsilon$  es una *variedad invariante* del sistema representado por (2.27), (2.28), es decir,

$$z(t^*, \varepsilon) = \phi(x(t^*, \varepsilon), \varepsilon) \Rightarrow z(t, \varepsilon) = \phi(x(t, \varepsilon), \varepsilon) \quad \text{para todo } t \geq t^*. \quad (2.50)$$

Derivando (2.50) con respecto al tiempo  $t$ , se obtiene,

$$\dot{z} = \frac{d}{dt} \phi(x(t, \varepsilon), \varepsilon) = \frac{\partial \phi}{\partial x} \dot{x}. \quad (2.51)$$

Multiplicando (2.51) por el escalar  $\varepsilon$ , y después sustituyendo las primeras derivadas de  $x$  y  $z$  de (2.27), (2.28), respectivamente, y finalmente sustituyendo  $z$  a partir de (2.49), se obtiene

una *condición de variedad*,

$$\varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial x} f(x, \phi(x, \varepsilon)) = g(x, \phi(x, \varepsilon)), \quad (2.52)$$

donde  $\phi(x, \varepsilon)$  debe satisfacer a (2.52) para cualquier  $x$  de interés y para todo  $\varepsilon$  en el intervalo  $[0, \varepsilon^*]$ , donde  $\varepsilon^*$  es una constante positiva. Ahora, suponiendo  $\varepsilon = 0$  para la variedad  $M_\varepsilon$  en la condición de variedad (2.52), se tiene

$$M_0 : z = \phi(x, 0); \quad 0 = g(x, \phi(x, 0)). \quad (2.53)$$

Observando (2.53) se reconocen las expresiones (2.8), (2.9) obtenidas de manera formal cuando se desprecia  $\varepsilon$  en el sistema (2.6), (2.7). Con lo anterior, se entiende que pueden existir varias funciones  $\phi(x, 0)$  que satisfagan (2.53), y por lo tanto existirán varias variedades  $M_0$ . De acuerdo con la Hipótesis 2.1, las variedades resultantes no tendrán puntos en común, es decir, no se intersecan una con las otras y no son tangenciales en el dominio de interés. Para tener una mejor comprensión de la variedad  $M_0$  se reescribe (2.27), (2.28) en la escala de tiempo rápido  $\tau$ , definida por (2.19), (2.20) [Kokotovic, 1986]. A partir de

$$\frac{dx}{d\tau} = \varepsilon f(x, z), \quad \frac{dz}{d\tau} = g(x, z), \quad (2.54)$$

Se puede concluir que en  $\varepsilon = 0$  tanto  $dx/d\tau$  como  $dz/d\tau$  valen cero para  $z = \phi(x, 0)$ . Por lo tanto,  $M_0$  es una variedad de equilibrio de (2.54) en  $\varepsilon = 0$ . Si la Hipótesis 2.3 se satisface para todo  $x, z$  que permanecen en la variedad  $M_0$ , entonces  $M_0$  es una variedad atrayente estable.

De acuerdo con el Teorema 2.1 la existencia de una variedad de equilibrio condicionalmente estable  $M_0$  de (2.54) para  $\varepsilon = 0$  implica la existencia de una variedad invariante  $M_\varepsilon$  de (2.27), (2.28) que satisface la condición de variedad (2.52) para todo  $\varepsilon \in [0, \varepsilon^*]$  y converge a  $M_0$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  [Kokotovic, 1986], esto es,

$$\phi(x, \varepsilon) \rightarrow \phi(x, 0), \quad \text{y} \quad M_\varepsilon \rightarrow M_0 \quad \text{cuando} \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.55)$$

Se puede llegar a una comprensión más profunda si la desviación de  $z$  a partir de  $M_\varepsilon$  es representada mediante una nueva variable

$$\eta = z - \phi(x, \varepsilon). \quad (2.56)$$

Ahora el sistema (2.27) (2.28) en términos de las variables  $x$  y  $\eta$ , se convierte en,

$$\dot{x} = f(x, \phi(x, \varepsilon) + \eta), \quad (2.57)$$

$$\varepsilon \dot{\eta} = g(x, \phi(x, \varepsilon) + \eta) - \varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial x} f(x, \phi(x, \varepsilon) + \eta). \quad (2.58)$$

Por lo que ahora la variedad invariante  $M_\varepsilon$  es descrita mediante el hecho de que  $\eta = 0$  implica para  $\dot{\eta} = 0$  todo  $x$  para el cuál la condición de variedad (2.52) se cumple. De este modo, si la condición inicial de la nueva variable  $\eta$  es cero ( $\eta(t_0) = 0$ ), el modelo a resolver será,

$$\dot{x} = f(x, \phi(x, \varepsilon)), \quad x(t_0) = x^0. \quad (2.59)$$

Por lo que (2.52) es *el modelo lento exacto* del sistema (2.27), (2.28) válido para todo  $x, z$  que pertenecen a la variedad invariante  $M_\varepsilon$ .

El modelo reducido (2.11) es su aproximación en la cuál  $\phi(x, \varepsilon)$  es remplazada por  $\phi(x, 0)$ . Se puede decir que  $M_\varepsilon$  es una *variedad lenta* de (2.27), (2.28) tal que la variedad lenta corresponde a un modelo lento (2.59) [Kokotovic, 1986].

Para introducir la idea de una variedad rápida se investiga el comportamiento de  $\eta$  en la escala de tiempo rápido  $\tau$ , esto se realiza sustituyendo (2.56) en (2.54) y haciendo que  $\varepsilon \rightarrow 0$ , se puede observa que la nueva variable  $\eta$  cuando  $\varepsilon = 0$  está definida por el sistema de capa frontera

$$\frac{d\eta}{d\tau} = g(x^0, \phi(x^0, 0) + \eta), \quad \eta^0 = z^0 - \phi(x^0, 0), \quad (2.60)$$

el cuál ya fue encontrado en (2.21). Este sistema describe las trayectorias de las variables  $x$  y  $\eta$ , para un  $x^0$  lo cual da una *variedad rápida* de  $F_x$  definida por  $x = x^0 = \text{constante}$ , y que rápidamente desciende a una variedad de equilibrio  $M_0$ . Para un valor de  $\varepsilon$  dado más grande que cero pero pequeño, las variedades rápidas son *laminaciones* de soluciones que rápidamente se acercan a la variedad lenta  $M_\varepsilon$  [Kokotovic, 1986].

Esto puede quedar más claro mediante los siguientes ejemplos.

**Ejemplo 2.3.** Para el sistema

$$\dot{x} = xz^3, \quad \varepsilon \dot{z} = -z - x^{\frac{4}{3}} + \frac{4}{3}\varepsilon x^{\frac{16}{3}}, \quad (2.61)$$

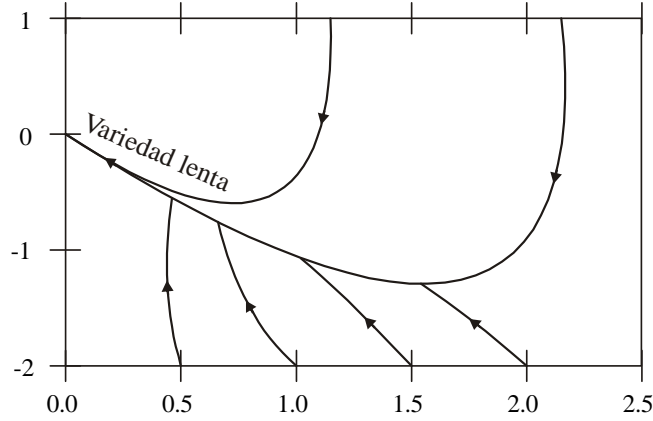


Figura 2.7: Trayectorias del sistema (2.61)

La condición de variedad (2.52) es

$$\varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial x} x \phi^3 = -\phi - x^{\frac{4}{3}} + \frac{4}{3} \varepsilon x^{\frac{16}{3}}, \quad (2.62)$$

Se puede verificar que la ecuación anterior es satisfecha por

$$z = \phi(x, \varepsilon) = -x^{\frac{4}{3}}. \quad (2.63)$$

En este caso muy especial  $M_\varepsilon$  no solamente tiene una expresión analítica simple, sino que coincide con  $M_0$ , ya que (2.63) no depende del valor de  $\varepsilon$ . Además,  $\frac{\partial g}{\partial z} = -1$ , la variedad lenta es estable, ver las trazas en la Figura 2.7. El modelo lento (2.59) para  $z(t_0) = -[x(t_0)]^{\frac{4}{3}}$  y todo  $\dot{x} = -x^5$ .

**Ejemplo 2.4.** Para ilustrar la posibilidad de varias variedades lentas, se considera el siguiente sistema,

$$\dot{x} = -xz, \quad \varepsilon \dot{z} = -(z - \sin^2 x)(z - e^{\alpha x})(z - 2e^{2\alpha x}), \quad \alpha > 0, \quad (2.64)$$

La condición de variedad (2.52) es

$$\varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial x} (-x\phi) = -(\phi - \sin^2 x)(\phi - e^{\alpha x})(\phi - 2e^{2\alpha x}), \quad (2.65)$$

se puede observar que para  $\varepsilon = 0$  se tienen tres variedades de equilibrio definidas por

$$M_0^1 = \phi_1(x, 0) = \sin^2 x, \quad M_0^2 = \phi_2(x, 0) = e^{\alpha x}, \quad M_0^3 = \phi_3(x, 0) = 2e^{2\alpha x}, \quad (2.66)$$

las variedades de equilibrio se intersecan en algunos valores negativos de  $x$ , se asume que solamente son de interés cuando  $x \geq 0$ . A partir de

$$\frac{\partial g}{\partial z} = -(z - e^{\alpha x})(z - 2e^{2\alpha x}) - (z - \sin^2 x)(z - 2e^{2\alpha x}) - (z - \sin^2 x)(z - e^{\alpha x}), \quad (2.67)$$

sustituyendo, se puede demostrar que  $M_0^1$  y  $M_0^3$  son estables, mientras que  $M_0^2$  es inestable [Kokotovic, 1986].

## Capítulo 3

# Sistemas No-Lineales

# Singularmente Perturbados

# Modelados en Bond Graph

### 3.1. Introducción

Cuando se modelan, analizan y diseñan sistemas dinámicos en circuitos eléctricos, sistemas mecánicos, sistemas de control u otras disciplinas de la ingeniería, se observa que existen una gran cantidad de sistemas que contienen en su representación matemática no linealidades.

La mayoría de los modelos matemáticos usados tradicionalmente por teóricos y prácticos del control son lineales. De hecho los modelos lineales son mucho más manejables (sus dinámicas son menos complejas) que los no-lineales, y pueden representar en forma precisa el comportamiento de algunos sistemas reales. Pero existen fenómenos no-lineales como son los sistemas de control de vuelo, robots manipuladores, sistema de estructura de ala de avión, sistemas de inyección de combustible de alto rendimiento, máquinas eléctricas, etc., en los cuales no se puede encontrar una forma de describir su dinámica mediante modelos lineales [Khalil, 1996].

Una ventaja de diseño del modelado y control de sistemas en escala de dos tiempos es que no está restringido a los sistemas lineales. Partiendo de la suposición de que las dinámicas

lenta y rápida asociadas a un sistema son asintóticamente estables [Kokotovic, 1986].

Los sistemas dinámicos modelados por un número finito de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden acopladas entre sí [Khalil, 1996],

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_p), \\ \dot{x}_2 &= f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_p), \\ &\vdots = \vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_p),\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde  $\dot{x}_i$  denota la derivada de  $x_i$  con respecto a la variable de tiempo  $t$ , y  $u_1, u_2, \dots, u_p$  representan las variables de entrada. Las variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$  se denominan variables de estado. Reescrito en forma compacta queda,

$$\dot{x} = f(t, x, u).\tag{3.2}$$

En muchas ocasiones, la entrada  $u$  no aparece de manera explícita en (3.2), pero no necesariamente quiere decir que  $u = 0$ , sino que la entrada puede haber sido introducida como una función de estado mediante una retroalimentación, a ésta ecuación de estado se le conoce como *no forzada*,

$$\dot{x} = f(t, x).\tag{3.3}$$

Un caso especial de (3.3) surge cuando la función  $f$  no es dependiente del tiempo  $t$ , es decir,

$$\dot{x} = f(x),\tag{3.4}$$

en este caso el sistema es conocido como *invariante en el tiempo* o *estacionario*.

Un concepto importante relacionado con las ecuaciones de estado es el *punto de equilibrio*. un punto  $x = x^*$  en el espacio de estado es un punto de equilibrio de (3.4) si tiene la propiedad de que cuando el sistema inicia su dinámica en  $x^*$ , el estado permanece en el punto  $x^*$  durante todo el tiempo futuro [Khalil, 1996]. Para los sistemas estacionarios (3.4) los puntos de equilibrio son las raíces reales de la ecuación

$$f(x) = 0,\tag{3.5}$$

Un punto de equilibrio puede ser aislado, es decir, que no hay otros puntos de equilibrio en su vecindad, o podría haber una continuidad de puntos de equilibrio. Para sistemas lineales, el modelo de espacio de estado (3.2) toma la forma

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad (3.6)$$

Siempre es conveniente linealizar el sistema alrededor de algún punto de equilibrio (ya que las técnicas de análisis de sistemas lineales son bastante conocidas) y analizar el modelo lineal resultante. Es cierto que, con la linealización se puede aprender mucho del comportamiento del sistema no lineal en la vecindad de un punto de operación, sin embargo esto no es suficiente. Hay dos limitaciones básicas de la linealización. Primero, dado que la linealización es una aproximación en la vecindad de un punto de operación, ésta sólo puede predecir el comportamiento *local* del sistema no lineal en la cercanía de ese punto. Ésta no puede predecir el comportamiento lejos del punto de operación. Segundo, las dinámicas de un sistema no lineal son mucho más sofisticadas que las dinámicas de un sistema lineal [Khalil, 1996].

Existen fenómenos esencialmente no lineales que no pueden ser descritos o predichos mediante modelos lineales. Algunos ejemplos de estos fenómenos son: escape a infinito en tiempo finito, múltiples puntos de equilibrio aislados, ciclos límite, etc. Existe una gran variedad de sistemas no-lineales, los cuales se pueden agrupar en diferentes clases dependiendo del tipo de no linealidad que manifiestan.

### 3.2. Análisis de estabilidad en sistemas singularmente perturbados estacionarios

Cosiderando un sistema singularmente perturbado estacionario no lineal [Kokotovic, 1986]. La nomenclatura de las variables lentas se cambia de  $x$  a  $x_1$  y las variables rápidas de  $z$  a  $x_2$  para evitar una confusión con la variable de co-energía de la metodología de bond graph denotada por la letra  $z$ . Entonces

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f(x_1, x_2), & x_1 &\in \mathbb{R}^n, \\ \varepsilon \dot{x}_2 &= g(x_1, x_2), & x_2 &\in \mathbb{R}^m, \end{aligned} \quad (3.7)$$

el cual tiene un punto de equilibrio aislado en el origen  $x_1 = 0, x_2 = 0$ . Se asume que  $f$  y  $g$  son suficientemente regulares, es decir, sin cambios bruscos, para asegurar que para condiciones iniciales especificadas, (3.7) tiene una solución única. La estabilidad del punto de equilibrio se encuentra mediante la examinación del sistema lento reducido

$$\dot{x}_1 = f(x_1, h(x_1)), \quad (3.8)$$

donde  $x_2 = h(x_1)$  es una raíz aislada de  $0 = g(x_1, x_2)$ , y el sistema capa límite rápido

$$\frac{dx_2}{d\tau} = g(x_1, x_2(\tau)), \quad \tau = \frac{t}{\varepsilon} \quad (3.9)$$

donde  $x_1$  se considera un parámetros fijo. La Hipótesis 2.1 establece que si  $x_1 = 0$  es un punto de equilibrio asintóticamente estable del sistema reducido (3.8),  $x_2 = h(x_1)$  es un punto de equilibrio asintóticamente estable del sistema capa límite (3.9), uniformemente en  $x_1$ , y  $f(\cdot, \cdot)$  y  $g(\cdot, \cdot)$  satisfacen ciertas condiciones de crecimiento, entonces el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable del sistema singularmente perturbado (3.7) [Kokotovic, 1986].

Analizando el sistema que varía lentamente

$$\varepsilon \dot{x}_2(t) = A(x_1(t))x_2(t), \quad x_2 \in \mathbb{R}^m, \quad (3.10)$$

donde  $x_1(t)$  satisface

$$\dot{x}_1(t) = f(x_1(t)), \quad x_1 \in \mathbb{R}^n. \quad (3.11)$$

Esto supone que para todo  $t \geq 0$ ,  $x(t) \in S$ , donde  $S$  es un subconjunto limitado cerrado de  $\mathbb{R}^n$ . Esta suposición no requiere que la trayectoria  $x_1(t)$  converja a algún límite cuando  $t \rightarrow \infty$ . Ésta simplemente requiere que  $x_1(t)$  permanezca limitada cuando  $t \rightarrow \infty$ . Ahora, en lugar de tener  $A$  como una función explícita del tiempo  $t$ ,  $A$  dependa de  $x_1$ , la cuál depende de  $t$ . Entonces, los eigenvalores o valores propios de  $A$  están uniformemente en el semiplano izquierdo, es decir,

$$\operatorname{Re} \lambda(A(x_1)) \leq -c_1 < 0, \quad \operatorname{Re} \lambda \left\{ \frac{\partial g}{\partial x_2} \right\} \leq -c_1 < 0, \quad (3.12)$$

esto implica que  $x_2(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$  [Kokotovic, 1986].

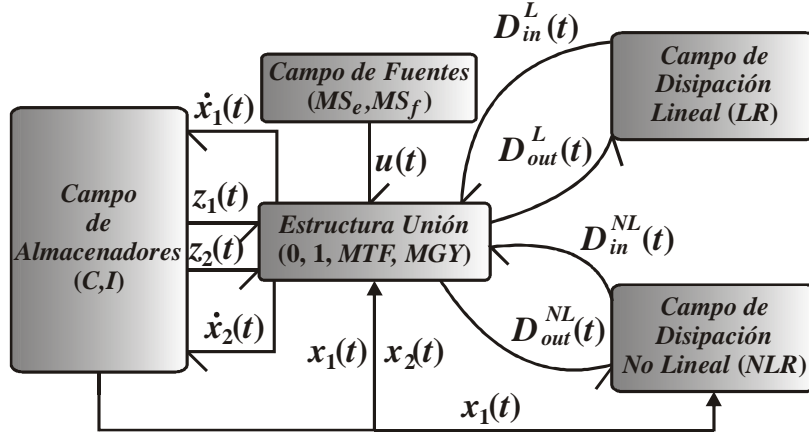


Figura 3.1: Estructura unión de un BGI para una clase de sistemas no lineales con elementos disipadores no lineales.

### 3.3. Modelado en bond graph de una clase de sistemas no lineales con perturbaciones singulares

Como se indica en el Apéndice A, los modelos dinámicos para una variedad de sistemas físicos se pueden construir usando elementos  $-R$ ,  $-C$ ,  $-I$ ,  $MS_e$ ,  $MS_f$ ; elementos  $MTF$  y  $MGY$ ; y uniones 0 y 1. El concepto de estructura unión, es una recopilación de elementos conservadores de potencia [Sueur, 1991]. En la Figura 3.1 se muestra la estructura unión y los vectores clave de una clase de sistemas no lineales en bond graph con asignación de causalidad integral (BGI).

Los estados  $x_1(t) \in \mathbb{R}^n$  y  $x_2(t) \in \mathbb{R}^m$  están compuestos de variables de energía  $p(t)$  y  $q(t)$  asociadas con elementos  $I$  y  $C$  en causalidad integral para dinámicas lentas y rápidas respectivamente;  $u(t) \in \mathbb{R}^p$  denota las entradas a la planta;  $z_1(t) \in \mathbb{R}^n$  y  $z_2(t) \in \mathbb{R}^m$  son los vectores de co-energía para las dinámicas lentas y rápidas respectivamente;  $D_{in}^L(t) \in \mathbb{R}^r$ ,  $D_{in}^{NL}(t, x_1) \in \mathbb{R}^r$ ,  $D_{out}^L(t) \in \mathbb{R}^r$  y  $D_{out}^{NL}(t, x_1) \in \mathbb{R}^r$  son una mezcla de esfuerzos y flujos que contienen los intercambios energéticos entre el campo de disipación y la estructura de unión. Las relaciones constitutivas del campo de almacenamiento son:

$$z_1(t) = F_1 x_1(t), \quad z_2(t) = F_2 x_2(t), \quad (3.13)$$

y las relaciones constitutivas del campo de disipación pueden ser lineales o no lineales y son descritar por

$$D_{out}^L(t) = L^L D_{in}^L(t), \quad D_{out}^{NL}(t) = L^{NL}(x_1) D_{in}^{NL}(t), \quad (3.14)$$

donde  $L^{NL}(x_1)$  contiene las funciones no lineales en términos de las variables lentas  $x_1$ . Los términos no lineales de la clase de sistemas no lineales en este ejemplo son representados por elementos *MTF* y *MGY* modulados mediante variables de estado, y las relaciones constitutivas no lineales son reproducidas por elementos de disipación. Además de que todos los elementos almacenadores aceptan una asignación de causalidad integral. Las relaciones de la estructura unión son definidas por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \frac{D_{in}^L(t)}{D_{in}^{NL}(t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}^{11}(x) & S_{11}^{12}(x) & S_{12}^{11}(x) & S_{12}^{12}(x) & S_{13}^{11}(x) \\ S_{11}^{21}(x) & S_{11}^{22}(x) & S_{12}^{21}(x) & S_{12}^{22}(x) & S_{13}^{21}(x) \\ S_{21}^{11}(x) & S_{21}^{12}(x) & S_{22}^{11}(x) & S_{22}^{12}(x) & S_{23}^{11}(x) \\ S_{21}^{21}(x) & S_{21}^{22}(x) & S_{22}^{21}(x) & S_{22}^{22}(x) & S_{23}^{21}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \frac{D_{out}^L(t)}{D_{out}^{NL}(t)} \\ u(t) \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

Los elementos de la matriz  $S$  toman valores dentro del conjunto  $\{0, \pm 1, \pm k_t(x), \pm k_g(x)\}$  donde  $k_t(x)$  y  $k_g(x)$  representan los módulos de los transformadores y de los giradores, respectivamente. Estos módulos pueden ser variables  $p(t)$  y  $q(t)$  asociadas con elementos  $I$  y  $C$  en causalidad integral, respectivamente. También se debe notar que  $S_{11}^{11}(x)$ ,  $S_{11}^{22}(x)$ ,  $S_{22}^{11}(x)$  y  $S_{22}^{22}(x)$  son matrices cuadradas anti-simétricas; y  $S_{12}^{11}(x)$ ,  $S_{12}^{12}(x)$ ,  $S_{11}^{12}(x)$ ,  $S_{21}^{11}(x)$  son matrices transpuestas negativas de  $S_{21}^{11}(x)$ ,  $S_{21}^{21}(x)$ ,  $S_{21}^{12}(x)$ ,  $S_{11}^{21}(x)$  respectivamente.

Las relaciones de entrada y salida de la estructura unión de la Figura 3.1 determinan a (3.15). Entonces, a partir de la tercera línea de (3.15) se obtienen los vectores de disipación, usando (3.13) y (3.14), para el vector de disipación lineal

$$D_{in}^L(t) = T(x) [D_{in}^L(t)_1 + D_{in}^L(t)_2 + D_{in}^L(t)_3], \quad (3.16)$$

y para el vector de disipación no lineal

$$D_{in}^{NL}(t) = M^{NL}(x) [D_{in}^{NL}(t)_1 + D_{in}^{NL}(t)_2 + D_{in}^{NL}(t)_3 + D_{in}^{NL}(t)_4], \quad (3.17)$$

donde

$$T(x) = [I - M^L(x) S_{22}^{12}(x) L^{NL}(x_1) M^{NL}(x) S_{22}^{21}(x) L^L]^{-1} M^L(x), \quad (3.18)$$

$$M^L(x) = [I - S_{22}^{11}(x) L^L]^{-1}, \quad M^{NL}(x) = [I - S_{22}^{22}(x) L^{NL}(x_1)]^{-1}, \quad (3.19)$$

y

$$\begin{aligned} D_{in}^L(t)_1 &= S_{21}^{11}(x) z_1(t) + S_{21}^{12}(x) z_2(t), \\ D_{in}^L(t)_2 &= S_{22}^{12}(x) L^{NL}(x_1) M^{NL}(x) [S_{21}^{21}(x) z_1(t) + S_{21}^{22}(x) z_2(t) + S_{23}^{21}(x) u(t)], \\ D_{in}^L(t)_3 &= S_{23}^{11}(x) u(t), \\ D_{in}^{NL}(t)_1 &= S_{21}^{21}(x) z_1(t) + S_{21}^{22}(x) z_2(t), \\ D_{in}^{NL}(t)_2 &= S_{22}^{21}(x) L^L T(x) M^L(x) [S_{21}^{11}(x) z_1(t) + S_{21}^{12}(x) z_2(t)], \\ D_{in}^{NL}(t)_3 &= S_{22}^{22}(x) L^L T(x) M^L(x) S_{21}^{12}(x) L^{NL}(x_1) M^{NL}(x) \cdot \\ &\quad [S_{21}^{21}(x) z_1(t) + S_{21}^{22}(x) z_2(t) + S_{23}^{21}(x) u(t)], \\ D_{in}^{NL}(t)_4 &= [I - S_{22}^{11} * L^L]^{-1}, \quad M^{NL}(x) = [I - S_{22}^{22} * L^{NL}]^{-1}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

Como las matrices  $S_{11}^{11}(x)$ ,  $S_{11}^{22}(x)$ ,  $S_{22}^{11}(x)$  y  $S_{22}^{22}(x)$  son matrices cuadradas anti simétricas, entonces los términos (3.18) y (3.19) serán estructuralmente invertibles, pero los valores numéricos de las variables de estado  $x$  pueden tener algunas singularidades que eviten la inversión de las matrices, así que es necesario evitar estos valores.

Mediante la sustitución de (3.13), (3.14), (3.16) y (3.17) en la primera y en la segunda línea de (3.15) las ecuaciones de estado para la clase de sistemas no lineales con perturbaciones singulares en un enfoque de bond graph está definido por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \varepsilon \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}(x) & A_{12}(x) \\ A_{21}(x) & A_{22}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1(x) \\ B_2(x) \end{bmatrix} u(t). \quad (3.21)$$

La matriz  $A_{11}(x)$  es

$$A_{11}(x) = [A_{11}(x)_1 + A_{11}(x)_2] F_1, \quad (3.22)$$

donde

$$\begin{aligned}
 A_{11}(x)_1 &= S_{11}^{11}(x) + S_{12}^{11}(x) L^L T(x) \Phi(x), \\
 A_{11}(x)_2 &= S_{12}^{12}(x) L^{NL}(x_1) M^{NL}(x) [S_{21}^{21}(x) + S_{22}^{21}(x) L^L T(x) \Phi(x)], \\
 \Phi(x) &= S_{21}^{11}(x) + S_{22}^{12}(x) L^{NL}(x_1) M^{NL}(x) S_{21}^{21}(x).
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Para la matrix  $A_{12}(x)$  se tiene

$$A_{12}(x) = [A_{12}(x)_1 + A_{12}(x)_2] F_2, \tag{3.24}$$

donde

$$\begin{aligned}
 A_{12}(x)_1 &= S_{11}^{12}(x) + S_{12}^{11}(x) L^L T(x) \Gamma(x), \\
 A_{12}(x)_2 &= S_{12}^{12}(x) L^{NL}(x_1) M^{NL}(x) [S_{21}^{22}(x) + S_{22}^{21}(x) L^L T(x) \Gamma(x)], \\
 \Gamma(x) &= S_{21}^{12}(x) + S_{22}^{12}(x) L^{NL}(x_1) M^{NL}(x) S_{21}^{21}(x).
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

El vector  $B_1(x)$  es

$$B_1(x) = B_1(x)_1 + B_1(x)_2, \tag{3.26}$$

donde

$$\begin{aligned}
 B_1(x)_1 &= S_{13}^{11}(x) + S_{12}^{11}(x) L^L T(x) \Psi(x), \\
 B_1(x)_2 &= S_{12}^{12}(x) L^{NL}(x_1) M^{NL}(x) [S_{23}^{21}(x) + S_{22}^{21}(x) L^L T(x) \Psi(x)], \\
 \Psi(x) &= S_{23}^{11}(x) + S_{22}^{12}(x) L^{NL}(x_1) M^{NL}(x) S_{23}^{21}(x).
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

Para la matriz  $A_{21}(x)$ , con  $\varepsilon = F_2^{-1}$ , se tiene que

$$A_{21}(x) = F_2^{-1} [A_{21}(x)_1 + A_{21}(x)_2] F_1, \tag{3.28}$$

donde

$$\begin{aligned}
 A_{21}(x)_1 &= S_{11}^{21}(x) + S_{12}^{21}(x) L^L T(x) \Lambda(x), \\
 A_{21}(x)_2 &= S_{12}^{22}(x) L^{NL}(x_1) M^{NL}(x) [S_{21}^{21}(x) + S_{22}^{21}(x) L^L T(x) \Lambda(x)], \\
 \Lambda(x) &= S_{21}^{11}(x) + S_{12}^{22}(x) L^{NL}(x_1) M^{NL}(x) S_{21}^{21}(x).
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

La matriz  $A_{22}(x)$  se tiene que

$$A_{22}(x) = F_2^{-1} [A_{22}(x)_1 + A_{22}(x)_2] F_2, \quad (3.30)$$

donde

$$\begin{aligned} A_{22}(x)_1 &= S_{11}^{22}(x) + S_{12}^{21}(x) L^L T(x) \Upsilon(x), \\ A_{22}(x)_2 &= S_{12}^{22}(x) L^{NL}(x_1) M^{NL}(x) [S_{21}^{22}(x) + S_{22}^{21}(x) L^L T(x) \Upsilon(x)], \\ \Upsilon(x) &= S_{21}^{12}(x) + S_{22}^{12}(x) L^{NL}(x_1) M^{NL}(x) S_{21}^{22}(x). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Y el vector  $B_2(x)$  se tiene que

$$B_2(x) = F_2^{-1} [B_2(x)_1 + B_2(x)_2], \quad (3.32)$$

donde

$$\begin{aligned} B_2(x)_1 &= S_{13}^{21}(x) + S_{12}^{21}(x) L^L T(x) \Pi(x), \\ B_2(x)_2 &= S_{12}^{22}(x) L^{NL}(x_1) M^{NL}(x) [S_{23}^{21}(x) + S_{22}^{21}(x) L^L T(x) \Pi(x)], \\ \Pi(x) &= S_{23}^{11}(x) + S_{22}^{12}(x) L^{NL}(x_1) M^{NL}(x) S_{23}^{21}(x). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Dependiendo de la causalidad de los elementos  $MTF$  y  $MGY$  modulados por variables de estado, estas variables pueden estar en el numerador o en el denominador. Entonces, el problema de singularidad debido a los valores numéricos puede ser encontrado dentro de las submatrices de la estructura unión  $S(x)$  y/o  $M(x)$ .

Es importante validar la Hipótesis 2.3 para la clase particular de sistemas no lineales dado en (3.21) entonces de (2.7) y de la segunda línea de (3.15) la función no lineal de la dinámica rápida es

$$g = A_{21}(x) x_1(t) + A_{22}(x) x_2(t) + B_2(x) u(t). \quad (3.34)$$

Ahora, aplicando (2.25), la Hipótesis 2.3 para este tipo de sistemas está definida por

$$\operatorname{Re} \lambda \left\{ \frac{\partial}{\partial x_2} [A_{21}(x) x_1(t)] + \frac{\partial}{\partial x_2} [A_{22}(x) x_2(t)] + \frac{\partial}{\partial x_2} [B_2(x) u(t)] \right\} \leq -c < 0. \quad (3.35)$$

En este trabajo se considera que se satisfacen (3.35) y las Hipótesis 2.1 y 2.2 para confirmar el Teorema 2.1.

**Hipótesis 4.1.** Los elementos *MTF* y *MGY* pueden ser modulados mediante variables de estado que representan:

- La dinámica lenta, entonces la ecuación algebraica dada por

$$A_{21}(\bar{x}_2) \bar{x}_1(t) + A_{22}(\bar{x}_2) \bar{x}_2(t) + B_2(\bar{x}_2) u(t) = 0, \quad (3.36)$$

tiene que ser resuelta en términos de (2.9). La solución de esta ecuación algebraica es una posible restricción de esta clase de sistemas no lineales ya que es una condición necesaria para obtener el modelo de estado cuasi-estacionario del sistema.

- La dinámica lenta, entonces la ecuación algebraica

$$A_{21}(\bar{x}_1) \bar{x}_1(t) + A_{22}(\bar{x}_1) \bar{x}_2(t) + B_2(\bar{x}_1) u(t) = 0, \quad (3.37)$$

puede ser resuelta en términos de (2.9).

Para la clase de sistemas no lineales considerada en este ejemplo, la suposición de que existe solución a las ecuaciones algebraicas (3.36) o (3.37) puede ser escrita como

$$\bar{x}_2(t) = -[A_{22}(\bar{x}_1)]^{-1} A_{21}(\bar{x}_1) \bar{x}_1(t) - [A_{22}(\bar{x}_1)]^{-1} B_2(\bar{x}_1) u(t), \quad (3.38)$$

y el modelo de estado cuasi-estacionario, considerando que la matriz  $A_{22}(\bar{x}_1)$  es no singular (que la matriz sea invertible), es

$$\dot{\bar{x}}_1(t) = A_0(\bar{x}_1) \bar{x}_1(t) + B_0(\bar{x}_1) u(t), \quad (3.39)$$

donde

$$\begin{aligned} A_0(\bar{x}_1) &= A_{11}(\bar{x}_1) - A_{12}(\bar{x}_1) [A_{22}(\bar{x}_1)]^{-1} A_{21}(\bar{x}_1), \\ B_0(\bar{x}_1) &= B_1(\bar{x}_1) - A_{12}(\bar{x}_1) [A_{22}(\bar{x}_1)]^{-1} B_2(\bar{x}_1). \end{aligned} \quad (3.40)$$

En la siguiente sección, se propone una estructura unión de un bond graph para obtener el modelo de estado cuasi-estacionario.

### 3.3.1. Modelo de perturbación singular estándar en bond graph

En esta sección se presenta una técnica directa para determinar las raíces a partir de la ecuación algebraica y el modelo de estado cuasi-estacionario. La Figura 3.2 muestra un esquema para analizar las propiedades de un sistema singularmente perturbado con elementos

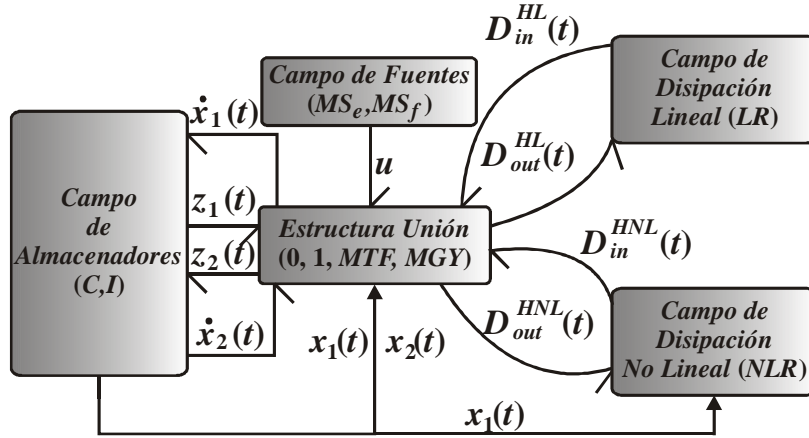


Figura 3.2: Estructura unión de un SPNBG para una clase de sistemas no lineales con elementos disipadores no lineales.

de disipación no lineal que dependen de los estados lentos en bond graph llamado Bond Graph No lineal Singularmente Perturbado (SPNBG).

Para el SPNBG se propone asignar una causalidad derivativa a los elementos de almacenamiento de energía que representan la dinámica rápida y mantener una causalidad integral en los elementos almacenadores de energía relacionados con la dinámica lenta como lo enuncia el Lema 4.1 siguiente.

La Figura 3.2 muestra que el vector clave de los elementos de almacenamiento  $(\dot{x}_2, z_2)$  han cambiando con respecto a la Figura 3.1 debido a la asignación de causalidad de estos elementos. También, los vectores clave de los elementos de disipación  $(D_{in}^{HL}, D_{out}^{HL}$  y  $D_{in}^{HNL}, D_{out}^{HNL})$  de la Figura 3.2 pueden ser diferentes con respecto a los vectores clave  $(D_{in}^L, D_{out}^L$  y  $D_{in}^{NL}, D_{out}^{NL})$  de la Figura 3.1 dependiendo de la causalidad del resto de los elementos disipadores no lineales que dependen de los estados lentos del bond graph.

La nueva estructura unión para esta clase de sistemas no lineales se presenta en el siguiente lema.

**Lema 4.1** *Considerando una clase de sistemas no lineales singularmente perturbados definida por el producto de variables de estados y/o relaciones constitutivas del campo de disipación pueden ser no lineales, satisfaciendo (3.35) y que la matriz  $A_{22}(x)$  sea no singular; este sis-*

tema es modelado mediante bond graph de acuerdo a el esquema de la Figura 3.2 donde los elementos de almacenamiento de la dinámica rápida tienen una asignación de causalidad derivativa y los elementos de almacenamiento de la dinámica lenta tienen una asignación de causalidad integral cuya estructura unión está dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \hline z_2(t) \\ \hline D_{in}^{HL}(t) \\ \hline D_{in}^{HNL}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11}^{11}(x) & H_{11}^{12}(x) & H_{12}^{11}(x) & H_{12}^{12}(x) & H_{13}^{11}(x) \\ \hline H_{11}^{21}(x) & H_{11}^{22}(x) & H_{12}^{21}(x) & H_{12}^{22}(x) & H_{13}^{21}(x) \\ \hline H_{21}^{11}(x) & H_{21}^{12}(x) & H_{22}^{11}(x) & H_{22}^{12}(x) & H_{23}^{11}(x) \\ \hline H_{21}^{21}(x) & H_{21}^{22}(x) & H_{22}^{21}(x) & H_{22}^{22}(x) & H_{23}^{21}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ \hline \dot{x}_2(t) \\ \hline D_{out}^{HL}(t) \\ \hline D_{out}^{HNL}(t) \\ \hline u(t) \end{bmatrix}. \quad (3.41)$$

donde

$$D_{out}^{HL}(t) = L^L D_{in}^{HL}(t), \quad D_{out}^{HNL}(t) = L^{NL}(x_1) D_{in}^{HNL}(t). \quad (3.42)$$

Entonces, una representación del sistema para las variables de estado de las dinámicas lentas es descrito mediante

$$\dot{x}_1(t) = \widetilde{A}_{11}(x) x_1(t) + \widetilde{A}_{12}(x) \dot{x}_2(t) + \widetilde{B}_1(x) u(t). \quad (3.43)$$

La matriz  $\widetilde{A}_{11}(x)$  es

$$\widetilde{A}_{11}(x) = [\widetilde{A}_{11}(x)_1 + \widetilde{A}_{11}(x)_2] F_1, \quad (3.44)$$

donde

$$\begin{aligned} \widetilde{A}_{11}(x)_1 &= H_{11}^{11}(x) + H_{12}^{11}(x) L^L W(x) \Phi^H(x), \\ \widetilde{A}_{11}(x)_2 &= H_{12}^{12}(x) L^{NL}(x_1) M^{NL}(x) [H_{21}^{21}(x) + H_{22}^{21}(x) L^L T W(x) M \Phi^H(x)], \\ \Phi^H(x) &= H_{21}^{11}(x) + H_{22}^{12}(x) L^{NL}(x_1) Q^{NL}(x) H_{21}^{21}(x). \end{aligned} \quad (3.45)$$

Para la matriz  $\widetilde{A}_{12}(x)$  se tiene

$$\widetilde{A}_{12}(x) = [\widetilde{A}_{12}(x)_1 + \widetilde{A}_{12}(x)_2] F_2, \quad (3.46)$$

donde

$$\begin{aligned}\widetilde{A}_{12}(x)_1 &= H_{11}^{12}(x) + H_{12}^{11}(x) L^L W(x) \Gamma^H(x), \\ \widetilde{A}_{12}(x)_2 &= H_{12}^{12}(x) L^{NL}(x_1) Q^{NL}(x) [H_{21}^{22}(x) + H_{22}^{21}(x) L^L W(x) \Gamma^H(x)], \\ \Gamma^H(x) &= H_{21}^{12}(x) + H_{22}^{12}(x) L^{NL}(x_1) M Q^{NL}(x) H_{21}^{21}(x).\end{aligned}\quad (3.47)$$

El vector  $\widetilde{B}_1(x)$  es

$$\widetilde{B}_1(x) = \widetilde{B}_1(x)_1 + \widetilde{B}_1(x)_2, \quad (3.48)$$

donde

$$\begin{aligned}\widetilde{B}_1(x)_1 &= H_{13}^{11}(x) + H_{12}^{11}(x) L^L W(x) \Psi^H(x), \\ \widetilde{B}_1(x)_2 &= H_{12}^{12}(x) L^{NL}(x_1) Q^{NL}(x) [H_{23}^{21}(x) + H_{22}^{21}(x) L^L W(x) \Psi^H(x)], \\ \Psi^H(x) &= H_{23}^{11}(x) + H_{22}^{12}(x) L^{NL}(x_1) Q^{NL}(x) H_{23}^{21}(x).\end{aligned}\quad (3.49)$$

Para las variables de estado de la dinámica rápida es

$$x_2(t) = \widetilde{A}_{21}(x) x_1(t) + \widetilde{A}_{22}(x) \dot{x}_2(t) + \widetilde{B}_2(x) u(t). \quad (3.50)$$

Para la matriz  $\widetilde{A}_{21}(x)$ , se tiene que

$$\widetilde{A}_{21}(x) = F_2^{-1} [\widetilde{A}_{21}(x)_1 + \widetilde{A}_{21}(x)_2] F_1, \quad (3.51)$$

donde

$$\begin{aligned}\widetilde{A}_{21}(x)_1 &= H_{11}^{21}(x) + H_{12}^{21}(x) L^L W(x) \Lambda^H(x), \\ \widetilde{A}_{21}(x)_2 &= H_{12}^{22}(x) L^{NL}(x_1) Q^{NL}(x) [H_{21}^{21}(x) + H_{22}^{21}(x) L^L W(x) M \Lambda^H(x)], \\ \Lambda^H(x) &= H_{21}^{11}(x) + H_{12}^{22}(x) L^{NL}(x_1) Q^{NL}(x) H_{21}^{21}(x).\end{aligned}\quad (3.52)$$

La matriz  $\widetilde{A}_{22}(x)$  se tiene que

$$\widetilde{A}_{22}(x) = F_2^{-1} [\widetilde{A}_{22}(x)_1 + \widetilde{A}_{22}(x)_2] F_2, \quad (3.53)$$

donde

$$\begin{aligned}\widetilde{A}_{22}(x)_1 &= H_{11}^{22}(x) + H_{12}^{21}(x) L^L W(x) \Upsilon^H(x), \\ \widetilde{A}_{22}(x)_2 &= H_{12}^{22}(x) L^{NL}(x_1) Q^{NL}(x) [H_{21}^{22}(x) + H_{22}^{21}(x) L^L W(x) \Upsilon^H(x)], \\ \Upsilon^H(x) &= H_{21}^{12}(x) + H_{22}^{12}(x) L^{NL}(x_1) Q^{NL}(x) H_{21}^{22}(x),\end{aligned}\quad (3.54)$$

y el vector  $\widetilde{B}_2(x)$  es

$$\widetilde{B}_2(x) = F_2^{-1} \left[ \widetilde{B}_2(x)_1 + \widetilde{B}_2(x)_2 \right], \quad (3.55)$$

donde

$$\begin{aligned} \widetilde{B}_2(x)_1 &= H_{13}^{21}(x) + H_{12}^{21}(x) L^L W(x) \Pi^H(x), \\ \widetilde{B}_2(x)_2 &= H_{12}^{22}(x) L^{NL}(x_1) Q^{NL}(x) \left[ H_{23}^{21}(x) + H_{22}^{21}(x) L^L W(x) \Pi^H(x) \right], \\ \Pi^H(x) &= H_{23}^{11}(x) + H_{22}^{12}(x) L^{NL}(x_1) Q^{NL}(x) H_{23}^{21}(x). \end{aligned} \quad (3.56)$$

Siendo

$$Q^L(x) = [I - H_{22}^{11}(x) L^L]^{-1}, \quad Q^{NL}(x) = [I - H_{22}^{22}(x) L^{NL}(x_1)]^{-1}, \quad (3.57)$$

$$W(x) = [I + Q^L(x) H_{22}^{12}(x) L^{NL}(x_1) Q^{NL}(x) H_{22}^{21}(x) L^L]^{-1} Q^L(x). \quad (3.58)$$

Además, de acuerdo con la Hipótesis 4.1, las raíces de la ecuación algebraica a partir de la ecuación diferencial de las variables de estado de la dinámica rápida haciendo  $\varepsilon = 0$  son

$$\overline{x}_2(t) = \widetilde{A}_{21}(x_1) \overline{x}_1(t) + \widetilde{B}_2(x_1) u(t), \quad (3.59)$$

y el modelo de estado cuasi-estacionario está definido por

$$\dot{\overline{x}}_1(t) = \widetilde{A}_{11}(x_1) \overline{x}_1(t) + \widetilde{B}_1(x_1) u(t). \quad (3.60)$$

**Prueba.** Considerando que son satisfechas las Hipótesis 2.1, 2.2 y 2.3, de las líneas tercera y cuarta de (3.41) y usando (3.42) se tiene

$$\begin{aligned} D_{in}^{HL}(t) &= W(x) \left[ H_{21}^{11}(x) F_1 x_1(t) + H_{21}^{12}(x) \dot{x}_2(t) + H_{23}^{11}(x) u(t) \right] + \\ &Y(x) \left[ H_{21}^{21}(x) F_1 x_1(t) + H_{21}^{22}(x) \dot{x}_2(t) + H_{23}^{21}(x) u(t) \right], \end{aligned} \quad (3.61)$$

y

$$\begin{aligned} D_{in}^{HNL}(t) &= Q^{NL}(x) \left[ H_{21}^{21}(x) F_1 x_1(t) + H_{21}^{22}(x) \dot{x}_2(t) + H_{23}^{21}(x) u(t) \right] + \\ &Z(x) \left[ H_{21}^{11}(x) F_1 x_1(t) + H_{21}^{12}(x) \dot{x}_2(t) \right] + \\ &Z(x) H_{22}^{12}(x) L^{NL}(x_1) Q^{NL}(x) \left[ H_{21}^{21}(x) F_1 x_1(t) + H_{21}^{22}(x) \dot{x}_2(t) \right] + \\ &Z(x) \left[ H_{23}^{11}(x) + H_{22}^{12}(x) L^{NL}(x_1) Q^{NL}(x) H_{23}^{21}(x) \right] u(t), \end{aligned} \quad (3.62)$$

donde

$$\begin{aligned} Y(x) &= W(x) H_{22}^{12}(x) L^{NL}(x_1) Q^{NL}(x), \\ Z(x) &= Q^{NL}(x) H_{22}^{21}(x) L^L W(x). \end{aligned} \quad (3.63)$$

Sustituyendo (3.13), (3.61), (3.62) y (3.42) en la primera línea de (3.41), se tiene

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \{H_{11}^{11}(x) + H_{12}^{11}(x) L^L W(x) \Phi^H(x) + \\ &\Xi(x) \langle H_{21}^{21}(x) + H_{22}^{21}(x) L^L W(x) \Phi^H(x) \rangle\} F_1 x_1(t) + \\ &\{H_{11}^{12}(x) + H_{12}^{11}(x) L^L W(x) \Gamma^H(x) + \\ &\Xi(x) \langle H_{21}^{22}(x) + H_{22}^{21}(x) L^L W(x) \Gamma^H(x) \rangle\} \dot{x}_2(t) + \\ &\{H_{13}^{11}(x) + H_{12}^{11}(x) L^L W(x) \Psi^H(x) + \\ &\Xi(x) \langle H_{23}^{21}(x) + H_{22}^{21}(x) L^L W(x) \Psi^H(x) \rangle\} u(t), \end{aligned} \quad (3.64)$$

donde

$$\Xi(x) = H_{12}^{12}(x) L^{NL}(x_1) Q^{NL}(x). \quad (3.65)$$

Utilizando (3.44) a (3.49) con (3.57) y (3.58), se determina (3.43).

Ahora, partiendo de la segunda línea (3.41) y tomando (3.42), (3.61) y (3.62), se obtiene

$$\begin{aligned} z_2(t) &= \{H_{11}^{21}(x) + H_{12}^{21}(x) L^L W(x) \Phi^H(x) + \\ &\Theta(x) \langle H_{21}^{21}(x) + H_{22}^{21}(x) L^L W(x) \Phi^H(x) \rangle\} z_1(t) + \\ &\{H_{11}^{22}(x) + H_{12}^{21}(x) L^L W(x) \Gamma^H(x) + \\ &\Theta(x) \langle H_{21}^{22}(x) + H_{22}^{21}(x) L^L W(x) \Gamma^H(x) \rangle\} \dot{x}_2(t) + \\ &\{H_{13}^{21}(x) + H_{12}^{21}(x) L^L W(x) \Psi^H(x) + \\ &\Theta(x) \langle H_{23}^{21}(x) + H_{22}^{21}(x) L^L W(x) \Psi^H(x) \rangle\} u(t), \end{aligned} \quad (3.66)$$

donde

$$\Theta(x) = H_{12}^{12}(x) L^{NL}(x_1) Q^{NL}(x). \quad (3.67)$$

Considerado (3.13), (3.51) y (3.58) y (3.66), se prueba (3.50).

A partir de (3.50),

$$\dot{x}_2(t) = - \left[ \widetilde{A}_{22}(x) \right]^{-1} \widetilde{A}_{21}(x) x_1(t) + \left[ \widetilde{A}_{22}(x) \right]^{-1} x_2(t) - \left[ \widetilde{A}_{22}(x) \right]^{-1} \widetilde{B}_2(x) u(t), \quad (3.68)$$

y considerando que las matrices  $A_{22}(x)$  y  $\widetilde{A}_{22}(x)$  son no singulares, comparando (3.64) con la segunda línea de (3.21), las relaciones entre el BGI y el SPNBG son

$$\widetilde{A}_{22}(x) = -[A_{22}(x)]^{-1} \varepsilon, \quad (3.69)$$

$$\widetilde{A}_{21}(x) = -[A_{22}(x)]^{-1} A_{21}(x), \quad (3.70)$$

$$\widetilde{B}_2(x) = -[A_{22}(x)]^{-1} B_2(x). \quad (3.71)$$

Resolviendo (3.69) a (3.71) para las variables de estado de la dinámica lenta con (3.21), se comprueba (3.21).

Ahora, sustituyendo (3.68) en (3.43), se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) = & \left\{ \widetilde{A}_{11}(x) - \widetilde{A}_{12}(x) \left[ \widetilde{A}_{22}(x) \right]^{-1} \widetilde{A}_{21}(x) \right\} x_1(t) + \left\{ \widetilde{A}_{12}(x) \left[ \widetilde{A}_{22}(x) \right]^{-1} \right\} x_2(t) \\ & + \left\{ \widetilde{B}_1(x) - \widetilde{A}_{12}(x) \left[ \widetilde{A}_{22}(x) \right]^{-1} \widetilde{B}_2(x) \right\}. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Por comparación de (3.72) con la primera línea de (3.21), y usando (3.69) a (3.71), se tiene que

$$\widetilde{A}_{12}(x) = A_{12}(x) [A_{22}(x)]^{-1} \varepsilon, \quad (3.73)$$

$$\widetilde{B}_1(x) = B_1(x) - A_{12}(x) [A_{22}(x)]^{-1} B_2(x), \quad (3.74)$$

$$\widetilde{A}_{11}(x) = A_{11}(x) - A_{12}(x) [A_{22}(x)]^{-1} A_{21}(x). \quad (3.75)$$

Resolviendo (3.73) a (3.75) para las variables de estado de la dinámica lenta usando (3.39), y satisfaciendo la Hipótesis 2.4, se verifica (3.60).

La representación del SPNBG del sistema puede representar problemas de singularidad debido a los valores numéricos del argumento  $x$  dentro de las submatrices  $H(x)$ ,  $Q(x)$  y  $\widetilde{A}_{22}(x)$ . Por lo tanto, es importante saber que para evitar problemas de simulación y estabilidad. También la matriz  $A_{22}(x)$  tiene que ser no singular con la finalidad de aplicar el Lema 4.1 propuesto. En la siguiente sección se aplica la metodología propuesta a un modelo de una turbina de viento, la cuál es un sistema singularmente perturbado, ya que existe una clara diferencia entre las variables lentas (parte mecánica) y las variables rápidas (parte eléctrica).

## **3.4. Casos de Estudio**

### **3.4.1. Introducción**

Existe una gran variedad de sistemas que presentan fenómenos no lineales, de hecho, hablando de manera estricta, la gran mayoría de los sistemas físicos reales presentan no linealidades en su comportamiento, aunque algunos de estos sistemas pueden ser modelados como lineales, para valores iniciales específicos, y tener un comportamiento relativamente cercano al sistema real. Tomar el sistema como lineal o como no lineal dependerá, por lo tanto, del estudio o fenómeno de interés. De la gran gran diversidad de sistemas no lineales, en este trabajo, se analizan las siguientes clases.

### **3.5. Caso de Estudio 1: Clase de sistema no-lineal cuando existe multiplicación de estados**

Este tipo de sistemas no lineales son los que presentan una no linealidad que proviene de la multiplicación de estados.

En esta sección se aplica la metodología de bond graph para dos ejemplos singularmente perturbados de esta clase de sistemas no lineales. Cabe mencionar que el procedimiento propuesto en [Barrera, 2011] es utilizado para sistemas lineales, pero este procedimiento puede ser usando también en una clase de sistemas no lineales cuando el efecto no lineal es introducido mediante un transformador o en un girador, como es el caso del modelo de la máquina síncrona.

#### **3.5.1. Ejemplo 1: Turbogenerador con máquina síncrona**

Los generadores síncronos son la principal fuente de energía eléctrica en sistemas de potencia. El modelado y análisis de la máquina síncrona ha sido un problema bastante estudiado [Kundur, 1994, Anderson, 1977, Krause, 2002].

En la Figura 3.3 se observa la representación de la máquina síncrona [Kundur, 1994], en la cuál, se pueden identificar los siguientes elementos:

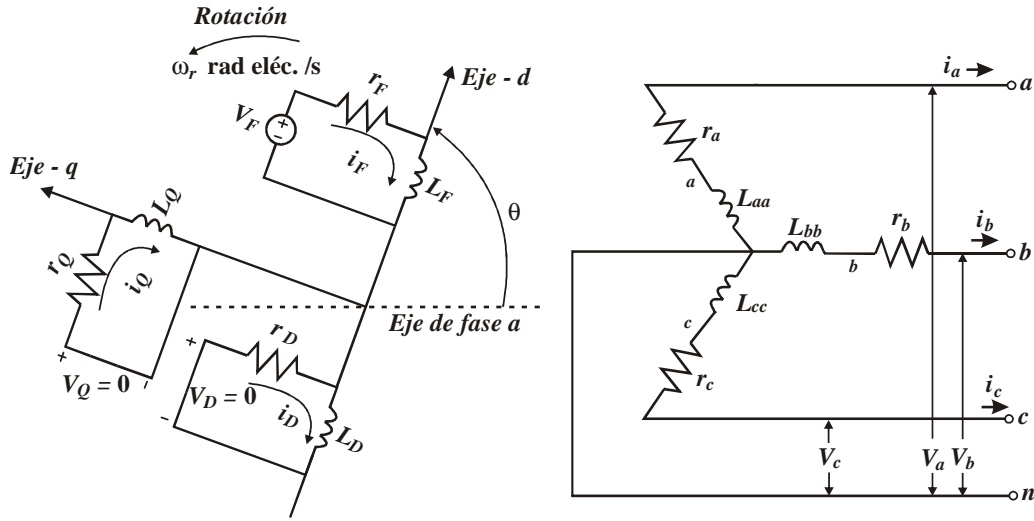


Figura 3.3: Diagrama del circuito de estator y rotor de la máquina síncrona.

- $a, b, c$  : devanados de fase del estator. Por lo tanto,  $i_a, i_b, i_c$  representan las corrientes de fase del estator;  $V_a, V_b, V_c$  indican los voltajes de fase del estator,  $r_a, r_b, r_c$  expresan las resistencias de fase del estator y  $L_{aa}, L_{bb}, L_{cc}$  expresan las inductancias propias de fase del estator.
- $F$  : representa el devanado de campo,  $i_F$  y  $V_F$  son la corriente y el voltaje en el devanado de campo, respectivamente;  $r_F$  representa la resistencia y  $L_F$  la inductancia propia del devanado de campo.
- $D$  : representa el devanado de amortiguamiento en el eje- $d$ ,  $i_D$  y  $V_D$  son la corriente y el voltaje en el devanado, respectivamente;  $r_D$  representa la resistencia y  $L_D$  la inductancia propia del devanado de amortiguamiento  $D$ .
- $Q$  : representa el devanado de amortiguamiento en el eje- $q$ ,  $i_Q$  y  $V_Q$  son la corriente y el voltaje en el devanado, respectivamente;  $r_Q$  representa la resistencia y  $L_Q$  la inductancia propia del devanado de amortiguamiento  $Q$ .

El generador síncrono de la Figura 3.3 es representado mediante seis devanados que están

acoplados magnéticamente entre sí. El acoplamiento magnético entre los devanados está en función de la posición del rotor. El voltaje instantáneo en terminales  $v$  de cualquier devanado tiene la forma,

$$v = \pm \sum r i \pm \dot{\lambda}, \quad (3.76)$$

donde  $\lambda$  es el enlace de flujo,  $r$  es la resistencia del devanado e  $i$  es la corriente con dirección positiva, considerando que las corrientes fluyen hacia las terminales de salida del generador. Una gran simplificación en la descripción matemática de la máquina síncrona se obtiene mediante la transformación de Park (ver Apéndice B). El efecto de la transformación de Park es que cambia todas las cantidades de las fases  $a$ ,  $b$  y  $c$  referidas al estator a unas nuevas variables en un marco de referencia que se mueve con el rotor. Por definición [Anderson, 2003]

$$i_{0dq} = P i_{abc}, \quad (3.77)$$

donde los vectores de corrientes están definidos como

$$i_{0dq} = \begin{bmatrix} i_0 & i_d & i_q \end{bmatrix}^T, \quad (3.78)$$

$$i_{abc} = \begin{bmatrix} i_a & i_b & i_c \end{bmatrix}^T, \quad (3.79)$$

y la transformación de Park (Ver Apéndice B) es

$$P = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos \theta & \cos \left( \theta - \frac{2}{3}\pi \right) & \cos \left( \theta + \frac{2}{3}\pi \right) \\ \sin \theta & \sin \left( \theta - \frac{2}{3}\pi \right) & \sin \left( \theta + \frac{2}{3}\pi \right) \end{bmatrix}. \quad (3.80)$$

El ángulo entre el eje  $d$  y el rotor está dado por

$$\theta = \omega_R t + \delta + \frac{\pi}{2}, \quad (3.81)$$

donde  $\omega_R$  es la frecuencia angular en rad/s y  $\delta$  es el ángulo de par de torsión síncrono en radianes eléctricos. De igual forma, para transformar los voltajes y los enlaces de flujo,

$$v_{0dq} = P v_{abc}, \quad (3.82)$$

$$\lambda_{0dq} = P \lambda_{abc}. \quad (3.83)$$

De acuerdo con la Figura 3.3, un modelo en bond graph de la máquina síncrona en los ejes  $d$ - $q$  se muestra en la Figura 3.4 [Barriga, 2008].

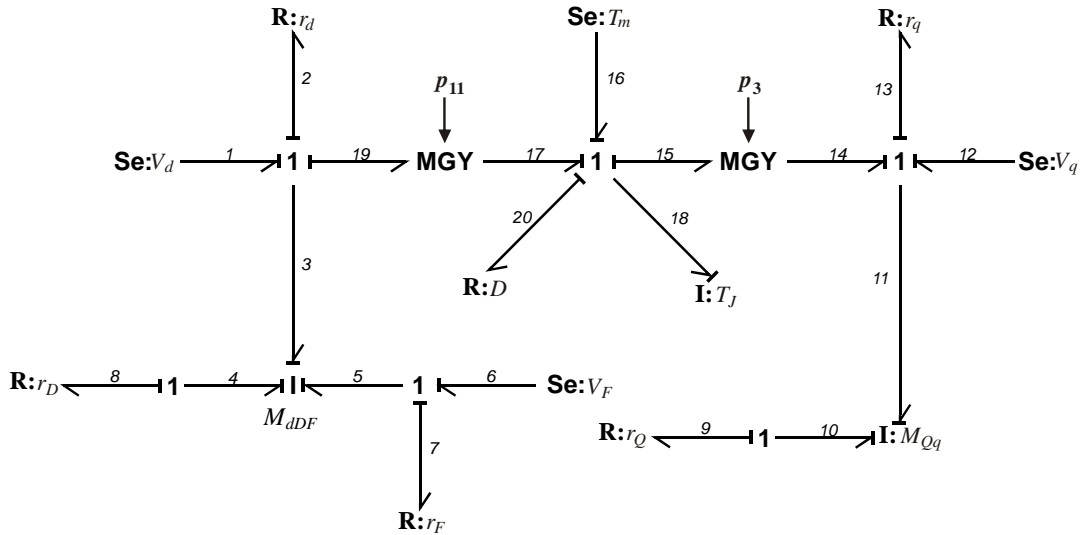


Figura 3.4: Un bond graph de la máquina síncrona con asignación de causalidad integral.

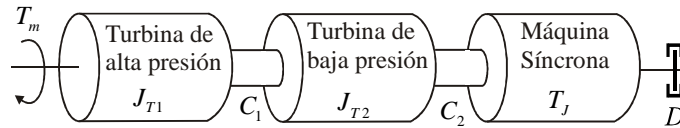


Figura 3.5: Turbogenerador térmico de dos secciones.

### Modelo del sistema de eje del turbo generador

El eje del rotor de una unidad de generación térmica es un sistema mecánico muy complejo, formado por varios elementos de grandes dimensiones acoplados a lo largo del mismo eje. Las secciones de turbina, para el caso del ejemplo, sólo se consideran dos secciones, una de alta presión y otra de baja presión, cuentan con discos, cuchillas y otros componentes más pequeños, pero estos se consideran en una sola masa concentrada por sección de turbina como se muestra en la Figura 3.5 [Jackson, 1979, Kundur, 1994].

Hay distintas configuraciones posibles de turbinas-generadores en una central térmica, en función del número de etapas de expansión y de si las turbinas se sitúan en un mismo eje o en dos ejes distintos. En este caso se hará la suposición de que todas las turbinas están

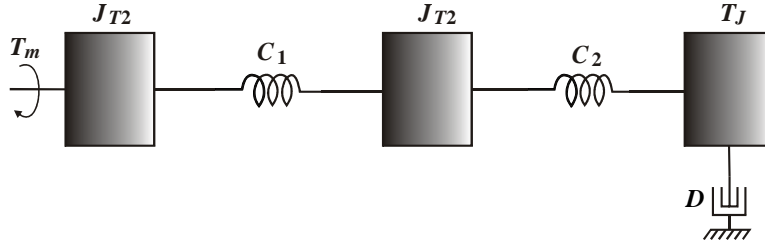


Figura 3.6: Modelo de masas y muelles equivalente sin amortiguamiento del turbogenerador térmico de dos secciones.

acopladas a un único eje y sólo hay un generador (en centrales termoeléctricas más complejas pero también más eficientes, como son las de ciclo combinado donde se utilizan los ciclos de vapor y de gas, se emplean dos o más ejes para desacoplar mecánicamente la turbina principal y la turbina que mueve al generador, esto con la finalidad de manter un giro constante y que la generación sea a una misma frecuencia y voltaje), lo cual es la configuración más simple y común de centrales termoeléctricas que trabajan bajo el principio del ciclo de Rankine (ciclo de vapor), en además se considera un sistema de excitación de masa despreciable.

A partir de la Figura 3.5 se obtiene el modelo de masas concentradas y muelles equivalente que se muestra en la Figura 3.6. Las tres masas torsionales representan los rotores del generador  $T_J$ , la sección de la turbina de baja presión  $J_{T2}$ , y la turbina de la sección de alta presión  $J_{T1}$ , las constantes  $C_1$  y  $C_2$  representan los coeficientes de elasticidad o rigidez torsional de los ejes de unión entre la turbina de alta presión con la de baja presión y entre la turbina de baja presión y el generador síncrono, respectivamente. El coeficiente  $D$  representa el rozamiento lineal del rotor de la máquina síncrona,  $T_m$  es el esfuerzo de entrada a la turbina. Agregando esta sección al modelo de la máquina síncrona se obtiene un modelo en bond graph del turbogenerador en causalidad integral asignada, como se muestra en la Figura 3.7.

Una vez que se tiene el modelo del sistema físico modelado en bond graph, la representación típica o estándar del sistema singularmente perturbado está definido por [Gonzalez, 2011, Barrera, 2011, Herrera, 2014],

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_1u, \quad (3.84)$$

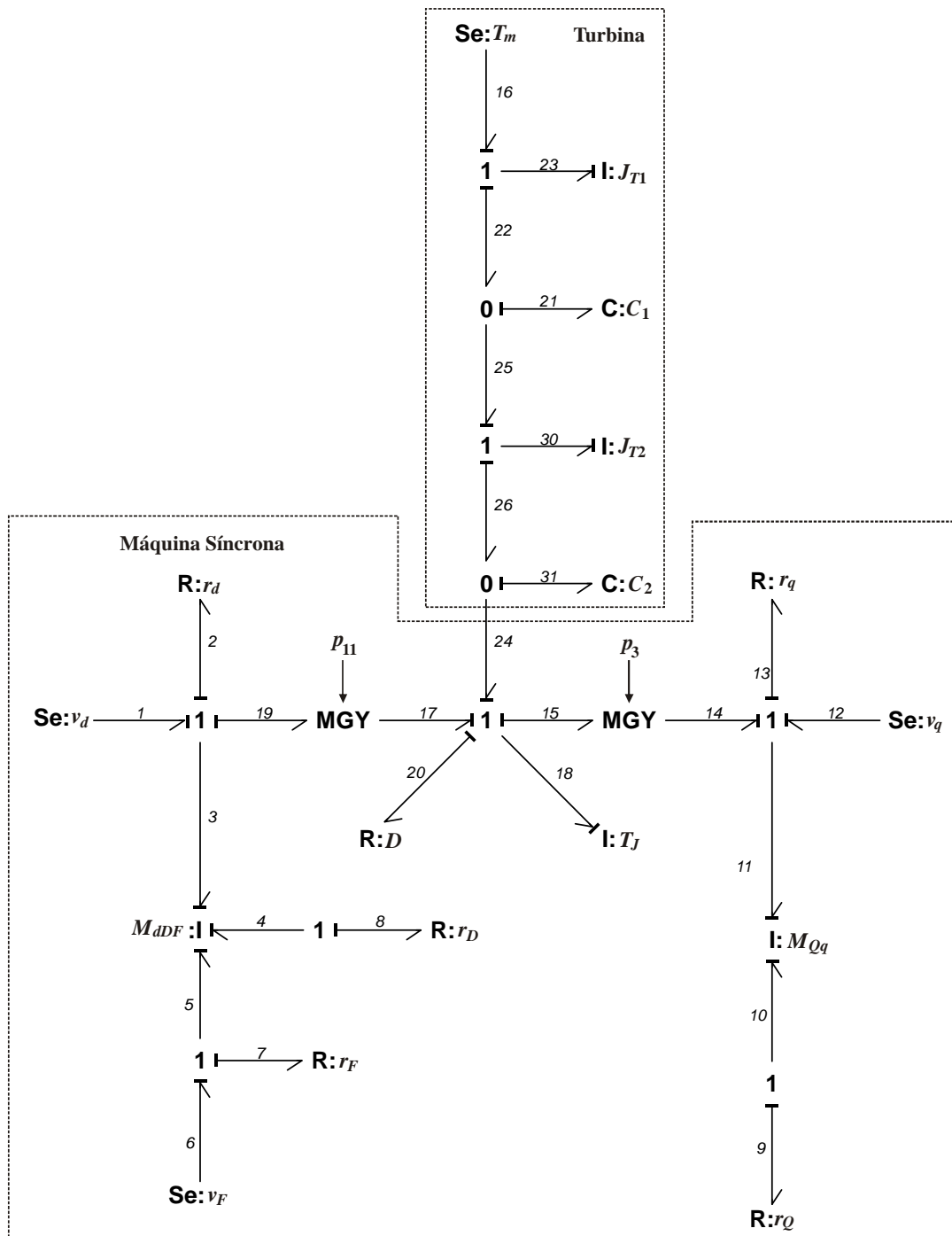


Figura 3.7: Modelo en bond graph con causalidad integral asignada de un turbogenerador con máquina síncrona.

$$\varepsilon \dot{x}_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_2u, \quad (3.85)$$

donde  $x_1 \in \mathbb{R}^n$  representa las dinámicas lentas,  $x_2 \in \mathbb{R}^m$  contiene las dinámicas rápidas y el escalar  $\varepsilon$  representa los parámetros singulares. Considerando que los almacenamientos de energía tienen dinámicas lentas y rápidas, las relaciones dentro de la estructura unión son,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ x_2 \\ D_{in} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}^{11} & S_{11}^{12} & S_{12}^{11} & S_{13}^{11} \\ S_{11}^{21} & S_{11}^{22} & S_{12}^{21} & S_{13}^{21} \\ S_{21}^{11} & S_{21}^{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31}^{11} & S_{31}^{12} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ D_{out} \\ u \end{bmatrix}, \quad (3.86)$$

Entonces, para obtener la representación en espacio de estado de la forma estándar (3.84), (3.85) se tiene para la dinámica lenta,

$$A_{11} = [S_{11}^{11} + S_{12}^{11}MS_{21}^{11}] F_1, \quad (3.87)$$

$$A_{12} = [S_{11}^{12} + S_{12}^{11}MS_{21}^{12}] F_2, \quad (3.88)$$

$$B_1 = S_{13}^{11} + S_{12}^{11}MS_{23}. \quad (3.89)$$

Para la dinámica rápida,

$$A_{21} = F_2^{-1} [S_{11}^{21} + S_{12}^{21}MS_{21}^{11}] F_1, \quad (3.90)$$

$$A_{22} = F_2^{-1} [S_{11}^{22} + S_{12}^{21}MS_{21}^{12}] F_2, \quad (3.91)$$

$$B_2 = F_2^{-1} [S_{13}^{21} + S_{12}^{21}MS_{23}], \quad (3.92)$$

donde  $M = L[I - S_{22}L]^{-1}$ .

Si se considera que  $\varepsilon$  es lo suficientemente pequeño para despreciarse, es decir,  $\varepsilon \rightarrow 0$ , (3.85) se convierte en [Gonzalez, 2011, Barrera, 2011, Herrera, 2014]

$$\dot{\bar{x}}_1 = A_0\bar{x}_1 + B_0u, \quad (3.93)$$

donde

$$A_0 = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}, \quad (3.94)$$

$$B_0 = B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2. \quad (3.95)$$

En (3.93) se puede observar que la dinámica lenta aproximada no depende de la dinámica rápida aproximada, sino que depende solamente de el estado cuasi-estacionario lento, es decir, se tiene una separación o desacoplamiento de las dinámicas del sistema.

Entonces, los vectores clave y las relaciones constitutivas para el bond graph de la Figura 3.7 son:

$$D_{in} = \begin{bmatrix} f_2 \\ f_7 \\ f_8 \\ f_9 \\ f_{13} \\ f_{20} \end{bmatrix}; D_{out} = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_7 \\ e_8 \\ e_9 \\ e_{13} \\ e_{20} \end{bmatrix}; u = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_6 \\ e_{12} \\ e_{16} \end{bmatrix}; L = \text{Diag}\{r_d, r_F, r_D, r_Q, r_q, D\}, \quad (3.96)$$

para las dinámicas lentas que son las que están relacionadas con las partes mecánicas del turbogenerador, se tiene

$$x_1 = \begin{bmatrix} p_{18} \\ q_{21} \\ p_{23} \\ p_{30} \\ q_{31} \end{bmatrix}; \dot{x}_1 = \begin{bmatrix} e_{18} \\ f_{21} \\ e_{23} \\ e_{30} \\ f_{31} \end{bmatrix}; z_1 = \begin{bmatrix} f_{18} \\ e_{21} \\ f_{23} \\ f_{30} \\ e_{31} \end{bmatrix}; F_1^{-1} = \text{Diag}\{T_J, C_1, J_{T1}, J_{T2}, C_2\}, \quad (3.97)$$

y para las dinámicas rápidas que son las que están relacionadas con la parte eléctrica del sistema, se tiene

$$x_2 = \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_{10} \\ p_{11} \end{bmatrix}; \dot{x}_2 = \begin{bmatrix} e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_{10} \\ e_{11} \end{bmatrix}; z_2 = \begin{bmatrix} f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_{10} \\ f_{11} \end{bmatrix}; F_2^{-1} = \begin{bmatrix} L_d & M_{dF} & M_{dD} & 0 & 0 \\ M_{dF} & L_F & M_{DF} & 0 & 0 \\ M_{dD} & M_{DF} & L_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_Q & M_{Qq} \\ 0 & 0 & 0 & M_{Qq} & L_q \end{bmatrix}. \quad (3.98)$$

Como se mencionó al inicio de esta sección, el procedimiento propuesto para sistemas lineales en [Barrera, 2011] puede ser utilizado para obtener el modelo cuasi-estacionario o modelo lento de una clase sistemas no lineales singularmente perturbados cuando el efecto no lineal es representado por medio de un transformador o de un girador, como es el caso del modelo de la máquina síncrona, por lo que se aplica este método para resolver este sistema.

ahora, a partir de (3.86) y un análisis del bond graph de la Figura 3.7 se obtiene la matriz de estructura unión,

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 e_{18} \\
 f_{21} \\
 e_{23} \\
 e_{30} \\
 f_{31} \\
 \hline
 e_3 \\
 e_4 \\
 e_5 \\
 e_{10} \\
 e_{11} \\
 \hline
 f_2 \\
 f_7 \\
 f_8 \\
 f_9 \\
 f_{13} \\
 f_{20}
 \end{array}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \left[ \begin{array}{ccccc|ccccc|ccccc|ccccc}
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & p_{11} & 0 & 0 & 0 & -p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 -p_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array} \right]
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 f_{18} \\
 e_{21} \\
 f_{23} \\
 f_{30} \\
 \hline
 e_{31} \\
 \hline
 f_3 \\
 f_4 \\
 \hline
 f_5 \\
 f_{10} \\
 f_{11} \\
 \hline
 e_2 \\
 e_7 \\
 \hline
 e_8 \\
 e_9 \\
 \hline
 e_{13} \\
 e_{20} \\
 \hline
 e_1 \\
 e_6 \\
 \hline
 e_{12} \\
 e_{16}
 \end{array}
 \end{array}
 . \quad (3.99)$$

Por comparación de (3.99) con (3.86) se obtienen las submatrices  $S(x)$  y usando de (3.87) a (3.92) se obtienen las matrices  $A$  y  $B$  de la representación en espacio de estados (3.84) y (3.85). Para la matriz  $A_{11}$  se tiene

$$A_{11} = \begin{bmatrix} -\frac{D}{T_J} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{J_{T1}} & -\frac{1}{J_{T2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{C_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_1} & 0 & 0 & -\frac{1}{C_2} \\ -\frac{1}{T_J} & 0 & 0 & \frac{1}{J_{T2}} & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.100)$$

para  $A_{12}(x)$  se obtiene

$$A_{12}(x) = \begin{bmatrix} -\frac{L_FL_D - M_{DF}^2}{\Delta} p_{11} & \frac{L_FM_{dD} - M_{dF}M_{DF}}{\Delta} p_{11} & \frac{L_DM_{dF} - M_{DF}M_{dD}}{\Delta} p_{11} & \frac{M_{Qq}}{\Upsilon} p_3 & -\frac{L_Q}{\Upsilon} p_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.101)$$

donde

$$\begin{aligned} \Delta &= L_DM_{dF}^2 - 2M_{dF}M_{DF}M_{dD} + L_dM_{DF}^2 + L_FM_{dD}^2 - L_FL_dL_D, \\ \Upsilon &= L_QL_q - M_{Qq}^2. \end{aligned} \quad (3.102)$$

Para la matriz  $B_1$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.103)$$

La matriz  $A_{21}(x)$  queda

$$A_{21}(x) = \begin{bmatrix} -\frac{L_d}{T_J} p_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{M_{dD}}{T_J} p_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{M_{dF}}{T_J} p_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{M_{Qq}}{T_J} p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{L_q}{T_J} p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.104)$$

$A_{22}$  queda

$$A_{22} = \begin{bmatrix} \frac{Y_{11}}{\Delta} & \frac{Y_{12}}{\Delta} & \frac{Y_{13}}{\Delta} & 0 & 0 \\ \frac{Y_{21}}{\Delta} & \frac{Y_{22}}{\Delta} & \frac{Y_{23}}{\Delta} & 0 & 0 \\ \frac{Y_{31}}{\Delta} & \frac{Y_{32}}{\Delta} & \frac{Y_{33}}{\Delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{Y_{44}}{\Upsilon} & \frac{Y_{45}}{\Upsilon} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{Y_{54}}{\Upsilon} & \frac{Y_{55}}{\Upsilon} \end{bmatrix}, \quad (3.105)$$

donde

$$\begin{aligned}
Y_{11} &= L_d r_d (L_F L_D - M_{DF}^2) - r_F (L_F M_{dD} - M_{dF} M_{DF}) M_{dD} - r_D (L_D M_{dF} - M_{DF} M_{dD}) M_{dF}, \\
Y_{12} &= r_F M_{dD} (L_F L_d - M_{dF}^2) - r_D (L_d M_{DF} - M_{dF} M_{dD}) M_{dF} - L_d r_d (L_F M_{dD} - M_{dF} M_{DF}), \\
Y_{13} &= r_D M_{dF} (L_d L_D - M_{dD}^2) - r_F (L_d M_{DF} - M_{dF} M_{dD}) M_{dD} - L_d r_d (L_D M_{dF} - M_{DF} M_{dD}), \\
Y_{21} &= r_d M_{dD} (L_F L_D - M_{DF}^2) - r_D (L_D M_{dF} - M_{DF} M_{dD}) M_{FD} - r_F L_D (L_F M_{dD} - M_{dF} M_{DF}), \\
Y_{22} &= r_F L_D (L_F L_d - M_{dF}^2) - r_D (L_d M_{DF} - M_{dF} M_{dD}) M_{DF} - r_d (L_F M_{dD} - M_{dF} M_{DF}) M_{dD}, \\
Y_{23} &= r_D M_{DF} (L_d L_D - M_{dD}^2) - r_d (L_D M_{dF} - M_{DF} M_{dD}) M_{dD} - r_F L_D (L_d M_{DF} - M_{dF} M_{dD}), \\
Y_{31} &= r_d M_{dF} (L_F L_D - M_{DF}^2) - r_F (L_F M_{dD} - M_{dF} M_{DF}) M_{DF} - L_F r_D (L_D M_{dF} - M_{DF} M_{dD}), \\
Y_{32} &= r_F M_{DF} (L_F L_d - M_{dF}^2) - r_d (L_F M_{dD} - M_{dF} M_{DF}) M_{dF} - L_F r_D (L_d M_{DF} - M_{dF} M_{dD}), \\
Y_{33} &= L_F r_D (L_d L_D - M_{dD}^2) - r_F (L_d M_{DF} - M_{dF} M_{dD}) M_{DF} - r_d (L_D M_{dF} - M_{DF} M_{dD}) M_{dF}, \\
Y_{44} &= r_q M_{Qq}^2 - L_Q L_q r_Q, \\
Y_{45} &= L_Q r_Q M_{Qq} - L_Q r_q M_{Qq}, \\
Y_{54} &= L_q r_q M_{Qq} - L_q r_Q M_{Qq}, \\
Y_{55} &= r_Q M_{Qq}^2 - L_Q L_q r_q.
\end{aligned} \tag{3.106}$$

Finalmente, para  $B_2$  se tiene

$$B_2 = \begin{bmatrix} L_d & M_{dF} & 0 & 0 \\ M_{dD} & M_{DF} & 0 & 0 \\ M_{dF} & L_F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{Qq} & 0 \\ 0 & 0 & L_q & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.107}$$

Esta representación se utilizará más adelante para verificar la estabilidad interna del sistema.

### 3.5.2. Modelo de estado cuasi-estacionario del turbogenerador con un enfoque de bond graph

Para obtener de manera directa el modelo cuasi-estacionario del sistema singularmente perturbado en bond graph denominado (SPBG) por sus siglas en inglés, Singularly Perturbated Bond Graph se utiliza el Lema propuesto en [Gonzalez, 2011, Barrera, 2011].

**Lema 3.1** [Gonzalez, 2011, Barrera, 2011] *Considerando el diseño de la Figura 3.8. La*

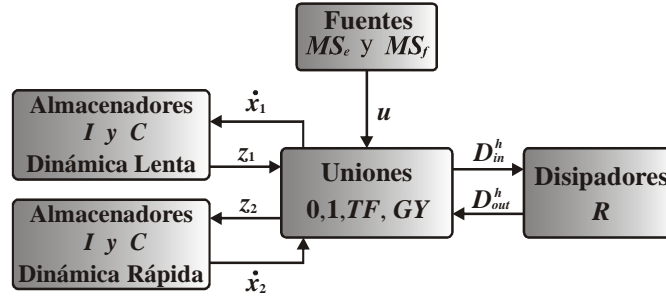


Figura 3.8: Representación a bloques de la estructura unión del SPBG.

estructura del sistema está dada por,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ z_2 \\ D_{in}^h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11}^{11} & H_{11}^{12} & H_{12}^{11} & H_{13}^{11} \\ H_{11}^{21} & H_{11}^{22} & H_{12}^{21} & H_{13}^{21} \\ H_{21}^{11} & H_{21}^{12} & H_{22} & H_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ \dot{x}_2 \\ D_{out}^h \\ u \end{bmatrix}, \quad (3.108)$$

la nueva representación del sistema singularmente perturbado es,

$$\dot{x}_1 = \widetilde{A}_{11}x_1 + \widetilde{A}_{12}\dot{x}_2 + \widetilde{B}_1u, \quad (3.109)$$

$$x_2 = \widetilde{A}_{21}x_1 + \widetilde{A}_{22}\dot{x}_2 + \widetilde{B}_2u, \quad (3.110)$$

donde para la dinámica lenta,

$$\widetilde{A}_{11} = [H_{11}^{11} + H_{12}^{11}QH_{21}^{11}] F_1, \quad (3.111)$$

$$\widetilde{A}_{12} = [H_{11}^{12} + H_{12}^{11}QH_{21}^{12}] F_2, \quad (3.112)$$

$$\widetilde{B}_1 = H_{13}^{11} + H_{12}^{11}QH_{23}. \quad (3.113)$$

Para la dinámica rápida,

$$\widetilde{A}_{21} = F_2^{-1} [H_{11}^{21} + H_{12}^{21}QH_{21}^{11}] F_1, \quad (3.114)$$

$$\widetilde{A}_{22} = F_2^{-1} [H_{11}^{22} + H_{12}^{21}QH_{21}^{12}], \quad (3.115)$$

$$\widetilde{B}_2 = F_2^{-1} [H_{13}^{21} + H_{12}^{21}QH_{23}], \quad (3.116)$$

donde  $Q = L^h [I - S_{22}L^h]^{-1}$ .

Si se considera que  $\varepsilon$  es lo suficientemente pequeño para despreciarse, es decir,  $\varepsilon \rightarrow 0$ , (3.109) se convierte en,

$$\dot{\overline{x}}_1 = \widetilde{A}_{11}\overline{x}_1 + \widetilde{B}_1u. \quad (3.117)$$

La barra en las variables de estado significa que es el sistema cuasi-estacionario, el cuál se obtiene de manera directa [Gonzalez, 2011, Barrera, 2011]. Se puede observar que en (3.117) la dinámica lenta aproximada (modelo cuasi-estacionario) no depende de la dinámica rápida aproximada, sino que depende solamente de las variables lentas, es decir, se tiene una separación o desacoplamiento de las dinámicas del sistema.

Para encontrar el modelo cuasi estacionario, el primer paso es asignar causalidad derivativa a los elementos almacenadores de energía relacionados con las partes eléctricas del turbogenerador (que contiene constantes de tiempo relativamente pequeñas), es decir, con las variables rápidas, dejando la causalidad integral en los elementos en almacenadores relacionados con las dinámicas lentas (relacionadas con las partes mecánicas, que tiene constantes de tiempo relativamente grandes) [Gonzalez, 2011, Barrera, 2011, Herrera, 2014].

Por lo que el bond graph para el sistema cuasi-estacionario queda como se muestra en la Figura 3.9.

Los vectores clave y las relaciones constitutivas para el bond graph de la Figura 3.9 son:

$$D_{in}^h = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_7 \\ e_8 \\ e_9 \\ e_{13} \\ f_{20} \end{bmatrix}; D_{out}^h = \begin{bmatrix} f_2 \\ f_7 \\ f_8 \\ f_9 \\ f_{13} \\ e_{20} \end{bmatrix}; L^h = \text{Diag} \left\{ \frac{1}{r_d}, \frac{1}{r_F}, \frac{1}{r_D}, \frac{1}{r_Q}, \frac{1}{r_q}, D \right\}, \quad (3.118)$$

para las dinámicas lentas y rápidas están dados por (3.97) y (3.98), respectivamente.

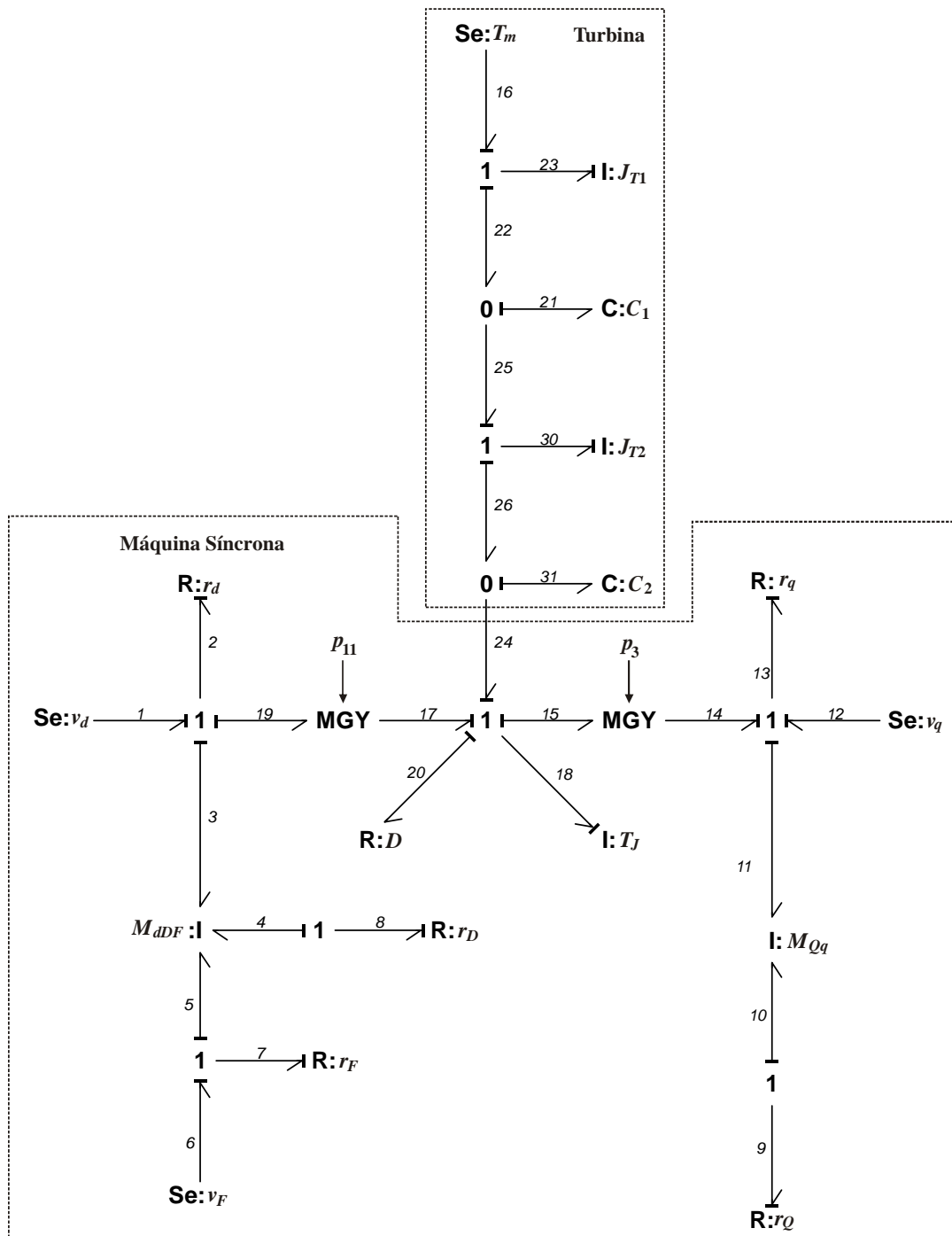


Figura 3.9: Modelo en bond graph con causalidad derivativa asignada a los almacenadores relacionados con las dinámicas rápidas de un turbogenerador.

Mediante un análisis del modelo en bond graph de la Figura 3.9 se obtienen la matriz de estructura unión,

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \left[ \begin{array}{c}
 e_{18} \\
 f_{21} \\
 e_{23} \\
 e_{30} \\
 f_{31} \\
 \hline
 f_3 \\
 f_4 \\
 f_5 \\
 f_{10} \\
 f_{11} \\
 \hline
 e_2 \\
 e_7 \\
 e_8 \\
 e_9 \\
 e_{13} \\
 f_{20}
 \end{array} \right]
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \left[ \begin{array}{c|c|c|c}
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{11} & 0 & 0 & 0 & -p_3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 -p_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 1 & 0
 \end{array} \right]
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \left[ \begin{array}{c}
 f_{18} \\
 e_{21} \\
 f_{23} \\
 f_{30} \\
 e_{31} \\
 \hline
 e_5 \\
 e_4 \\
 \hline
 e_5 \\
 e_{10} \\
 e_{11} \\
 f_2 \\
 f_7 \\
 f_8 \\
 f_9 \\
 f_{13} \\
 e_{20} \\
 \hline
 e_1 \\
 e_6 \\
 \hline
 e_{12} \\
 e_{16}
 \end{array} \right]
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (3.119)$$

Por comparación de (3.119) con (3.108) se realiza el desacoplamiento de las dinámicas lentas y rápidas, y se obtienen las submatrices  $H(x)$ , utilizando de (3.111) a (3.116) se obtienen las matrices  $\tilde{A}$  y  $\tilde{B}$  de la representación en espacio de estados (3.109) y (3.110). Para la matriz  $\tilde{A}_{11}(x)$  se tiene

$$\tilde{A}_{11}(x) = \begin{bmatrix}
 -\frac{1}{T_J} \left( \frac{1}{r_q} p_3^2 + \frac{1}{r_d} p_{11}^2 + D \right) & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_2} \\
 0 & 0 & \frac{1}{J_{T1}} & -\frac{1}{J_{T2}} & 0 \\
 0 & -\frac{1}{C_1} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \frac{1}{C_1} & 0 & 0 & -\frac{1}{C_2} \\
 -\frac{1}{T_J} & 0 & 0 & \frac{1}{J_{T2}} & 0
 \end{bmatrix}, \quad (3.120)$$

para  $\widetilde{A}_{12}(x)$  se obtiene

$$\widetilde{A}_{12}(x) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{r_d}p_{11} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r_q}p_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.121)$$

para la matriz  $\widetilde{B}_1(x)$

$$\widetilde{B}_1(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{r_d}p_{11} & 0 & -\frac{1}{r_q}p_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.122)$$

La matriz  $\widetilde{A}_{21}(x)$  queda

$$\widetilde{A}_{21}(x) = \frac{1}{T_J} \begin{bmatrix} -\frac{L_d}{r_d}p_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{M_{dD}}{r_d}p_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{M_{dF}}{r_d}p_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{M_{Qq}}{r_q}p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{L_q}{r_q}p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.123)$$

$\widetilde{A}_{22}$  queda

$$\widetilde{A}_{22} = \begin{bmatrix} -\frac{L_d}{r_d} & -\frac{M_{dD}}{r_D} & -\frac{M_{dF}}{r_F} & 0 & 0 \\ -\frac{M_{dD}}{r_d} & -\frac{L_D}{r_D} & -\frac{M_{DF}}{r_F} & 0 & 0 \\ -\frac{M_{dF}}{r_d} & -\frac{M_{DF}}{r_D} & -\frac{L_F}{r_F} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{L_Q}{r_Q} & -\frac{M_{Qq}}{r_q} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{M_{Qq}}{r_Q} & -\frac{L_q}{r_q} \end{bmatrix}, \quad (3.124)$$

Finalmente, para  $\widetilde{B}_2$  se tiene

$$\widetilde{B}_2 = \begin{bmatrix} \frac{L_d}{r_d} & \frac{M_{dF}}{r_F} & 0 & 0 \\ \frac{M_{dD}}{r_d} & \frac{M_{DF}}{r_F} & 0 & 0 \\ \frac{M_{dF}}{r_d} & \frac{L_F}{r_F} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M_{Qq}}{r_q} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L_q}{r_q} & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.125)$$

La representación en espacio de estados queda

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_{18} \\ \dot{q}_{21} \\ \dot{p}_{23} \\ \dot{p}_{30} \\ \dot{q}_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_J} \left( \frac{1}{r_q} p_3^2 + \frac{1}{r_d} p_{11}^2 + D \right) & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{J_{T1}} & -\frac{1}{J_{T2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{C_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_1} & 0 & 0 & -\frac{1}{C_2} \\ -\frac{1}{T_J} & 0 & 0 & \frac{1}{J_{T2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{18} \\ q_{21} \\ p_{23} \\ p_{30} \\ q_{31} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{r_d} p_{11} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r_q} p_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p}_3 \\ \dot{p}_4 \\ \dot{p}_5 \\ \dot{p}_{10} \\ \dot{p}_{11} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{r_d} p_{11} & 0 & -\frac{1}{r_q} p_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_6 \\ e_{12} \\ e_{16} \end{bmatrix}, \quad (3.126)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_3 \\ \dot{p}_4 \\ \dot{p}_5 \\ \dot{p}_{10} \\ \dot{p}_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{L_d}{T_J r_d} p_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{M_{dD}}{T_J r_d} p_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{M_{dF}}{T_J r_d} p_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{M_{Qq}}{T_J r_d} p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{L_q}{T_J r_q} p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{18} \\ q_{21} \\ p_{23} \\ p_{30} \\ q_{31} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{L_d}{r_d} & -\frac{M_{dD}}{r_D} & -\frac{M_{dF}}{r_F} & 0 & 0 \\ -\frac{M_{dD}}{r_d} & -\frac{L_D}{r_D} & -\frac{M_{DF}}{r_F} & 0 & 0 \\ -\frac{M_{dF}}{r_d} & -\frac{M_{DF}}{r_D} & -\frac{L_F}{r_F} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{L_Q}{r_Q} & -\frac{M_{Qq}}{r_q} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{M_{Qq}}{r_Q} & -\frac{L_q}{r_q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p}_3 \\ \dot{p}_4 \\ \dot{p}_5 \\ \dot{p}_{10} \\ \dot{p}_{11} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{L_d}{r_d} & \frac{M_{dF}}{r_F} & 0 & 0 \\ \frac{M_{dD}}{r_d} & \frac{M_{DF}}{r_F} & 0 & 0 \\ \frac{M_{dF}}{r_d} & \frac{L_F}{r_F} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M_{Qq}}{r_q} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L_q}{r_q} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_6 \\ e_{12} \\ e_{16} \end{bmatrix}. \quad (3.127)$$

El modelo de estado cuasi-estacionario esta definido por (3.117), y para este ejemplo está

dato por

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{\overline{p_{18}}} \\ \dot{\overline{q_{21}}} \\ \dot{\overline{p_{23}}} \\ \dot{\overline{p_{30}}} \\ \dot{\overline{q_{31}}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_J} \left( \frac{1}{r_q} \overline{p_3}^2 + \frac{1}{r_d} \overline{p_{11}}^2 + D \right) & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{J_{T1}} & -\frac{1}{J_{T2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{C_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_1} & 0 & 0 & -\frac{1}{C_2} \\ -\frac{1}{T_J} & 0 & 0 & \frac{1}{J_{T2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{p_{18}} \\ \overline{q_{21}} \\ \overline{p_{23}} \\ \overline{p_{30}} \\ \overline{q_{31}} \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} \frac{1}{r_d} \overline{p_{11}} & 0 & -\frac{1}{r_q} \overline{p_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_6 \\ e_{12} \\ e_{16} \end{bmatrix}, \tag{3.128}
 \end{aligned}$$

La ecuación anterior (3.128) es el modelo cuasi-estacionario, pero se observa que existe dependencia de dos estados rápidos  $\overline{p_3}$  y  $\overline{p_{11}}$  por lo que el sistema no tiene desacopladas las dinámicas lentas y rápidas. Como para el estado cuasi-estacionario se considera que las dinámicas rápidas han terminado, es decir,  $\left[ \dot{\overline{p_3}} \quad \dot{\overline{p_4}} \quad \dot{\overline{p_5}} \quad \dot{\overline{p_{10}}} \quad \dot{\overline{p_{11}}} \right]^T = 0$ . Entonces (3.127) se convierte en,

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \overline{p_3} \\ \overline{p_4} \\ \overline{p_5} \\ \overline{p_{10}} \\ \overline{p_{11}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{L_d}{T_J r_d} \overline{p_{11}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{M_{dD}}{T_J r_d} \overline{p_{11}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{M_{dF}}{T_J r_d} \overline{p_{11}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{M_{Qq}}{T_J r_q} \overline{p_3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{L_q}{T_J r_q} \overline{p_3} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{p_{18}} \\ \overline{q_{21}} \\ \overline{p_{23}} \\ \overline{p_{30}} \\ \overline{q_{31}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{L_d}{r_d} & \frac{M_{dF}}{r_F} & 0 & 0 \\ \frac{M_{dD}}{r_d} & \frac{M_{DF}}{r_F} & 0 & 0 \\ \frac{M_{dF}}{r_d} & \frac{L_F}{r_F} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M_{Qq}}{r_q} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L_q}{r_q} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_6 \\ e_{12} \\ e_{16} \end{bmatrix}. \tag{3.129}
 \end{aligned}$$

De (3.129) se despejan  $\overline{p_3}$  y  $\overline{p_{11}}$  para luego sustituirlas en (3.128),

$$\overline{p_3} = -\frac{L_d}{T_J r_d} \overline{p_{11}} \overline{p_{18}} + \frac{L_d}{r_d} e_1 + \frac{M_{dF}}{r_F} e_6, \tag{3.130}$$

$$\overline{p_{11}} = \frac{L_q}{T_J r_q} \overline{p_3} \overline{p_{18}} + \frac{L_q}{r_q} e_{12}. \tag{3.131}$$

Sustituyendo (3.130) en (3.131) y viceversa, para dejar  $\overline{p_3}$  y  $\overline{p_{11}}$  dependientes de la variable

lenta  $\overline{p_{18}}$ , se obtiene que,

$$\overline{p_3}^* = \frac{-\frac{L_d L_q}{r_d r_q T_J} e_{12} \overline{p_{18}} + \frac{L_d}{r_d} e_1 + \frac{M_{dF}}{r_F} e_6}{1 + \frac{L_d L_q}{r_d r_q T_J^2} \overline{p_{18}}^2}, \quad (3.132)$$

$$\overline{p_{11}}^* = \frac{\frac{L_q}{r_d T_J} \left[ \frac{L_d}{r_q} e_1 + \frac{M_{dF}}{r_F} e_6 \right] \overline{p_{18}} + \frac{L_q}{r_q} e_{12}}{1 + \frac{L_d L_q}{r_d r_q T_J^2} \overline{p_{18}}^2}. \quad (3.133)$$

Donde el \* indica que no es  $\overline{p_3}$  sino una nueva variable relacionada con  $\overline{p_3}$  que no depende de las dinámicas lentas. Ahora, se sustituyen (3.132) y (3.133) en (3.128) para obtener el modelo de estado cuasi-estacionario dependiente únicamente de las variables lentas ( $\overline{p_{18}}$ ,  $\overline{q_{21}}$ ,  $\overline{p_{23}}$ ,  $\overline{p_{30}}$  y  $\overline{q_{31}}$ ), de los parámetros fijos de máquina y de las entradas del sistema, quedando

$$\dot{\overline{p_{18}}} = -\frac{1}{T_J} \left[ \frac{1}{r_q} (\overline{p_3}^*)^2 + \frac{1}{r_d} (\overline{p_{11}}^*)^2 + D \right] \overline{p_{18}} + \frac{1}{C_2} \overline{q_{31}} + \frac{1}{r_d} e_1 \overline{p_{11}}^* - \frac{1}{r_q} e_{12} \overline{p_3}^*, \quad (3.134)$$

$$\dot{\overline{q_{21}}} = \frac{1}{J_{T1}} \overline{p_{23}} - \frac{1}{J_{T2}} \overline{p_{30}}, \quad (3.135)$$

$$\dot{\overline{p_{23}}} = -\frac{1}{C_1} \overline{q_{21}} + e_{16}, \quad (3.136)$$

$$\dot{\overline{p_{30}}} = \frac{1}{C_1} \overline{q_{21}} - \frac{1}{C_2} \overline{q_{31}}, \quad (3.137)$$

$$\dot{\overline{q_{31}}} = -\frac{1}{T_J} \overline{p_{18}} + \frac{1}{J_{T2}} \overline{p_{30}}. \quad (3.138)$$

Se debe notar que (3.134) a (3.138) representan las nuevas dinámicas lentas (sistema cuasi-estacionario) que están en función de los parámetros constantes de la máquina síncrona y de la turbina, de las entradas al sistema y de las propias nuevas variables lentas, es decir, se redujo el sistema dependiente de diez variables a un sistema equivalente que sólo depende de cinco variables.

### 3.5.3. Comparación de los resultados obtenidos

Con la finalidad de comparar las dinámicas lentas originales con las obtenidas con el modelo de estado cuasi-estacionario se realiza la simulación del modelo del turbogenerador con el software 20-SIM<sup>®</sup>, se utiliza este programa para simular al mismo tiempo el modelo en bond graph y el conjunto de ecuaciones obtenidas de (3.134) a (3.138) como se muestra en la

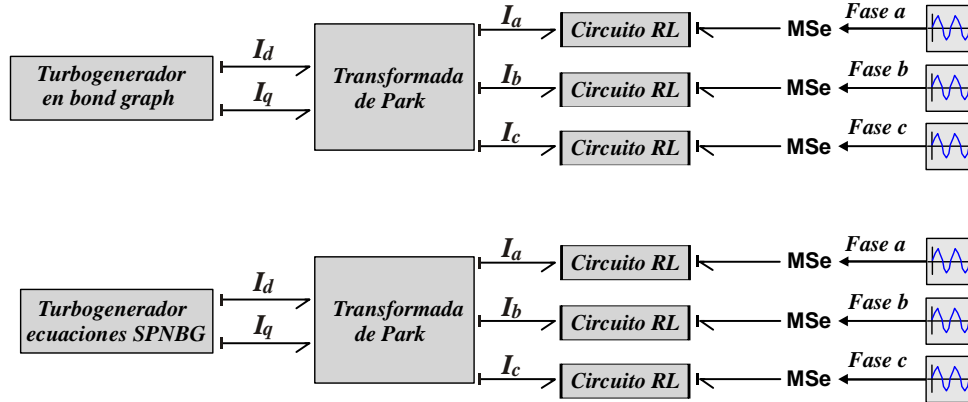


Figura 3.10: Diagrama en 20-Sim para la simulación y comparación de la respuesta del modelo original y el conjunto de ecuaciones obtenido con el SPNBSG.

Figura 3.10, donde se conecta el turbogenerador a un bus infinito (en el que se considera que el voltaje y la frecuencia se mantienen constantes aún con los cambios de carga) mediante el bloque de transformada de Park (ver el Apéndice B), la cual es necesaria para hacer un cambio del marco de referencia fijo con el rotor para poder considerar como constantes las varianzas de las inductancias debidas al giro del rotor y llevar las variables al marco de referencia trifásico  $abc$ , y finalmente por medio de un circuito RL en serie para cada línea se conecta con el bus infinito [Barriga, 2008].

En la Figura 3.10 los bloques de *Turbogenerador en bond graph* y *Turbogenerador ecuaciones SPNBSG* son las Figuras 3.7 y 3.11 para la simulación con 20-SIM<sup>®</sup>, respectivamente. Para la simulación se utilizan los parámetros que se observan en la Tabla 3.1 [Anderson, 2003].

El bloque denominado *Turbogenerador ecuaciones SPNBSG* contiene las ecuaciones de (3.134) a (3.138), en la Figura 3.11 los bloques son denotados por *Ecuaciones para  $\overline{p_{18}}$* , *Ecuaciones para  $\overline{q_{21}}$* , *Ecuaciones para  $\overline{p_{23}}$* , *Ecuaciones para  $\overline{p_{30}}$* , y *Ecuaciones para  $\overline{q_{31}}$* . Para la simulación el voltaje trifásico del bus infinito es de 220 V de línea, por lo que después de la transformada de Park los valores de  $V_q$  y  $V_d$  son de 77.437 V y 0.016 V, respectivamente, el voltaje de campo  $V_F = 30$  V y el par de entrada  $T_m = 500$  N.

Antes de realizar la simulación se verifica que el sistema tenga estabilidad interna, es decir,

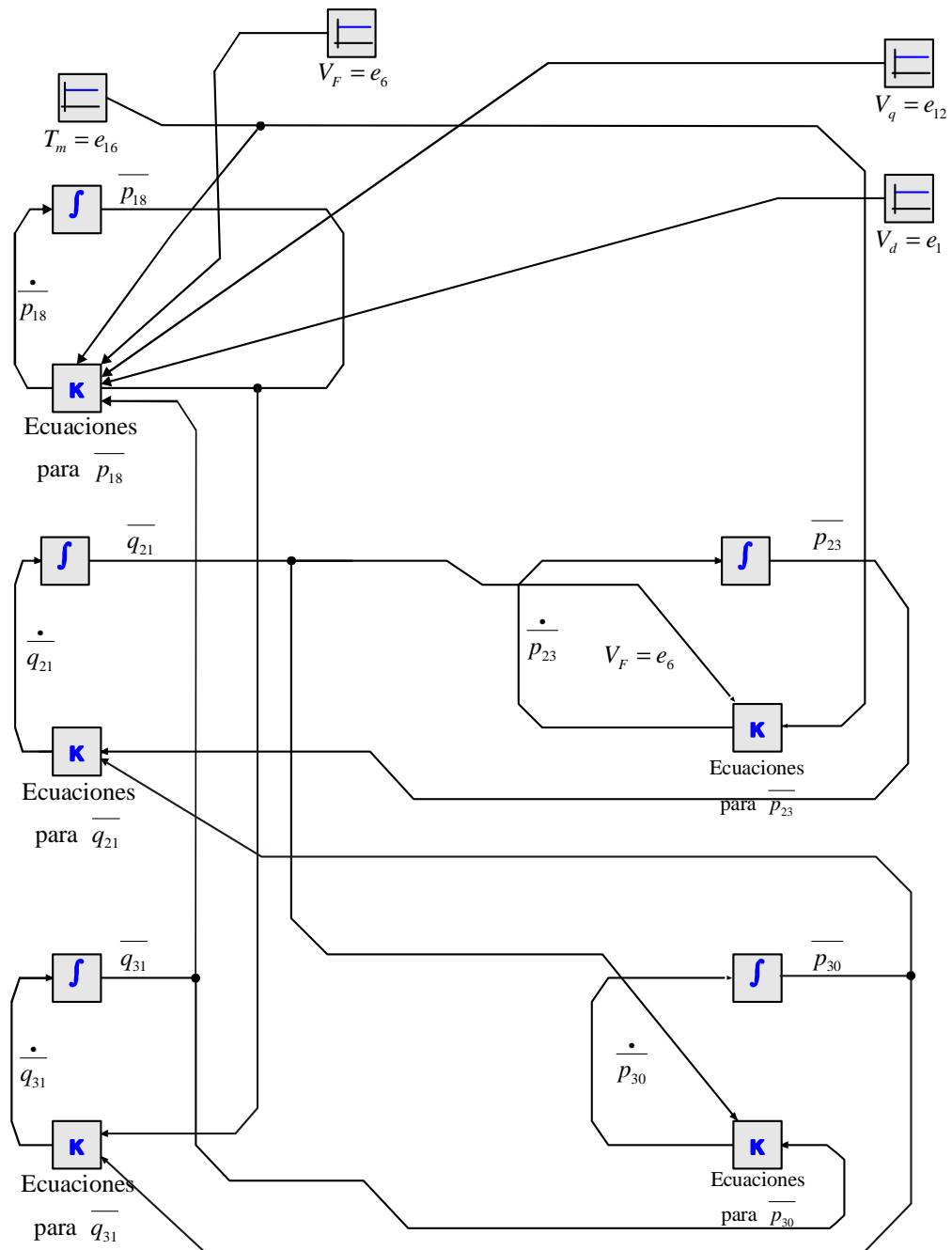


Figura 3.11: Obtención del modelo de estado cuasi-estacionario del turbogenerador.

Tabla 3.1: Parámetros para la simulación y obtención del modelo de estado cuasi-estacionario de un turbogenerador.

Elemento	Valor	Elemento	Valor
$T_J$	2,37 N-s <sup>2</sup> /m	$M_{dF}$	$5.782 \times 10^{-3}$ H
$r_d$	$1.542 \times 10^{-3}$ Ω	$M_{dD}$	$5.782 \times 10^{-3}$ H
$r_q$	$1.542 \times 10^{-3}$ Ω	$M_{DF}$	$5.782 \times 10^{-3}$ H
$r_F$	0.371 Ω	$M_{Qq}$	$2.779 \times 10^{-3}$ H
$r_D$	$18.421 \times 10^{-3}$ Ω	$D$	3 N-s/m
$r_Q$	$18.969 \times 10^{-3}$ Ω	$C_1$	$1 \times 10^{-3}$ m <sup>5</sup> /N
$L_d$	$6.341 \times 10^{-3}$ H	$C_2$	$1 \times 10^{-3}$ m <sup>5</sup> /N
$L_q$	$6.118 \times 10^{-3}$ H	$J_{T1}$	7 N-s <sup>2</sup> /m <sup>5</sup>
$L_F$	2.189 H	$J_{T2}$	3 N-s <sup>2</sup> /m <sup>5</sup>
$L_D$	$5.989 \times 10^{-3}$ H	$L_Q$	$1.423 \times 10^{-3}$ H

se debe cumplir la condición dada en (3.12), partiendo de

$$g = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_2u. \quad (3.139)$$

Se sustituyen en (3.139) los valores encontrados  $A_{21}(x)$ ,  $A_{22}$  y  $B_2$  (ecuaciones (3.104), (3.105) y (3.107) respectivamente), y los vectores  $x_1$ ,  $x_2$  y  $u$ , así como los parámetros de máquina, y realizando derivadas parciales con respecto a las variables rápidas ( $p_3$ ,  $p_4$ ,  $p_5$ ,  $p_{10}$  y  $p_{11}$ ), se obtiene

$$\frac{\partial g}{\partial x_2} = \begin{bmatrix} 2,7161 & -2,9810 & 6,5112 \times 10^{-4} & 0 & -2,6755 \times 10^{-3}p_{18} \\ 2,8149 & -3,0893 & 6,7604 \times 10^{-4} & 0 & -2,4397 \times 10^{-3}p_{18} \\ 2,722 & -2,9690 & -1,7769 \times 10^{-2} & 0 & -2,4397 \times 10^{-3}p_{18} \\ 1,1726 \times 10^{-3}p_{18} & 0 & 0 & -0,15587 & 7,0102 \times 10^{-2} \\ 2,5814 \times 10^{-3}p_{18} & 0 & 0 & -0,30140 & 0,13536 \end{bmatrix}. \quad (3.140)$$

Como la variable lenta se encuentra muy cerca de su valor inicial, se considera  $p_{18} = 0$ ,

$$\frac{\partial g}{\partial x_2} \Big|_{p_{18}=0} = \begin{bmatrix} 2,7161 & -2,9810 & 6,5112 \times 10^{-4} & 0 & 0 \\ 2,8149 & -3,0893 & 6,7604 \times 10^{-4} & 0 & 0 \\ 2,722 & -2,9690 & -1,7769 \times 10^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,15587 & 7,0102 \times 10^{-2} \\ 0 & 0 & 0 & -0,30140 & 0,13536 \end{bmatrix}. \quad (3.141)$$

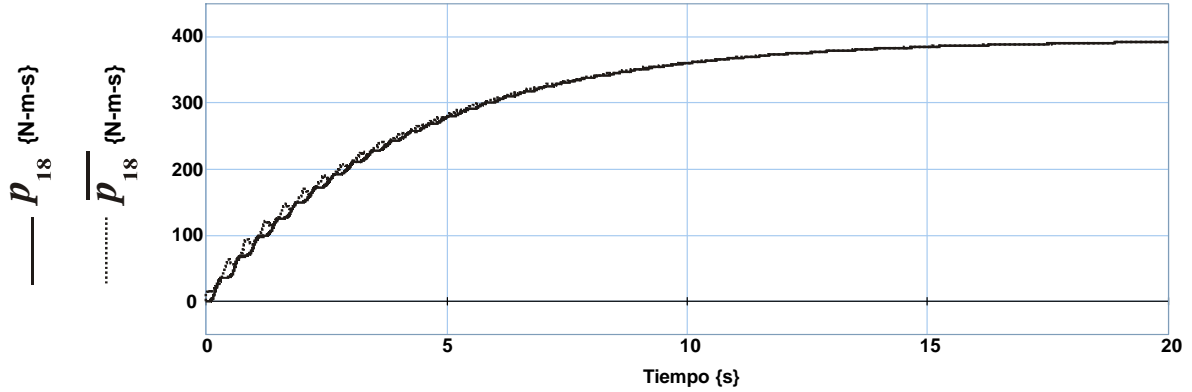


Figura 3.12: Dinámica de la variable de estado del modelo original en bond graph ( $p_{18}$ ) y la obtenida con el modelo de estado cuasi-estacionario ( $\overline{p}_{18}$ ).

Se encuentran los valores propios de (3.141), se obtiene

$$\lambda = \begin{bmatrix} -1,0027 \times 10^{-3} \\ -1,5956 \times 10^{-3} \\ -1,8421 \times 10^{-2} \\ -1,8914 \times 10^{-2} \\ -0,37154 \end{bmatrix} \quad (3.142)$$

Por lo que, se cumple la condición de  $\text{Re } \lambda \left\{ \frac{\partial g}{\partial x_2} \right\} \leq -c < 0$ , es decir todos los eigenvalores tienen parte real negativa, por lo que el sistema es internamente estable.

Ahora, una vez que se realiza la simulación se obtienen los siguientes resultados comparativos entre los dos modelos, el original en bond graph y el conjunto de ecuaciones obtenidas con el modelo cuasi-estacionario. La Figura 3.12 muestra la conducta dinámica del generador síncrono donde el estado  $p_{18}$  es el momento de torsión angular del modelo en bond graph original del turbogenerador (exacto) y  $\overline{p}_{18}$  es el momento de torsión angular obtenido utilizando el modelo de estado cuasi-estacionario (dividiendo el momento de torsión angular entre el valor del elemento almacenador se obtiene la velocidad angular).

En las Figuras 3.13 y 3.14 se muestran las dinámicas del momento de presión en la primera y en

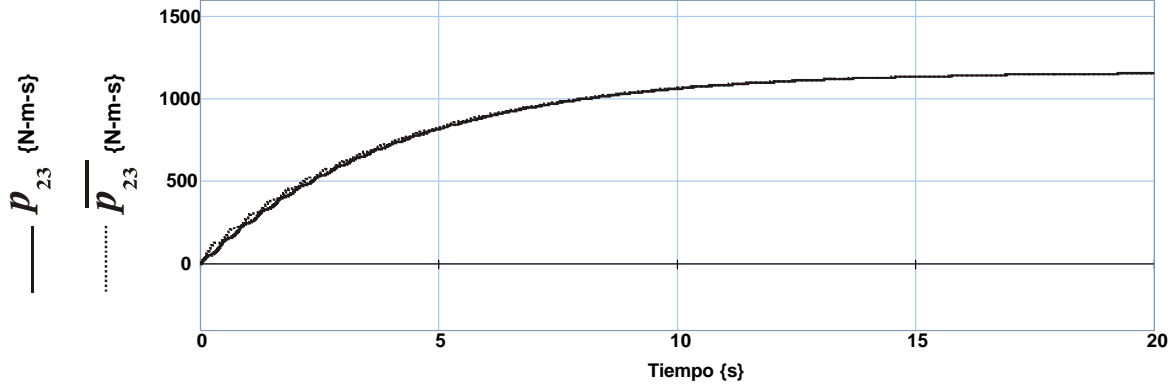


Figura 3.13: Dinámica de la variable de estado del modelo original en bond graph ( $p_{23}$ ) y la obtenida con el modelo de estado cuasi-estacionario ( $\overline{p_{23}}$ ).

la segunda sección de la turbina, los estados  $p_{23}$  y  $p_{30}$  respectivamente, y sus correspondientes estados cuasi-estacionarios  $\overline{p_{23}}$  y  $\overline{p_{30}}$  obtenidos con el SPNBG.

En las Figuras 3.15 y 3.16 se muestran los volúmenes (desplazamientos) en la primera y segunda sección de la turbina, las variables de estados  $q_{21}$  y  $q_{31}$ , respectivamente, y sus correspondientes estados cuasi-estacionarios  $\overline{q_{21}}$  y  $\overline{q_{31}}$  obtenidos.

El estado estacionario de las variables de estado lentas se obtiene después de 50 segundo, tanto para el modelo en bond graph original como para el modelo de estado cuasi-estacionario son:

$$\begin{bmatrix} p_{18} \\ q_{21} \\ p_{23} \\ p_{30} \\ q_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 394.99809253 \text{ N-m-s} \\ 0.499999219 \text{ rad} \\ 1166.661796887 \text{ N-m-s} \\ 499.998069399 \text{ N-m-s} \\ 0.49999650883 \text{ rad} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \overline{p_{18}} \\ \overline{q_{21}} \\ \overline{p_{23}} \\ \overline{p_{30}} \\ \overline{q_{31}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 394.842777288 \text{ N-m-s} \\ 0.49999854026 \text{ rad} \\ 1166.20287004 \text{ N-m-s} \\ 499.801714851 \text{ N-m-s} \\ 0.499998084215 \text{ rad} \end{bmatrix}, \quad (3.143)$$

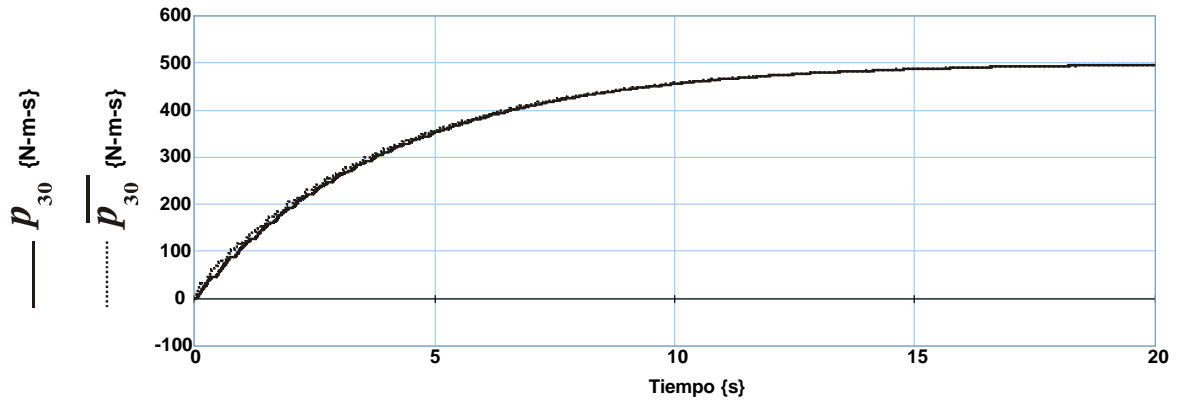


Figura 3.14: Dinámica de la variable de estado del modelo original en bond graph ( $p_{30}$ ) y la obtenida con el modelo de estado cuasi-estacionario ( $\overline{p_{30}}$ ).

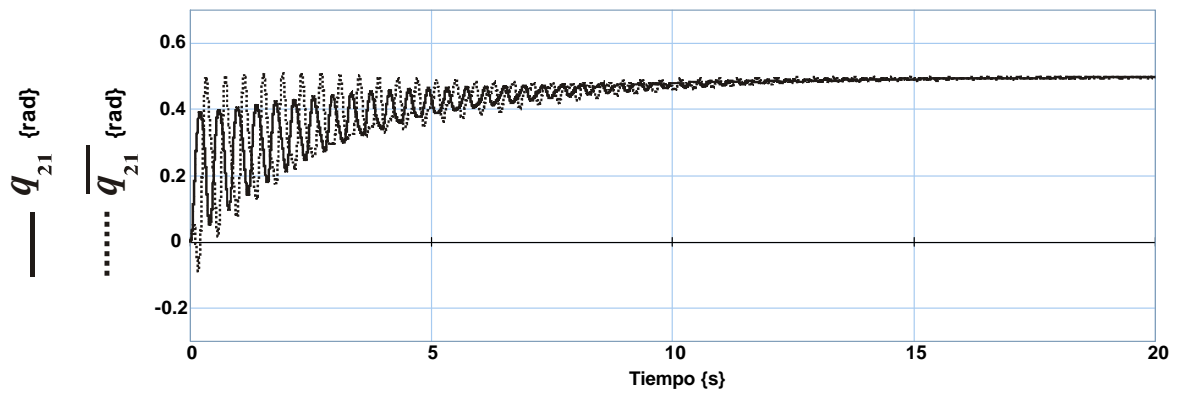


Figura 3.15: Dinámica de la variable de estado del modelo original en bond graph ( $q_{21}$ ) y la obtenida con el modelo de estado cuasi-estacionario ( $\overline{q_{21}}$ ).

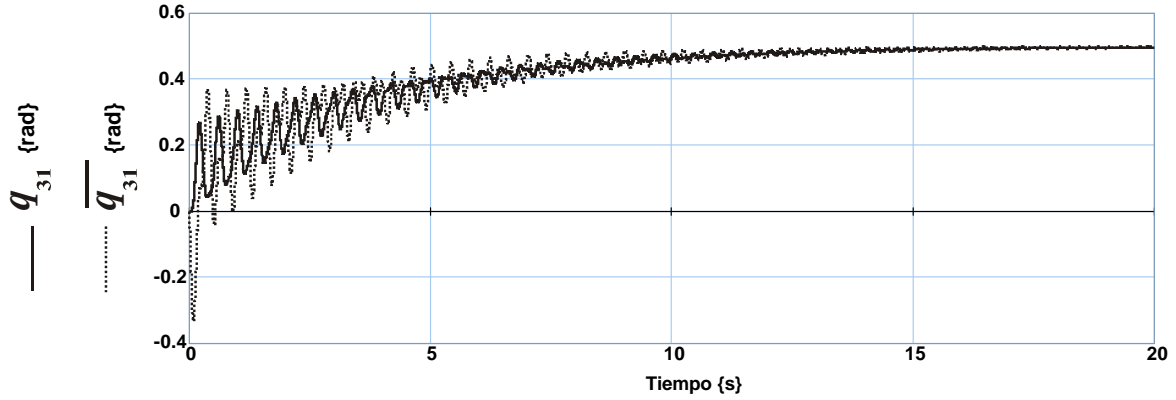


Figura 3.16: Dinámica de la variable de estado del modelo original en bond graph ( $q_{31}$ ) y la obtenida con el modelo de estado cuasi-estacionario ( $\overline{q_{31}}$ ).

con un error relativo para cada variable de estado de

$$\begin{bmatrix} \text{Error relativo de } p_{18} \\ \text{Error relativo de } p_{23} \\ \text{Error relativo de } q_{21} \\ \text{Error relativo de } p_{30} \\ \text{Error relativo de } q_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0393 \% \\ 0.00013 \% \\ 0.039 \% \\ 0.039 \% \\ -0.00031 \% \end{bmatrix} \quad (3.144)$$

Es importante notar que, el método propuesto permite obtener el modelo de estado cuasi-estacionario cambiando la causalidad de los elementos almacenadores que representan a los estados rápidos, y aunque la dinámica no es exactamente igual, el valor en estado estable es casi idéntico, esta diferencia se incrementa o se disminuye conforme aumenta o decrece la diferencia entre las velocidades de los estados, es decir, entre más rápidas sean las dinámicas rápidas con respecto a las lentas, menos discrepancia habrá entre las dinámicas original y las obtenidas con el estado cuasi-estacionario.

### 3.5.4. Ejemplo 2: La máquina de inducción

El motor de inducción es también llamado motor asíncrono debido a que alcanza una menor velocidad que la velocidad síncrona. La velocidad síncrona es la velocidad de rotación del

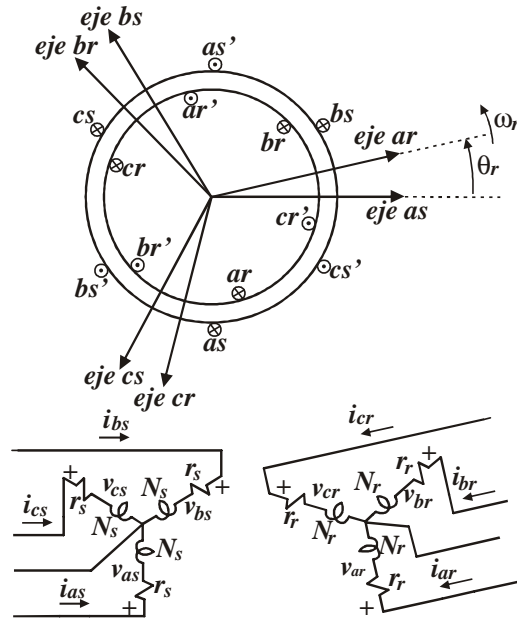


Figura 3.17: Diagrama esquemático de la máquina asíncrona trifásica.

campo magnético en una máquina rotativa y depende de la frecuencia y del número de polos de la máquina. Un motor de inducción siempre gira a menor velocidad que la velocidad síncrona porque el campo magnético giratorio que es producido en el estator generará el flujo en el rotor el cual provocará que el rotor gire, pero debido al retraso de la corriente de flujo en el rotor con la corriente de flujo en el estator, la velocidad del rotor nunca alcanzará a la velocidad del campo magnético. Existen dos tipos básicos de motores de inducción que dependen de la alimentación de entrada, el motor de inducción de una fase y el motor de inducción trifásico. La máquina de inducción no tiene un devanado de excitación independiente. La Figura 3.17 muestra el diagrama de una máquina de inducción de dos polos con devanados trifásicos simétricos tanto en el estator como en el rotor [Krause, 2002].

Los motores de inducción de jaula de ardilla son ampliamente usados en la industria ya que son robustos, confiables y económicos. Se tienen las mismas suposiciones de modelado tanto para estatores de máquinas síncronas y motores de jaula de ardilla. Se asume isotropía magnética (debido a la isotropía del material y a la geometría del rotor, a la separación

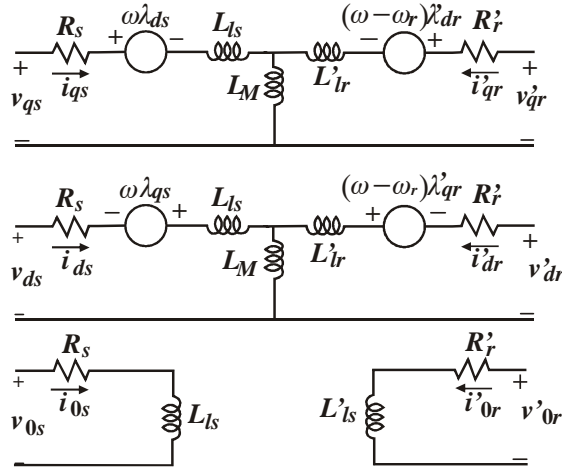


Figura 3.18: Circuitos equivalentes en el marco de referencia arbitrario  $dq0$  para la máquina de inducción.

uniforme, etc.) tanto en el rotor como en el estator, además también se supone linealidad magnética [Junco, 1999].

El circuito equivalente en el sistema de coordenadas  $dq0$  usando la transformación de Park (3.145) para convertir las variables del estator y del rotor a un marco de referencia arbitrario se muestra en la Figura 3.18.

$$i_{dq0} = P i_{abc}, \quad (3.145)$$

donde

$$P = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos \left( \theta - \frac{2}{3}\pi \right) & \cos \left( \theta + \frac{2}{3}\pi \right) \\ \sin \theta & \sin \left( \theta - \frac{2}{3}\pi \right) & \sin \left( \theta + \frac{2}{3}\pi \right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}. \quad (3.146)$$

La Figura 3.18 muestra las terminales para conectarse a cualquier sistema eléctrico, tanto para el estator como para el rotor. Debido a la isotropía magnética y a la uniformidad del entrehierro existe una única inductancia trifásica de magnetización o mutua  $L_m$  que es común para los dos ejes  $d$  y  $q$ . El superíndice ' denota que los parámetros y las variables del rotor están referidas al estator.

La Figura 3.19 [Junco, 1999] es el modelo en bond graph correspondiente al circuito equiva-

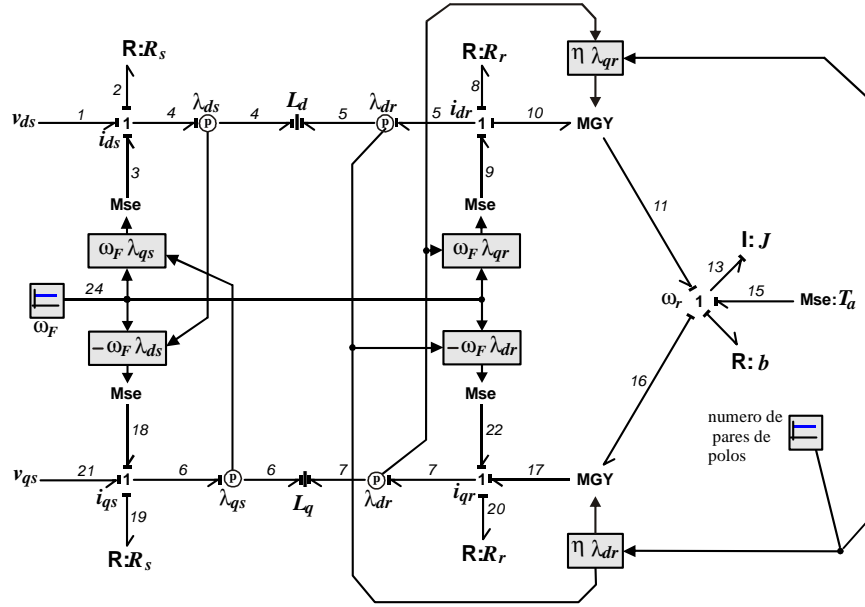


Figura 3.19: Bond graph en causalidad integral asignada de la máquina de inducción.

lente de la Figura 3.18, el cuál es un sistema electromecánico y califica como un sistema singularmente perturbado, ya que se tiene cuatro dinámicas rápidas que son los enlaces de flujo entre los devanados (parte eléctrica, constantes de tiempo relativamente pequeñas) y una dinámica lenta que es el momento de torsión angular en la inercia del eje mecánico de la máquina (parte mecánica, constante de tiempo relativamente grande).

Los elementos denotados por una letra  $p$  dentro de un círculo en la Figura 3.19 son utilizados para representar detectores o sensores de estado del sistema, en este caso las variables de energía  $p$  o enlaces de flujo en el dominio eléctrico. Los elementos denotados por  $L_d$  y  $L_q$  son campos- $I$  (ver Apéndice A) que sirven para representar las inductancias propias y mutuas en la máquina de inducción.

Para encontrar el modelo cuasi-estacionario, el primer paso es asignar causalidad derivativa a los elementos almacenadores de energía relacionados con las variables rápidas, dejando la causalidad integral en los elementos almacenadores relacionados con las dinámicas lentas (en este caso, solamente existe una variable lenta). Por lo que el bond graph para el sistema

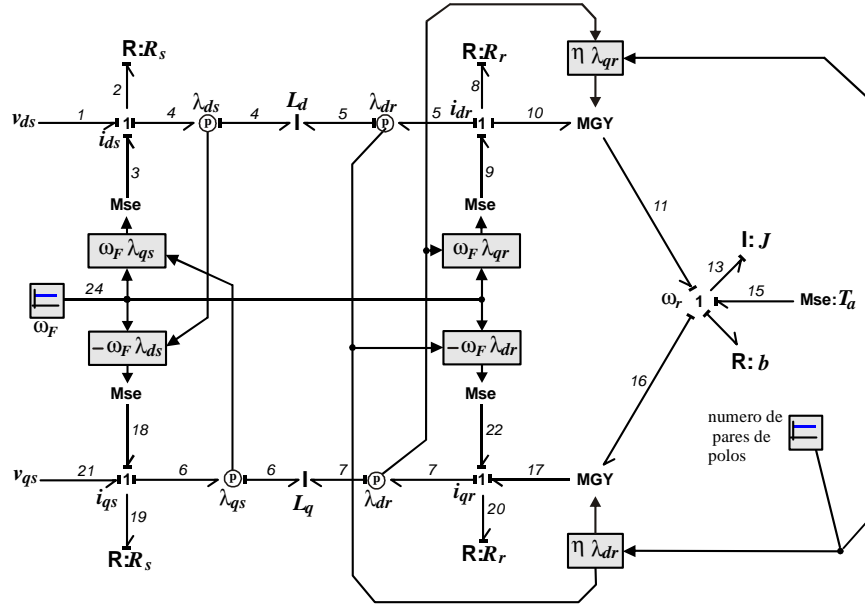


Figura 3.20: Bond graph para encontrar el sistema cuasi-estacionario de la máquina de inducción.

cuasi-estacionario queda como se muestra en la Figura 3.20. Los vectores clave y las relaciones constitutivas del sistema son,

$$x_1 = p_{13}; \quad \dot{x}_1 = e_{13}; \quad z_1 = f_{13}; \quad F_1 = \frac{1}{J}; \quad (3.147)$$

$$x_2 = \begin{bmatrix} p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_7 \end{bmatrix}; \quad \dot{x}_2 = \begin{bmatrix} e_4 \\ e_5 \\ e_6 \\ e_7 \end{bmatrix}; \quad z_2 = \begin{bmatrix} f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \end{bmatrix}; \quad F_2 = \begin{bmatrix} L_s & L_m & 0 & 0 \\ L_m & L_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_s & L_m \\ 0 & 0 & L_m & L_r \end{bmatrix}; \quad (3.148)$$

$$D_{in}^h = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_8 \\ e_{19} \\ e_{20} \\ f_{23} \end{bmatrix}; \quad D_{out}^h = \begin{bmatrix} f_2 \\ f_8 \\ f_{19} \\ f_{20} \\ e_{23} \end{bmatrix}; \quad L^h = \text{Diag} \left\{ \frac{1}{R_s}, \frac{1}{R_r}, \frac{1}{R_s}, \frac{1}{R_r}, b \right\}; \quad u = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_{21} \\ e_{15} \\ f_{24} \end{bmatrix}. \quad (3.149)$$

Donde  $x_1$  y  $x_2$ , son la variable lenta y las variables rápidas, respectivamente. Para las fuentes

moduladas y para los giradores modulados se tiene que

$$\begin{aligned} e_3 &= \omega_F \lambda_{qs} = f_{24} p_6; & e_{18} &= -\omega_F \lambda_{ds} = -f_{24} p_4; \\ e_9 &= \omega_F \lambda_{qr} = f_{24} p_7; & e_{22} &= -\omega_F \lambda_{dr} = -f_{24} p_5, \end{aligned} \quad (3.150)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} e_{10} \\ f_{10} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & \eta \lambda_{qr} \\ \frac{1}{\eta \lambda_{qr}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{11} \\ f_{11} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} e_{10} \\ f_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \eta p_7 \\ \frac{1}{\eta p_7} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{11} \\ f_{11} \end{bmatrix}; \\ \begin{bmatrix} e_{16} \\ f_{16} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & \eta \lambda_{dr} \\ \frac{1}{\eta \lambda_{dr}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{17} \\ f_{17} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} e_{16} \\ f_{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \eta p_5 \\ \frac{1}{\eta p_5} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{17} \\ f_{17} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.151)$$

Mediante un análisis del modelo en Bond Graph de la Figura 3.20, la matriz de estructura de unión es,

$$\begin{bmatrix} e_{13} \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \\ e_2 \\ e_8 \\ e_{19} \\ e_{20} \\ f_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta p_7 & 0 & -\eta p_5 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & p_6 \\ -\eta p_7 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -p_4 \\ \eta p_5 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -p_5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{13} \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \\ e_7 \\ f_2 \\ f_8 \\ f_{19} \\ f_{20} \\ e_{23} \\ e_1 \\ e_{21} \\ e_{15} \\ f_{24} \end{bmatrix}. \quad (3.152)$$

De la estructura unión (3.152) por comparación con (3.108) se tiene que,

$$H_{11}^{11} = 0; \quad H_{11}^{12} = 0_{1 \times 4}; \quad H_{12}^{11} = \begin{bmatrix} 0 & \eta p_7 & 0 & -\eta p_5 & -1 \end{bmatrix}; \quad H_{13}^{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$H_{11}^{21} = 0_{4 \times 1}; \quad H_{11}^{22} = H_{13}^{21} = 0_{4 \times 4}; \quad H_{12}^{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad H_{22} = 0_{5 \times 5};$$

$$H_{21}^{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\eta p_7 \\ 0 \\ \eta p_5 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad H_{21}^{12} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad H_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p_6 \\ 0 & 0 & 0 & p_7 \\ 0 & 1 & 0 & -p_4 \\ 0 & 0 & 0 & -p_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.153)$$

El valor de  $Q$  es,

$$Q = \left[ I - \underbrace{H_{22} L^h}_0 \right]^{-1} L^h = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_s} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix}, \quad (3.154)$$

usando (3.87) a (3.92) se obtiene los valores de las matrices  $\widetilde{A}$ 's para la representación en espacio de estados.

Para la representación de variable lenta, el valor de  $\widetilde{A}_{11}$ ,

$$\widetilde{A}_{11} = \left( 0 + \begin{bmatrix} 0 & \eta p_7 & 0 & -\eta p_5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{R_s} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\eta p_7 \\ 0 \\ \eta p_5 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \left[ \frac{1}{J} \right],$$

$$\widetilde{A}_{11} = \frac{1}{J} \left[ -b - \frac{\eta^2}{R_r} (p_5^2 - p_7^2) \right]. \quad (3.155)$$

Para  $\widetilde{A}_{12}$  se tiene,

$$\widetilde{A}_{12} = 0_{1 \times 4} + \begin{bmatrix} 0 & \eta p_7 & 0 & -\eta p_5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{R_s} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{A}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & -\eta \frac{p_7}{R_r} & 0 & \eta \frac{p_5}{R_r} \end{bmatrix}, \quad (3.156)$$

y para  $\widetilde{B}_1$  se obtiene,

$$\widetilde{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \eta p_7 & 0 & -\eta p_5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{R_s} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p_6 \\ 0 & 0 & 0 & p_7 \\ 0 & 1 & 0 & -p_4 \\ 0 & 0 & 0 & -p_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{\eta}{R_r} (p_5^2 + p_7^2) \end{bmatrix}. \quad (3.157)$$

Para la representación de las variables rápidas, el valor de  $\widetilde{A}_{21}$ ,

$$\widetilde{A}_{21} = \begin{bmatrix} L_s & L_m & 0 & 0 \\ L_m & L_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_s & L_m \\ 0 & 0 & L_m & L_r \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_s} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\eta p_7 \\ 0 \\ \eta p_5 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ J \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{A}_{21} = \frac{\eta}{JR_r} \begin{bmatrix} -L_m p_7 \\ -L_r p_7 \\ L_m p_5 \\ L_r p_5 \end{bmatrix}. \quad (3.158)$$

Para  $\widetilde{A}_{22}$  se tiene,

$$\widetilde{A}_{22} = \begin{bmatrix} L_s & L_m & 0 & 0 \\ L_m & L_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_s & L_m \\ 0 & 0 & L_m & L_r \end{bmatrix} \left( 0_{4 \times 4} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{R_s} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right),$$

$$\widetilde{A}_{22} = \begin{bmatrix} -\frac{L_s}{R_s} & -\frac{L_m}{R_r} & 0 & 0 \\ -\frac{L_m}{R_s} & -\frac{L_r}{R_r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{L_s}{R_s} & -\frac{L_m}{R_r} \\ 0 & 0 & -\frac{L_m}{R_s} & -\frac{L_r}{R_r} \end{bmatrix}, \quad (3.159)$$

y para  $\widetilde{B}_2$  se obtiene,

$$\widetilde{B}_2 = \begin{bmatrix} L_s & L_m & 0 & 0 \\ L_m & L_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_s & L_m \\ 0 & 0 & L_m & L_r \end{bmatrix} * \left( 0_{4 \times 4} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{R_s} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p_6 \\ 0 & 0 & 0 & p_7 \\ 0 & 1 & 0 & -p_4 \\ 0 & 0 & 0 & -p_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right),$$

$$\widetilde{B}_2 = \begin{bmatrix} \frac{L_s}{R_s} & 0 & 0 & \frac{L_s}{R_s} p_6 + \frac{L_m}{R_r} p_7 \\ \frac{L_m}{R_s} & 0 & 0 & \frac{L_m}{R_s} p_6 + \frac{L_r}{R_r} p_7 \\ 0 & \frac{L_s}{R_s} & 0 & -\frac{L_s}{R_s} p_4 - \frac{L_m}{R_r} p_5 \\ 0 & \frac{L_m}{R_s} & 0 & -\frac{L_m}{R_s} p_4 - \frac{L_r}{R_r} p_5 \end{bmatrix}. \quad (3.160)$$

La representación de la máquina de inducción en la forma estándar de sistemas singularmente perturbados con dinámicas lentas y rápidas separadas usando (3.109) y (3.110) queda,

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_{13} \end{bmatrix} = \frac{1}{J} \left[ -b - \frac{\eta^2}{R_r} (p_5^2 - p_7^2) \right] [p_{13}] + \begin{bmatrix} 0 & -\eta \frac{p_7}{R_r} & 0 & \eta \frac{p_5}{R_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p}_4 \\ \dot{p}_5 \\ \dot{p}_6 \\ \dot{p}_7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{\eta}{R_r} (p_5^2 + p_7^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_{21} \\ e_{15} \\ f_{24} \end{bmatrix}, \quad (3.161)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_4 \\ \dot{p}_5 \\ \dot{p}_6 \\ \dot{p}_7 \end{bmatrix} = \frac{\eta}{JR_r} \begin{bmatrix} -L_m p_7 \\ -L_r p_7 \\ L_m p_5 \\ L_r p_5 \end{bmatrix} [p_{13}] + \begin{bmatrix} -\frac{L_s}{R_s} & -\frac{L_m}{R_r} & 0 & 0 \\ -\frac{L_m}{R_s} & -\frac{L_r}{R_r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{L_s}{R_s} & -\frac{L_m}{R_r} \\ 0 & 0 & -\frac{L_m}{R_s} & -\frac{L_r}{R_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p}_4 \\ \dot{p}_5 \\ \dot{p}_6 \\ \dot{p}_7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{L_s}{R_s} & 0 & 0 & \frac{L_s}{R_s} p_6 + \frac{L_m}{R_r} p_7 \\ \frac{L_m}{R_s} & 0 & 0 & \frac{L_m}{R_s} p_6 + \frac{L_r}{R_r} p_7 \\ 0 & \frac{L_s}{R_s} & 0 & -\frac{L_s}{R_s} p_4 - \frac{L_m}{R_r} p_5 \\ 0 & \frac{L_m}{R_s} & 0 & -\frac{L_m}{R_s} p_4 - \frac{L_r}{R_r} p_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_{21} \\ e_{15} \\ f_{24} \end{bmatrix}. \quad (3.162)$$

El sistema cuasi-estacionario está definido por (3.117), sustituyendo queda,

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_{13} \end{bmatrix} = -\frac{b}{J} \overline{p}_{13} - \frac{\eta^2}{JR_r} (\overline{p}_5^2 + \overline{p}_7^2) \overline{p}_{13} + \frac{\eta}{R_r} (\overline{p}_5^2 + \overline{p}_7^2) f_{24} + e_{15}, \quad (3.163)$$

(3.163) es el modelo cuasi-estacionario, pero se observa que existe dependencia de dos estados rápidos  $\overline{p}_5$  y  $\overline{p}_7$ . Como para el estado cuasi-estacionario se considera que las dinámicas rápidas

han terminado, es decir,  $\left[ \begin{array}{cccc} \dot{\bar{p}}_4 & \dot{\bar{p}}_5 & \dot{\bar{p}}_6 & \dot{\bar{p}}_7 \end{array} \right]^T = 0$ . Entonces (3.162) se convierte en,

$$\begin{bmatrix} \bar{p}_4 \\ \bar{p}_5 \\ \bar{p}_6 \\ \bar{p}_7 \end{bmatrix} = \frac{\eta}{J} \begin{bmatrix} -T_{mr}\bar{p}_7 \\ -T_{rr}\bar{p}_7 \\ T_{mr}\bar{p}_5 \\ T_{rr}\bar{p}_5 \end{bmatrix} [\bar{p}_{13}] + \begin{bmatrix} T_{ss} & 0 & 0 & T_{ss}\bar{p}_6 + T_{mr}\bar{p}_7 \\ T_{ms} & 0 & 0 & T_{ms}\bar{p}_6 + T_{rr}\bar{p}_7 \\ 0 & T_{ss} & 0 & -T_{ss}\bar{p}_4 - T_{mr}\bar{p}_5 \\ 0 & T_{ms} & 0 & -T_{ms}\bar{p}_4 - T_{rr}\bar{p}_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_{21} \\ e_{15} \\ f_{24} \end{bmatrix}, \quad (3.164)$$

donde

$$T_{ss} = \frac{L_s}{R_s}; \quad T_{rr} = \frac{L_r}{R_r}; \quad T_{ms} = \frac{L_m}{R_s}; \quad T_{mr} = \frac{L_m}{R_r}. \quad (3.165)$$

Expresando (3.164) en forma de variables separadas,

$$\bar{p}_4 = -\frac{\eta T_{mr}}{J} \frac{\bar{p}_7 \bar{p}_{13}}{\bar{p}_7 \bar{p}_{13}} + T_{ss} e_1 + (T_{ss} \bar{p}_6 + T_{mr} \bar{p}_7) f_{24}, \quad (3.166)$$

$$\bar{p}_5 = -\frac{\eta T_{rr}}{J} \frac{\bar{p}_7 \bar{p}_{13}}{\bar{p}_7 \bar{p}_{13}} + T_{ms} e_1 + (T_{ms} \bar{p}_6 + T_{rr} \bar{p}_7) f_{24}, \quad (3.167)$$

$$\bar{p}_6 = \frac{\eta T_{mr}}{J} \frac{\bar{p}_5 \bar{p}_{13}}{\bar{p}_5 \bar{p}_{13}} + T_{ss} e_{21} - (T_{ss} \bar{p}_4 + T_{mr} \bar{p}_5) f_{24}, \quad (3.168)$$

$$\bar{p}_7 = \frac{\eta T_{rr}}{J} \frac{\bar{p}_5 \bar{p}_{13}}{\bar{p}_5 \bar{p}_{13}} + T_{ms} e_{21} - (T_{ms} \bar{p}_4 + T_{rr} \bar{p}_5) f_{24}, \quad (3.169)$$

Sustituyendo (3.166) y (3.167) en (3.169) se obtiene,

$$\bar{p}_7 = \frac{[T_{ms} T_{rr} f_{24} \left( \frac{\eta}{J} \bar{p}_{13} - f_{24} \right) - T_{ss} f_{24}] \bar{p}_6 + T_{ms} e_1 [T_{rr} \left( \frac{\eta}{J} \bar{p}_{13} - f_{24} \right) - T_{ss} f_{24}] + T_{ms} e_{21}}{1 + \frac{\eta}{J} T_{rr}^2 \bar{p}_{13} \left[ \left( \frac{\eta}{J} \right) \bar{p}_{13} + \left( \frac{T_{ms} T_{mr}}{T_{rr}^2} - 2 \right) f_{24} \right] + (T_{ms} T_{mr} + T_{rr}^2) f_{24}^2}. \quad (3.170)$$

Para simplificar el manejo de las ecuaciones (3.170) se convierte en

$$\bar{p}_7 = \frac{\alpha \bar{p}_6 + \beta}{\rho}, \quad (3.171)$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha &= T_{ms} T_{rr} f_{24} \left( \frac{\eta}{J} \bar{p}_{13} - f_{24} \right) - T_{ss} f_{24}, \\ \beta &= T_{ms} e_1 \left[ T_{rr} \left( \frac{\eta}{J} \bar{p}_{13} - f_{24} \right) - T_{ss} f_{24} \right] + T_{ms} e_{21}, \\ \rho &= 1 + \frac{\eta}{J} T_{rr}^2 \bar{p}_{13} \left[ \left( \frac{\eta}{J} \right) \bar{p}_{13} + \left( \frac{T_{ms} T_{mr}}{T_{rr}^2} - 2 \right) f_{24} \right] + (T_{ms} T_{mr} + T_{rr}^2) f_{24}^2. \end{aligned} \quad (3.172)$$

Ahora, sustituyendo (3.168) y (3.169) en (3.167) se obtiene,

$$\bar{p}_5 = \frac{[T_{ms}T_{rr}f_{24} \left(\frac{\eta}{J}\bar{p}_{13} - f_{24}\right) - T_{ss}f_{24}] \bar{p}_4 + T_{ms} \{e_{21} \left[-\frac{\eta}{J}T_{rr}\bar{p}_{13} + (T_{ss} + T_{rr}) f_{24}\right] + e_1\}}{1 + \frac{\eta}{J}T_{rr}^2\bar{p}_{13} \left[\left(\frac{\eta}{J}\right)\bar{p}_{13} + \left(\frac{T_{ms}T_{mr}}{T_{rr}^2} - 2\right) f_{24}\right] + (T_{ms}T_{mr} + T_{rr}^2) f_{24}^2}. \quad (3.173)$$

Para simplificar (3.173) se convierte en

$$\bar{p}_5 = \frac{\alpha\bar{p}_4 + \gamma}{\rho}, \quad (3.174)$$

donde

$$\gamma = T_{ms} \left\{ e_{21} \left[ -\frac{\eta}{J}T_{rr}\bar{p}_{13} + (T_{ss} + T_{rr}) f_{24} \right] + e_1 \right\}. \quad (3.175)$$

En seguida, se se sustituye en (3.166) el resultado obtenido en (3.171), para obtener

$$\bar{p}_4 = \left[ \frac{\alpha}{\rho}T_{mr} \left( f_4 - \frac{\eta}{J}\bar{p}_{13} \right) + T_{ss}f_{24} \right] \bar{p}_6 + T_{ss}e_1 - \frac{\eta T_{mr}}{J} \frac{\beta}{\rho} \bar{p}_{13} + T_{mr} \frac{\beta}{\rho} f_{24}. \quad (3.176)$$

Para simplificar (3.176) queda

$$\bar{p}_4 = \kappa\bar{p}_6 + \theta, \quad (3.177)$$

donde

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{\alpha}{\rho}T_{mr} \left( f_4 - \frac{\eta}{J}\bar{p}_{13} \right) + T_{ss}f_{24}, \\ \sigma &= \frac{\beta}{\rho}T_{mr} \left( f_{24} - \frac{\eta}{J}\bar{p}_{13} \right) + T_{ss}e_1. \end{aligned} \quad (3.178)$$

Ahora, en (3.168) se sustituye (3.174), resulta

$$\bar{p}_6 = - \left[ \frac{\alpha}{\rho}T_{mr} \left( f_4 - \frac{\eta}{J}\bar{p}_{13} \right) + T_{ss}f_{24} \right] \bar{p}_4 + T_{mr} \frac{\gamma}{\rho} \left( \frac{\eta}{J}\bar{p}_{13} - f_{24} \right) + T_{ss}e_{21}. \quad (3.179)$$

De igual forma que se realizó anteriormente, para simplificar el manejo de ecuaciones (3.179)

se convierte en

$$\bar{p}_6 = -\kappa\bar{p}_4 + \psi, \quad (3.180)$$

donde

$$\psi = T_{mr} \frac{\gamma}{\rho} \left( \frac{\eta}{J}\bar{p}_{13} - f_{24} \right) + T_{ss}e_{21}. \quad (3.181)$$

A continuación, se sustituye en (3.180) el resultado obtenido en (3.177), se obtiene

$$\bar{p}_6 = \frac{\psi - \kappa\sigma}{1 + \kappa^2}. \quad (3.182)$$

Ahora se sustituye (3.182) en (3.177) para obtener

$$\overline{p}_4 = \frac{\kappa\psi + \sigma}{1 + \kappa^2}, \quad (3.183)$$

Se debe notar que,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\rho$ ,  $\gamma$ ,  $\kappa$ ,  $\sigma$  y  $\psi$  dependen solamente de los parámetros constantes, de las entradas del sistema y de la variable lenta  $\overline{p}_{13}$ , es decir, no tiene dependencia de las dinámicas lentas, entonces se sustituye (3.183) en (3.174) y (3.182) en (3.171) para tener  $\overline{p}_5$  y  $\overline{p}_7$  en iguales condiciones,

$$\overline{p}_5 = \frac{\alpha \left( \frac{\kappa\psi + \theta}{1 + \kappa^2} \right) + \gamma}{\rho} = \Sigma, \quad (3.184)$$

$$\overline{p}_7 = \frac{\alpha \left( \frac{\psi - \kappa\theta}{1 + \kappa^2} \right) + \beta}{\rho} = \Gamma, \quad (3.185)$$

Finalmente, se sustituye (3.184) y (3.185) en (3.182)

$$\left[ \dot{\overline{p}}_{13} \right] = -\frac{b}{J}\overline{p}_{13} + \frac{\eta}{R_r} (\Sigma^2 + \Gamma^2) \left( f_{24} - \frac{\eta}{J}\overline{p}_{13} \right) + e_{15}, \quad (3.186)$$

Por lo tanto (3.186) representa la nueva dinámica lenta (sistema cuasi-estacionario) que está en función de los parámetros constantes de la máquina de inducción, de las entradas al sistema y de la propia nueva variable lenta, es decir, se redujo el sistema dependiente de cinco variables a un sistema equivalente que sólo depende de una variable.

### 3.5.5. Comparación de los resultados obtenidos

Con la finalidad de comparar la dinámica del modelo original con el sistema cuasi-estacionario obtenido se realiza la simulación del modelo de la máquina de inducción con 20-SIM<sup>®</sup> que se muestra en la Figura 3.19, donde es necesaria la conversión de trifásico  $abc$  a coordenadas  $dq0$  con la transformación de Park, los valores de  $V_q$  y  $V_d$  son 2939.039 V y 0 V, respectivamente, siendo  $T_a = 100$  N. Para la simulación se utilizaron los parámetros de máquina que se observan en la Tabla 3.2 [Krause, 2002].

En la Figura 3.21 se observan las dinámicas de las variables de estado de la máquina de inducción, para verificar el modelo con el comportamiento que se tiene en las máquinas reales [Krause, 2002].

Tabla 3.2: Parámetros para la simulación de la máquina de inducción.

Elemento	Valor	Elemento	Valor
$J$	63.87 N-m-s <sup>2</sup>	$R_s$	0.029 $\Omega$
$b$	10 N-m-s	$R_r$	0.022 $\Omega$
$\eta$	2 pares de polos	$L_s$	0.0352 H
$P_{\text{nominal}}$	1.67 MW	$L_r$	0.0352 H
$V_{\text{nominal}}$	2.4 kV	$L_m$	0.0346 H
$\omega_F$	377 rad/s		

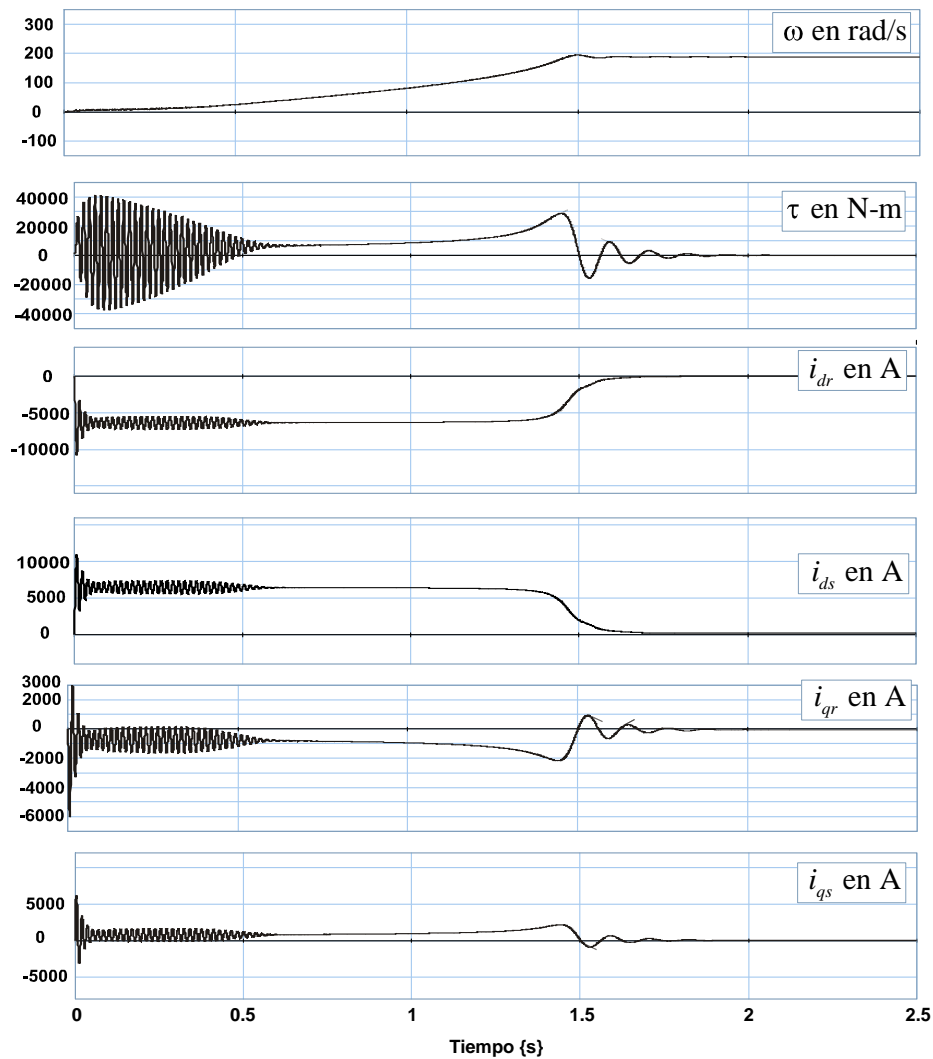


Figura 3.21: Dinámicas de la máquina de inducción con variables de estado clásicas.

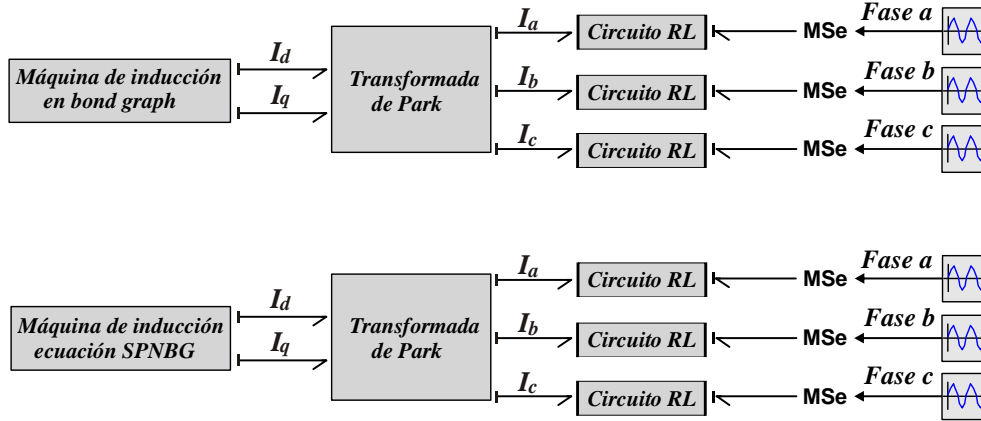


Figura 3.22: Diagrama en 20-Sim para la simulación y comparación de la respuesta del modelo original y la ecuación obtenida con el SPNGB para la máquina de inducción.

Para comparar la respuesta en simulación de la velocidad del eje de máquina de inducción utilizando el modelo original en bond graph y la respuesta obtenida con el modelo de estado cuasi-estacionario (3.186), se utiliza 20-SIM<sup>®</sup> para realizar la simulación de ambas respuestas al mismo tiempo como se muestra en la Figura 3.22.

En la Figura 3.22 se muestra como se conecta la máquina de inducción a un bus infinito mediante el bloque de transformada de Park (ver el Apéndice B). Los bloques de *Máquina de inducción en bond graph* y *Máquina de inducción ecuación SPNGB* son las Figuras 3.19 y 3.23, respectivamente. Los parámetros de simulación son los que se observan en la Tabla 3.1 [Anderson, 2003].

El bloque denominado *Máquina de inducción ecuación SPNGB* contiene la ecuación (3.186), en la Figura 3.23 el bloque es denotado como *Ecuación para  $\overline{p}_{13}$* .

La Figura 3.24 muestra la conducta dinámica del rotor de la máquina de inducción, es decir, la velocidad angular del eje, la variable de estado  $p_{13}$  es el momento de torsión angular exacto y  $\overline{p}_{13}$  es el momento de torsión angular usando el modelo de estado cuasi-estacionario (dividiendo el momento de torsión angular entre el valor del elemento almacenador se obtiene la velocidad angular).

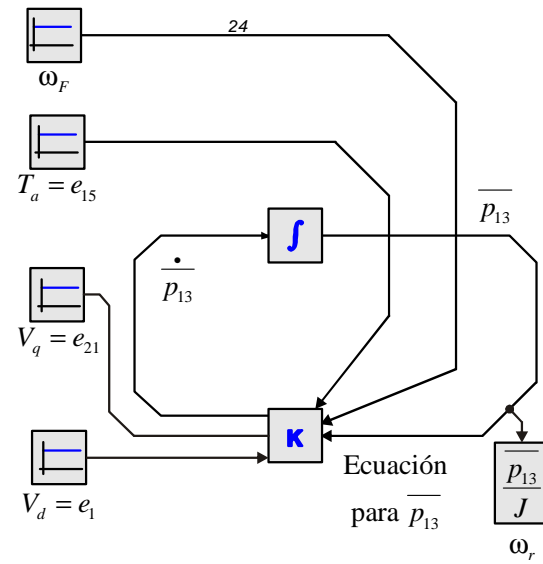


Figura 3.23: Diagrama esquemático para la simulación del sistema cuasi-estacionario del modelo de la máquina de inducción.

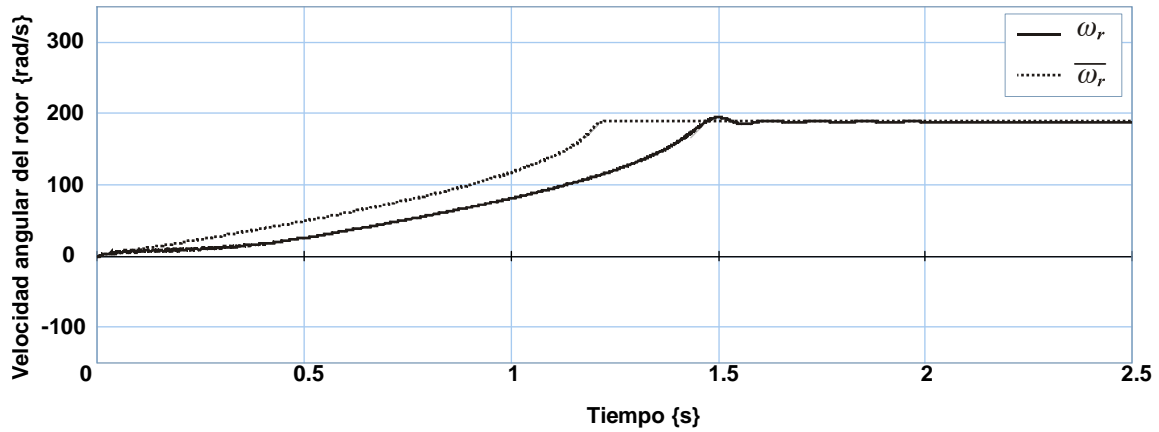


Figura 3.24: Dinámica de la velocidad angular del modelo original en bond graph y la obtenida con el modelo de estado cuasi-estacionario.

En la Figura 3.24 se puede observar que la dinámica obtenida con el modelo de estado cuasi-estacionario “llega” más rápido a su estado estacionario que la velocidad angular del sistema original, esto se debe a que para el cálculo del modelo lento se utilizan los valores “finales” de las variables rápidas, las cuales debido a su dinámica rápida ya están en su estado estable, por lo que en este caso, el modelo cuasi-estacionario es capaz de “predecir” el valor final de la velocidad angular del eje, un poco antes que el modelo original, ya que no requiere el valor final de la velocidad angular del modelo original la cual es una variable muy lenta en los sistemas electromecánicos de grandes proporciones.

El valor en estado estacionario, después de 2.5 segundos, de la velocidad angular del rotor de la máquina de inducción del modelo original en bond graph y la velocidad angular obtenida mediante el modelo de estado cuasi-estacionario son

$$\omega_r = 188.417086135 \text{ rad/s}, \quad \bar{\omega}_r = 188.623813351 \text{ rad/s}, \quad (3.187)$$

con un error relativo de

$$\text{Error relativo de } \omega_r = 0.109 \% \quad (3.188)$$

Se puede observar que la dinámica que sigue el modelo de estado cuasi-estacionario no es exactamente la misma que el comportamiento de la velocidad angular original, sin embargo, el estado estable es relativamente cercano.

### **3.6. Caso de Estudio 2: El aerogenerador con máquina de inducción considerando fricción no lineal**

La tecnología de las turbinas de viento se ha desarrollado rápidamente en las últimas décadas, debido a que utilizan energía renovable, tiene buena relación costo-efectividad y causa muy poco daño a la naturaleza comparandola con otras fuentes de energía convencionales [Arifujjaman, 2005]. Como resultado de esto, en el futuro las turbinas de viento pueden iniciar a influenciar el comportamiento de los sistemas de potencia eléctrica interactuando con sistemas de generación y carga convencionales; con la finalidad de investigar el impacto de

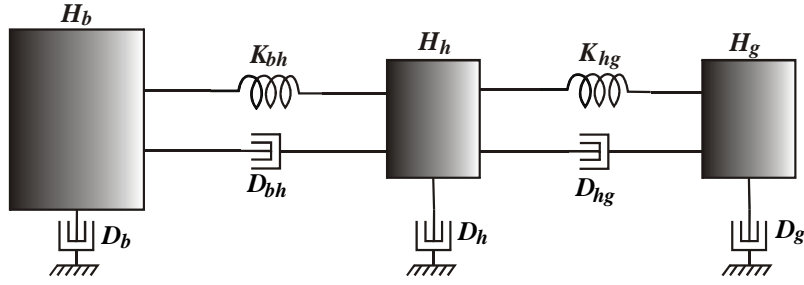


Figura 3.25: Diagrama esquemático del modelo equivalente de tres masas de una turbina de viento.

la potencia obtenida del viento en la dinámica de los sistemas de potencia, es esencial tener modelos adecuados de este tipo de generación energética [Dusonchet, 2007].

Un aerogenerador, está constituido por dos partes principales, la parte mecánica y la parte eléctrica. En un ejemplo de caso de estudio anterior se modeló el generador de inducción, ahora este modelo se acopla al modelo de mecánico de la turbina de viento.

### 3.6.1. Diagrama esquemático del modelo equivalente de tres masas de una turbina de viento

Un modelo equivalente de tres masas de una turbina de viento en el sistema mecánico es como el que se muestra en la Figura 3.25. La primera masa se coloca por las aspas, mientras que la segunda masa es por el buje, y la tercera masa se coloca por el generador que incluye la caja de engranes de alta velocidad y el rotor del generador [Li, 2007].

En la Figura 3.25 se pueden ver los siguientes elementos:  $H_b$ ,  $H_h$  y  $H_g$  que son las constantes de inercia de las aspas, del buje y del rotor del generador, respectivamente;  $D_{bh}$  es el coeficiente de amortiguamiento entre las aspas y el buje;  $D_{hg}$  es el coeficiente de amortiguamiento entre el buje y el rotor del generador;  $D_b$ ,  $D_h$  y  $D_g$  son los coeficientes de amortiguamiento de las aspas, el buje y el generador, respectivamente;  $K_{bh}$  y  $K_{hg}$  son los coeficientes de rigidez de las aspas y de la caja de engranes de alta velocidad.

### 3.6.2. Aerogenerador con máquina de inducción considerando rozamiento no lineal con un enfoque de bond graph

El fenómeno de la fricción del aire a velocidades altas ocasiona que la resistencia sea no lineal. En dinámica de fluidos, *la resistencia aerodinámica* (algunas veces llamada *resistencia del aire* o *resistencia del fluido*) se refiere a las fuerzas que actúan opuestas al movimiento relativo de cualquier objeto que se esta moviendo dentro de un fluido circundante. Esta pueden existir entre dos capas de fluido (o superficies) o puede existir también entre una superficie sólida y una capa de fluido. A diferencia con otras fuerzas resistivas, tal como la fricción seca, la cual es casi independiente de la velocidad, la resistencia aerodinámica depende de la velocidad [French, 1970].

#### La resistencia aerodinámica

La física de la resistencia aerodinámica aplica al movimiento a través de cualquier tipo de fluido: gas o líquido. Para una aproximación razonable, la resistencia del fluido tiende a depender de una de dos, de la primera potencia de la velocidad (una resistencia lineal) o de la segunda potencia (resistencia cuadrática) [Batchelor, 1967].

A velocidades pequeñas, la resistencia del fluido es lineal,

$$F_{resist} = -bv, \quad (\text{velocidades bajas}) \quad (3.189)$$

donde  $b$  esta dada en unidades de  $\text{N}/(\text{m/s})=\text{kg/s}$ . La fuerza  $-bv$  es alguna veces llamada rozamiento viscoso. Esta se incrementa principalmente por la cohesión de las capas del fluido. Para velocidades grandes, la resistencia del fluido es mejor descrita mediante una dependencia cuadrática de la velocidad,

$$F_{resist} = -cv^2, \quad (\text{velocidades altas}) \quad (3.190)$$

donde las unidades de  $c$  son  $\text{N}/(\text{m/s})^2=\text{kg/m}$ . Este término generalmente es llamado resistencia aerodinámica o simplemente rozamiento. Esta relacionado con la transferencia de la cantidad de movimiento entre el objeto que se esta moviendo y el fluido a través del cual esta viajando el objeto. De acuerdo con la ley de Boyle [Batchelor, 1967] acerca de la teoría

de la cinética de los gases, que la presión estaba relacionada a la transferencia de la cantidad de movimiento entre los átomos o moléculas del gas y las paredes envolventes del contenedor. De manera muy similar el coeficiente de la resistencia aerodinámica  $c$  puede ser relacionado a otras cantidades,

$$c = \frac{1}{2}C_D\rho A, \quad (3.191)$$

donde  $C_D$  es un factor geométrico que depende de la forma del objeto (igual a 1/2 para una esfera),  $\rho$  es la densidad del fluido, y  $A$  es el área de la sección transversal del objeto. El factor 1/2 es colocado por conveniencia. En general, ambos términos pueden ser representados por

$$F_{resist} = -bv - cv^2. \quad (3.192)$$

Si  $v \ll 1$ , el segundo término disminuye, por lo que se ignora; y si  $v \gg 1$  el primer término es el que se desprecia.

### 3.6.3. Diagrama esquemático del modelo equivalente de tres masa de una turbina de viento considerando el rozamiento no lineal

Anteriormente, se mostró el modelo de tres masas para la parte mecánica de la turbina donde se consideró el rozamiento lineal Figura 3.25, ahora se le agrega el efecto no lineal debido a la resistencia aerodinámica como se muestra en la Figura 3.26, donde los coeficientes de amortiguamiento  $D_b$ ,  $D_h$  y  $D_g$  ya no son valores constantes, sino que se multiplican por la velocidad angular respectiva en cada masa,  $\omega_b = f_{36} = \frac{p_{36}}{H_b}$ ,  $\omega_h = f_{29} = \frac{p_{29}}{H_h}$  y  $\omega_g = f_{13} = \frac{p_{13}}{H_g}$  (de acuerdo con (A.31)), respectivamente. Para agregar el efecto no lineal en los amortiguadores de los ejes que unen las masa, se multiplican las constantes de amortiguamiento  $D_{bh}$  y  $D_{hg}$  por la diferencia de velocidades angulares,  $\omega_b - \omega_h = f_{36} - f_{27} = \frac{p_{36}}{H_b} - \frac{p_{29}}{H_h}$  y  $\omega_h - \omega_g = f_{29} - f_{13} = \frac{p_{29}}{H_h} - \frac{p_{13}}{H_g}$ , respectivamente.

Por lo que el modelo en bond graph para el aerogenerador considerando la resistencia aerodinámica no lineal se muestra en la Figura 3.27. Es importante notar que en el modelo de la máquina de inducción en el Ejemplo 2 (Figura 3.19) cambia la dirección de la semiflecha de los voltajes  $v_{ds}$  y  $v_{qs}$  con respecto a la Figura 3.27, esto debido a que en la primera la

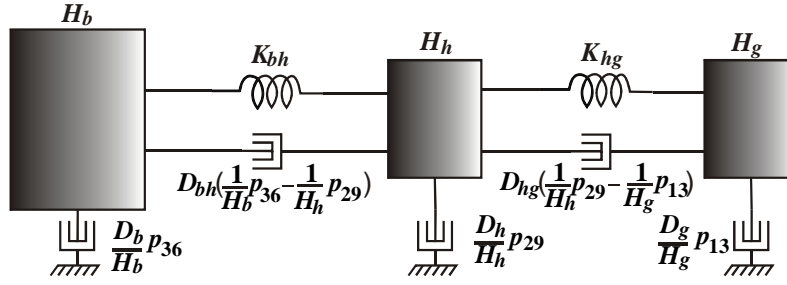


Figura 3.26: Diagrama esquemático del modelo equivalente de tres masas de una turbina de viento considerando el rozamiento no lineal.

máquina es modelada como motor, y en la segunda como generador. Entonces, Los vectores clave y las relaciones constitutivas para el bond graph de la Figura 3.27 son:

$$D_{in}^L = \begin{bmatrix} f_2 \\ f_8 \\ f_{19} \\ f_{20} \end{bmatrix}; D_{in}^{NL} = \begin{bmatrix} f_{23} \\ f_{27} \\ f_{30} \\ f_{34} \\ f_{37} \end{bmatrix}; D_{out}^L = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_8 \\ e_{19} \\ e_{20} \end{bmatrix}; D_{out}^{NL} = \begin{bmatrix} e_{23} \\ e_{27} \\ e_{30} \\ e_{34} \\ e_{37} \end{bmatrix}; u = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_{21} \\ e_{38} \\ f_{24} \end{bmatrix}, \quad (3.193)$$

las dinámicas lentas que están relacionadas con la parte mecánica del aerogenerador son

$$x_1 = \begin{bmatrix} p_{13} \\ q_{26} \\ p_{29} \\ q_{33} \\ p_{36} \end{bmatrix}; \dot{x}_1 = \begin{bmatrix} e_{13} \\ f_{26} \\ e_{29} \\ f_{33} \\ e_{36} \end{bmatrix}; z_1 = \begin{bmatrix} f_{13} \\ e_{26} \\ f_{29} \\ e_{33} \\ f_{36} \end{bmatrix}, \quad (3.194)$$

las dinámicas rápidas que están relacionadas con la parte eléctrica se tiene

$$x_2 = \begin{bmatrix} p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_7 \end{bmatrix}; \dot{x}_2 = \begin{bmatrix} e_4 \\ e_5 \\ e_6 \\ e_7 \end{bmatrix}; z_2 = \begin{bmatrix} f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \end{bmatrix}. \quad (3.195)$$

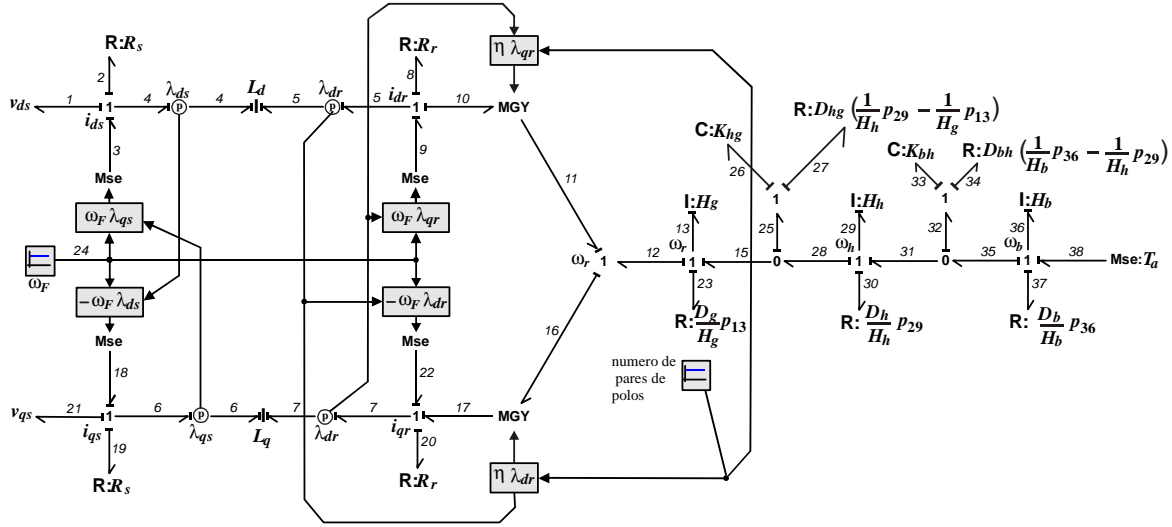


Figura 3.27: Bond graph con causalidad integral asignada de la turbina de viento considerando rozamiento no lineal.

Las relaciones constitutivas son

$$L^{NL}(x_1) = \text{Diag} \left\{ \frac{D_g}{H_g} p_{13}, D_{hg} \left( \frac{1}{H_h} p_{29} - \frac{1}{H_g} p_{13} \right), \frac{D_h}{H_h} p_{29}, D_{bh} \left( \frac{1}{H_b} p_{36} - \frac{1}{H_h} p_{29} \right), \frac{D_b}{H_b} p_{36} \right\}, \quad (3.196)$$

$$L^L = \text{Diag} \{ R_s, R_r, R_s, R_r \}, \quad (3.197)$$

donde  $L^{NL}(x_1)$  se obtiene a partir de (3.190), esta ecuación contiene las relaciones no lineales generadas por las fricciones no lineal que depende del cuadrado de la velocidad en cada sección de la turbina de viento, de acuerdo con la Figura 3.26.

$$F_2^{-1} = \begin{bmatrix} L_s & L_m & 0 & 0 \\ L_m & L_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_s & L_m \\ 0 & 0 & L_m & L_r \end{bmatrix}. \quad (3.198)$$

A partir de (3.15) se obtienen las submatrices requeridas de la estructura unión para determinar  $A_{22}$  con (3.30), la cuál es necesaria para establecer la estabilidad interna del sistema, entonces,

$$S_{21}^{12} = I_{4 \times 4}, \quad S_{21}^{12} = -I_{4 \times 4}; \quad S_{11}^{22} = S_{12}^{22} = S_{22}^{12} = S_{22}^{22} = S_{21}^{21} = S_{22}^{22} = S_{21}^{11} = S_{22}^{11} = 0. \quad (3.199)$$

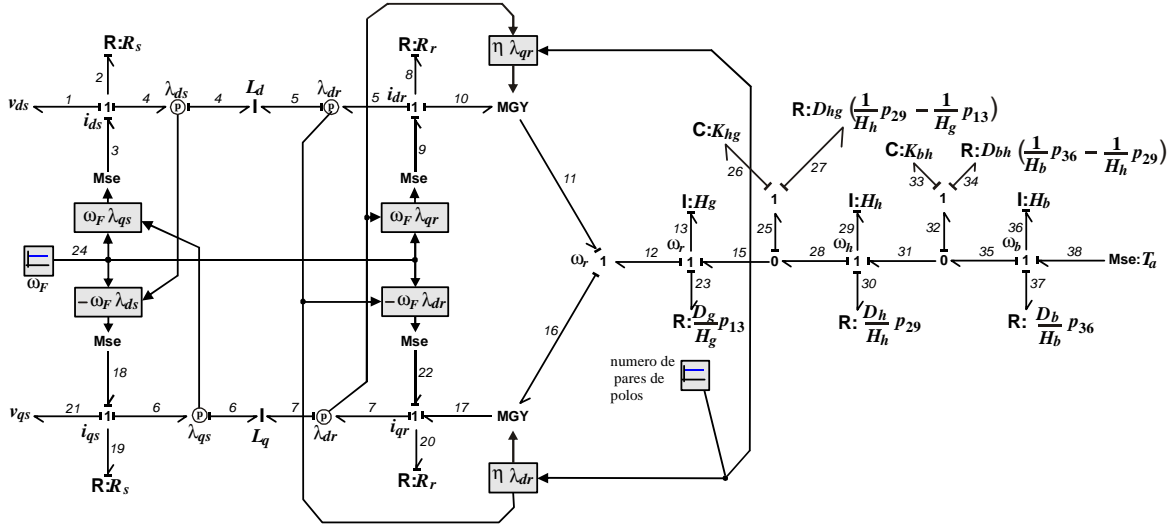


Figura 3.28: SPNGB de la turbina de viento considerando rozamiento no lineal.

Por lo tanto  $A_{22}$  es

$$A_{22} = \frac{1}{L_r L_s - L_m^2} \begin{bmatrix} L_m^2 R_r - L_r L_s R_s & L_m L_s (R_s - R_r) \\ L_m L_r (R_r - R_s) & L_m^2 R_s - L_r L_s R_r \end{bmatrix}. \quad (3.200)$$

La ecuación (3.200) se puede utilizar para verificar la estabilidad interna del sistema.

### 3.6.4. Un modelo de estado cuasi-estacionario de la turbina de viento con un enfoque de bond graph

El modelo en bond graph para obtener el estado cuasi-estacionario se muestra en la Figura 3.28. Notar que, en el enfoque propuesto en el SPNGB (Bond Graph No lineal Singularmente Perturbado) *los elementos de almacenamiento de energía relacionados con las variables rápidas tienen una asignación de causalidad derivativa y los elementos almacenadores de energía relacionados con las variables lentas tienen una asignación de causalidad integral*. Entonces, en la Figura 3.28 se asigna causalidad derivativa a los elementos almacenadores mediante los bonds 4, 5, 6 y 7, y los elementos de almacenamiento de energía con los bond 13, 26, 29, 33 y 36 mantienen una asignación de causalidad integral como se ve en la Figura 3.27.

Los vectores clave del bond graph con dinámicas lenta y rápida separadas son

$$D_{in}^{HL} = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_8 \\ e_{19} \\ e_{20} \end{bmatrix}; D_{in}^{HNL} = \begin{bmatrix} e_{23} \\ e_{27} \\ e_{30} \\ e_{34} \\ e_{37} \end{bmatrix}; D_{out}^{HL} = \begin{bmatrix} f_2 \\ f_8 \\ f_{19} \\ f_{20} \end{bmatrix}; D_{out}^{HNL} = \begin{bmatrix} f_{23} \\ f_{27} \\ f_{30} \\ f_{34} \\ f_{37} \end{bmatrix}; u = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_{21} \\ e_{38} \\ f_{24} \end{bmatrix}, \quad (3.201)$$

las dinámicas lenta y dinámicas rápidas son definidas por (3.194) y (3.195) respectivamente.

Las relaciones constitutivas no lineales son definidas mediante (3.196), las matrices  $F_1$  y  $F_2$  estan definidas en (3.198) y las relaciones constitutivas lineales son

$$L^L = \text{Diag} \left\{ \frac{1}{R_s}, \frac{1}{R_r}, \frac{1}{R_s}, \frac{1}{R_r} \right\}. \quad (3.202)$$

Mediante un análisis del modelo en Bond Graph de la Figura 3.28, la matriz de estructura de unión es

$$\begin{array}{c} \begin{array}{|l} e_{13} \\ f_{26} \\ e_{29} \\ f_{33} \\ e_{36} \\ \hline f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \\ \hline e_2 \\ e_8 \\ e_{19} \\ e_{20} \\ \hline f_{23} \\ f_{27} \\ f_{30} \\ f_{34} \\ f_{37} \end{array} \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \begin{array}{c} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 0 \\ -\eta p_7 \\ 0 \\ \eta p_5 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|l} f_{13} \\ e_{26} \\ f_{29} \\ e_{33} \\ f_{36} \\ \hline e_4 \\ e_5 \\ e_6 \\ e_7 \\ \hline f_{19} \\ f_{20} \\ \dots \\ e_{23} \\ e_{27} \\ e_{30} \\ e_{34} \\ e_{37} \\ \hline e_1 \\ e_{21} \\ e_{28} \\ f_{24} \end{array} \end{array} \quad (3.203)$$

De la estructura unión (3.203) por comparación con (3.41) se obtienen las submatrices  $H(x)$ . Usando de (3.51) a (3.56), (3.194), (3.195), (3.198), y (3.201) a (3.203) se pueden obtener las

raíces reales de la ecuación algebraica (3.59)

$$\begin{bmatrix} \overline{p_4} \\ \overline{p_5} \\ \overline{p_6} \\ \overline{p_7} \end{bmatrix} = \frac{\eta}{H_g} \begin{bmatrix} -T_{mr}\overline{p_7} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -T_{rr}\overline{p_7} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ T_{mr}\overline{p_5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ T_{rr}\overline{p_5} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{p_{13}} \\ \overline{q_{26}} \\ \overline{p_{29}} \\ \overline{q_{33}} \\ \overline{p_{36}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -T_{ss} & 0 & 0 & T_{ss}\overline{p_6} + T_{mr}\overline{p_7} \\ -T_{ms} & 0 & 0 & T_{ms}\overline{p_6} + T_{rr}\overline{p_7} \\ 0 & -T_{ss} & 0 & -T_{ss}\overline{p_4} - T_{mr}\overline{p_5} \\ 0 & -T_{ms} & 0 & -T_{ms}\overline{p_4} - T_{rr}\overline{p_5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_{21} \\ e_{38} \\ f_{24} \end{bmatrix}, \quad (3.204)$$

donde

$$T_{ss} = \frac{L_s}{R_s}; \quad T_{rr} = \frac{L_r}{R_r}; \quad T_{ms} = \frac{L_m}{R_s}; \quad T_{mr} = \frac{L_m}{R_r}. \quad (3.205)$$

Utilizando (3.46) a (3.49), (3.194), (3.195), (3.198), y (3.201) a (3.203) se obtiene el modelo de estado cuasi-estacionario con (3.60)

$$\begin{bmatrix} \dot{\overline{p_{13}}} \\ \dot{\overline{q_{26}}} \\ \dot{\overline{p_{29}}} \\ \dot{\overline{q_{33}}} \\ \dot{\overline{p_{36}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -N_{11}(x) & \frac{1}{K_{hg}} & -N_{13}(x) & 0 & 0 \\ -\frac{1}{H_g} & 0 & \frac{1}{H_h} & 0 & 0 \\ -N_{31}(x) & -\frac{1}{K_{hg}} & -N_{33}(x) & \frac{1}{K_{bh}} & N_{35}(x) \\ 0 & 0 & -\frac{1}{H_h} & 0 & \frac{1}{H_b} \\ 0 & 0 & N_{53}(x) & -\frac{1}{K_{bh}} & -N_{55}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{p_{13}} \\ \overline{q_{26}} \\ \overline{p_{29}} \\ \overline{q_{33}} \\ \overline{p_{36}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\eta}{R_r}(\overline{p_5^2} + \overline{p_7^2}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_{21} \\ e_{38} \\ f_{24} \end{bmatrix}, \quad (3.206)$$

donde

$$\begin{aligned} N_{11}(x) &= \frac{1}{H_g} \left[ \frac{\eta^2}{R_r} (\overline{p_5^2} + \overline{p_7^2}) - D_{hg} \left( \frac{1}{H_g} \overline{p_{13}} - \frac{1}{H_h} \overline{p_{29}} \right) + \frac{D_g}{H_g} \overline{p_{13}} \right], \\ N_{13}(x) &= \frac{D_{hg}}{H_h} \left( \frac{1}{H_g} \overline{p_{13}} - \frac{1}{H_h} \overline{p_{29}} \right), \\ N_{31}(x) &= \frac{D_{hg}}{H_g} \left( \frac{1}{H_g} \overline{p_{13}} - \frac{1}{H_h} \overline{p_{29}} \right), \\ N_{33}(x) &= \frac{1}{H_h} \left[ D_{bh} \left( \frac{1}{H_b} \overline{p_{36}} - \frac{1}{H_h} \overline{p_{29}} \right) - D_{hg} \left( \frac{1}{H_g} \overline{p_{13}} - \frac{1}{H_h} \overline{p_{29}} \right) + \frac{D_h}{H_h} \overline{p_{29}} \right], \\ N_{55}(x) &= \frac{1}{H_b} \left[ D_{bh} \left( \frac{1}{H_b} \overline{p_{36}} - \frac{1}{H_h} \overline{p_{29}} \right) + \frac{D_b}{H_b} \overline{p_{36}} \right]. \end{aligned} \quad (3.207)$$

Resolviendo la primera, segunda y cuarta línea de (3.204) se obtiene,

$$\overline{p_4} = \frac{\left( \frac{\beta\delta + \rho\gamma}{\rho\kappa - \alpha\delta} \right) \alpha + \beta}{\rho}, \quad (3.208)$$

$$\overline{p_5} = \frac{\beta\delta + \rho\gamma}{\rho\kappa - \alpha\delta}, \quad (3.209)$$

$$\overline{p_7} = \frac{\eta T_{rr}}{H_g} \left( \frac{\beta\delta + \rho\gamma}{\rho\kappa - \alpha\delta} \right) \overline{p_{13}} - T_{ms} e_{21} - \left\{ T_{ms} \left[ \frac{\left( \frac{\beta\delta + \rho\gamma}{\rho\kappa - \alpha\delta} \right) \alpha + \beta}{\rho} \right] + T_{rr} \left( \frac{\beta\delta + \rho\gamma}{\rho\kappa - \alpha\delta} \right) \right\} f_{24}, \quad (3.210)$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\eta T_{mr}}{H_g} \overline{p_{13}} \left[ -\frac{\eta T_{rr}}{H_g} \overline{p_{13}} + (2T_{rr} + T_{ss}) f_{24} \right] - T_{mr} (T_{ss} + T_{rr}) f_{24}^2, \\ \beta &= T_{mr} T_{ms} e_{21} \left( \frac{\eta}{H_g} \overline{p_{13}} - f_{24} \right) - T_{ss} e_1 - T_{ss}^2 f_{24} e_{21}, \\ \gamma &= T_{rr} T_{ms} e_{21} \left( \frac{\eta}{H_g} \overline{p_{13}} - f_{24} \right) - T_{ms} e_1 - T_{ss} T_{ms} f_{24} e_{21}, \\ \kappa &= 1 + \frac{\eta}{H_g} \overline{p_{13}} \left[ \frac{\eta T_{rr}^2}{H_g} \overline{p_{13}} - (2T_{rr}^2 + T_{mr} T_{ms}) f_{24} \right] + (T_{mr} T_{ms} + T_{rr}^2) f_{24}^2, \\ \rho &= 1 + T_{mr} T_{ms} f_{24} \left( -\frac{\eta}{H_g} \overline{p_{13}} + f_{24} \right) + T_{ss}^2 f_{24}^2, \\ \delta &= T_{rr} T_{ms} f_{24} \left( \frac{\eta}{H_g} \overline{p_{13}} - f_{24} \right) - T_{ss} T_{ms} f_{24}^2. \end{aligned} \quad (3.211)$$

Ahora, sustituyendo (3.208) a (3.210) en (3.204) y (3.206) se obtiene,

$$\dot{\overline{p_{13}}} = -N_{11}(x) \overline{p_{13}} + \frac{1}{K_{hg}} \overline{q_{26}} - N_{13}(x) \overline{p_{29}} + \frac{\eta}{R_r} (\overline{p_5}^2 + \overline{p_7}^2) f_{24}, \quad (3.212)$$

$$\dot{\overline{q_{26}}} = -\frac{1}{H_g} \overline{p_{13}} + \frac{1}{H_h} \overline{p_{29}}, \quad (3.213)$$

$$\dot{\overline{p_{29}}} = -N_{31}(x) \overline{p_{13}} - \frac{1}{K_{hg}} \overline{q_{26}} - N_{33}(x) \overline{p_{29}} + \frac{1}{K_{bh}} \overline{q_{33}} + N_{35}(x) \overline{p_{36}}, \quad (3.214)$$

$$\dot{\overline{q_{33}}} = -\frac{1}{H_h} \overline{p_{29}} + \frac{1}{H_b} \overline{p_{36}}, \quad (3.215)$$

$$\dot{\overline{p_{36}}} = N_{53}(x) \overline{p_{29}} - \frac{1}{K_{bh}} \overline{q_{33}} - N_{55}(x) \overline{p_{36}} + e_{38}. \quad (3.216)$$

Por lo tanto, las ecuaciones (3.212) a (3.216) representan el modelo de estado cuasi-estacionario de las dinámicas lentas de la turbina de viento, notando que estas ecuaciones no dependen de los estados rápidos.

En la siguiente sección se describen las dinámicas de las variables de estado del modelo completo original para comparar dicho comportamiento con el modelo de estado cuasi-estacionario.

Tabla 3.3: Parámetros para la simulación para la máquina de inducción y el modelo mecánico de la turbina de viento.

Elemento	Valor	Elemento	Valor
$H_g$	0.089 N-m-s <sup>2</sup>	$H_b$	0.05 N-m-s <sup>2</sup>
$D_g$	0.1 N-m-s	$H_h$	0.03 N-m-s <sup>2</sup>
$\eta$	2 pares de polos	$D_{bh}$	0.4 N-m-s
$R_s$	0.435 $\Omega$	$D_{hg}$	0.3 N-m-s
$R_r$	0.816 $\Omega$	$D_b$	0.4 N-m-s
$L_s$	0.0713 H	$D_h$	0.3 N-m-s
$L_r$	0.0713 H	$K_{bh}$	$1 \times 10^{-3}$ N-m/rad
$L_m$	0.0693 H	$K_{hg}$	$1 \times 10^{-3}$ N-m/rad
$V_{\text{nominal}}$	220 V	$T_a$	100 N·m
$\omega_F$	377 rad/s		

### 3.6.5. Comparación de los resultados obtenidos

Con la finalidad de comparar las dinámicas del modelo completo original con las obtenidas con el modelo de estado cuasi-estacionario se realiza la simulación del modelo de la turbina de viento con máquina de inducción utilizando el software 20-SIM<sup>®</sup> de la misma forma que se hace en el Ejemplo 2 y en el ejemplo anterior de la máquina de inducción (ya que se supone que el aerogenerador está conectado a un bus, en el cuál el voltaje y la frecuencia se mantienen constantes a los valores nominales, este bus comúnmente es llamado bus infinito, ya que sus características no cambian a pesar del consumo o alimentación de potencia de cualquier dispositivo conectado en él), simulando al mismo tiempo los dos modelos, el original completo que se muestra en la 3.27, y el conjunto de ecuaciones obtenido con el modelo de estado cuasi-estacionario (3.212) a (3.216), donde es necesaria la conversión de trifásico  $abc$  a coordenadas  $dq$  con la transformación de Park. Para la simulación se utilizan los parámetros obtenidos de [Krause, 2002] que se observan en la Tabla 3.3. Los parámetros del modelo mecánico de la turbina son valores arbitrarios unicamente con la finalidad de demostrar el método propuesto.

La Figura 3.29 muestra la conducta dinámica del generador incluyendo la caja de engranes, el eje de alta velocidad y el rotor de la máquina de inducción donde  $p_{13}$  es el momento de torsión angular exacto y  $\overline{p_{13}}$  es el momento de torsión angular usando el modelo de estado cuasi-estacionario (dividiendo el momento de torsión angular entre el valor del elemento

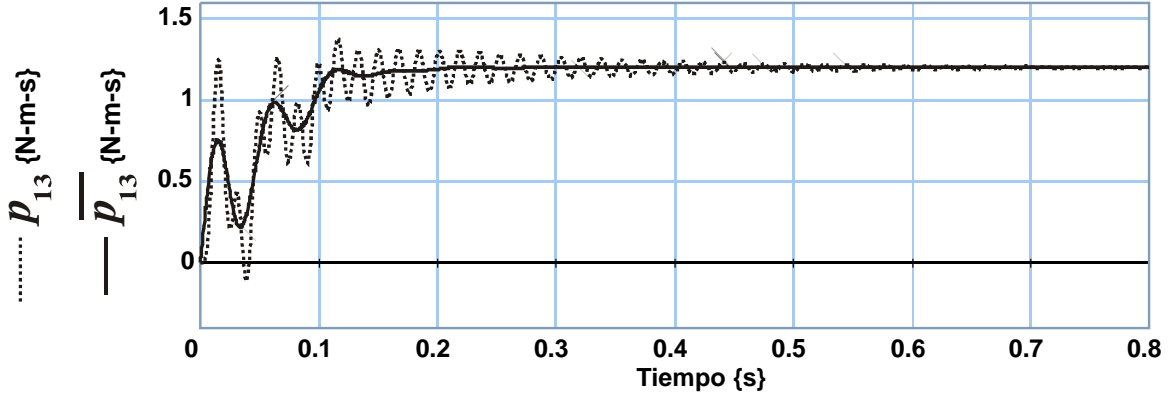


Figura 3.29: Dinámica de la variable de estado del modelo completo original ( $p_{13}$ ) y la obtenida con el modelo de estado cuasi-estacionario ( $\overline{p_{13}}$ ).

almacenador se obtiene la velocidad angular).

En las Figuras 3.30 y 3.31 se muestran las dinámicas del momento de torsión angular del buje y de las aspas de la turbina,  $p_{29}$  y  $p_{36}$  respectivamente, y sus correspondientes variables de estado  $\overline{p_{29}}$  y  $\overline{p_{36}}$  obtenidas con el SPNBG, donde las oscilaciones que se observan son debidas a la flexibilidad de los ejes de unión en cada sección, es decir, entre más flexible es la barra, más oscilaciones se presentan en la dinámica de las variables.

Las Figuras 3.32 y 3.33 muestran las oscilaciones de los ángulos  $q_{26}$  y  $q_{33}$  y sus correspondientes  $\overline{q_{26}}$  y  $\overline{q_{33}}$  obtenidas con el modelo de estado cuasi-estacionario respectivamente. El ángulo  $q_{26}$  esta relacionado a la conexión entre el generador y el buje, y el ángulo  $q_{33}$  esta relacionado con la unión entre el buje y las aspas de la turbina, En el caso de la posición angular es más marcado el fenómeno de la flexibilidad del eje de unión, entre más rígido sea, menos oscilaciones o cambios de posición angular se verán en las dinámicas de las variables de estado.

Los estados estacionarios de las variables de estado que se obtiene después de 1.2 segundos,

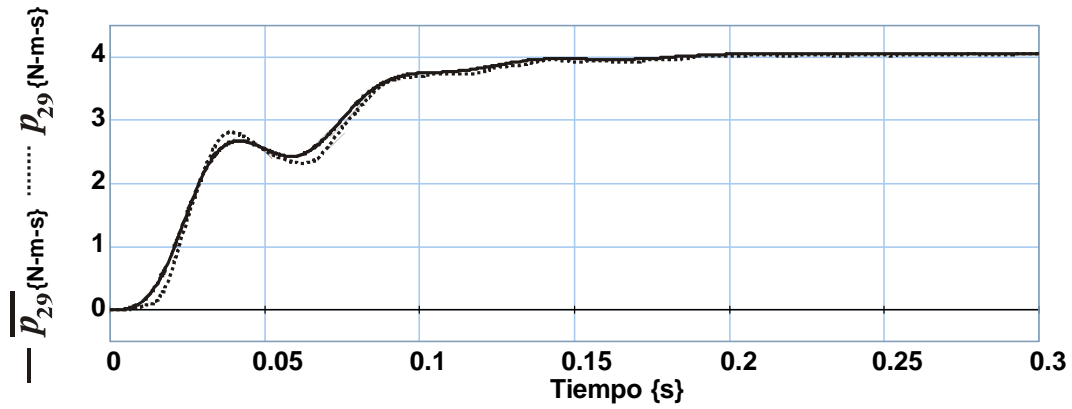


Figura 3.30: Dinámica de la variable de estado del modelo completo original ( $p_{29}$ ) y la obtenida con el modelo de estado cuasi-estacionario ( $\overline{p_{29}}$ ).

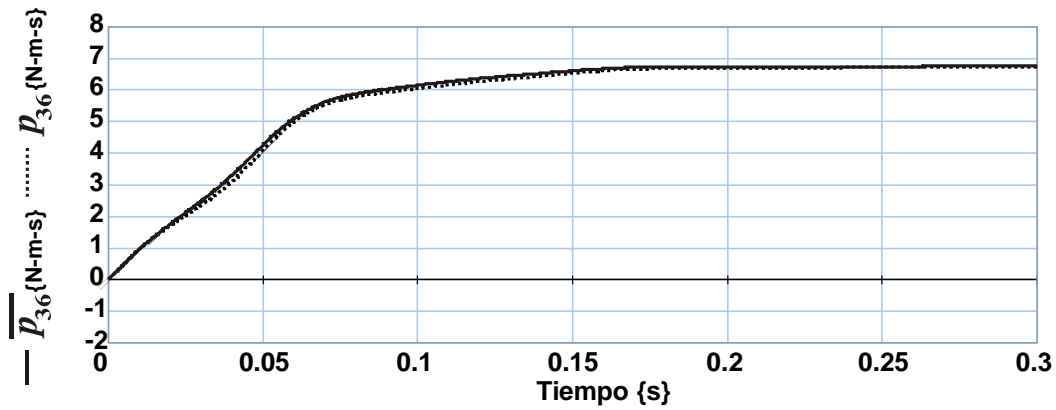


Figura 3.31: Dinámica de la variable de estado del modelo completo original ( $p_{36}$ ) y la obtenida con el modelo de estado cuasi-estacionario ( $\overline{p_{36}}$ ).

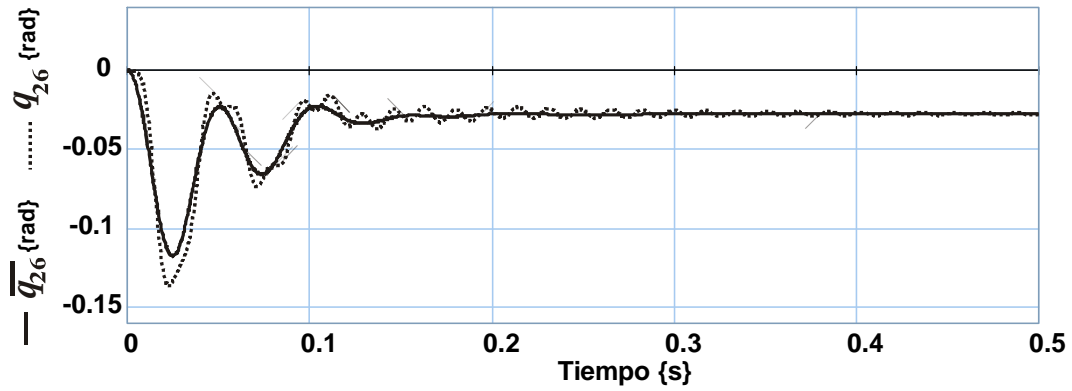


Figura 3.32: Dinámica de la variable de estado del modelo completo original ( $q_{26}$ ) y la obtenida con el modelo de estado cuasi-estacionario ( $\overline{q_{26}}$ ).

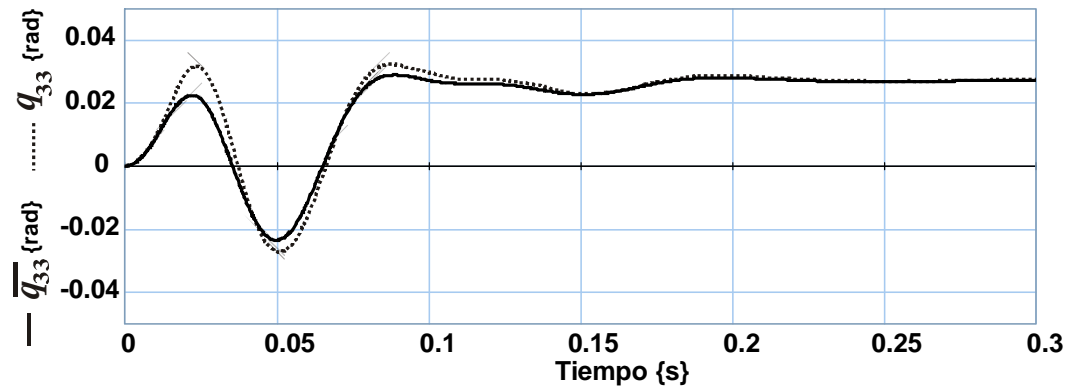


Figura 3.33: Dinámica de la variable de estado del modelo completo original ( $q_{33}$ ) y la obtenida con el modelo de estado cuasi-estacionario ( $\overline{q_{33}}$ ).

tanto para el sistema completo original como para el modelo de estado cuasi-estacionario son

$$\begin{bmatrix} p_{13} \\ q_{26} \\ p_{29} \\ q_{33} \\ p_{36} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,200948485051 \text{ N-m-s} \\ -0,027457603836 \text{ rad} \\ 4,048136433769 \text{ N-m-s} \\ 0,027167066614 \text{ rad} \\ 6,746894267893 \text{ N-m-s} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \overline{p}_{13} \\ \overline{q}_{26} \\ \overline{p}_{29} \\ \overline{q}_{33} \\ \overline{p}_{36} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,200947186252 \text{ N-m-s} \\ -0,027457631728 \text{ rad} \\ 4,04813658288 \text{ N-m-s} \\ 0,027167067584 \text{ rad} \\ 6,746894304811 \text{ N-m-s} \end{bmatrix}, \quad (3.217)$$

con un error relativo de

$$\begin{bmatrix} \text{Error relativo de } p_{13} \\ \text{Error relativo de } q_{26} \\ \text{Error relativo de } p_{29} \\ \text{Error relativo de } q_{33} \\ \text{Error relativo de } p_{36} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,000108 \% \\ 0,0001015 \% \\ 0,0000036 \% \\ 0,0000035 \% \\ 0,0000054 \% \end{bmatrix} \quad (3.218)$$

Es importante notar que el método propuesto permite obtener el modelo de estado cuasi-estacionario cambiando la causalidad de los elementos almacenadores que representan a los estados rápidos, y esta metodología es relativamente fácil y directa y puede ser extendida a otras clases de sistemas no lineales, y aunque la dinámica no es exactamente igual, el valor en estado estable es casi idéntico.



## Capítulo 4

# Sistemas Lineales Singularmente Perturbados Variantes en el Tiempo en Bond Graph

En sistemas lineales invariantes en el tiempo lo único que ocasiona que el sistema presente propiedades de múltiple escalas de tiempo es la separación de los valores propios del sistema en dos o más grupos de eigenvalores de diferentes ordenes de magnitud, es decir, que exista una diferencia relativamente grande entre la magnitud del eigenvalor máximo de un grupo con la magnitud del eigenvalor mínimo del otro grupo (para el caso de escala de dos tiempo). En el caso de los sistema lineales variantes en el tiempo, otra fuente que ocasiona propiedades de múltiple escala de tiempo es la variación de los parámetros del modelo. El ejemplo más simple de lo anterior, es el sistema lineal [Kokotovic, 1986]

$$\varepsilon \dot{z}(t) = A(t) z(t), \quad (4.1)$$

donde el coeficiente de la matriz  $A(t)$  está en función del tiempo  $t$  dentro de un intervalo de tiempo de interés. Entonces, una forma más general para el modelo de un sistema lineal

variante en el tiempo singularmente perturbado es

$$\dot{x}(t) = A_{11}(t)x(t) + A_{12}(t)z(t), \quad (4.2)$$

$$\varepsilon \dot{z}(t) = A_{21}(t)x(t) + A_{22}(t)z(t), \quad (4.3)$$

donde  $x(t)$  y  $z(t)$  representan las dinámicas lentas y rápidas del sistema, respectivamente, y las matrices  $A_{11}(t)$ ,  $A_{12}(t)$ ,  $A_{21}(t)$  y  $A_{22}(t)$ , dependiendo del sistema estudiado, pueden o no ser matrices en las que sus parámetros dependan del tiempo.

## 4.1. Sistemas que Varían Lentamente

Cuando la norma  $\left\| \dot{A}(t) \right\| = O(1)$ , los parámetros en el sistema lineal variante en el tiempo (4.1) están variando de forma relativamente lenta con respecto con las dinámicas del sistema. Se puede esperar, de manera intuitiva, que para  $\varepsilon$  suficientemente pequeño el comportamiento dinámico del sistema podría ser predicho mediante el análisis de un grupo de sistemas invariantes en el tiempo con parámetros *congelados* en un instante de tiempo  $t$ . En el caso particular, cuando la parte real de los valores propios de  $A(t)$  son negativos ( $\text{Re } \lambda(A(t)) < -c < 0$ ) para todo  $t$ , la intuición sugiere que cuando  $\varepsilon$  tiende a cero el sistema (4.1) debería de ser asintóticamente estable [Kokotovic, 1986]. Entonces, considerando el sistema

$$\varepsilon \dot{z}(t) = A(t)z(t), \quad t \in I, \quad z \in R^m, \quad (4.4)$$

donde el intervalo de tiempo  $I$  puede ser un intervalo finito  $[t_0, t_f]$  o un intervalo infinito  $[t_0, \infty)$ . Por lo que se puede hacer la siguiente hipótesis.

**Hipótesis 5.1 [Kokotovic, 1986].**

$$\text{Re } \lambda(A(t)) \leq -c_1 < 0, \quad \text{para todo } t \in I. \quad (4.5)$$

Esta hipótesis garantiza que la familia de sistemas congelados en el tiempo asociada con (4.4) es asintóticamente estable. Por lo tanto, la matriz exponencial  $e^{[A(t)\theta]}$  satisface

$$\left\| e^{[A(t)\theta]} \right\| \leq K(A) e^{-\alpha\theta}, \quad \text{para todo } \theta > 0 \text{ y } t \in I. \quad (4.6)$$

donde  $\alpha$  es un valor mayor que cero independiente del tiempo  $t$ , pero  $K(A) > 0$  si depende de  $t$ . Para extender el decaimiento exponencial del sistema congelado en el tiempo (4.6) relacionado al sistema variante en el tiempo (4.4), la desigualdad (4.6) debera mantenerse uniforme en el tiempo  $t$ . Para conseguir lo anterior se establece la siguiente hipótesis.

**Hipótesis 5.2 [Kokotovic, 1986].**

$$\|A(t)\| \leq c_2, \quad \text{para todo } t \in I. \quad (4.7)$$

De las anteriores Hipótesis se propone el siguiente lema.

**Lema 5.1 [Kokotovic, 1986].** Bajo las Hipótesis 5.1 y 5.2, existen constantes positivas  $\alpha_1$  y  $K_1$  tal que

$$\left\| e^{[A(t)]\theta} \right\| \leq K_1 e^{-\alpha_1 \theta}, \quad \text{para todo } \theta > 0 \text{ y } t \in I. \quad (4.8)$$

Con la desigualdad uniforme establecida (4.8), ahora se puede establecer la estabilidad asintótica del sistema variante en el tiempo (4.4) cuando  $\varepsilon$  es pequeña y  $\dot{A}(t) = O(1)$ . La última hipótesis, la cuál corresponde a suponer que la variación es lenta en los parámetros del modelo, se convierte en la siguiente forma explícita

**Hipótesis 5.3 [Kokotovic, 1986].**

$$\left\| \dot{A}(t) \right\| \leq \beta, \quad \text{para todo } t \in I. \quad (4.9)$$

El Lema 5.2 que se establece a continuación, muestra que la matriz de transición de (4.4), indicada mediante  $\phi(t, s)$ , puede ser aproximada uniformemente mediante la matriz exponencial  $e^{[A(s)(t-s)/\varepsilon]}$ , corresponde a un sistema en el cuál los parámetros de  $A(t)$  están *congelados* en  $t = s$ . El lema 5.2 proporciona un decaimiento de manera exponencial unido al error

$$\Psi(t, s) = \phi(t, s) - e^{[A(s)(t-s)/\varepsilon]}. \quad (4.10)$$

**Lema 5.2 [Kokotovic, 1986].** Bajo la Hipótesis 5.1, 5.2 y 5.3, existen constantes positivas  $\varepsilon^*$ ,  $\alpha_2$  y  $K_2$  tal que, para todo  $\varepsilon$  que pertenece al intervalo  $(0, \varepsilon^*)$ ,

$$\|\Psi(t, s)\| \leq \varepsilon K_2 e^{-\alpha_2(t-s)/\varepsilon}, \quad \text{para todo } t \geq s \text{ y } t, s \in I. \quad (4.11)$$

Este lema confirma el resultado intuitivo de que el sistema (4.4) es uniforme asintóticamente estable para un  $\varepsilon$  suficientemente pequeño. Cuando se realiza la prueba del Lema 5.2 [Kokotovic, 1986], ésta proporciona un valor estimado de  $\varepsilon^* = (\alpha_1 - \alpha_2)^2 \gamma / \beta K_1$  tal que se mantiene la estabilidad uniforme asintóticamente para todo  $\varepsilon < \varepsilon^*$ . Las constantes positivas arbitrarias  $\alpha_2 < \alpha_1$  y  $\gamma < 1$  pueden ser ajustadas para aumentar el valor de  $\varepsilon^*$  mientras mantiene una caída exponencial unido a  $\|\phi(t, s)\|$ . De lo anterior sin embargo, se puede observar que dentro del análisis del Lema 5.2 la mejor cota (en este caso, el límite superior del intervalo  $(\varepsilon, \varepsilon^*)$ ) de  $\varepsilon$  que garantice la estabilidad uniformemente asintótica puede ser obtenida cuando  $\alpha_2$  tiende a cero y  $\gamma$  tiende a la unidad para obtener  $\varepsilon^* = \alpha_1^2 / \beta K_1$ .

## 4.2. Sistemas Lineales Variantes en el Tiempo modelados en Bond Graph

En la tesis de maestría [Gonzalez, 2014] se hace un estudio extenso de las características e implicaciones de los sistema lineales variantes en el tiempo modelados con la metodología de bond graph, cuando la dependencia del tiempo se encuentra en cualquiera de los elementos que componen el modelo, como son almacenadores y disipadores de energía, transformadores, giradores, etc.

El objetivo de esta sección es obtener el estado cuasi-estacionario de una clase de sistemas lineales que presenta propiedades de escala de dos tiempos (sistema singularmente perturbado) pero que los parámetros de los elementos de sistema puedan o no presentar dependencia del tiempo. Partiendo de que el sistema tiene estabilidad interna y con la condición de que los elementos de almacenamiento de energía relacionados con las dinámicas rápidas sean no variantes en el tiempo. Una representación en diagrama de bloques en bond graph es la que se muestra en la Figura 4.1.

La representación en espacio de estados de la forma estándar de un sistema lineal singularmente perturbado variante en el tiempo como el que se muestra en el diagrama a bloques de la Figura 4.1, con las variables lentas separadas de las variables rápidas, donde una o más dinámicas lentas son dependientes del tiempo y donde  $\varepsilon$  es un escalar que representa los

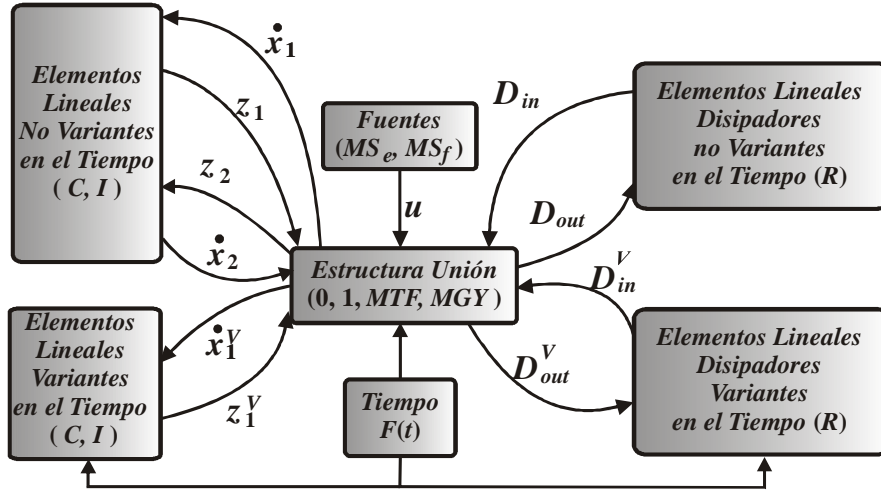


Figura 4.1: Estructura unión de un BGI para una clase de sistemas lineales con elementos que tiene parámetros variantes en el tiempo.

pequeños parámetros que van a ser despreciados, la representación queda

$$\dot{x}_1(t) = A_{11}(t)x_1(t) + A_{12}(t)x_1^V(t) + A_{13}(t)x_2(t) + B_1(t)u(t), \quad (4.12)$$

$$\dot{x}_1^V(t) = A_{21}(t)x_1(t) + A_{22}(t)x_1^V(t) + A_{23}(t)x_2(t) + B_2(t)u(t), \quad (4.13)$$

$$\varepsilon \dot{x}_2(t) = A_{31}(t)x_1(t) + A_{32}(t)x_1^V(t) + A_{33}(t)x_2(t) + B_3(t)u(t). \quad (4.14)$$

Los estados  $x_1(t) \in \mathbb{R}^n$  y  $x_2(t) \in \mathbb{R}^m$  están compuestos de variables de energía  $p(t)$  y  $q(t)$  asociadas con elementos  $I$  y  $C$  en causalidad integral respectivamente, para dinámicas lentas y rápidas; mientras que  $x_1^V(t) \in \mathbb{R}^s$  está compuesto de variables de energía  $p(t)$  y  $q(t)$  asociadas con elementos  $I$  y  $C$  en causalidad integral respectivamente, solo para dinámicas lentas, en los cuales su capacidad de almacenamiento es variable con respecto al tiempo;  $u(t) \in \mathbb{R}^p$  denota las entradas a la planta;  $z_1(t) \in \mathbb{R}^n$  y  $z_2(t) \in \mathbb{R}^m$  son los vectores de co-energía para las dinámicas lentas y rápidas respectivamente;  $z_1^V(t) \in \mathbb{R}^s$  es el vector de co-energía para las dinámicas lentas relacionadas con los elementos almacenadores que son variantes en el tiempo;  $D_{in}(t) \in \mathbb{R}^r$ ,  $D_{in}^V(t, x_1) \in \mathbb{R}^r$ ,  $D_{out}(t) \in \mathbb{R}^r$  y  $D_{out}^V(t, x_1) \in \mathbb{R}^r$  son una mezcla de esfuerzos y flujos que contienen los intercambios energéticos entre el campo de disipación y la estructura de unión, los primeros relacionados con disipadores que no dependen del tiempo

y los segundo relacionados con elementos disipadores variantes con el tiempo.

La matriz de estructura unión para el sistema (4.12) - (4.14) es,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \hline x_1^V(t) \\ \hline \dot{x}_2(t) \\ \hline D_{in}(t) \\ \hline D_{in}^V(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}^{11}(t) & S_{11}^{12}(t) & S_{11}^{13}(t) & S_{12}^{11}(t) & S_{12}^{12}(t) & S_{13}^{11}(t) \\ \hline S_{11}^{21}(t) & S_{11}^{22}(t) & S_{11}^{23}(t) & S_{12}^{21}(t) & S_{12}^{22}(t) & S_{13}^{21}(t) \\ \hline S_{11}^{31}(t) & S_{11}^{32}(t) & S_{11}^{33}(t) & S_{12}^{31}(t) & S_{12}^{32}(t) & S_{13}^{31}(t) \\ \hline S_{21}^{11}(t) & S_{21}^{12}(t) & S_{21}^{13}(t) & S_{22}^{11}(t) & S_{22}^{12}(t) & S_{23}^{11}(t) \\ \hline S_{21}^{21}(t) & S_{21}^{22}(t) & S_{21}^{23}(t) & S_{22}^{21}(t) & S_{22}^{22}(t) & S_{23}^{21}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ \hline z_1^V(t) \\ \hline z_2(t) \\ \hline D_{out}(t) \\ \hline D_{out}^V(t) \\ \hline u(t) \end{bmatrix}, \quad (4.15)$$

y

$$\begin{aligned} z_1(t) &= F_1 x_1(t); \quad z_1^V(t) = F_1^V(t) x_1^V(t); \quad z_2(t) = F_2 x_2(t); \\ D_{out}(t) &= L D_{in}(t); \quad D_{out}^V(t) = L^V(t) D_{in}^V(t); \quad \varepsilon = F_2^{-1}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Los elementos de la matriz  $S$  toman valores dentro del conjunto  $\{0, \pm 1, \pm k_t(t), \pm k_g(t)\}$  donde  $k_t(t)$  y  $k_g(t)$  representan los módulos de los transformadores y de los giradores, respectivamente.

Desarrollando (4.15) se obtiene,

$$\dot{x}_1(t) = S_{11}^{11}(t) z_1(t) + S_{11}^{12}(t) z_1^V(t) + S_{11}^{13}(t) z_2(t) + S_{12}^{11}(t) D_{out}(t) + S_{12}^{12}(t) D_{out}^V(t) + S_{13}^{11}(t) u(t), \quad (4.17)$$

$$x_1^V(t) = S_{11}^{21}(t) z_1(t) + S_{11}^{22}(t) z_1^V(t) + S_{11}^{23}(t) z_2(t) + S_{12}^{21}(t) D_{out}(t) + S_{12}^{22}(t) D_{out}^V(t) + S_{13}^{21}(t) u(t), \quad (4.18)$$

$$\dot{x}_2(t) = S_{11}^{31}(t) z_1(t) + S_{11}^{32}(t) z_1^V(t) + S_{11}^{33}(t) z_2(t) + S_{12}^{31}(t) D_{out}(t) + S_{12}^{32}(t) D_{out}^V(t) + S_{13}^{31}(t) u(t), \quad (4.19)$$

$$D_{in}(t) = S_{21}^{11}(t) z_1(t) + S_{21}^{12}(t) z_1^V(t) + S_{21}^{13}(t) z_2(t) + S_{22}^{11}(t) D_{out}(t) + S_{22}^{12}(t) D_{out}^V(t) + S_{23}^{11}(t) u(t), \quad (4.20)$$

$$D_{in}^V(t) = S_{21}^{21}(t) z_1(t) + S_{21}^{22}(t) z_1^V(t) + S_{21}^{23}(t) z_2(t) + S_{22}^{21}(t) D_{out}(t) + S_{22}^{22}(t) D_{out}^V(t) + S_{23}^{21}(t) u(t), \quad (4.21)$$

sustituyendo (4.16) en (4.20) y (4.21) para obtener,

$$D_{in}(t) = M(t) \left[ S_{21}^{11}(t) F_1 x_1(t) + S_{21}^{12}(t) F_1^V(t) x_1^V(t) + S_{21}^{13}(t) F_2 x_2(t) + S_{22}^{12}(t) L^V(t) D_{in}^V(t) + S_{23}^{11}(t) u(t) \right], \quad (4.22)$$

$$D_{in}^V(t) = M^V(t) \left[ S_{21}^{21}(t) F_1 x_1(t) + S_{21}^{22}(t) F_1^V(t) x_1^V(t) + S_{21}^{23}(t) F_2 x_2(t) + S_{22}^{22}(t) L D_{in}(t) + S_{23}^{21}(t) u(t) \right], \quad (4.23)$$

donde  $M(t) = [I - S_{22}^{11}(t) L]^{-1}$  y  $M^V(t) = [I - S_{22}^{22}(t) L^V(t)]^{-1}$ .

Sustituyendo (4.23) en (4.22) y (4.22) en (4.23) con la finalidad de obtener las expresiones que definen a  $D_{in}(t)$  y  $D_{in}^V(t)$  sin dependencia de ellas mismas. Este último resultado se sustituye

en (4.17), (4.18) y (4.19) para obtener las matrices  $A's$  de la representación en espacio de estados, esto es

$$\begin{aligned}
A_{11}(t) &= \{S_{11}^{11}(t) + S_{12}^{11}(t) \Phi_1(t) \Gamma(t) + S_{12}^{12}(t) \Phi_2(t) [S_{21}^{21}(t) + S_{22}^{21}(t) \Phi_1(t) \Gamma(t)]\} F_1, \\
A_{12}(t) &= \{S_{11}^{12}(t) + S_{12}^{11}(t) \Phi_1(t) \Lambda(t) + S_{12}^{12}(t) \Phi_2(t) [S_{21}^{22}(t) + S_{22}^{21}(t) \Phi_1(t) \Lambda(t)]\} F_1^V(t), \\
A_{13}(t) &= \{S_{11}^{13}(t) + S_{12}^{11}(t) \Phi_1(t) \Upsilon(t) + S_{12}^{12}(t) \Phi_2(t) [S_{21}^{23}(t) + S_{22}^{21}(t) \Phi_1(t) \Upsilon(t)]\} F_2, \\
A_{21}(t) &= \{S_{11}^{21}(t) + S_{12}^{21}(t) \Phi_1(t) \Gamma(t) + S_{12}^{22}(t) \Phi_2(t) [S_{21}^{21}(t) + S_{22}^{21}(t) \Phi_1(t) \Gamma(t)]\} F_1, \\
A_{22}(t) &= \{S_{11}^{22}(t) + S_{12}^{21}(t) \Phi_1(t) \Lambda(t) + S_{12}^{22}(t) \Phi_2(t) [S_{21}^{22}(t) + S_{22}^{21}(t) \Phi_1(t) \Lambda(t)]\} F_1^V(t), \\
A_{23}(t) &= \{S_{11}^{23}(t) + S_{12}^{21}(t) \Phi_1(t) \Upsilon(t) + S_{12}^{22}(t) \Phi_2(t) [S_{21}^{23}(t) + S_{22}^{21}(t) \Phi_1(t) \Upsilon(t)]\} F_2, \\
A_{31}(t) &= F_2^{-1} \{S_{11}^{31}(t) + S_{12}^{31}(t) \Phi_1(t) \Gamma(t) + S_{21}^{32}(t) \Phi_2(t) [S_{21}^{21}(t) + S_{22}^{21}(t) \Phi_1(t) \Gamma(t)]\} F_1, \\
A_{32}(t) &= F_2^{-1} \{S_{11}^{32}(t) + S_{12}^{31}(t) \Phi_1(t) \Lambda(t) + S_{21}^{32}(t) \Phi_2(t) [S_{21}^{22}(t) + S_{22}^{21}(t) \Phi_1(t) \Lambda(t)]\} F_1^V(t), \\
A_{33}(t) &= F_2^{-1} \{S_{11}^{33}(t) + S_{12}^{31}(t) \Phi_1(t) \Upsilon(t) + S_{21}^{32}(t) \Phi_2(t) [S_{21}^{23}(t) + S_{22}^{21}(t) \Phi_1(t) \Upsilon(t)]\} F_2, \quad (4.24)
\end{aligned}$$

y para las  $B's$  se tiene

$$\begin{aligned}
B_1(t) &= S_{13}^{11}(t) + S_{12}^{11}(t) \Phi_1(t) \Psi(t) + S_{12}^{12}(t) \Phi_2(t) [S_{23}^{21}(t) + S_{22}^{21}(t) \Phi_1(t) \Psi(t)], \\
B_2(t) &= S_{13}^{21}(t) + S_{12}^{21}(t) \Phi_1(t) \Psi(t) + S_{12}^{22}(t) \Phi_2(t) [S_{23}^{21}(t) + S_{22}^{21}(t) \Phi_1(t) \Psi(t)], \\
B_3(t) &= F_2^{-1} \{S_{13}^{31}(t) + S_{12}^{31}(t) \Phi_1(t) \Psi(t) + S_{12}^{32}(t) \Phi_2(t) [S_{23}^{23}(t) + S_{22}^{21}(t) \Phi_1(t) \Psi(t)]\}, \quad (4.25)
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\Phi_1(t) &= L\Gamma(t)M(t); \quad \Phi_2(t) = L^V(t)M^V(t); \quad T(t) = [I - M(t)S_{22}^{12}(t)L^V(t)M^V(t)S_{22}^{21}(t)L]^{-1} \\
\Gamma(t) &= S_{21}^{11}(t) + S_{22}^{12}(t)\Phi_2(t)S_{21}^{21}(t); \quad \Lambda(t) = S_{21}^{12}(t) + S_{22}^{12}(t)\Phi_2(t)S_{21}^{22}(t) \\
\Upsilon(t) &= S_{21}^{13}(t) + S_{22}^{12}(t)\Phi_2(t)S_{21}^{23}(t); \quad \Psi(t) = S_{23}^{11}(t) + S_{22}^{12}(t)\Phi_2(t)S_{23}^{21}(t) \quad (4.26)
\end{aligned}$$

Con (4.12) a (4.13) se puede obtener una representación en espacio de estados de un sistema lineal singularmente perturbado variante en el tiempo en bond graph con asignación de causalidad integral a todos los elementos almacenadores de energía.

En la siguiente sección se dará un procedimiento para obtener el estado cuasi-estacionario de esta clase de sistemas de manera directa.

#### 4.2.1. Procedimiento propuesto para obtener el estado cuasi-estacionario en bond graph

En esta sección se presenta un procedimiento para determinar el modelo cuasi-estacionario de un sistema lineal singularmente perturbado variante en el tiempo, con las siguientes condi-

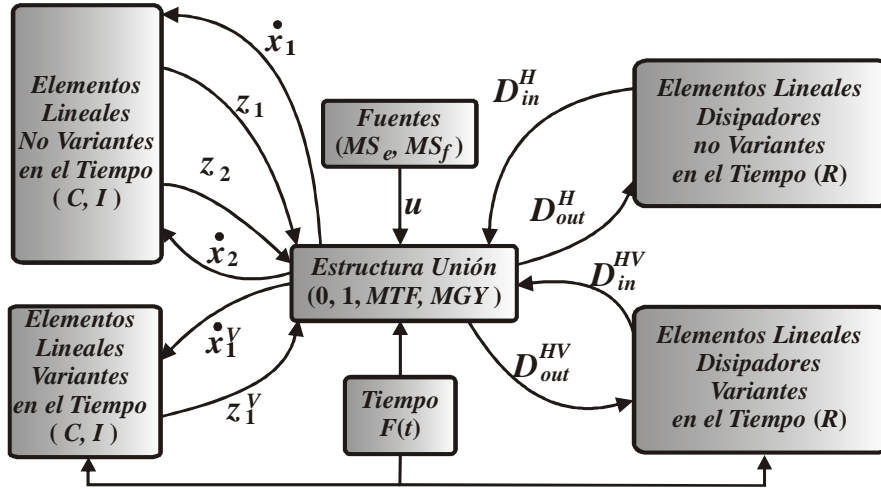


Figura 4.2: Estructura unión de un SPVBG para una clase de sistemas lineales con elementos disipadores variantes en el tiempo.

ciones: el sistema tiene estabilidad interna y que todas las dinámicas rápidas sean no variantes en el tiempo, la primera se tiene cuando la norma de la matriz  $A(t)$  no crece de forma positiva a infinito cuando  $t \rightarrow \infty$  (la parte real de los eigenvalores del sistema son negativos y finitos,  $\text{Re } \lambda(A(t)) \leq -c_1 < 0$ ), la segunda condición se establece ya que el procedimiento propuesto no se contempló para sistemas con dependencia del tiempo en las dinámicas rápidas. La Figura 4.2 muestra un esquema para analizar las propiedades de un sistema lineal singularmente perturbado con elementos almacenadores y disipadores variantes en el tiempo en bond graph llamado Bond Graph lineal Singularmente Perturbado Variante en el tiempo (SPVBG).

En este procedimiento se propone asignar una causalidad derivativa a los elementos de almacenamiento que representan la dinámica rápida y mantener una causalidad integral en los elementos almacenadores relacionados con la dinámica lenta.

La Figura 4.2 muestra que los vectores claves de los elementos de almacenamiento  $(\dot{x}_2, z_2)$  han cambiando con respecto a la Figura 4.1 debido a la asignación de causalidad de estos elementos. También, los vectores clave de los elementos de disipación  $(D_{in}^H, D_{out}^H$  y  $D_{in}^{HV}, D_{out}^{HV})$  de la Figura 4.2 pueden ser diferentes con respecto a los vectores clave  $(D_{in}, D_{out}$  y  $D_{in}^V, D_{out}^V)$

de la Figura 4.1 dependiendo de la causalidad del resto de los elementos del sistema.

La nueva estructura unión para esta clase de sistemas lineales variantes en el tiempo se presenta en el siguiente lema.

**Lema 5.1** *Considerando una clase de sistemas lineales singularmente perturbados que tienen elementos de almacenamiento de energía, giradores, transformadores y/o disipadores de energía en los cuales sus parámetros son dependientes del tiempo, con la condición de que todos los elementos de almacenamiento de energía relacionados con las dinámicas rápidas sean no variantes en el tiempo, y satisfaciendo (4.5); y que la matriz  $A_{22}(t)$  sea no singular; este sistema es modelado mediante bond graphs de acuerdo a el esquema de la Figura 4.2 donde los elementos de almacenamiento de la dinámica rápida tienen una asignación de causalidad derivativa y los elementos de almacenamiento de la dinámica lenta tienen una asignación de causalidad integral cuya estructura unión está dada por*

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \hline x_1^V(t) \\ \hline z_2(t) \\ \hline D_{in}^H(t) \\ \hline D_{in}^{HV}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11}^{11}(t) & H_{11}^{12}(t) & H_{11}^{13}(t) & H_{12}^{11}(t) & H_{12}^{12}(t) & H_{13}^{11}(t) \\ \hline H_{11}^{21}(t) & H_{11}^{22}(t) & H_{11}^{23}(t) & H_{12}^{21}(t) & H_{12}^{22}(t) & H_{13}^{21}(t) \\ \hline H_{11}^{31}(t) & H_{11}^{32}(t) & H_{11}^{33}(t) & H_{12}^{31}(t) & H_{21}^{32}(t) & H_{13}^{31}(t) \\ \hline H_{21}^{11}(t) & H_{21}^{12}(t) & H_{21}^{13}(t) & H_{22}^{11}(t) & H_{22}^{12}(t) & H_{23}^{11}(t) \\ \hline H_{21}^{21}(t) & H_{21}^{22}(t) & H_{21}^{23}(t) & H_{22}^{21}(t) & H_{22}^{22}(t) & H_{23}^{21}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ \hline z_1^V(t) \\ \hline \dot{x}_2(t) \\ \hline D_{out}^H(t) \\ \hline D_{out}^{HV}(t) \\ \hline u(t) \end{bmatrix}, \quad (4.27)$$

donde

$$\begin{aligned} z_1(t) &= F_1 x_1(t); \quad z_1^V(t) = F_1^V(t) x_1^V(t); \quad z_2(t) = F_2 x_2(t); \\ D_{out}^H(t) &= L D_{in}^H(t); \quad D_{out}^{HV}(t) = L^V(t) D_{in}^{HV}(t); \quad \varepsilon = F_2^{-1}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Una representación del sistema en espacio de estados está dada por

$$\dot{x}_1(t) = \widetilde{A}_{11}(t) x_1(t) + \widetilde{A}_{12}(t) x_1^V(t) + \widetilde{A}_{13}(t) \dot{x}_2(t) + \widetilde{B}_1(t) u(t), \quad (4.29)$$

$$\dot{x}_1^V(t) = \widetilde{A}_{21}(t) x_1(t) + \widetilde{A}_{22}(t) x_1^V(t) + \widetilde{A}_{23}(t) \dot{x}_2(t) + \widetilde{B}_2(t) u(t), \quad (4.30)$$

$$x_2(t) = \widetilde{A}_{31}(t) x_1(t) + \widetilde{A}_{32}(t) x_1^V(t) + \widetilde{A}_{33}(t) \dot{x}_2(t) + \widetilde{B}_3(t) u(t). \quad (4.31)$$

Si se considera que las dinámicas rápidas han terminado para obtener el estado cuasi-estacionario, es decir  $\dot{x}_2(t) = 0$ , entonces (4.29) y (4.30) se convierten en

$$\dot{\bar{x}}_1(t) = \widetilde{A}_{11}(t) \bar{x}_1(t) + \widetilde{A}_{12}(t) \bar{x}_1^V(t) + \widetilde{B}_1(t) u(t), \quad (4.32)$$

$$\dot{\bar{x}}_1^V(t) = \widetilde{A}_{21}(t) \bar{x}_1(t) + \widetilde{A}_{22}(t) \bar{x}_1^V(t) + \widetilde{B}_2(t) u(t). \quad (4.33)$$

Estas últimas ecuaciones, (4.29) y (4.30), son el estado cuasi-estacionario para las dinámicas lentas no dependientes y las dependientes del tiempo, respectivamente.

Desarrollando (4.27) se obtiene,

$$\dot{x}_1(t) = H_{11}^{11}(t) z_1(t) + H_{11}^{12}(t) z_1^V(t) + H_{11}^{13}(t) \dot{x}_2(t) + H_{12}^{11}(t) D_{out}(t) + H_{12}^{12}(t) D_{out}^V(t) + H_{13}^{11}(t) u(t), \quad (4.34)$$

$$\dot{x}_1^V(t) = H_{11}^{21}(t) z_1(t) + H_{11}^{22}(t) z_1^V(t) + H_{11}^{23}(t) \dot{x}_2(t) + H_{12}^{21}(t) D_{out}(t) + H_{12}^{22}(t) D_{out}^V(t) + H_{13}^{21}(t) u(t), \quad (4.35)$$

$$z_2(t) = H_{11}^{31}(t) z_1(t) + H_{11}^{32}(t) z_1^V(t) + H_{11}^{33}(t) \dot{x}_2(t) + H_{12}^{31}(t) D_{out}(t) + H_{12}^{32}(t) D_{out}^V(t) + H_{13}^{31}(t) u(t), \quad (4.36)$$

$$D_{in}(t) = H_{21}^{11}(t) z_1(t) + H_{21}^{12}(t) z_1^V(t) + H_{21}^{13}(t) \dot{x}_2(t) + H_{22}^{11}(t) D_{out}(t) + H_{22}^{12}(t) D_{out}^V(t) + H_{23}^{11}(t) u(t), \quad (4.37)$$

$$D_{in}^V(t) = H_{21}^{21}(t) z_1(t) + H_{21}^{22}(t) z_1^V(t) + H_{21}^{23}(t) \dot{x}_2(t) + H_{22}^{21}(t) D_{out}(t) + H_{22}^{22}(t) D_{out}^V(t) + H_{23}^{21}(t) u(t). \quad (4.38)$$

De la misma forma que se hizo en la sección anterior, sustituyendo (4.28) en (4.37) y (4.38) se obtiene

$$D_{in}^H(t) = Q(t) \left[ H_{21}^{11}(t) F_1 x_1(t) + H_{21}^{12}(t) F_1^V(t) x_1^V(t) + H_{21}^{13}(t) F_2 \dot{x}_2(t) + H_{22}^{12}(t) L^V(t) D_{in}^{HV}(t) + H_{23}^{11}(t) u(t) \right], \quad (4.39)$$

$$D_{in}^{HV}(t) = Q^V(t) \left[ H_{21}^{21}(t) F_1 x_1(t) + H_{21}^{22}(t) F_1^V(t) x_1^V(t) + H_{21}^{23}(t) F_2 \dot{x}_2(t) + H_{22}^{21}(t) L D_{in}^H(t) + H_{23}^{21}(t) u(t) \right], \quad (4.40)$$

$$\text{donde } Q(t) = [I - H_{22}^{11}(t) L]^{-1} \text{ y } Q^V(t) = [I - H_{22}^{22}(t) L^V(t)]^{-1}.$$

Sustituyendo (4.40) en (4.39), y el resultado se sustituye en (4.40) para obtener las expresiones que definen a  $D_{in}^H(t)$  y  $D_{in}^{HV}(t)$  sin dependencia de ellas mismas. Este último resultado se sustituye en (4.34), (4.35) y (4.36) para obtener las matrices para una representación en espacio de estados.

Para las dinámicas lentas relacionadas con elementos almacenadores que no son dependientes del tiempo

$$\begin{aligned} \widetilde{A}_{11}(t) &= \left\{ H_{11}^{11}(t) + H_{12}^{12}(t) \Phi_1^H(t) \Gamma^H(t) + H_{12}^{12}(t) \Phi_2^H(t) \left[ H_{21}^{21}(t) + H_{22}^{21}(t) \Phi_1^H(t) \Gamma^H(t) \right] \right\} F_1, \\ \widetilde{A}_{12}(t) &= \left\{ H_{11}^{12}(t) + H_{12}^{11}(t) \Phi_1^H(t) \Lambda^H(t) + H_{12}^{12}(t) \Phi_2^H(t) \left[ H_{21}^{22}(t) + H_{22}^{21}(t) \Phi_1^H(t) \Lambda^H(t) \right] \right\} F_1^V(t), \\ \widetilde{A}_{13}(t) &= \left\{ H_{11}^{13}(t) + H_{12}^{11}(t) \Phi_1^H(t) \Upsilon^H(t) + H_{12}^{12}(t) \Phi_2^H(t) \left[ H_{21}^{23}(t) + H_{22}^{21}(t) \Phi_1^H(t) \Upsilon^H(t) \right] \right\} F_2, \\ \widetilde{B}_1(t) &= H_{13}^{11}(t) + H_{12}^{11}(t) \Phi_1^H(t) \Psi^H(t) + H_{12}^{12}(t) \Phi_2^H(t) \left[ H_{23}^{21}(t) + H_{22}^{21}(t) \Phi_1^H(t) \Psi^H(t) \right]. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Para las dinámicas lentas relacionadas con elementos almacenadores que si dependen del tiempo

$$\begin{aligned}
 \widetilde{A}_{21}(t) &= \left\{ H_{11}^{21}(t) + H_{12}^{21}(t) \Phi_1^H(t) \Gamma^H(t) + H_{12}^{22}(t) \Phi_2^H(t) \left[ H_{21}^{21}(t) + H_{22}^{21}(t) \Phi_1^H(t) \Gamma^H(t) \right] \right\} F_1, \\
 \widetilde{A}_{22}(t) &= \left\{ H_{11}^{22}(t) + H_{12}^{21}(t) \Phi_1^H(t) \Lambda^H(t) + H_{12}^{22}(t) \Phi_2^H(t) \left[ H_{21}^{22}(t) + H_{22}^{21}(t) \Phi_1^H(t) \Lambda^H(t) \right] \right\} F_1^V(t), \\
 \widetilde{A}_{23}(t) &= \left\{ H_{11}^{23}(t) + H_{12}^{21}(t) \Phi_1^H(t) \Upsilon^H(t) + H_{12}^{22}(t) \Phi_2^H(t) \left[ H_{21}^{23}(t) + H_{22}^{21}(t) \Phi_1^H(t) \Upsilon^H(t) \right] \right\} F_2, \\
 \widetilde{B}_2(t) &= H_{13}^{21}(t) + H_{12}^{21}(t) \Phi_1^H(t) \Psi^H(t) + H_{12}^{22}(t) \Phi_2^H(t) \left[ H_{23}^{21}(t) + H_{22}^{21}(t) \Phi_1^H(t) \Psi^H(t) \right], \quad (4.42)
 \end{aligned}$$

Para las variables rápidas

$$\begin{aligned}
 \widetilde{A}_{31}(t) &= F_2^{-1} \left\{ H_{11}^{31}(t) + H_{12}^{31}(t) \Phi_1^H(t) \Gamma^H(t) + H_{21}^{32}(t) \Phi_2^H(t) \left[ H_{21}^{21}(t) + H_{22}^{21}(t) \Phi_1^H(t) \Gamma^H(t) \right] \right\} F_1, \\
 \widetilde{A}_{32}(t) &= F_2^{-1} \left\{ H_{11}^{32}(t) + H_{12}^{31}(t) \Phi_1^H(t) \Lambda^H(t) + H_{21}^{32}(t) \Phi_2^H(t) \left[ H_{21}^{22}(t) + H_{22}^{21}(t) \Phi_1^H(t) \Lambda^H(t) \right] \right\} F_1^V(t), \\
 \widetilde{A}_{33}(t) &= F_2^{-1} \left\{ H_{11}^{33}(t) + H_{12}^{31}(t) \Phi_1^H(t) \Upsilon^H(t) + H_{21}^{32}(t) \Phi_2^H(t) \left[ H_{21}^{23}(t) + H_{22}^{21}(t) \Phi_1^H(t) \Upsilon^H(t) \right] \right\} F_2, \\
 \widetilde{B}_3(t) &= F_2^{-1} \left\{ H_{13}^{31}(t) + H_{12}^{31}(t) \Phi_1^H(t) \Psi^H(t) + H_{12}^{32}(t) \Phi_2^H(t) \left[ H_{23}^{21}(t) + H_{22}^{21}(t) \Phi_1^H(t) \Psi^H(t) \right] \right\}, \quad (4.43)
 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
 \Phi_1^H(t) &= LT^H(t)Q(t); \quad \Phi_2^H(t) = L^V(t)Q^V(t); \quad T^H(t) = \left[ I - Q(t)H_{22}^{12}(t)L^V(t)Q^V(t)H_{22}^{21}(t)L \right]^{-1}. \\
 \Gamma^H(t) &= H_{21}^{11}(t) + H_{22}^{12}(t)\Phi_2^H(t)H_{21}^{21}(t); \quad \Lambda^H(t) = H_{21}^{12}(t) + H_{22}^{12}(t)\Phi_2^H(t)H_{21}^{22}(t), \\
 \Upsilon^H(t) &= H_{21}^{13}(t) + H_{22}^{12}(t)\Phi_2^H(t)H_{21}^{23}(t); \quad \Psi^H(t) = H_{23}^{11}(t) + H_{22}^{12}(t)\Phi_2^H(t)H_{23}^{21}(t). \quad (4.44)
 \end{aligned}$$

En la siguiente sección se da un ejemplo con fines de demostración (sistema no real) para corroborar la funcionalidad del procedimiento.

#### 4.2.2. Ejemplo demostrativo del procedimiento propuesto

Un motor de corriente directa es un sistema electromecánico que por sus características físicas califica como un sistema singularmente perturbado, si se agrega una varianza en el tiempo en un elemento almacenador de energía, en un disipador y en la relación del girador con fines demostrativos se tiene el modelo de la Figura 4.3, y en la Figura 4.4 se muestra su modelo correspondiente en bond graph con causalidad integral asignada.

Los vectores clave y las relaciones constitutivas para el bond graph de la Figura 4.4 son:

$$D_{in} = f_2; \quad D_{in}^V = f_6; \quad D_{out} = e_2; \quad D_{out}^V = e_6; \quad u = e_1, \quad (4.45)$$

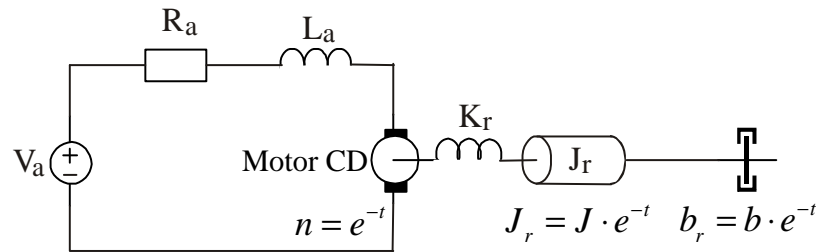


Figura 4.3: Modelo del motor de CD para fines demostrativos con dependencia del tiempo en un elemento almacenador, en un disipador y en el girador.

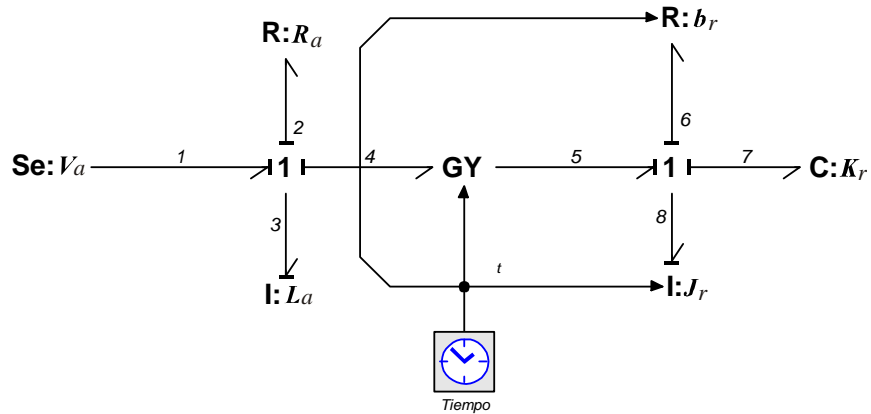


Figura 4.4: Modelo en bond graph de la Figura 4.3.

para el elemento almacenador que no depende del tiempo relacionado con una dinámica lenta se tiene

$$x_1 = q_7; \quad \dot{x}_1 = f_7; \quad z_1 = e_7, \quad (4.46)$$

para el almacenador de energía dependiente del tiempo relacionado con una variable lenta

$$x_1^V = p_8; \quad \dot{x}_1^V = e_8; \quad z_1^V = f_8, \quad (4.47)$$

y para la dinámica rápida se tiene

$$x_2 = p_3; \quad \dot{x}_2 = e_3; \quad z_2 = f_3. \quad (4.48)$$

Las relaciones constitutivas son

$$\begin{aligned} L &= R_a; \quad L^V(t) = b_r \cdot e^{-t}; \quad F_1 = \frac{1}{K_r}; \quad F_1^{-1} = K_r; \\ F_1^V &= \frac{1}{J_r \cdot e^{-t}}; \quad (F_1^V)^{-1} = J_r \cdot e^{-t}; \quad F_2 = \frac{1}{L_a}; \quad F_2^{-1} = L_a, \end{aligned} \quad (4.49)$$

y para el girador modulado variante en el tiempo

$$\begin{bmatrix} e_4 \\ f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & e^{-t} \\ \frac{1}{e^{-t}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_5 \\ f_5 \end{bmatrix}. \quad (4.50)$$

A partir de (4.15) y un análisis del bond graph de la Figura 4.4 se obtiene la matriz de estructura unión

$$\begin{bmatrix} f_7 \\ e_8 \\ e_3 \\ f_2 \\ f_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & e^{-t} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -e^{-t} & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_7 \\ f_8 \\ f_3 \\ e_2 \\ e_6 \\ e_1 \end{bmatrix}. \quad (4.51)$$

Por comparación de (4.51) con (4.15) se obtienen las submatrices  $S(t)$

$$\begin{aligned} S_{11}^{32}(t) &= -e^{-t}; \quad S_{11}^{23}(t) = e^{-t}; \quad S_{11}^{12} = S_{21}^{13} = S_{21}^{22} = S_{13}^{31} = 1; \quad S_{11}^{21} = S_{12}^{22} = S_{12}^{31} = -1; \\ S_{11}^{11} &= S_{11}^{13} = S_{12}^{11} = S_{12}^{12} = S_{13}^{11} = S_{11}^{22} = S_{12}^{21} = S_{13}^{21} = S_{11}^{31} = S_{11}^{33} = S_{21}^{32} = S_{21}^{11} = 0; \\ S_{21}^{12} &= S_{22}^{11} = S_{22}^{12} = S_{23}^{11} = S_{21}^{21} = S_{22}^{21} = S_{23}^{21} = S_{12}^{22} = S_{21}^{23} = 0, \end{aligned} \quad (4.52)$$

utilizando de (4.16) a (4.26) con (4.52) se obtienen las matrices  $A$  y  $B$  de la representación en espacio de estados (4.12) - (4.14).

Entonces, sustituyendo (4.52) para obtener  $M(t)$  y  $M^V(t)$  se obtiene

$$M = \left[ I - \underbrace{S_{22}^{11}(t)L}_0 \right]^{-1} = I = 1 \quad y \quad M^V = \left[ I - \underbrace{S_{22}^{22}(t)L^V(t)}_0 \right]^{-1} = I = 1, \quad (4.53)$$

en este caso, tanto  $M$  como  $M^V$  son no dependientes del tiempo. Ahora para  $\Phi_1(t)$ ,  $\Phi_2(t)$  y  $T(t)$  se tiene

$$T = \left[ I - M(t) \underbrace{S_{22}^{12}(t)L^V(t)}_0 M^V(t) \underbrace{S_{22}^{21}(t)L}_0 \right]^{-1} = I = 1,$$

$$\Phi_1 = LTM = L = R_a \quad y \quad \Phi_2(t) = L^V(t) M^V = L^V(t) = b_r \cdot e^{-t}, \quad (4.54)$$

entonces

$$\begin{aligned} \Gamma(t) &= S_{21}^{11}(t) + S_{22}^{12}(t) \Phi_2(t) S_{21}^{21}(t) = 0, \\ \Lambda(t) &= S_{21}^{12}(t) + S_{22}^{12}(t) \Phi_2(t) S_{21}^{22}(t) = 0, \\ \Upsilon(t) &= S_{21}^{13}(t) + S_{22}^{12}(t) \Phi_2(t) S_{21}^{23}(t) = 1, \\ \Psi(t) &= S_{23}^{11}(t) + S_{22}^{12}(t) \Phi_2(t) S_{23}^{21}(t) = 0. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Entonces sustituyendo (4.49), (4.52) a (4.55) en (4.24) los valores de  $A$ 's para la representación en espacio de estados se tiene

$$\begin{aligned} A_{11} &= 0; \quad A_{12}(t) = \frac{1}{J_r \cdot e^{-t}}; \quad A_{13} = 0 \quad A_{21} = -\frac{1}{K_r}; \quad A_{22} = -\frac{b_r}{J_r}; \\ A_{23}(t) &= \frac{e^{-t}}{L_a}; \quad A_{31} = 0; \quad A_{32} = -\frac{L_a}{J_r}; \quad A_{33} = -R_a, \end{aligned} \quad (4.56)$$

y para los valores de  $B$ 's se obtiene

$$B_1 = 0; \quad B_2 = 0; \quad B_3 = L_a. \quad (4.57)$$

Sustituyendo (4.46), (4.47), (4.48), (4.56) y (4.57) en (4.12), (4.13) y (4.14) se obtiene una

representación en espacio de estados

$$\dot{q}_7 = \frac{1}{J_r \cdot e^{-t}} p_8, \quad (4.58)$$

$$\dot{p}_8 = -\frac{1}{K_r} q_7 - \frac{b_r}{J_r} p_8 + \frac{e^{-t}}{L_a} p_3, \quad (4.59)$$

$$\varepsilon \dot{p}_3 = -\frac{L_a}{J_r} p_8 - R_a p_3 + L_a e_1. \quad (4.60)$$

Si se considera que la dinámica rápida ha finalizado (estado cuasi-estacionario), es decir  $\varepsilon \dot{p}_3 = 0$ , entonces (4.60) se convierte en

$$0 = -\frac{L_a}{J_r} \bar{p}_8 - R_a \bar{p}_3 + L_a e_1, \quad (4.61)$$

dedejando  $\bar{p}_3$  de (4.60) y después sustituyendo en (4.59) se obtiene

$$\dot{\bar{q}}_7 = \frac{1}{J_r \cdot e^{-t}} \bar{p}_8, \quad (4.62)$$

$$\dot{\bar{p}}_8 = -\frac{1}{K_r} \bar{q}_7 - \frac{1}{J_r} \left( \frac{e^{-t}}{R_a} + b_r \right) \bar{p}_8 + \frac{e^{-t}}{R_a} e_1, \quad (4.63)$$

Por lo tanto, (4.62) y (4.63) es el modelo cuasi-estacionario del sistema. Ahora utilizando el Lema 5.1, primero se cambia de causalidad integral a causalidad derivativa los elementos relacionados con las dinámicas lentas para obtener el Sistema Singularmente Perturbado Variante en el tiempo en Bond Graph (SPVVBG), en este caso, sería el inductor  $L_a$ , como se muestra en la Figura 4.5.

El cambio en la causalidad del elemento almacenador  $L_a$  ocasiona un cambio en la causalidad del elemento disipador  $R_a$ , por lo que los vectores de disipación (que en este caso en particular no son vectores por el reducido numero de elementos disipadores) quedan

$$D_{in} = e_2; \quad D_{in}^V = f_6; \quad D_{out} = f_2; \quad D_{out}^V = e_6; \quad u = e_1, \quad (4.64)$$

A partir de (4.27) y un análisis del bond graph de la Figura 4.5 se obtiene la matriz de

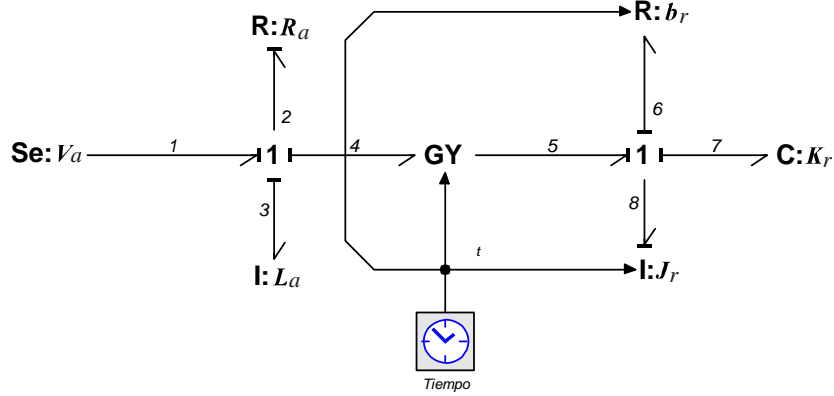


Figura 4.5: Modelo SPVBG de la Figura 4.3.

estructura unión

$$\begin{bmatrix} f_7 \\ e_8 \\ f_3 \\ e_2 \\ f_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & e^{-t} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-t} & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_7 \\ f_8 \\ e_3 \\ f_2 \\ e_6 \\ e_1 \end{bmatrix}. \quad (4.65)$$

Por comparación de (4.65) con (4.27) se obtienen las submatrices  $H(t)$

$$\begin{aligned}
 H_{21}^{12}(t) &= -e^{-t}; & H_{12}^{21}(t) &= e^{-t}; & H_{11}^{12} &= H_{12}^{31} = H_{23}^{11} = S_{21}^{22} = 1; & H_{11}^{21} &= H_{12}^{22} = H_{21}^{13} = -1; \\
 H_{11}^{11} &= H_{11}^{13} = H_{12}^{11} = H_{12}^{12} = H_{13}^{11} = H_{11}^{22} = H_{11}^{23} = H_{13}^{21} = H_{11}^{31} = H_{11}^{32} = H_{11}^{33} = H_{21}^{32} = 0; \\
 H_{13}^{31} &= H_{21}^{11} = H_{22}^{11} = H_{22}^{12} = H_{21}^{21} = H_{21}^{23} = H_{22}^{21} = H_{12}^{22} = H_{23}^{21} = 0.
 \end{aligned} \quad (4.66)$$

Ahora, utilizando de (4.28) a (4.44) con (4.66) se obtienen las matrices  $A$  y  $B$  de la representación en espacio de estados (4.29) - (4.31).

Entonces, sustituyendo (4.66) para obtener  $Q(t)$  y  $Q^V(t)$  se obtiene

$$Q = \left[ I - \underbrace{H_{22}^{11}(t)L}_0 \right]^{-1} = I = 1 \quad \text{y} \quad Q^V = \left[ I - \underbrace{H_{22}^{22}(t)L^V(t)}_0 \right]^{-1} = I = 1, \quad (4.67)$$

en este caso, tanto  $Q$  como  $Q^V$  son no dependientes del tiempo. Ahora para  $\Phi_1^H(t)$ ,  $\Phi_2^H(t)$  y  $T^H(t)$  se tiene

$$\begin{aligned} T^H &= \left[ I - Q(t) \underbrace{H_{22}^{12}(t)}_0 L^V(t) Q^V(t) \underbrace{H_{22}^{21}(t)}_0 L \right]^{-1} = I = 1, \\ \Phi_1^H &= LT^HQ = L = R_a \quad \text{y} \quad \Phi_2^H = L^V(t) Q^V = L^V(t) = b_r \cdot e^{-t}, \end{aligned} \quad (4.68)$$

entonces

$$\begin{aligned} \Gamma^H(t) &= H_{21}^{11}(t) + H_{22}^{12}(t) \Phi_2^H(t) H_{21}^{21}(t) = 0, \\ \Lambda^H(t) &= H_{21}^{12}(t) + H_{22}^{12}(t) \Phi_2^H(t) H_{21}^{22}(t) = -e^{-t}, \\ \Upsilon^H(t) &= H_{21}^{13}(t) + H_{22}^{12}(t) \Phi_2^H(t) H_{21}^{23}(t) = -1, \\ \Psi^H(t) &= H_{23}^{11}(t) + H_{22}^{12}(t) \Phi_2^H(t) SH_{23}^{21}(t) = 1. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Entonces sustituyendo (4.49), (4.66) a (4.69) en (4.41) a (4.43) los valores de  $\widetilde{A}'s$  para la representación en espacio de estados se tiene

$$\begin{aligned} \widetilde{A}_{11} &= 0; \quad \widetilde{A}_{12}(t) = \frac{1}{J_r \cdot e^{-t}}; \quad \widetilde{A}_{13} = 0; \quad \widetilde{A}_{21} = -\frac{1}{K_r}; \quad \widetilde{A}_{22}(t) = -\frac{1}{J_r} \left( \frac{e^{-t}}{R_a} + b_r \right); \\ \widetilde{A}_{23}(t) &= -\frac{e^{-t}}{R_a}; \quad \widetilde{A}_{31} = 0; \quad \widetilde{A}_{32} = -\frac{L_a}{J_r \cdot R_a}; \quad \widetilde{A}_{33} = -\frac{L_a}{R_a}, \end{aligned} \quad (4.70)$$

y para los valores de  $\widetilde{B}'s$  se obtiene

$$\widetilde{B}_1 = 0; \quad \widetilde{B}_2(t) = \frac{e^{-t}}{R_a}; \quad \widetilde{B}_3 = \frac{L_a}{R_a}. \quad (4.71)$$

Sustituyendo (4.46), (4.67), (4.48), (4.70) y (4.71) en (4.32) y (4.33) se obtiene el modelo cuasi-estacionario

$$\dot{\overline{q}}_7 = \frac{1}{J_r \cdot e^{-t}} \overline{p}_8, \quad (4.72)$$

$$\dot{\overline{p}}_8 = -\frac{1}{K_r} \overline{q}_7 - \frac{1}{J_r} \left( \frac{e^{-t}}{R_a} + b_r \right) \overline{p}_8 + \frac{e^{-t}}{R_a} e_1. \quad (4.73)$$

Se puede observar que (4.72) y (4.73) es el mismo resultado que el obtenido en (4.62) y (4.63).

Tabla 4.1: Parámetros para la simulación del ejemplo demostrativo variante en el tiempo.

Elemento	Valor
$e_1$	110 V
$R_a$	1.64 $\Omega$
$L_a$	0.01 H
$K_r$	0.01 N-m/rad
$J_r$	0.09 N-m-s <sup>2</sup>
$b_r$	12.7 N-m-s

### 4.2.3. Comparación de los resultados obtenidos

Para la simulación del estado cuasi-estacionario del sistema de ejemplo demostrativo (4.72) y (4.73), en 20-SIM<sup>®</sup> se realiza como se muestra en la Figura 4.6. Los parámetros de simulación del ejemplo demostrativo se dan en la Tabla 4.1.

La Figura 4.7 muestra la conducta dinámica de la variable de estado  $q_7$  (ángulo de torsión del eje del motor) representado con la línea continua comparada con el estado cuasi-estacionario  $\bar{q}_7$  representado con una línea punteada. La Figura 4.8 muestra la conducta dinámica de la variable de estado  $p_8$  (momento o par de torsión del eje del motor) representado con la línea continua comparada con el estado cuasi-estacionario  $\bar{p}_8$  representado con una línea punteada. El estado estacionario de las variables lentas que se obtienen después de 0.5 segundos, tanto para el sistema original como el modelo de estado cuasi-estacionario es

$$\begin{aligned} q_7 &= 0.4411689016904 \text{ rad}, & \bar{q}_7 &= 0.4413792515911 \text{ rad}, \\ p_8 &= -0.02376225019486 \text{ N-m-s}, & \bar{p}_8 &= -0.02392405690913 \text{ N-m-s}, \end{aligned} \quad (4.74)$$

con un error relativo de

$$\begin{aligned} \text{Error relativo de } q_7 &= -0.0476 \% \\ \text{Error relativo de } p_8 &= 0.68 \% \end{aligned} \quad (4.75)$$

Ahora, si se deja correr la simulación 0.5 segundos más, es decir después de 1 segundo el valor de las variables es

$$\begin{aligned} q_7 &= 0.2595967517268 \text{ rad}, & \bar{q}_7 &= 0.2595932910495 \text{ rad}, \\ p_8 &= -0.009079136005225 \text{ N-m-s}, & \bar{p}_8 &= -0.009078800372935 \text{ N-m-s}, \end{aligned} \quad (4.76)$$

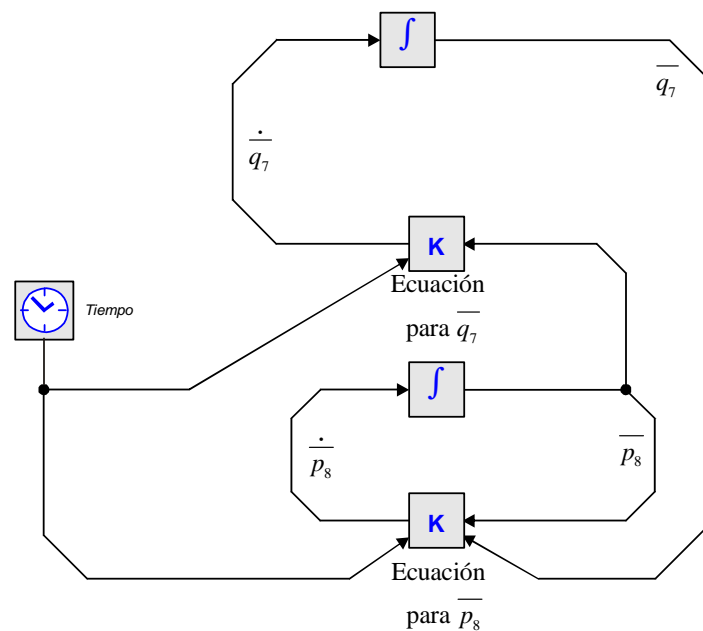


Figura 4.6: Diagrama esquemático para la simulación del sistema cuasi-estacionario del modelo de ejemplo demostrativo.

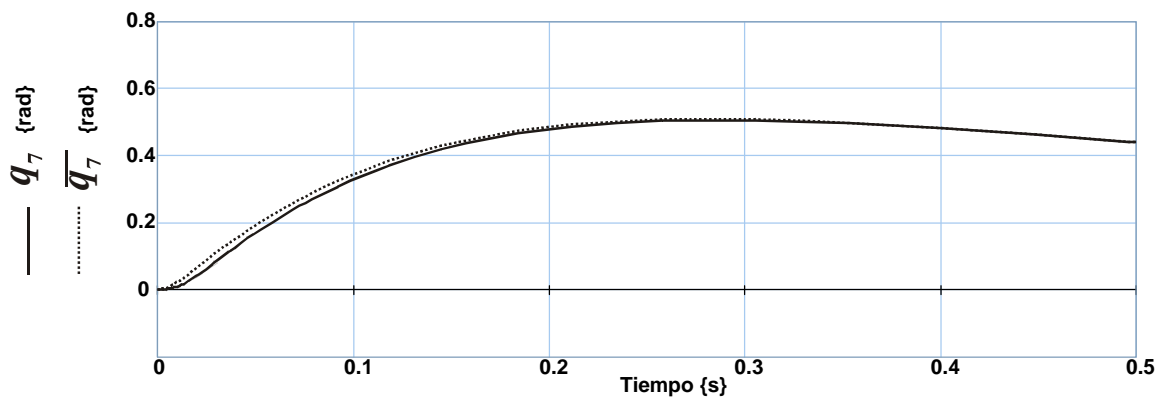


Figura 4.7: Dinámica de la variable de estado del modelo original ( $q_7$ ) y la obtenida con el modelo de estado cuasi-estacionario ( $\bar{q}_7$ ).

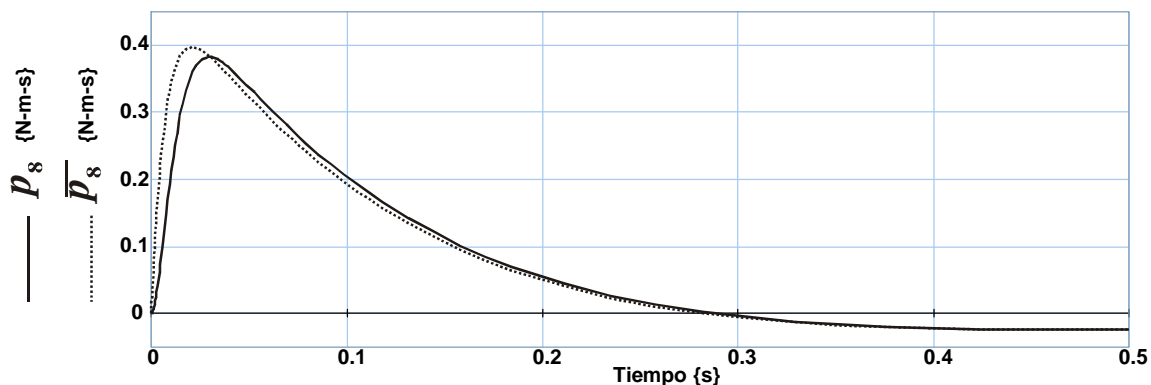


Figura 4.8: Dinámica de la variable de estado del modelo original ( $p_8$ ) y la obtenida con el modelo de estado cuasi-estacionario ( $\overline{p_8}$ ).

con un nuevo error relativo de

$$\begin{aligned} \text{Error relativo de } q_7 &= -0.0037\% \\ \text{Error relativo de } p_8 &= 0.003\% \end{aligned} \tag{4.77}$$

Se puede observar que el comportamiento dinámico del modelo de estado cuasi-estacionario no es exactamente el mismo que la dinámica de las variables lentas originales, sin embargo a pesar de la varianza en el tiempo de algunas variables de estado, el valor final estable es prácticamente el mismo.

## Capítulo 5

# Estado Estacionario de Sistemas No Lineales en Bond Graph

### 5.1. Introducción

Una definición de estado estacionario, también conocido como estado de equilibrio o estado estable, es el estado del sistema cuando todas las derivadas con respecto al tiempo de las variables de estado son cero en ausencia de disturbios variantes en el tiempo [Breedveld, 1984]. Esta definición de estado estacionario no excluye los procesos que son alimentados por fuentes constantes. En el caso lineal, la condición de estado estable puede ser formulada en términos del sistema de ecuaciones

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad \text{cuando } \dot{x}(t) = 0. \quad (5.1)$$

El concepto de estado estacionario para sistemas no lineales fue introducido por A. Isidori y C. I. Bynes [Isidori, 1990] con la finalidad de resolver un problema de regulación de salida. En la mayoría de la bibliografía de sistemas no lineales [Khalil, 1996, Sastry, 1999, Slotine, 1991], en lugar de hablar de estado estacionario se menciona como puntos de equilibrio, ya que la dinámica del sistema no lineal tenderá hacia un determinado punto de equilibrio de acuerdo a sus condiciones iniciales, es decir, un sistema no lineal puede tener uno o más estados estacionarios.

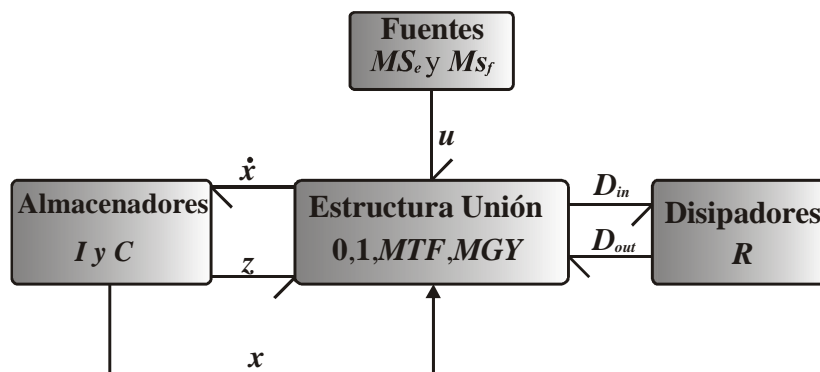


Figura 5.1: Estructura unión de un Bond Graph en causalidad Integral (BGI).

En [Gonzalez, 2003] se propone un método utilizando el modelado en bond graph para obtener el estado estacionario. En este trabajo, se realiza una extensión de dicho método para una clase de sistemas no lineales aplicandolo a la máquina síncrona.

## 5.2. Modelado de una clase de sistemas no lineales en bond graph

Considerando el esquema de un modelo en bond graph con una asignación de causalidad integral (BGI) para un sistema en el cuál se incluyen los vectores claves como el que se muestra en la Figura 5.1. En la cuál se describen las fuentes moduladas de esfuerzo y de flujo ( $MS_e, MS_f$ ), los elementos almacenadores de energía ( $C, I$ ) y los elementos disipadores  $R$ . También se observa la estructura unión ( $0, 1, MTF, MGY$ ) representada por las uniones 0 y 1, y los transformadores y giradores modulados por variables de estado ( $MTF, MGY$ ).

Las variables de energía  $p(t)$  y  $q(t)$  asociadas con los elementos almacenadores en causalidad integral representan los estados  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  y  $z(t) \in \mathbb{R}^n$  corresponde a las variables de estado de co-energía;  $u(t) \in \mathbb{R}^p$  indican las entradas al sistema;  $D_{in}(t) \in \mathbb{R}^r$  y  $D_{out}(t) \in \mathbb{R}^r$  representan la relación entre los elementos de disipación y la estructura unión. La retroalimentación entre el campo de almacenadores y la estructura unión muestra que los  $MTF$  y/o  $MGY$  son

modulados usando un bond activo.

Para la clase de sistemas no lineales analizados en esta sección, son sistemas que presentan multiplicación de estados. Partiendo de que las relaciones de los almacenadores y de los disipadores de energía son lineales [Wellstead, 1979, Sueur, 1991]. Estas relaciones son descritas mediante

$$z(t) = Fx(t) \quad (5.2)$$

$$D_{out}(t) = LD_{in}(t) \quad (5.3)$$

Las relaciones de la estructura unión son

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ D_{in}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}(x) & S_{12}(x) & S_{13}(x) \\ S_{21}(x) & S_{22}(x) & S_{23}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t) \\ D_{out}(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

Los parámetros de  $S(x)$  están dentro del conjunto  $\{0, \pm 1, \pm k_t(x), \pm k_g(x)\}$ , donde  $k_t(x)$  y  $k_g(x)$  son transformadores y giradores que pueden ser modulados por variables de estado asociadas con los elementos  $I$  y/o  $C$  con asignación de causalidad integral. Para las condiciones de conservación de potencia se establece que:  $S_{11}(x)$  y  $S_{22}(x)$  son matrices cuadradas anti-simétricas, y  $S_{12}(x)$  es la matriz transpuesta negativa de  $S_{21}(x)$ .

La ecuación de estado para esta clase de sistemas no lineales a partir del modelo en bond graph es

$$\dot{x}(t) = A(x)x(t) + B(x)u(t) \quad (5.5)$$

donde

$$A(x) = E^{-1}(x)[S_{11}(x) + S_{12}(x)M(x)S_{21}(x)]F \quad (5.6)$$

$$B(x) = E^{-1}(x)[S_{13}(x) + S_{12}(x)M(x)S_{23}(x)] \quad (5.7)$$

$$M(x) = [I - LS_{22}(x)]^{-1}L \quad (5.8)$$

$$E(x) = I + S_{14}(x)F_d^{-1}S_{14}(x)^T F \quad (5.9)$$

En la siguiente sección se propone un modelo en bond graph para la obtención de la respuesta en estado estacionario para una clase de sistemas no lineales.

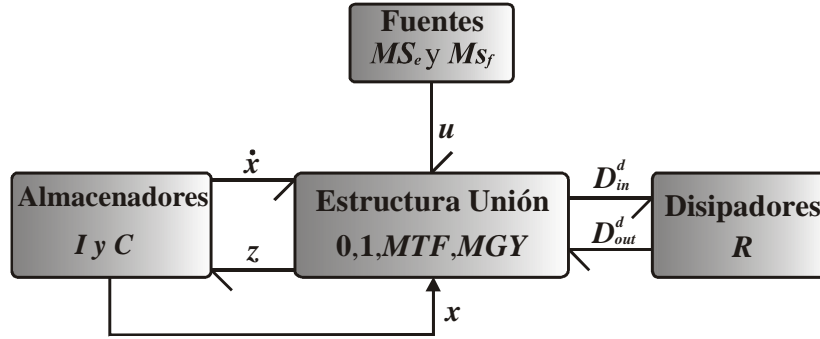


Figura 5.2: Estructura unión de un Bond Graph en causalidad Derivativa (BGD).

### 5.3. Estado estacionario de una clase de sistemas no lineales modelado en bond graph

La respuesta de estado estable es de mucha utilidad para conocer el valor que puede alcanzar cada variable de estado del sistema cuando ha finalizado el período dinámico.

Las propiedades de un modelo en bond graph con asignación de causalidad derivativa se describen en el siguiente Lema.

**Lema 6.1.** *Un modelo en bond graph de una clase de sistemas no lineales que contiene producto de estados y con una asignación de causalidad derivativa a los elementos almacenadores de energía como se muestra en la Figura 5.2 tiene una estructura unión  $J(x)$  definida por*

$$\begin{bmatrix} z(t) \\ D_{in}^d(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11}(x) & J_{12}(x) & J_{13}(x) \\ J_{21}(x) & J_{22}(x) & J_{23}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ D_{out}^d(t) \\ u(t) \end{bmatrix}, \quad (5.10)$$

donde

$$z(t) = Fx(t), \quad D_{out}^d(t) = L_d D_{in}^d(t) \quad (5.11)$$

Los elementos de  $J(x)$  toman valores dentro del conjunto  $\{0, \pm 1, \pm l_t(x), \pm l_g(x)\}$  donde  $l_t(x)$  y  $l_g(x)$  son los módulos del transformador y del girador para la clase de sistemas no lineales en este trabajo; estos módulos son dependientes de las variables  $p(t)$  y/o  $q(t)$  asociadas con

los elementos almacenadores  $I$  y/o  $C$  en causalidad derivativa, respectivamente.

Entonces, el modelo matemático considerando las relaciones constitutivas dadas por (5.11) está dado por,

$$z(t) = A^*(x)\dot{x}(t) + B^*(x)u(t) \quad (5.12)$$

donde

$$A^*(x) = J_{11}(x) + J_{12}(x)N(x)J_{21}(x) \quad (5.13)$$

$$B^*(x) = J_{13}(x) + J_{12}(x)N(x)J_{23}(x) \quad (5.14)$$

$$N(x) = [I - L_d J_{22}(x)]^{-1} L_d. \quad (5.15)$$

Además, suponiendo que  $A^*(x)$  es invertible, la respuesta en estado estacionario es definida por

$$z_{ss} = B^*(x)u_{ss}, \quad (5.16)$$

usando (5.11) se obtiene

$$x_{ss} = F^{-1}B^*(x)u_{ss}. \quad (5.17)$$

Para la mayoría de los sistemas no lineales (5.17) será un sistema de ecuaciones no lineales que dependen de las variables de estado. Para poder resolver (5.17) es necesario usar un método para encontrar las raíces del sistema.

Los métodos tales como la bisección y el de la posición falsa para encontrar las raíces de una ecuación no lineal  $f(x) = 0$  requiere tener la raíz del sistema entre dos estimaciones. Tales métodos son llamados *métodos cerrados*. Estos métodos siempre son convergentes ya que se basan en reducir el intervalo entre dos estimaciones hasta llegar a que la diferencia sea cero, entonces se obtendrá el valor de la raíz de la ecuación [Kaw, 2011].

### 5.3.1. El método iterativo de Newton-Raphson

En el método de Newton-Raphson la raíz de la ecuación no se encuentra encerrada dentro de dos valores estimados. De hecho, sólo se necesita un valor supuesto inicial para comenzar el proceso iterativo para encontrar la raíz de una ecuación [Kaw, 2011]. Por consiguiente, este método cae dentro de la categoría de los *métodos abiertos*. La convergencia en los métodos

abiertos no está garantizada, pero si el método converge, lo hace mucho más rápido que los métodos cerrados.

El método de Newton-Raphson está basado en el principio de que si la estimación inicial de la raíz de  $f(x) = 0$  está en  $x_i$ , entonces si se traza la tangente a la curva en  $f(x_i)$ , el punto  $x_{i+1}$  donde la tangente cruza el eje  $x$  será un estimado mejorado de la raíz. Usando la definición de la pendiente de una función en  $x = x_i$

$$f'(x_i) = \tan \theta = \frac{f(x_i) - 0}{x_i - x_{i+1}} \quad (5.18)$$

la cuál entrega

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad (5.19)$$

La ecuación (5.19) es conocida como la fórmula de Newton-Raphson para resolver ecuaciones no lineales de la forma  $f(x) = 0$ . Entonces, comenzando con un estimado inicial  $x_i$ , se puede encontrar el estimado siguiente  $x_{i+1}$ , por medio de la ecuación (5.19). Se puede repetir este proceso hasta encontrar el valor de la raíz dentro de un valor de tolerancia deseable [Kaw, 2011]. La extensión lógica del método de Newton-Raphson para resolver un sistema de ecuaciones no lineales, del tipo  $F(x) = 0$  (se cambia de  $f(x)$  a  $F(x)$  para distinguir entre una sola ecuación y un sistema de ecuaciones), con  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $F = (F_1, F_2, \dots, F_n)$ , es decir,  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , consiste en construir una sucesión de vectores mediante el siguiente proceso iterativo

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - F'(x^{(k)})^{-1} F(x^{(k)}) \quad (5.20)$$

donde  $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \in \mathbb{R}^n$  y  $F'(x^{(k)})$  es la matriz Jacobiana de  $F$ , esta matriz se construye mediante derivadas parciales [Plaza, 2013],

$$F'(x^{(k)}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1(x^{(k)})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1(x^{(k)})}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n(x^{(k)})}{\partial x_1} & \vdots & \frac{\partial F_n(x^{(k)})}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \quad (5.21)$$

En la siguiente sección se aplicará el método de Newton-Raphson como complemento para obtener el estado estacionario de un sistema no lineal representado en bond graph aplicandolo en dos ejemplos: la máquina síncrona y un aerogenerador con máquina de inducción.

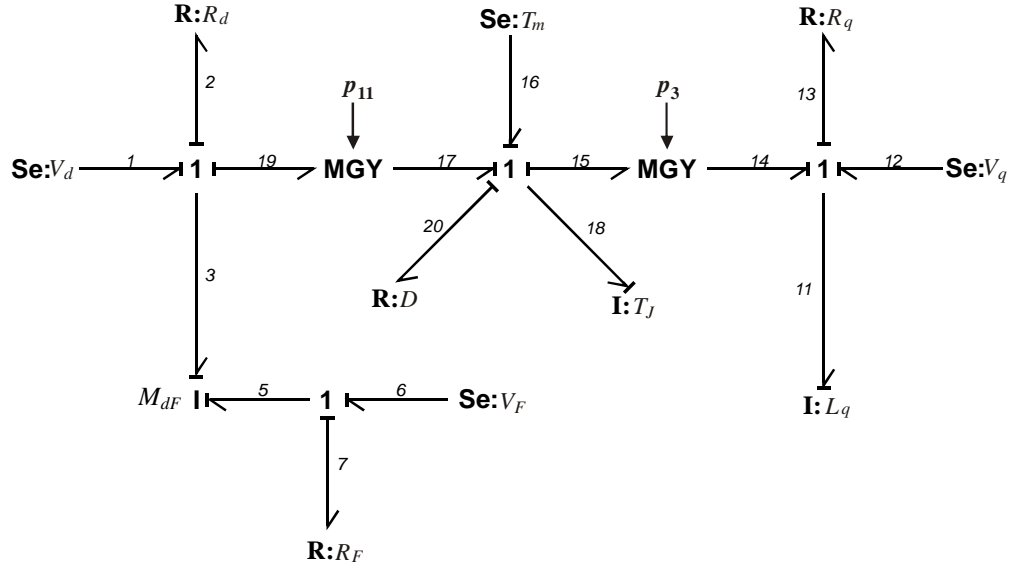


Figura 5.3: Un bond graph de la máquina síncrona con asignación de causalidad integral.

#### 5.4. Ejemplo 1: Obtención del estado estacionario de una máquina síncrona en bond graph

Ya se definió el modelo en bond graph de la máquina síncrona en el Ejemplo 1 de la sección de caso de estudio 1. De acuerdo con la Figura 3.3, un modelo en bond graph de la máquina síncrona en los ejes  $d$ - $q$  se muestra en la Figura 5.3 [Sahm, 1979], donde al igual que en los ejemplos anteriores, la máquina síncrona está conectada a un bus infinito y es necesario realizar una transformación de Park para pasar del dominio trifásico  $abc$  a un marco de referencia  $dq0$ .

Los vectores claves del bond graph en causalidad integral son

$$x = \begin{bmatrix} p_3 \\ p_5 \\ p_{11} \\ p_{18} \end{bmatrix}; \dot{x} = \begin{bmatrix} e_3 \\ e_5 \\ e_{11} \\ e_{18} \end{bmatrix}; D_{out} = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_7 \\ e_{13} \\ e_{20} \end{bmatrix}; z = \begin{bmatrix} f_3 \\ f_5 \\ f_{11} \\ f_{18} \end{bmatrix}; D_{in} = \begin{bmatrix} f_2 \\ f_7 \\ f_{13} \\ f_{20} \end{bmatrix}; u = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_6 \\ e_{16} \\ e_{12} \end{bmatrix}. \quad (5.22)$$

Las relaciones constitutivas son

$$L = \text{diag}\{R_d, R_F, R_q, D\}; \quad F^{-1} = \text{diag}\{M_{dF}, L_q, T_J\}, \quad (5.23)$$

donde

$$M_{dF} = \begin{bmatrix} L_d & M \\ M & L_F \end{bmatrix}, \quad (5.24)$$

la estructura unión,  $S(x)$  es

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} e_3 \\ e_5 \\ e_{11} \\ e_{18} \\ f_2 \\ f_7 \\ f_{13} \\ f_{20} \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{cccc|cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & -p_{11} & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ p_{11} & 0 & -p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ \hline \left[ \begin{array}{cccc|cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} f_3 \\ f_5 \\ f_{11} \\ f_{18} \\ e_2 \\ e_7 \\ e_{13} \\ e_{20} \\ e_1 \\ e_6 \\ e_{12} \\ e_{16} \end{array} \end{array}. \quad (5.25)$$

Por comparación de (5.25) con (5.4), notar que las submatrices  $S_{12}$ ,  $S_{21}$ ,  $S_{13}$ ,  $S_{22}$ , y  $S_{23}$  son matrices constantes, es decir, no dependen de  $x$ , y  $S_{11}(x)$  es una submatriz dependiente de  $x$ . Entonces, usando (5.5) a (5.9) y (5.23) a (5.25) se obtiene la representación en variables de estado

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{L_F R_d}{\Delta} & \frac{M R_d}{\Delta} & 0 & -\frac{p_{11}}{T_J} \\ \frac{M R_F}{\Delta} & -\frac{L_d R_F}{\Delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{R_q}{L_q} & \frac{p_3}{T_J} \\ \frac{L_F p_{11}}{\Delta} & -\frac{M p_{11}}{\Delta} & -\frac{p_3}{L_q} & -\frac{D}{T_J} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} u(t), \quad (5.26)$$

donde

$$\Delta = L_d L_F - M^2. \quad (5.27)$$

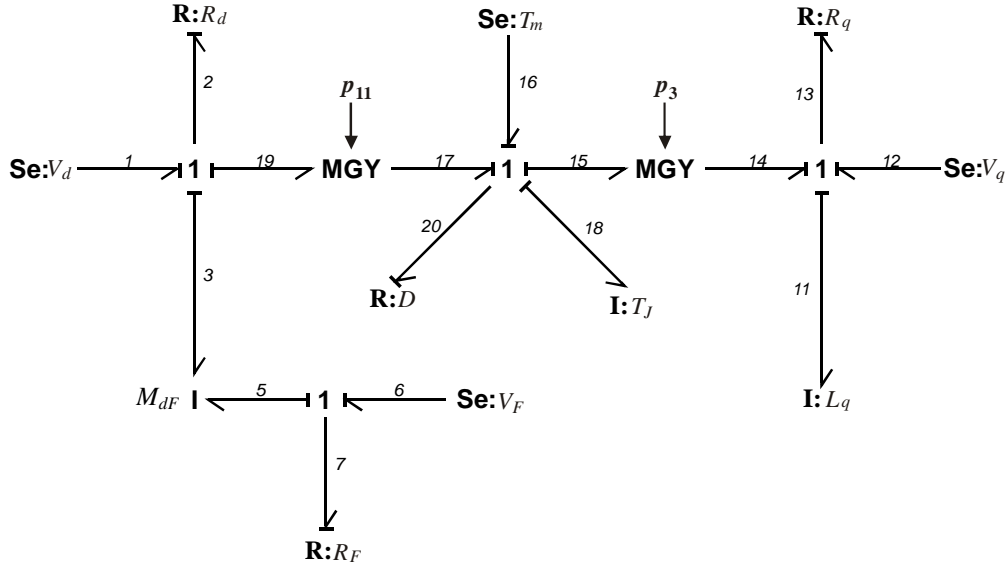


Figura 5.4: Un bond graph de la máquina síncrona con asignación de causalidad derivativa.

El modelo en bond graph correspondiente para obtener el estado estacionario se muestra en la Figura 5.4. Notar que los elementos almacenadores tienen una asignación de causalidad derivativa.

Los vectores claves para el BGD son

$$D_{in}^d = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_7 \\ e_{13} \\ e_{20} \end{bmatrix}; D_{out}^d = \begin{bmatrix} f_2 \\ f_7 \\ f_{13} \\ f_{20} \end{bmatrix}; u = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_6 \\ e_{16} \\ e_{12} \end{bmatrix}, \quad (5.28)$$

las relaciones constitutivas son

$$L_d = \text{diag} \left\{ \frac{1}{R_d}, \frac{1}{R_F}, \frac{1}{R_q}, \frac{1}{D} \right\}. \quad (5.29)$$

La estructura unión del BGD es

$$\begin{array}{c}
 \left[ \begin{array}{c} f_3 \\ f_5 \\ f_{11} \\ f_{18} \\ e_2 \\ e_7 \\ e_{13} \\ e_{20} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cccc|cccc|cccc}
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -p_{11} & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & p_{11} & 0 & -p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} e_3 \\ e_5 \\ e_{11} \\ e_{18} \\ f_2 \\ f_7 \\ f_{13} \\ f_{20} \\ e_1 \\ e_6 \\ e_{12} \\ e_{16} \end{array} \right]. \quad (5.30)
 \end{array}$$

Entonces, usando (5.14), (5.15) y (5.29) a (5.30) se puede obtener la matrix  $B^*(x)$  para poder obtener el estado estacionario de la máquina, entonces

$$B^*(x) = \begin{bmatrix} \frac{p_3^2 + DR_q}{\Psi(x)} & 0 & \frac{p_3 p_{11}}{\Psi(x)} & -\frac{R_q p_{11}}{\Psi(x)} \\ 0 & \frac{1}{R_F} & 0 & 0 \\ \frac{p_3 p_{11}}{\Psi(x)} & 0 & \frac{p_{11}^2 + DR_d}{\Psi(x)} & \frac{R_d p_3}{\Psi(x)} \\ \frac{R_q p_{11}}{\Psi(x)} & 0 & -\frac{R_d p_3}{\Psi(x)} & \frac{R_d R_q}{\Psi(x)} \end{bmatrix}, \quad (5.31)$$

donde

$$\Psi(x) = R_d p_3^2 + R_q p_{11}^2 + DR_d R_q. \quad (5.32)$$

Mediante la sustitución de (5.28), (5.31) y (5.32) en (5.17), se obtiene el sistema de estado estacionario

$$\left[ \begin{array}{c} p_3 \\ p_5 \\ p_{11} \\ p_{18} \end{array} \right]_{ss} = \left[ \begin{array}{c} \frac{M e_6}{R_F} + \frac{L_d [(p_3^2 + DR_q) e_1 + e_{12} p_3 p_{11} - R_q e_{16} p_{11}]}{R_d p_3^2 + R_q p_{11}^2 + DR_d R_q} \\ \frac{L_F e_6}{R_F} + \frac{M [(p_3^2 + DR_q) e_1 + e_{12} p_3 p_{11} - R_q e_{16} p_{11}]}{R_d p_3^2 + R_q p_{11}^2 + DR_d R_q} \\ \frac{L_q [(p_{11}^2 + DR_d) e_{12} + e_1 p_3 p_{11} + R_d e_{16} p_3]}{R_d p_3^2 + R_q p_{11}^2 + DR_d R_q} \\ \frac{T_J (R_q e_1 p_{11} - R_d e_{12} p_3 + R_d R_q e_{16})}{R_d p_3^2 + R_q p_{11}^2 + DR_d R_q} \end{array} \right]_{ss}. \quad (5.33)$$

Como (5.33) tiene dependencia de las variables  $p_3$  y  $p_{11}$ , esta ecuación todavía no es la solución, es necesario resolver el sistema de ecuaciones no lineales aplicando el método de

Newton-Raphson a (5.33). El primer paso del método es hacer  $F$  igual a cero con la finalidad de obtener  $F_1, F_2, \dots, F_n$ ,

$$F = \begin{bmatrix} F_1 = p_3 - \frac{Me_6}{R_F} - \frac{L_d[(p_3^2 + DR_q)e_1 + e_{12}p_3p_{11} - R_q e_{16}p_{11}]}{R_d p_3^2 + R_q p_{11}^2 + DR_d R_q} \\ F_5 = p_5 - \frac{L_F e_6}{R_F} - \frac{M[(p_3^2 + DR_q)e_1 + e_{12}p_3p_{11} - R_q e_{16}p_{11}]}{R_d p_3^2 + R_q p_{11}^2 + DR_d R_q} \\ F_{11} = p_{11} - \frac{L_q[(p_{11}^2 + DR_d)e_{12} + e_{11}p_3p_{11} + R_d e_{16}p_3]}{R_d p_3^2 + R_q p_{11}^2 + DR_d R_q} \\ F_{18} = p_{18} - \frac{T_J(R_q e_1 p_{11} - R_d e_{12} p_3 + R_d R_q e_{16})}{R_d p_3^2 + R_q p_{11}^2 + DR_d R_q} \end{bmatrix}. \quad (5.34)$$

En seguida, se debe encontrar  $F'(x^{(k)})$  con (5.21), es decir, la matrix Jacobiana de (5.33) resultando,

$$F'(x^{(k)}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_3(x)}{\partial p_3} & 0 & \frac{\partial F_3(x)}{\partial p_5} & 0 \\ \frac{\partial F_5(x)}{\partial p_3} & 1 & \frac{\partial F_5(x)}{\partial p_5} & 0 \\ \frac{\partial F_{11}(x)}{\partial p_3} & 0 & \frac{\partial F_{11}(x)}{\partial p_5} & 0 \\ \frac{\partial F_{18}(x)}{\partial p_3} & 0 & \frac{\partial F_{18}(x)}{\partial p_5} & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.35)$$

donde la primera columna es

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_3(x)}{\partial p_3} &= 1 - \frac{L_d[(2R_q[e_1 p_{11} + R_d e_{16}] - R_d e_{12} p_3)p_3]p_{11}}{\Gamma} \\ &\quad - \frac{L_d[R_q e_{12} p_{11}^2 + DR_d R_q e_{12}]p_{11}}{\Gamma}, \end{aligned} \quad (5.36)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_5(x)}{\partial p_3} &= -\frac{MR_d[2R_q e_{16} p_3 + D(R_q e_{12} - e_{12} p_3^2)]p_{11}}{\Gamma} \\ &\quad - \frac{MR_q[2e_1 p_3 p_{11}^2 + e_{12} p_{11}^3 - DR_d e_1 p_3]}{\Gamma}, \end{aligned} \quad (5.37)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{11}(x)}{\partial p_3} &= -\frac{L_q R_d [(-R_d e_{16} - e_1 p_{11})p_3^2 + (R_q e_{16} - 2e_{12} p_3)p_{11}^2]}{\Gamma} \\ &\quad - \frac{DL_q R_d [R_q e_1 p_{11} + 2R_d e_{12} p_3 + R_d R_q e_{16}]}{\Gamma}, \end{aligned} \quad (5.38)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{18}(x)}{\partial p_3} &= -\frac{T_J R_d [R_d e_{12} p_3^2 - R_q e_{12} p_{11}^2 - DR_d R_q e_{12}]}{\Gamma} \\ &\quad + \frac{2T_J R_d R_q [e_1 p_{11} + R_d e_{16}]p_3}{\Gamma}, \end{aligned} \quad (5.39)$$

la tercera columna

$$\frac{\partial F_3(x)}{\partial p_{11}} = -\frac{L_d R_q [-2e_1 p_3^2 - 2DR_q e_1 - e_{12} p_3 p_{11}] p_{11} + L_q R_d^2 e_{12} p_{11}^2}{\Gamma} - \frac{L_d R_d [e_{12} (p_3^2 + DR_q) p_3 - R_q (p_3^2 - DR_q) e_{16}]}{\Gamma}, \quad (5.40)$$

$$\frac{\partial F_5(x)}{\partial p_{11}} = -\frac{MR_q [R_q (-2De_1 - 2De_{12} p_3 p_{11} + e_{16} p_{11}) - 2e_1 p_3^2] p_{11}}{\Gamma} - \frac{MR_d [e_{12} p_3^3 + R_q (De_{12} p_3 - e_{16} p_3^2 - DR_q e_{16})]}{\Gamma}, \quad (5.41)$$

$$\frac{\partial F_{11}(x)}{\partial p_{11}} = 1 - \frac{L_q [2R_d e_{12} p_3^2 - R_q e_{12} p_3 p_{11} - 2R_d R_q e_{16} p_3] p_{11}}{\Gamma} - \frac{R_d e_1 [L_d p_3^2 + DL_q R_q] p_3}{\Gamma}, \quad (5.42)$$

$$\frac{\partial F_{18}(x)}{\partial p_{11}} = 1 - \frac{T_J [2R_d R_q e_{12} p_3 - R_q^2 (e_1 p_{11} + 2R_d e_{16})] p_{11}}{\Gamma} - \frac{T_J R_d R_q [e_1 p_3^2 + DR_q e_1]}{\Gamma} \quad (5.43)$$

$$\frac{\partial F_{18}(x)}{\partial p_{11}} = 1 - \frac{T_J [2R_d R_q e_{12} p_3 - R_q^2 (e_1 p_{11} + 2R_d e_{16})] p_{11}}{\Gamma} - \frac{T_J R_d R_q [e_1 p_3^2 + DR_q e_1]}{\Gamma}, \quad (5.44)$$

donde

$$\Gamma = (R_d p_3^2 + R_q p_{11}^2 + DR_d R_q)^2. \quad (5.45)$$

Finalmente, sustituyendo de (5.35) a (5.45) dentro de (5.33) se puede resolver el sistema (5.33) y encontrar los valores en estado estacionario de las variables.

#### 5.4.1. Comparación de los resultados obtenidos

Con el objetivo de verificar el estado estacionario de una máquina síncrona, en las Figuras 5.5 a 5.8 se muestra el comportamiento de las variables, donde los parámetros numéricos [Anderson, 2003] son los que se muestran en la Tabla 5.1.

Tabla 5.1: Parámetros para la simulación de la máquina síncrona.

Elemento	Valor
$T_J$	2.37 N-s <sup>2</sup> /m
$R_d$	0.1 $\Omega$
$R_q$	0.1 $\Omega$
$D$	3 N-s/m
$L_d$	1.7 H
$L_q$	1.64 H
$L_F$	1.65 H
$M$	1.55 H
$R_F$	11 $\Omega$
$V_d = e_1$	0.105 V
$V_F = e_6$	30 V
$V_q = e_{12}$	165.27 V
$T_m = e_{16}$	500 N

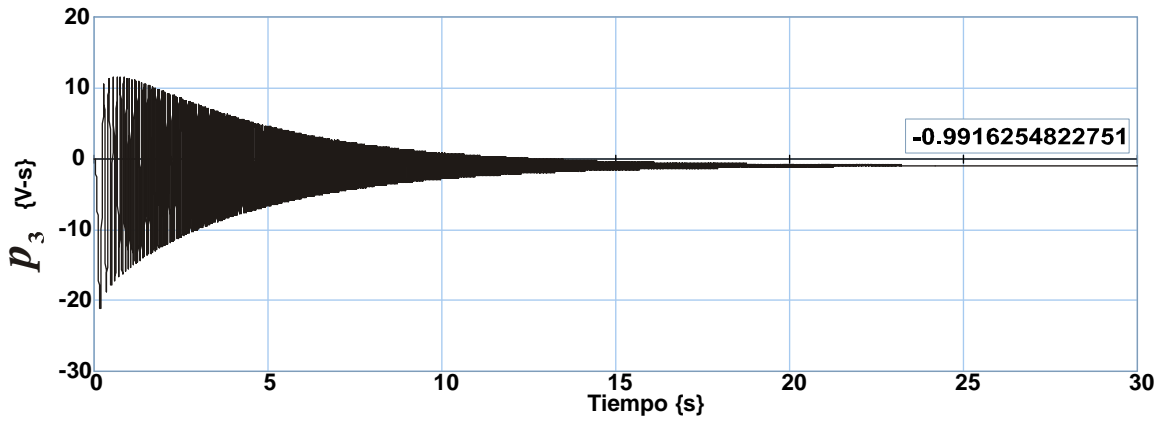


Figura 5.5: Enlace de flujo  $p_3$  en  $L_d$  y su valor en estado estacionario.

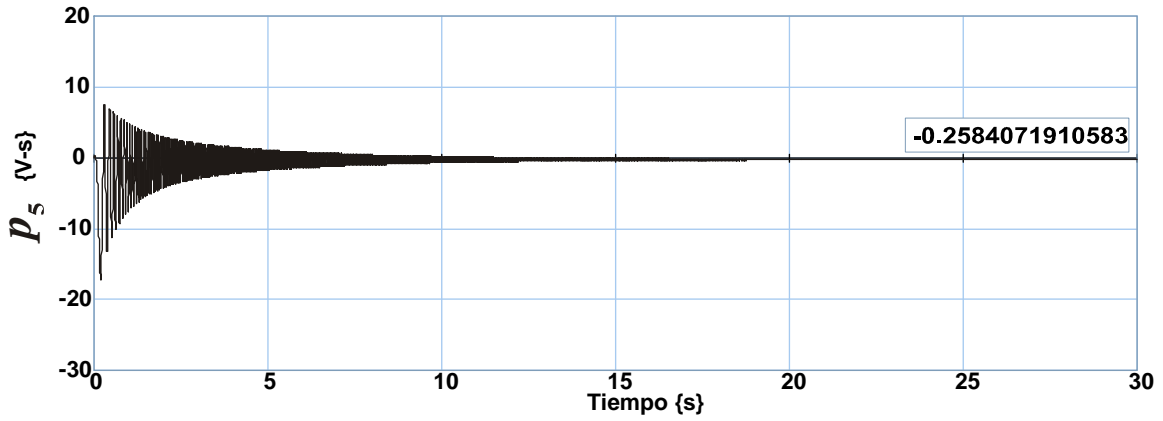


Figura 5.6: Enlace de flujo  $p_5$  en  $L_F$  y su valor en estado estacionario.

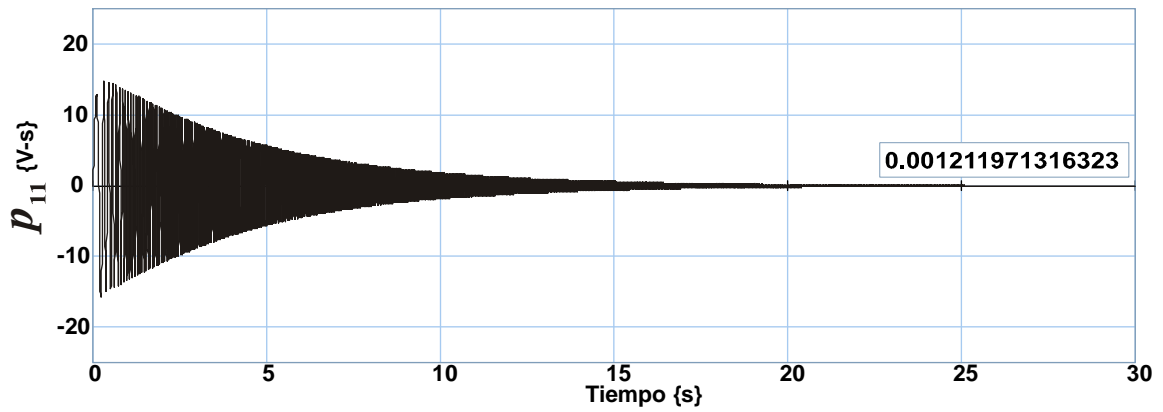


Figura 5.7: Enlace de flujo  $p_{11}$  en  $L_q$  y su valor en estado estacionario.

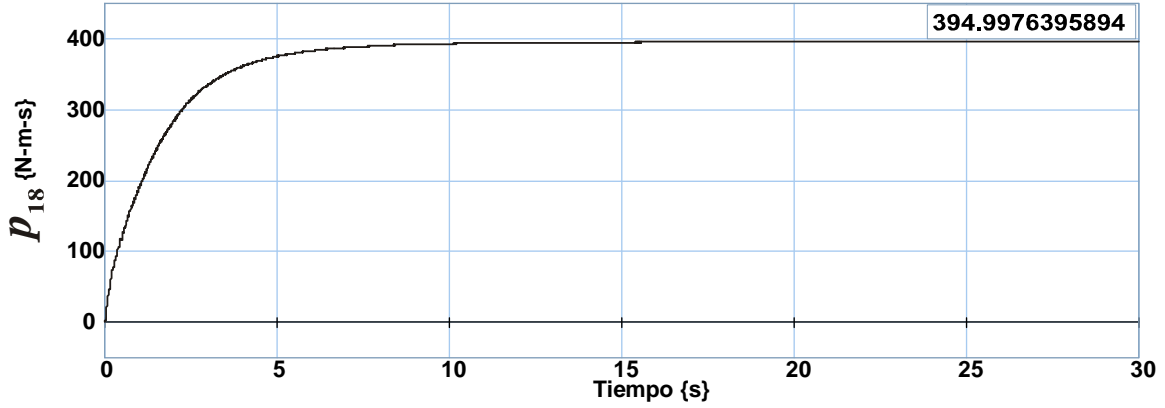


Figura 5.8: Momento angular  $p_{18}$  en  $T_J$  y su valor en estado estacionario.

Sustituyendo los parámetros de la Tabla 5.1, y usando el método de Newton-Raphson en (5.33), después de cinco iteraciones, se obtiene

$$\begin{bmatrix} p_3 \\ p_5 \\ p_{11} \\ p_{18} \end{bmatrix}_{ssNR} = \begin{bmatrix} -0,9916254822747 \text{ V-s} \\ -0,2584071910579 \text{ V-s} \\ 0,0012119713164 \text{ V-s} \\ 394,9976395895742 \text{ N-m-s} \end{bmatrix}_{ssNR} . \quad (5.46)$$

Si se comparan los resultados del estado estacionario obtenidos mediante el método de Newton-Raphson en (5.46) con los estados estables que se ven en las Figura 5.5 a la 5.8, los errores relativos de las variables de estado son

$$\begin{bmatrix} \text{Error relativo de } p_3 \\ \text{Error relativo de } p_5 \\ \text{Error relativo de } p_{11} \\ \text{Error relativo de } p_{18} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0000008 \% \\ -0,00000036 \% \\ 0,0000079 \% \\ -0,0000079 \% \end{bmatrix} \quad (5.47)$$

Se puede observar que la diferencia del valor de las variables del modelo de la máquina síncrona en estado estacionario y el valor obtenido utilizando el BGD es prácticamente nulo.

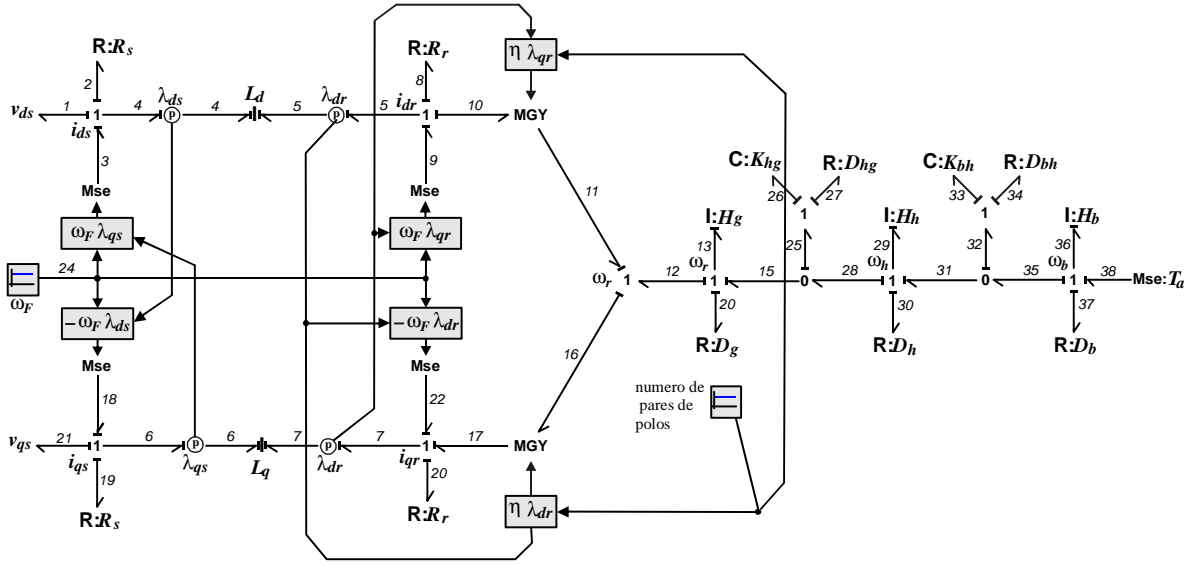


Figura 5.9: Bond graph con causalidad integral asignada de la turbina de viento.

## 5.5. Ejemplo 2: Obtención del estado estacionario de un aerogenerador con máquina de inducción con bond graph

Anteriormente, en un ejemplo se definió el modelo en coordenadas  $dq0$  de la máquina de inducción o asíncrona y el modelo mecánico de tres masas de la turbina de viento (Figuras 3.18 y 3.25 respectivamente). De acuerdo con la Figura 3.18, se describe en la Figura 5.9 el bond graph de la máquina de inducción en los ejes  $dq0$  [Junco, 1999, Borutzky, 2011] agregando el modelo mecánico de la turbina. En la Figura 5.9 se puede ver la resistencia de estator ( $R_s$ ) y la resistencia del rotor referida al estator ( $R_r$ ), también se presentan los efectos debidos a la inductancia mutua en ambos ejes  $d$  y  $q$  mediante los campos-I,  $L_d$  y  $L_q$ , respectivamente. Este bond graph corresponde al sistema físico idealizado en la Figura 3.18, donde la letra  $p$  dentro de un círculo representa a un detector de estados, en este caso, los detectores sensan los enlaces de flujo dentro de los devanados.

Los vectores clave y las relaciones constitutivas para el bond graph de la Figura 5.9 son:

$$\begin{aligned}
 u &= \begin{bmatrix} e_1 & e_{21} & e_{38} & f_{24} \end{bmatrix}^T; \quad L = \text{Diag}\{R_s, R_r, R_s, R_r, D_g, D_{hg}, D_h, D_{bh}, D_b\}, \\
 D_{out} &= \begin{bmatrix} e_2 & e_8 & e_{19} & e_{20} & e_{23} & e_{27} & e_{30} & e_{34} & e_{37} \end{bmatrix}^T; \\
 D_{in} &= \begin{bmatrix} f_2 & f_8 & f_{19} & f_{20} & f_{23} & f_{27} & f_{30} & f_{34} & f_{37} \end{bmatrix}^T, \quad (5.48)
 \end{aligned}$$

para las dinámicas lentas son

$$\begin{aligned}
 x_1 = \begin{bmatrix} p_{13} \\ q_{26} \\ p_{29} \\ q_{33} \\ p_{36} \end{bmatrix}; \quad \dot{x}_1 = \begin{bmatrix} e_{13} \\ f_{26} \\ e_{29} \\ f_{33} \\ e_{36} \end{bmatrix}; \quad z_1 = \begin{bmatrix} f_{13} \\ e_{26} \\ f_{29} \\ e_{33} \\ f_{36} \end{bmatrix}; \quad F_2^{-1} = \begin{bmatrix} L_s & L_m & 0 & 0 \\ L_m & L_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_s & L_m \\ 0 & 0 & L_m & L_r \end{bmatrix}, \quad (5.49)
 \end{aligned}$$

y para las dinámicas rápidas se tiene

$$\begin{aligned}
 x_2 = \begin{bmatrix} p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_7 \end{bmatrix}; \quad \dot{x}_2 = \begin{bmatrix} e_4 \\ e_5 \\ e_6 \\ e_7 \end{bmatrix}; \quad z_2 = \begin{bmatrix} f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \end{bmatrix}; \quad F_1^{-1} = \text{Diag}\{H_g, K_{hg}, H_h, K_{bh}, H_b\}. \quad (5.50)
 \end{aligned}$$

Para las fuentes moduladas se tiene que

$$\begin{aligned}
 e_3 &= \omega_F \lambda_{qs} = f_{24} p_6; & e_{18} &= -\omega_F \lambda_{ds} = -f_{24} p_4; \\
 e_9 &= \omega_F \lambda_{qr} = f_{24} p_7; & e_{22} &= -\omega_F \lambda_{dr} = -f_{24} p_5, \quad (5.51)
 \end{aligned}$$

y para los giradores modulados

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} e_{10} \\ f_{10} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & \eta \lambda_{qr} \\ \frac{1}{\eta \lambda_{qr}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{11} \\ f_{11} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} e_{10} \\ f_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \eta p_7 \\ \frac{1}{\eta p_7} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{11} \\ f_{11} \end{bmatrix}; \\
 \begin{bmatrix} e_{16} \\ f_{16} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & \eta \lambda_{dr} \\ \frac{1}{\eta \lambda_{dr}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{17} \\ f_{17} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} e_{16} \\ f_{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \eta p_5 \\ \frac{1}{\eta p_5} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{17} \\ f_{17} \end{bmatrix}. \quad (5.52)
 \end{aligned}$$



para  $A_{12}(x)$  se obtiene

$$A_{12}(x) = \frac{\eta}{\Delta} \begin{bmatrix} -L_m p_7 & L_s p_7 & L_m p_5 & -L_s p_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.55)$$

donde

$$\Delta = L_r L_s - L_m^2. \quad (5.56)$$

Para la matriz  $B_1$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.57)$$

La matriz  $A_{21}(x)$  queda

$$A_{21}(x) = \frac{\eta}{H_g} \begin{bmatrix} -L_m p_7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -L_r p_7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ L_m p_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ L_r p_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.58)$$

$A_{22}$  queda

$$A_{22} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} L_m^2 R_r - L_r L_s R_s & L_m L_s R_s - L_m L_s R_r & 0 & 0 \\ L_m L_r R_r - L_m L_r R_s & L_m^2 R_s - L_r L_s R_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_m^2 R_r - L_r L_s R_s & L_m L_s R_s - L_m L_s R_r \\ 0 & 0 & L_m L_r R_r - L_m L_r R_s & L_m^2 R_s - L_r L_s R_r \end{bmatrix}, \quad (5.59)$$

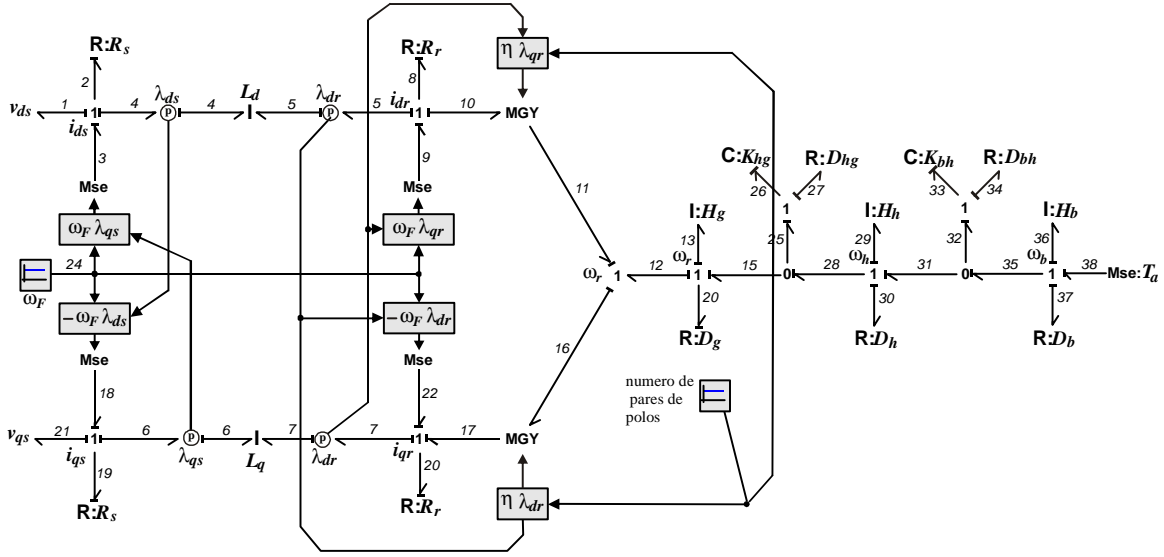


Figura 5.10: Bond graph con causalidad derivativa asignada de la turbina de viento.

Finalmente, para  $B_2(x)$  se tiene

$$B_2(x) = \begin{bmatrix} -L_s & 0 & 0 & p_7 L_m + p_6 L_s \\ -L_m & 0 & 0 & p_6 L_m + p_7 L_r \\ 0 & -L_s & 0 & -p_5 L_m - p_4 L_s \\ 0 & -L_m & 0 & -p_4 L_m - p_5 L_r \end{bmatrix}. \quad (5.60)$$

Ahora, cambiando la causalidad de todos los elementos almacenadores de energía se obtiene el Bond Graph en causalidad Derivativa (BGD) del modelo de la turbina de viento que se muestra en la Figura 5.10.

Los vectores claves para el BGD son,

$$\begin{aligned} D_{out}^d &= \left[ e_2 \ e_8 \ e_{19} \ e_{20} \ e_{23} \ f_{27} \ f_{30} \ f_{34} \ f_{37} \right]^T; \\ D_{in}^d &= \left[ f_2 \ f_8 \ f_{19} \ f_{20} \ f_{23} \ e_{27} \ e_{30} \ e_{34} \ e_{37} \right]^T; \\ u &= \left[ e_1 \ e_{21} \ e_{38} \ f_{24} \right]^T. \end{aligned} \quad (5.61)$$



con (5.64) se encuentra  $B^*(x)$  sustituyendo en (5.14), entonces

$$B^*(x) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_s} & 0 & 0 & \frac{p_6}{R_s} \\ 0 & 0 & -\frac{\eta p_7}{\Psi(x)} & \frac{D_T p_7}{\Psi(x)} \\ 0 & -\frac{1}{R_s} & 0 & -\frac{p_4}{R_s} \\ 0 & 0 & -\frac{\eta p_5}{\Psi(x)} & -\frac{D_T p_5}{\Psi(x)} \\ 0 & 0 & \frac{R_r}{\Psi(x)} & \frac{\eta(p_5^2 + p_7^2)}{\Psi(x)} \\ 0 & 0 & \frac{p_{57} + R_r D_g}{\Psi(x)} & -\frac{\eta(p_5^2 + p_7^2)(D_b + D_h)}{\Psi(x)} \\ 0 & 0 & \frac{R_r}{\Psi(x)} & \frac{\eta(p_5^2 + p_7^2)}{\Psi(x)} \\ 0 & 0 & \frac{p_{57} + R_r(D_g + D_h)}{\Psi(x)} & -\frac{\eta(p_5^2 + p_7^2)D_b}{\Psi(x)} \\ 0 & 0 & \frac{R_r}{\Psi(x)} & \frac{\eta(p_5^2 + p_7^2)}{\Psi(x)} \end{bmatrix}, \quad (5.65)$$

donde

$$\begin{aligned} D_T &= D_b + D_g + D_h, \\ p_{57} &= \eta^2 (p_5^2 + p_7^2), \\ \Psi(x) &= p_{57} + R_r D_T. \end{aligned} \quad (5.66)$$

Mediante la sustitución de (5.61), (5.65) y (5.66) en (5.17), se obtiene el sistema en estado estacionario

$$\begin{bmatrix} p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_7 \\ p_{13} \\ q_{26} \\ p_{29} \\ q_{33} \\ p_{36} \end{bmatrix}_{ss} = \begin{bmatrix} f_{24} \left[ \frac{L_s}{R_s} p_6 + \frac{L_m D_T}{\Psi(x)} p_7 - \frac{L_s}{R_s} e_1 - \frac{\eta L_m}{\Psi(x)} e_{38} p_7 \right] \\ f_{24} \left[ \frac{L_m}{R_s} p_6 + \frac{L_r D_T}{\Psi(x)} p_7 - \frac{L_m}{R_s} e_1 - \frac{\eta L_r}{\Psi(x)} e_{38} p_7 \right] \\ \frac{\eta L_m}{\Psi(x)} e_{38} p_5 - \frac{L_s}{R_s} e_{21} - f_{24} \left[ \frac{L_s}{R_s} p_4 + \frac{L_m D_T}{\Psi(x)} p_5 \right] \\ \frac{\eta L_r}{\Psi(x)} e_{38} p_5 - \frac{L_m}{R_s} e_{21} - f_{24} \left[ \frac{L_m}{R_s} p_4 + \frac{L_r D_T}{\Psi(x)} p_5 \right] \\ \frac{H_g R_r e_{38} + \eta H_g (p_5^2 + p_7^2) f_{24}}{\Psi(x)} \\ \frac{K_{hg} (p_{57} + R_r D_g) e_{38} - \eta K_{hg} (p_5^2 + p_7^2) (D_b + D_h) f_{24}}{\Psi(x)} \\ \frac{H_h R_r e_{38} + \eta H_h (p_5^2 + p_7^2) f_{24}}{\Psi(x)} \\ \frac{K_{bh} [p_{57} + R_r (D_g + D_h)] e_{38} - \eta K_{bh} D_b (p_5^2 + p_7^2) f_{24}}{\Psi(x)} \\ \frac{H_b R_r e_{38} + \eta H_b (p_5^2 + p_7^2) f_{24}}{\Psi(x)} \end{bmatrix}_{ss}. \quad (5.67)$$

Ahora, sustituyendo los valores numéricos de la máquina de inducción y los valores de la

Tabla 5.2: Parámetros para la simulación del aerogenerador.

Elemento	Valor	Elemento	Valor
$H_g$	0.089 N-m-s <sup>2</sup>	$R_s$	0.435 $\Omega$
$H_h$	0.03 N-m-s <sup>2</sup>	$R_r$	0.816 $\Omega$
$H_b$	0.05 N-m-s <sup>2</sup>	$L_s$	0.0713 H
$K_{bh}$	0.001 N-m/rad	$L_r$	0.0713 H
$K_{hg}$	0.001 N-m/rad	$L_m$	0.0693 H
$D_g$	0.1 N-m-s	$\eta$	2 pares
$D_h$	0.3 N-m-s	$e_1$	0 V
$D_b$	0.4 N-m-s	$e_{21}$	269.412 V
$D_{bh}$	0.4 N-m-s	$e_{38}$	100 N
$D_{hg}$	0.3 N-m-s	$f_{24}$	377 rad/s

parte mecánica del aerogenerador que se dan en la Tabla 5.2, (5.67) se convierte en

$$\begin{bmatrix} p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_7 \\ p_{13} \\ q_{26} \\ p_{29} \\ q_{33} \\ p_{36} \end{bmatrix}_{ss} = \begin{bmatrix} 61,793p_6 + \frac{7,04p_7}{4p_5^2+4p_7^2+0,6528} \\ 60,06p_6 + \frac{7,2441p_7}{4p_5^2+4p_7^2+0,6528} \\ -61,793p_4 - \frac{7,0409p_5}{4p_5^2+4p_7^2+0,6528} - 44,159 \\ -60,06p_4 - \frac{7,2441p_5}{4p_5^2+4p_7^2+0,6528} - 42,92 \\ \frac{67,106(p_5^2+p_7^2)+7,2624}{4p_5^2+4p_7^2+0,6528} \\ -\frac{0,1278(p_5^2+p_7^2)-0,00816}{4p_5^2+4p_7^2+0,6528} \\ \frac{22,62(p_5^2+p_7^2)+2,448}{4p_5^2+4p_7^2+0,6528} \\ \frac{0,0984(p_5^2+p_7^2)+0,03264}{4p_5^2+4p_7^2+0,6528} \\ \frac{37,7(p_5^2+p_7^2)+4,08}{4p_5^2+4p_7^2+0,6528} \end{bmatrix}_{ss} \quad (5.68)$$

Como (5.68) tiene dependencia de las variables  $p_4$ ,  $p_5$ ,  $p_6$  y  $p_7$ , esta ecuación todavía no es la solución, en necesario resolver el sistema de ecuaciones no lineales aplicando el método de Newton-Raphson a (5.68).

El primer paso del método es hacer  $F$  igual a cero con la finalidad de obtener  $F_1, F_2, \dots, F_n$ ,

$$F(x) = \begin{bmatrix} F_4 = p_4 - 61,793p_6 - \frac{7,04p_7}{4p_5^2+4p_7^2+0,6528} \\ F_5 = p_5 - 60,06p_6 - \frac{7,2441p_7}{4p_5^2+4p_7^2+0,6528} \\ F_6 = p_6 + 61,793p_4 + \frac{7,0409p_5}{4p_5^2+4p_7^2+0,6528} + 44,159 \\ F_7 = p_7 + 60,06p_4 + \frac{7,2441p_5}{4p_5^2+4p_7^2+0,6528} + 42,92 \\ F_{13} = p_{13} - \frac{67,106(p_5^2+p_7^2)+7,2624}{4p_5^2+4p_7^2+0,6528} \\ F_{26} = q_{26} + \frac{0,1278(p_5^2+p_7^2)-0,00816}{4p_5^2+4p_7^2+0,6528} \\ F_{29} = p_{29} - \frac{22,62(p_5^2+p_7^2)+2,448}{4p_5^2+4p_7^2+0,6528} \\ F_{33} = q_{33} - \frac{0,0984(p_5^2+p_7^2)+0,03264}{4p_5^2+4p_7^2+0,6528} \\ F_{36} = p_{36} - \frac{37,7(p_5^2+p_7^2)+4,08}{4p_5^2+4p_7^2+0,6528} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.69)$$

En seguida, se debe encontrar  $F'(x^{(k)})$  con (5.21), es decir, la matrix Jacobiana de (5.68) resultando,

$$F'(x^{(k)}) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\partial F_4(x)}{\partial p_5} & -61,793 & \frac{\partial F_4(x)}{\partial p_7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial F_5(x)}{\partial p_5} & -60,06 & \frac{\partial F_5(x)}{\partial p_7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 61,793 & \frac{\partial F_6(x)}{\partial p_5} & 1 & \frac{\partial F_6(x)}{\partial p_7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 60,06 & \frac{\partial F_7(x)}{\partial p_5} & 0 & \frac{\partial F_7(x)}{\partial p_7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial F_{13}(x)}{\partial p_5} & 0 & \frac{\partial F_{13}(x)}{\partial p_7} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial F_{26}(x)}{\partial p_5} & 0 & \frac{\partial F_{26}(x)}{\partial p_7} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial F_{29}(x)}{\partial p_5} & 0 & \frac{\partial F_{29}(x)}{\partial p_7} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial F_{33}(x)}{\partial p_5} & 0 & \frac{\partial F_{33}(x)}{\partial p_7} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 - 61,793 & \frac{\partial F_{36}(x)}{\partial p_5} & 0 & \frac{\partial F_{36}(x)}{\partial p_7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.70)$$

donde la segunda columna es

$$\frac{\partial F_4(x)}{\partial p_5} = \frac{56,3272p_5p_7}{[4(p_5^2 + p_7^2) + 0,6528]^2}, \quad (5.71)$$

$$\frac{\partial F_5(x)}{\partial p_5} = 1 + \frac{57,9528p_5p_7}{[4(p_5^2 + p_7^2) + 0,6528]^2}, \quad (5.72)$$

$$\frac{\partial F_6(x)}{\partial p_5} = \frac{28,1636(p_7^2 - p_5^2) + 4,5963}{[4(p_5^2 + p_7^2) + 0,6528]^2}, \quad (5.73)$$

$$\frac{\partial F_7(x)}{\partial p_5} = \frac{28,9764(p_7^2 - p_5^2) + 4,7289}{[4(p_5^2 + p_7^2) + 0,6528]^2}, \quad (5.74)$$

$$\frac{\partial F_{13}(x)}{\partial p_5} = -\frac{29,5144p_5}{[4(p_5^2 + p_7^2) + 0,6528]^2}, \quad (5.75)$$

$$\frac{\partial F_{26}(x)}{\partial p_5} = \frac{0,23208p_5}{[4(p_5^2 + p_7^2) + 0,6528]^2}, \quad (5.76)$$

$$\frac{\partial F_{29}(x)}{\partial p_5} = -\frac{9,9486p_5}{[4(p_5^2 + p_7^2) + 0,6528]^2}, \quad (5.77)$$

$$\frac{\partial F_{33}(x)}{\partial p_5} = \frac{0,13265p_5}{[4(p_5^2 + p_7^2) + 0,6528]^2}, \quad (5.78)$$

$$\frac{\partial F_{36}(x)}{\partial p_5} = -\frac{16,5811p_5}{[4(p_5^2 + p_7^2) + 0,6528]^2}, \quad (5.79)$$

la cuarta columna

$$\frac{\partial F_4(x)}{\partial p_7} = \frac{28,1636(p_7^2 - p_5^2) - 4,5963}{[4(p_5^2 + p_7^2) + 0,6528]^2}, \quad (5.80)$$

$$\frac{\partial F_5(x)}{\partial p_7} = \frac{28,9764(p_7^2 - p_5^2) - 4,7289}{[4(p_5^2 + p_7^2) + 0,6528]^2}, \quad (5.81)$$

$$\frac{\partial F_6(x)}{\partial p_7} = -\frac{56,3272p_5p_7}{[4(p_5^2 + p_7^2) + 0,6528]^2}, \quad (5.82)$$

$$\frac{\partial F_7(x)}{\partial p_7} = 1 - \frac{57,9528p_5p_7}{[4(p_5^2 + p_7^2) + 0,6528]^2}, \quad (5.83)$$

$$\frac{\partial F_{13}(x)}{\partial p_7} = -\frac{29,5144p_7}{[4(p_5^2 + p_7^2) + 0,6528]^2}, \quad (5.84)$$

$$\frac{\partial F_{26}(x)}{\partial p_7} = \frac{0,23208p_7}{[4(p_5^2 + p_7^2) + 0,6528]^2}, \quad (5.85)$$

$$\frac{\partial F_{29}(x)}{\partial p_7} = -\frac{9,9486p_7}{[4(p_5^2 + p_7^2) + 0,6528]^2}, \quad (5.86)$$

$$\frac{\partial F_{33}(x)}{\partial p_7} = \frac{0,13265p_7}{[4(p_5^2 + p_7^2) + 0,6528]^2}, \quad (5.87)$$

$$\frac{\partial F_{36}(x)}{\partial p_7} = -\frac{16,5811p_7}{[4(p_5^2 + p_7^2) + 0,6528]^2}, \quad (5.88)$$

Finalmente, sustituyendo de (5.70) a (5.88) dentro de (5.68) se puede resolver el sistema (5.68) y determinar los valores en estado estacionario de las variables de estado.

Antes de realizar la simulación, se verifica que el sistema del aerogenerador tenga estabilidad interna, es decir, se debe cumplir la condición dada en (3.12), partiendo de

$$g = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_2u. \quad (5.89)$$

Se sustituyen en (5.89) los valores encontrados  $A_{21}(x)$ ,  $A_{22}$  y  $B_2(x)$  (ecuaciones (5.58), (5.59) y (5.60) respectivamente), y los vectores  $x_1$ ,  $x_2$  y  $u$ , así como los parámetros de la máquina de inducción y de la modelo de tres masas de la turbina de viento, y realizando derivadas parciales con respecto a las variables rápidas ( $p_4$ ,  $p_5$ ,  $p_6$  y  $p_7$ ), se obtiene

$$\frac{\partial g}{\partial x_2} = \begin{bmatrix} 6,0719 & -6,6947 & 26,88 & 26,126 - 1,5573p_{13} \\ 6,6947 & -7,3229 & 26,126 & 26,88 - 1,6022p_{13} \\ -26,88 & 1,5573p_{13} - 26,126 & 6,0719 & -6,6947 \\ -26,126 & 1,6022p_{13} - 26,88 & 6,6947 & -7,3229 \end{bmatrix}. \quad (5.90)$$

Como la variable lenta se encuentra muy cerca de su valor inicial, se considera  $p_{13} = 0$ ,

$$\left. \frac{\partial g}{\partial x_2} \right|_{p_{13}=0} = \begin{bmatrix} 6,0719 & -6,6947 & 26,88 & 26,126 \\ 6,6947 & -7,3229 & 26,126 & 26,88 \\ -26,88 & -26,126 & 6,0719 & -6,6947 \\ -26,126 & -26,88 & 6,6947 & -7,3229 \end{bmatrix}. \quad (5.91)$$

Se encuentran los valores propios de (5.91), se obtiene

$$\lambda = \begin{bmatrix} -0,6255 - 53,005i \\ -0,6255 + 53,005i \\ -0,6255 - 0,75469i \\ -0,6255 + 0,75469i \end{bmatrix} \quad (5.92)$$

Por lo que, se cumple la condición de  $\text{Re } \lambda \left\{ \frac{\partial g}{\partial x_2} \right\} \leq -c < 0$ , es decir todos los eigenvalores tienen parte real negativa, por lo que el sistema tiene estabilidad interna.

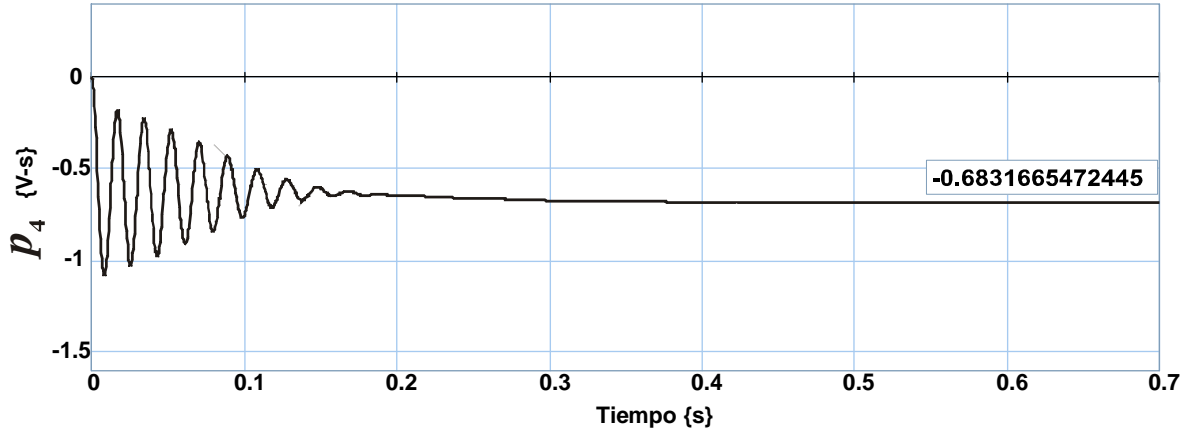


Figura 5.11: Enlace de flujo  $p_4$  ( $\lambda_{ds}$ ) y su valor en estado estacionario.

### 5.5.1. Comparación de los resultados obtenidos

Con el objetivo de verificar el estado estacionario del modelo del aerogenerador, en las Figuras 5.11 a 5.19 se muestra las dinámicas de las variables de estado.

Utilizando el método de Newton-Raphson en (5.68), después de seis iteraciones, se obtiene

$$\begin{bmatrix} p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_7 \\ p_{13} \\ q_{26} \\ p_{29} \\ q_{33} \\ p_{36} \end{bmatrix}_{ssNR} = \begin{bmatrix} -0,683199896646768 \text{ V-s} \\ -0,647934976303497 \text{ V-s} \\ -0,015625579862299 \text{ V-s} \\ 0,094984893014545 \text{ V-s} \\ 15,218629097913546 \text{ N-m-s} \\ -0,019697082450892 \text{ rad} \\ 5,129874976370128 \text{ N-m-s} \\ 0,031601666969469 \text{ rad} \\ 8,549791627896651 \text{ N-m-s} \end{bmatrix}_{ssNR} \quad (5.93)$$

Si se comparan los resultados del estado estacionario obtenidos mediante el método de Newton-Raphson en (5.93) con las dinámicas que se ilustran en las Figuras 5.11 a la 5.19, los

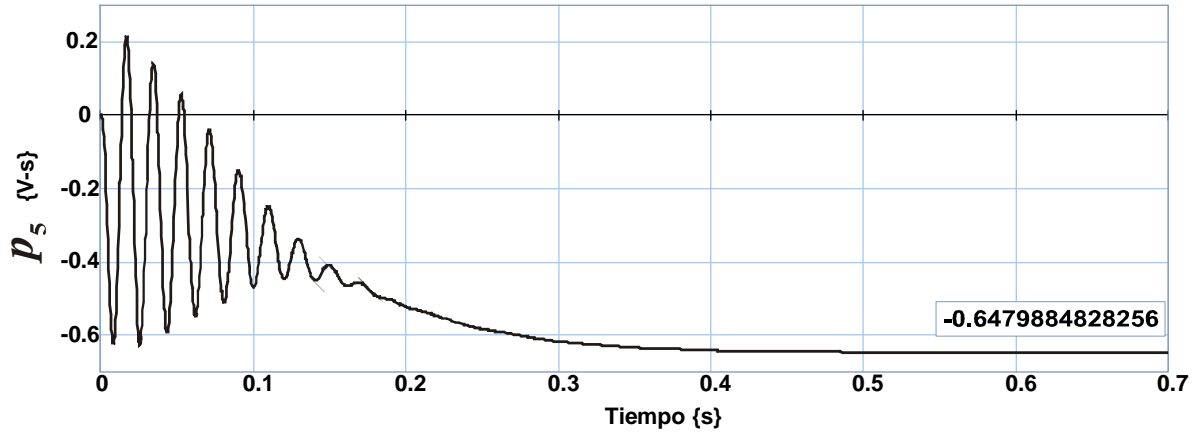


Figura 5.12: Enlace de flujo  $p_5$  ( $\lambda_{dr}$ ) y su valor en estado estacionario.

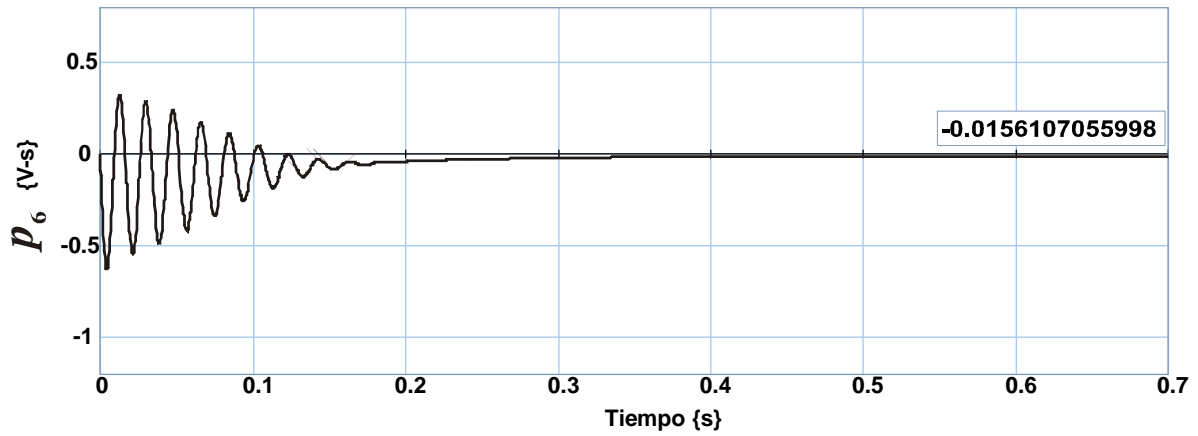


Figura 5.13: Enlace de flujo  $p_6$  ( $\lambda_{qs}$ ) y su valor en estado estacionario.

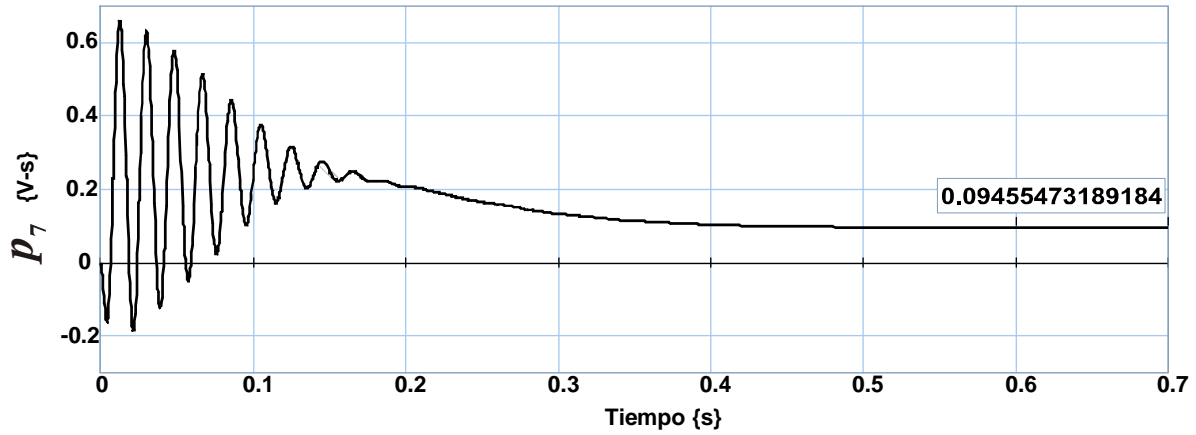


Figura 5.14: Enlace de flujo  $p_7$  ( $\lambda_{dr}$ ) y su valor en estado estacionario.

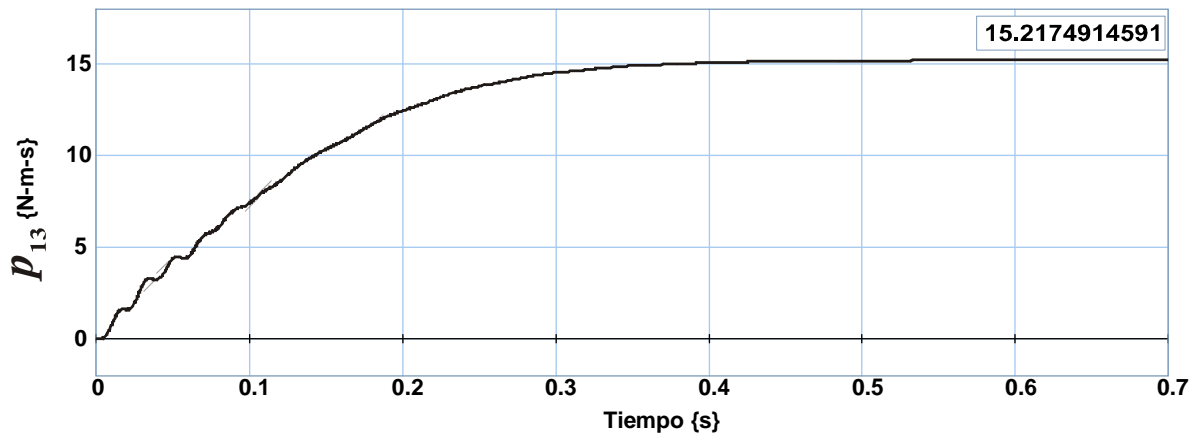


Figura 5.15: Momento de torsión angular  $p_{13}$  en la flecha del generador y su valor en estado estacionario.

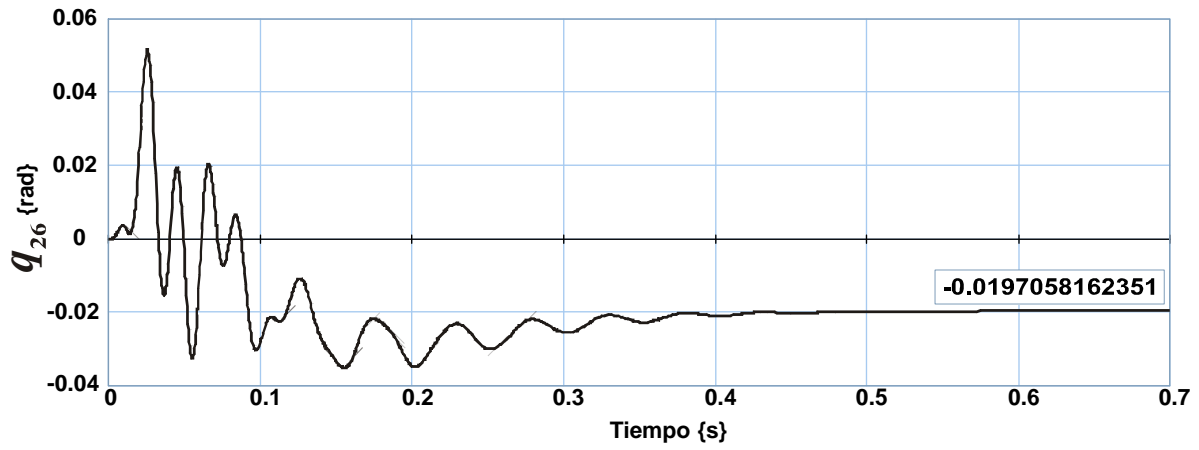


Figura 5.16: Ángulo de torsión  $q_{26}$  entre la flecha del generador y el buje, y su valor en estado estacionario.

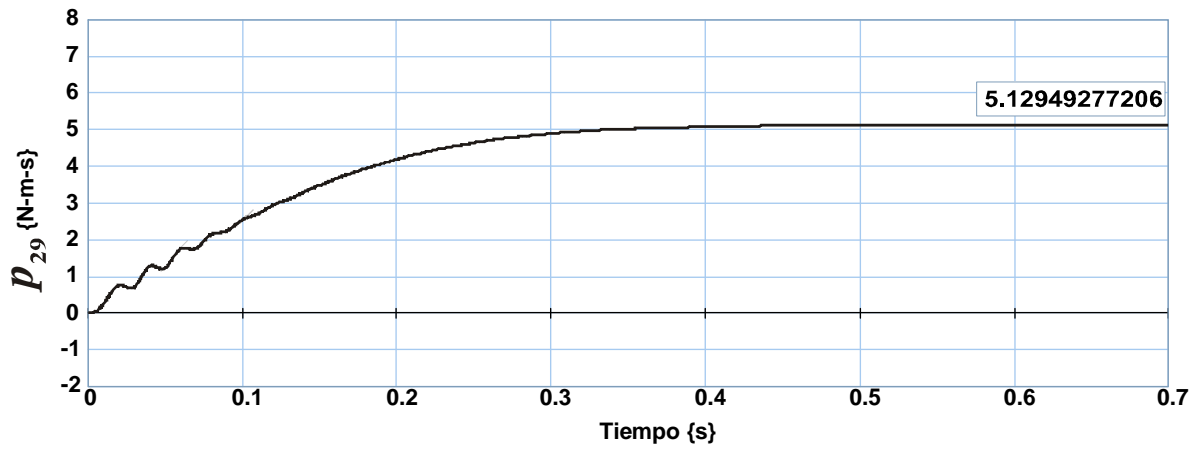


Figura 5.17: Momento de torsión angular  $p_{29}$  en el buje y su valor en estado estacionario.

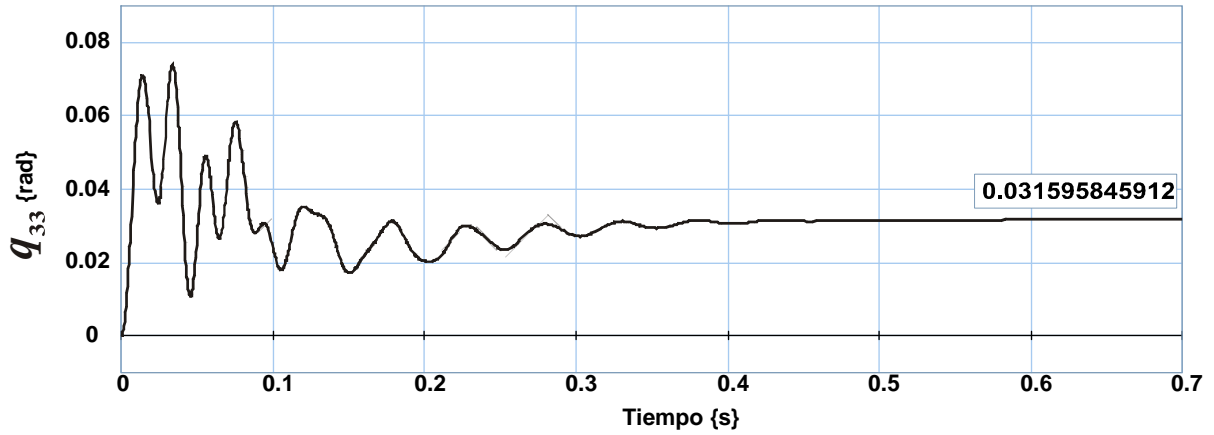


Figura 5.18: Ángulo de torsión  $q_{33}$  entre el buje y el eje de las aspas, y su valor en estado estacionario.

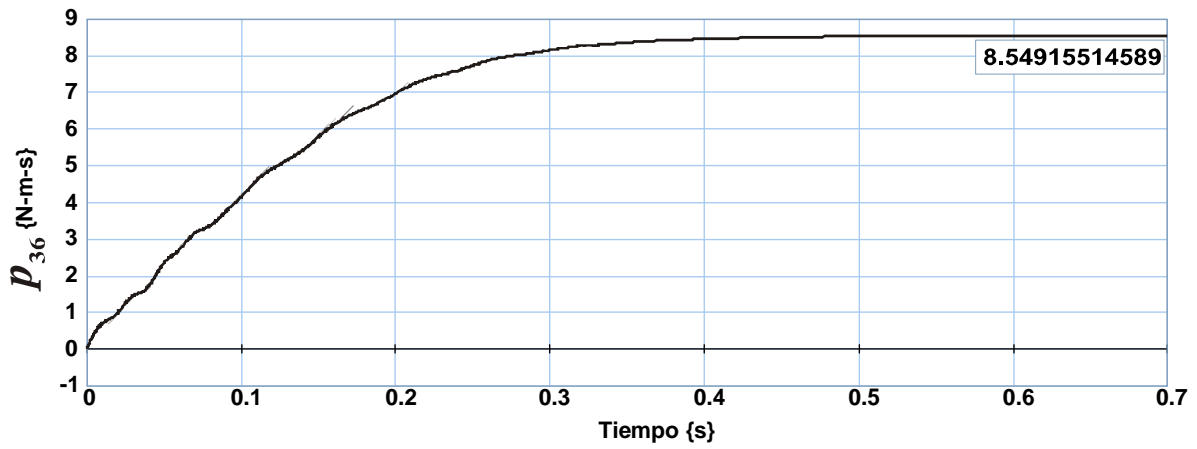


Figura 5.19: Momento de torsión angular  $p_{36}$  en el eje de las aspas del aerogenerador y su valor en estado estacionario.

errores relativos de las variables de estado son

$$\begin{array}{l}
 \left[ \begin{array}{l}
 \text{Error relativo de } p_4 \\
 \text{Error relativo de } p_5 \\
 \text{Error relativo de } p_6 \\
 \text{Error relativo de } p_7 \\
 \text{Error relativo de } p_{13} \\
 \text{Error relativo de } q_{26} \\
 \text{Error relativo de } p_{29} \\
 \text{Error relativo de } q_{33} \\
 \text{Error relativo de } p_{36}
 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{l}
 -0,00138 \% \\
 0,0164 \% \\
 -0,154 \% \\
 -0,535 \% \\
 0,00073 \% \\
 0,00446 \% \\
 0,000733 \% \\
 -0,0000098 \% \\
 -0,000733 \%
 \end{array} \right] \quad (5.94)
 \end{array}$$

Se puede observar que los errores relativos son relativamente pequeños, estos errores crecerán o disminuirán dependiendo de la diferencia de rapidez o lentitud entre las dinámicas rápidas y lentas, es decir, que tan rápidas son las variables rápidas con respecto a las variables lentas, entre más grande sea esta separación, más exacto será el resultado.

## Capítulo 6

# Conclusiones y Trabajos Futuros

### 6.1. Conclusiones

Cuando los sistemas que se desean analizar tienen una gran cantidad de elementos almacenadores de energía, es decir, son sistemas de alto orden y además presentan características no lineales, los modelos que los representan suelen ser bastante complejos, esto ocasiona que el análisis y simulación de dichos modelos sea más difícil y represente mayor esfuerzo computacional, por lo anterior, la reducción de orden de los modelos, sin que esto implique pérdida en la representatividad del modelo real, se convierte en un factor importante en el análisis y control de los sistemas, ya que un modelo reducido involucra menos variables que el modelo original. Los sistemas singularmente perturbados (casi todos los sistemas electromecánicos de grandes dimensiones como son los utilizados en la generación y distribución de energía eléctrica) cumplen con la condición de tener dos escalas de tiempo, es decir, contienen variables rápidas en su sección eléctrica y dinámicas lentas en su parte mecánica. Por lo que es posible encontrar un modelo de estado cuasi-estacionario mediante la reducción de orden del modelo original, en el cuál las variables de estado presentan una dinámica relativamente cercana, pero no exacta, a las dinámicas del modelo original, en cambio, el valor final en estado estacionario es prácticamente el mismo en los dos modelos. La exactitud del método propuesto, es decir la diferencia entre el estado estacionario del modelo original y el valor final del modelo de

estado cuasi-estacionario se incrementa o se decreta dependiendo de la diferencia entre las velocidades de las dinámicas lentas y rápidas, esto es, entre más grande sea la separación entre los dos grupos de eigenvalores del sistema, más exacto es el valor obtenido con el método propuesto.

En un trabajo de tesis anterior [Barrera, 2011], se propuso un procedimiento para obtener el estado cuasi-estacionario o modelo lento reducido de sistemas lineales. En el presente trabajo se demostró que dicho procedimiento funciona también para una clase de sistemas no lineales que contienen multiplicación de estados, este efecto es introducido mediante un transformador o en un girador en bond graph, como es el caso del modelo de la máquina síncrona.

En este trabajo de tesis se presentó un método para obtener el estado cuasi-estacionario para algunas clases de sistemas no lineales con perturbaciones singulares modelados en bond graph. Se consideran no linealidades en los elementos de disipación de energía (Resistencias) y/o en los elementos de interconexión que son modelados como transformadores y/o giradores modulados que determinan la estructura unión del sistema. Se proponen casos de estudio validando los resultados por medio de simulación. Así mismo se analiza la estabilidad interna de estos sistemas para garantizar que las dinámicas del sistema tendrán un valor final.

Se propone un método para obtener el modelo lento de sistemas lineales variantes en el tiempo cuando la varianza en el tiempo está en los elementos almacenadores de energía relacionados solo con dinámicas lentas, la demostración de la funcionalidad del método propuesto se realiza mediante un ejemplo demostrativo con un modelo en bond graph que no viene de un sistema físico.

Se obtuvo el estado estacionario mediante bond graph de una clase de sistemas no lineales utilizando una asignación de causalidad derivativa al modelo (se realiza esta prueba con dos ejemplos), que aunque no tiene una representación física, si es útil para determinar el valor final de las variables de estado. En los sistemas no lineales puede existir más de un estado estacionario para cada variable, dependiendo de las condiciones iniciales y las entradas al sistema, a estos estados estacionarios generalmente se les conoce como puntos de equilibrio,

sin dejar de mencionar que, al tratarse de sistemas no lineales pueden existir uno o más estados estacionarios para cada variable que dependerán de las condiciones iniciales y de las entradas al sistema.

## 6.2. Trabajos futuros

Este trabajo de investigación puede marcar un camino para nuevos trabajos sobre otras clases de sistemas singularmente perturbados no lineales utilizando la metodología de bond graph, aplicando el método propuesto a otros ejemplos de sistemas físicos modelados con dicha metodología, así como determinar una característica importante de los sistemas, tal como es la estabilidad utilizando los eigenvalores de la matriz  $A_{22}$ .

Se puede ampliar la utilización del método propuesto a otras clases de sistemas no lineales con perturbaciones singulares donde la no linealidad sea generada por los elementos almacenadores de energía relacionados con las dinámicas lentas y extender el estudio sobre sistemas no lineales variantes en el tiempo.

Otra posible línea de investigación sería, no solamente quedarse en un análisis de los sistemas no lineales, sino que aplicar una técnica de control a dichos sistemas.

Una aplicación más de la metodología de bond graph podría ser en la determinación de flujos de potencia de redes de dimensiones relativamente grandes, ya que este tipo de sistemas eléctricos de potencia cumple con el requerimiento principal del bond graph que es el intercambio de potencia entre sus elementos.



# Bibliografía

- [Abed, 1985] Eyad H. Abed, "*A New Parameter Estimate in Singular Perturbations*", 24th IEEE Conference on Decision and Control, Fort Lauderdale, FL, USA (1985).
- [Anderson, 1977] P. M. Anderson, "*Power System Control and Stability*", The IOWA State University Press (1977).
- [Anderson, 2003] P. M. Anderson, A. A. Fouad, "*Power System Control and Stability*", Second Edition, John Wiley & Sons (2003).
- [Arifujjaman, 2005] Md. Arifujjaman, M. Tariq Iqbal, J. E. Quaicoe and M. Jahangir Khan "*Modeling and Control of A Small Wind Turbine*". Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering, Saskatoon, Sask. May (2005).
- [Banerjee, 2005] Soumitro Banerjee, "*Dynamics for Engineers*", John Wiley & Sons, Ltd.(2005).
- [Barrera, 2011] Noe Barrera Gallegos, "*Análisis de Sistemas Singularmente Perturbados con un Enfoque de Bond Graph*", Tesis de Maestría, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia, Michoacán. México. Febrero (2011).
- [Barrera, 2012] Noe Barrera-G, Gilberto Gonzalez-A, "*Actuator Form of Singularly Perturbed Systems: A Bond Graph Approach*", 17th International

- 
- Conference on Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR), Miedzyzdroje, Poland (2012).
- [Barriga, 2008] Octavio Barriga Torres, "*Modelado y Control de una Central Hidroeléctrica Sujeta a Vibraciones en la Turbina en el Dominio Físico*", Tesis de Maestría, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia, Michoacán. México. Agosto (2008).
- [Batchelor, 1967] G.K. Batchelor "*An Introduction to Fluid Dynamics*", Cambridge University Press (1967).
- [Borutzky, 2011] W. Borutzky, "*Bond Graph Modelling of Engineering Systems: Theory, Application and Software Support*", Capítulo 8: Bond Graph Modeling and Simulation of Electrical Machines por S. Junco y A. Donaire, pp. 269-320, Springer (2011).
- [Breedveld, 1984] P. C. Breedveld, "*A Bond Graph Algorithm to Determine the Equilibrium State of a System*", Journal of The Franklin Institute, vol. 318, No. 2, pp. 77-75 (1984).
- [Cellier, 1992] F. Cellier, "*Hierarchical Non-Linear Bond Graph: A Unified Methodology for Modelling Complex Physical Systems*", Transactions of The Society for Modelling and Simulation, Vol 58, No. 4, pp. 230-248. (1992).
- [Chow, 1990] J. H. Chow, J. R. Winkelman, M. A. Pai, P. W. Sauer, "*Singular Perturbation Analysis of Large-Scale Power Systems*", International Journal of Electrical Power & Energy Systems. Volume 12, Issue 2, pages 117-126 (1990).
- [Cowley, 2000] S. J. Cowley, "*Laminar Boundary-layer Theory: A 20th Century Paradox?*", 20th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, Chicago, Illinois, USA (2000).

- 
- [Dauphin-Tanguy, 1985] G. Dauphin-Tanguy, P. Borne, M. Lebrun, "*Order Reduction of Multi-Time Scale Systems Using Bond Graphs, the Reciprocal System and the Singular Perturbation Method*", J. Franklin Inst., Vol. 319, No. 1/2, pp.157-171 (1985).
- [Dauphin-Tanguy, 1999] Geneviève Dauphin-Tanguy, "*Les Bond Graphs et leur application en mécatronique*", Techniques de l'Ingénieur, traité informatique industrielle (1999).
- [Dauphin-Tanguy, 2000] Dauphin-Tanguy Geneviève , et al., "*Les Bond Graphs*", Hermes Science Publications, France (2000).
- [Dusonchet, 2007] L. Dusonchet, F. Massaro and E. Telaretti "*Transient Stability Simulation of a Fixed Speed Wind Turbine by Matlab/Simulink*" Clean Electrical Power, ICCEP'07, Capri, Italy, May (2007).
- [Edström, 1998] Kristen Edström, "*Generating State Space Equations from a Bond Graph with dependent Storage Elements Using Singular Perturbations Theory*" Technical reports from the Automatic Control Group, Linköping University, Sweden, August (1998).
- [Fakharian, 2011] Ahmad Fakharian, Thomas Gustafsson, Mahadi Yousefi Azar Khanian, "*A New Approach on  $H_\infty$  Control of Linear Singular Perturbation Systems*", IEEE 9th International Conference on Control and Automation (ICCA), Santiago, Chile (2011).
- [Fox, 2004] Robert W. Fox, Alan T. McDonald, Philip J. Pritchard, "*Introduction to Fluid Mechanics*", Sixth edition, John Wiley & Sons, Inc.(2004).
- [French, 1970] A. P. French "*Newtonian Mechanics (The M.I.T Introductory Physics Series)*" (1st ed). W. W. Norton & Company Inc. New York (1970).

- 
- [Gandanegara, 2003] Grace Gandanegara, "*Méthodologie de conception systématique en génie électrique à l'aide de l'outil Bond Graph Application à une Chaîne de traction ferroviaire*", Tesis de Doctorado, Institut National Polytechnique de Toulouse, France. Novembre (2003).
- [Gawthrop, 1996] P. Gawthrop, L. Smith, "*Metamodelling: for Bond Graphs and Dynamic Systems*", Prentice Hall International, UK, (1996).
- [Gonzalez, 2003] G. Gonzalez-A, R. Galindo, "*Steady-State Values for a Physical System with Bond Graph Approach*", 9<sup>th</sup> IEEE International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics, pp. 25-28, Miedzyzdroje, Poland (2003).
- [Gonzalez, 2004] Gilberto González Avalos, "*Técnicas de Control Basadas en el Dominio Físico para Sistemas LTI MIMO. Aplicación a la Máquina Síncrona*", Tesis de Doctorado, Universidad Autónoma de Nuevo León, Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica (2004).
- [Gonzalez, 2011] G. Gonzalez-A, N. Barrera-G, "*Quasy Steady State Model Determination Using Bond Graph for a Singularly Perturbed LTI System*", 16th International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics, MMAR, pp. 194-199, Miedzysdroje, Poland (2011).
- [Gonzalez, 2014] Joel Abraham González Vieyra, "*Modelado y Análisis de Sistremas Lineales Variantes en el Tiempo en un Enfoque de Bond Graph*", Tesis de Maestria, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia, Michoacán. México. Agosto (2014).
- [Grenier, 2005] Marie-Eve Grenier, Daniel Lefebvre, Thierry Van Cutsem, "*Quasy Steady-State Models for Long-Term Voltage and Frequency Dyna-*

- 
- mics Simulation*", Power Tech, IEEE Russia, Conference 27-30 June 2005, pages 1-8 (2005).
- [Herrera, 2014] Mayra Yadira Herrera Contreras, "*Retroalimentación de Estados de Sistemas Singularmente Perturbados en un Enfoque de Bond Graph*", Tesis de Maestría, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia, Michoacán. México. Agosto (2014).
- [Hoppensteadt, 1967] F. Hoppensteadt, "*Stability in Systems with Parameter*". J. Math Anal. Applic. 18, 129-134 (1967).
- [Hoppensteadt, 1971] F. Hoppensteadt, "*Properties of Solutions of Ordinary Differential Equations with Small Parameter*", Commun. Pure Appl. Math. 34, 807-840 (1971).
- [Isidori, 1990] A. Isidori, C. I. Byrnes, "*Output Regulation of Nonlinear Systems*", IEEE Trans. Autom. Contro, vol. 35, no. 2, pp. 131-140 (1990).
- [Jackson, 1979] M. C. Jackson, S. D. Umans, R. D. Dunlop, S. H. Horowitz, A. C. Parikh, "*Turbine-Generator Shaft Torques and Fatigue: Part I - Simulation Methods and Fatigue Analysis*", IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, vol. PAS-98, no. 6, pp. 2299-2307 (1979).
- [Javid, 1982] S. Harold Javid, "*Stabilization of Time-Varying Singularly Perturbed Systems by Observed-Based Slow-State Feedback*", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-27, No. 3, pp. 702-704 (1982).
- [Ji, 2011] Ji Xiaofu, Gao Jinfeng, Chen Xiaoping, "*Robust  $H_\infty$  Control Uncertain Linear Time-Delay Singularly Perturbed Systems*", 30th Chinese Control Conference, Yantai, China (2011).

- [Junco, 1999] S. Junco, "*Real- and Complex-power Bond Graph Modeling of the Induction Motor*", In Proceeding of the International Conference on Bond Graph and Simulation, pages 323-328, San Francisco, CA, USA (1999).
- [Karnopp, 1999] D. Karnopp, R. Rosenberg, "*Systems Dynamics: A Unified Approach*", John Wiley & Son (1999).
- [Karnopp, 2012] Dean. C. Karnopp D. L. Margolis and Roland C. Rosenber , "*System Dynamics: Modeling and Simulation of Mechatronic Systems*", 5th edition, John Wiley & Sons, April (2012).
- [Kaw, 2011] Autar K. Kaw, Egwu E. Kalu and Duc Nguyen, "*Numerical Methods with Applications*", Second Edition, Abridged, (2011).
- [Khalil, 1979] Hassan K. Khalil, Petar V. Kokotovic, "*Control of Linear Systems with Multiparameter Singular Perturbations*", Automatica, Vol. 15, pp. 197-207 (1979).
- [Khalil, 1981] Hassan K. Khalil, "*On the Robustness of Output Feedback Control Methods to Modelling Errors*", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-26, No. 2, pp. 524-526 (1981).
- [Khalil, 1996] Hassan K. Kahlil, "*Nonlinear Systems*", Second Edition, Prentice Hall (1996).
- [Khalil, 2002] Hassan K. Kahlil, "*Nonlinear Systems*", Third Edition, Prentice Hall (2002).
- [Kokotovic, 1989] Petar V. Kokotovic, Peter W. Sauer, "*Integral Manifold as a Tool for Reduced-Order Modeling of Nonlinear Systems: A Synchronous Machine Case Study*", IEEE Transactions on Circuits and Systems, Vol. 36, No. 3, pp. 403-410 (1989).

- 
- [Kokotovic, 1986] Petar Kokotovic, Hassan K. Khalil, Jhon O'Reilly, "*Singular Perturbation Methods in Control Analysis and Design*", Ed. SIAM Society for Industrial Applied Mathematics, Philadelphia, USA (1986).
- [Krause, 2002] Paul C. Krause, Oleg Wasynczuk, Scott D. Sudhoff, "*Analysis of Electric Machinery and Drive Systems*", John Wiley & Sons (2002).
- [Kundur, 1994] P. Kundur, "*Power System Stability and Control*", McGraw-Hill, USA (1994).
- [Kypuros, 2013] Javier A. Kypuros, "*System Dynamics and Control with Bond Graph Modeling*", CRC Press, Taylor & Francis Group (2013).
- [Levinson, 1950] N. Levinson, "*Perturbations of Discontinuous Solutions of Non-Linear Systems of Differential Equations*", Acta Math, 82, 71-106 (1950).
- [Li, 1995] Tzuu-Hseng S. Li, Jiang-Jong Huang, "*Simplex Sliding Mode Control of Singular Perturbation Systems*", IEEE IECON 21st International Conference on Industrial Electronics, Control and Instrumentation, (Volume: 2), pp. 742-747 Orlando, Florida, USA (1995).
- [Li, 2007] H. Li and Z. Chen "*Transient Stability Analysis of Wind Turbines with Induction Generators Considering Blades and Shaft Flexibility*", Industrial Electronics Society, 2007. IECON 2007. 33rd Annual Conference of the IEEE. Taipei, Taiwan. November (2007).
- [Li, 2007] Tzu-Chu Lin, David H. Schultz, Weiqun Zhang, "*Numerical Solution of Linear and Nonlinear Singular Perturbation Problems*", Computers & Mathematics with Applications, Volume 55, Issue 11, pages 2574-2592 (2007).
- [Mahmoud, 1982] M. S. Mahmoud, M. F. Hassan, M. G. Singh, "*Approximate Feedback Design for a Class of Singularly Perturbed Systems*", IEEE

- 
- Proceedings D., Control Theory and Applications, Volume: 129, Issue: 2, pages 49-56 (1982).
- [Monshizadeh, 2008] Nima Monshizadeh, "*A Survey on Singularly Perturbed Systems*", Nonlinear Course, K. N. Toosi University of Technology, Iran winter (2008).
- [Naidu, 1985] D. S. Naidu, A. K. Rao, "*Application of the Singular Perturbation Method to a Steam Power System*", Electric Power Systems Research. Volume 8, Issue 3, pages 219-226 (1985).
- [Naidu, 1988] D. S. Naidu, D. B. Price, "*Singular Perturbations and Time Scales in the Design of Digital Flight Control Systems*", NASA Technical Paper 2844 Scientific and Technical Information Division, (1988).
- [Naidu, 1988] D. S. Naidu, "*Singular Perturbations Methodology in Control Systems*", Peter Peregrinus Ltd. London, United Kingdom (1988).
- [Naidu, 2001] D. Subbaram Naidu, Anthony J. Calise, "*Singular Perturbations and Time Scale in Guidance and Control of Aerospace Systems: A Survey*", Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 24, No.6, pp. 1057-1078 (2001).
- [O'Malley, 1971] R. E. O'Malley, "*Boundary Layer Methods for Nonlinear Initial Value Problems*", SIAM J. Rev. 13, 425-434 (1971).
- [Omara, 2001] Ahmed A. Omara, Ronald C. Rosenberg, "*Analysis of a Class of Two-Time-Scale Bond Graph Models*", Proc. In'l Conf. Of Bond Graph Modeling, SCS v.33, n. 1, pp 55-61 (2001).
- [Orbak, 2003] Yurdun Orbak, O. S. Turkay, Eşref Eşkinat, Kamla Youcef, "*Model Reduction in the Physical Domain*", Proc. Instn Mech. Engrs, Vol. 217, part I: J. Systems and Control Engineering, pp 481-496 (2003).

- 
- [Parul, 2011] Manoj Kumar Parul, "*Methods for Solving Singular Perturbation Problems Arising in Science and Engineering*", Mathematical and Computer Modelling, Volume 54, Issue 1-2, pages 556-575 (2011).
- [Peponides, 1982] George Peponides, Petar V. Kokotovic, Joe Hong Chow, "*Singular Perturbations and Time Scales in Nonlinear Models of Power Systems*", IEEE Transactions on Circuits and Systems, Vol. CAS-29, No. 11, pp. 758-767 (1982).
- [Plaza, 2013] S. Plaza Salinas and J. M. Gutiérrez Jiménez, "*Dinámica del Método de Newton: Material Didáctico Matemáticas*", Universidad de la Rioja, España (2013).
- [Porter, 1974] B. Porter, "*Singular Perturbation Methods in the Design of Stabilizing Feedback Controllers for Multivariable Linear Systems*", International Journal of Control, Vol. 20, No. 4, pp. 689-692 (1974).
- [Paynter, 1961] H. Paynter, "*Analysis and Design of Engineering Systems*", MIT Press (1961).
- [Rajagopalan, 1981] P. K. Rajagopalan, D. S. Naidu, "*Singular-Perturbation method for Discrete Models of Continuous Systems in Optimal Control*", IEE Proceedings D., Control Theory and Applications, Volume: 128, Issue: 4, pages 142-148 (1981).
- [Ramirez, 2011] R. Ramírez-Betancour, C. R. Fuerte-Esquivel, T. Van Cutsem, "*A Two-Time Scale Simulation for Dynamic Analysis of Power Systems*", Electric Power Systems Research, 83 (2012), pages 185-195 (2011).
- [Rosenberg, 1981] Ronald C. Rosenberg, Albert N. Andry Jr, "*A Graph Theoretic Method for Identifying Implicit Two-Scale Problems*", 20th IEEE

- 
- Conference on Decision and Control Including the Symposium on Adaptive Processes, San Diego, Ca, USA (1981).
- [Rosenberg, 1983] R. Rosenberg, D. Karnopp, "*Introduction to Physical System Dynamics*", series in mechanical engineering, McGraw-Hill (1983).
- [Sahm, 1979] Dietrich Sahm, "A Two-Axis, Bond Graph Model of the Dynamics of Synchronous Electrical Machine", *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 308, No. 3 (1979).
- [Saksena, 1984] V. R. Saksena, J. O'Reilly, P. V. Kokotovic, "*Singular Perturbations and Time-Scale Methods in Control Theory: Survey 1976-1983*", *Automatica*, Vol. 20, No. 3, pp. 273-293 (1984).
- [Sandell, 1979] Nils R. Sandell Jr, "*Robust Stability of Systems with Application to Singular Perturbations*", *Automatica*, Vol. 15, pp. 467-470 (1979).
- [Sastry, 1999] S. Sastry, "*Nonlinear Systems Analysis, Stability, and Control*", Springer Science+Business Media New York (1999).
- [Sauer, 1987] P. W. Sauer, D. J. LaGesse, S. Ahmed-Zaid, M. A. Pai, "*Reduced Order Modeling of Interconnected Multimachine Power Systems Using Time-Scale Decomposition*", *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. PWRS-2, No. 2, pp. 310-319 (1987).
- [Shao, 2010] Shao Zhiyu, Zhang Xiaodong, "*Intelligent Control of Flexible-Joint Manipulador Based on Singular Perturbation*", *IEEE International Conference on Automation and Logistics*, Hong Kong and Macau (2010).
- [Singh, 1986] N. P. Singh, P. Singh, S. I. Ahson, "*An Iterative Approach to Reduce-Order Modeling of Synchronous Machine Using Singular Perturbation*" *IEEE Journal & Magazines*. Volume 74, pp. 892-893 (1986).

- 
- [Slotine, 1991] Jean-Jacques E. Slotine, Weiping Li, "*Applied Nonlinear Control*", Prentice Hall, USA (1991).
- [Sueur, 1991] C. Sueur, G. Dauphin-Tanguy, "*Bond Graph Approach for Structural Analysis of MIMO Linear Systems*", Journal of the Franklin Institute, Vol. 328, No. 1, pp. 55-70 (1991).
- [Sueur, 1991] C. Sueur and G. Dauphin-tanguy, "*Bond Graph Approach to Multi-Time Scale Systems Analysis*", J. Franklin Inst., Vol. 328, No.5/6, pp. 1005-1026 (1991).
- [Suzuki, 1981] M. Suzuki, "*Composite Controls for Singularly Perturbed Systems*", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-26, No. 2, pp. 505-507 (1981).
- [Thoma, 1975] J. Thoma, "*Introduction to Bond Graphs and their Applications*", Pergamon Press (1975).
- [Thoma, 1991] J. Thoma, "*Simulation by Bond Graphs*", Springer Verlag (1991).
- [Tikhonov, 1948] A. N. Tikhonov, "*On the Dependence of the Solutions Differential Equations on a Small Parameter*", Math. Sb., 22, 193-204 (1948).
- [Tikhonov, 1952] A. N. Tikhonov, "*Systems of Differential Equations Containing a Small Parameter Multiplying the Derivative*", Math. Sb., 31, 575-586 (1952).
- [Vasil'eva, 1963] A. B. Vasil'eva, "*Asymptotic Behavior of Solutions to Certain Problems Involving Nonlinear Differential Equations Containing a Small Parameter Multiplying the Highest Derivatives*". Russian Math. Surveys 18, 13-81 (1963).
- [Vidyasagar, 1985] M. Vidyasagar, "*Robust Stabilization of Singularly Perturbed Sys-*

- 
- tems*", Systems & Control Letters, Volume 5, Issue 6, pages 413-418 (1985).
- [Wang, 1993] Ming-Shyan Wang, Tzuu-Hseng S. Li, York-Yih Sun, "*Robustness of Dynamic Output Feedback Control for Singular Perturbation Systems*", Systems & Control Letters. Volume 21, Issue 5, pages 353-361 (1993).
- [Wason, 1965] W. Wasow, "*Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations*", Wiley Interscience, New York (1965).
- [Wellstead, 1979] P. E. Wellstead, "*Introduction to Physical System Modelling*", Academic Press (1979).
- [Winkelman, 1980] James R. Winkelman, Joe H. Chow, John J. Allemong, Petar V. Kokotovic, "*Multi-Time-Scale Analysis of a Power System*", Automatica, Vol. 16, pp. 35-43 (1980).
- [Xiaozhe, 2014] Xiaozhe Wang, Hsiao-Dong Chiang, "*Numerical Investigations on Quasi Steady-State Model for Voltage Stability: Limitations and Nonlinear Analysis*", International Transactions on Electrical Energy Systems, Vol. 24, Issue 11, Version of Record Online (2014)
- [Xu, 1998] X. Xu, R. M. Mathur, J. Jiang, G. J. Rogers, P. Kundur, "*Modeling of Generators and Their Controls in Power System Simulations Using Singular Perturbations*", IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 13, No. 1, pp. 109-114 (1998).
- [Yang, 2012] Xiaojing Yang, J. Jim Zhu, "*Singular Perturbation Margin Assessment of Linear Slowly Time-Varying Systems*", IEEE 51th Annual Conference on Decision and Control (CDC), Maui, Hawaii, USA (2012).

- [Yu, 2014] Hongwang Yu, Baoshang Zhang, "*Stabilizability of a Class of Linear Singularly Perturbed Systems Via Output Feedback*", 26th Chinese Control and Decision Conference (CCDC), Changsha, China (2014).
- [Zeid, 1995] Ashraf A. Zeid, James L. Overholt, "*Singularly Perturbed Formulation: Explicit Modeling of Multibody Systems*", Journal of the Franklin Institute, Vol. 332, No. 1, pp. 21-45 (1995)



# Apéndice A

## Modelado de Sistemas en Bond Graph

El objetivo de esta sección es obtener un modelo matemático para un sistema físico dado. Cada modelo será usado para predecir la respuesta y analizar las características dinámicas de los respectivos sistemas. Cada modelo matemático debe tomar en cuenta la relación de los subsistemas y sus respuestas dinámicas asociadas [Kypuros, 2013].

### A.1. Antecedentes de Bond Graph

#### A.1.1. Introducción

La metodología de bond graph (también llamados grafos de conexión o grafos de enlace) inventada por Henry M. Payter [Payter, 1961], formalizada por Dean C. Karnopp [Karnopp, 1999] y Ronald C. Rosenberg [Rosenberg, 1983] y estudiada de manera extensa por Jean U. Thoma [Thoma, 1975, Thoma, 1991], se extendió por Europa a finales de los años 70's, por los Países Bajos (Universidad de Twente) y en Francia (sociedad Alsthom, líderes en la producción de electricidad y de infraestructura ferroviaria). Debido a que los bond graphs son un lenguaje unificado para todos los dominios de la física y son de carácter gráfico, esta herramienta puede ser un soporte de comunicación entre especialistas de diferentes disciplinas

[Dauphin-Tanguy, 2000].

La metodología bond graph está fundada sobre los estudios de transferencia de potencia dentro del sistema de interés, y una definición de las hipótesis de modelado sobre los criterios físicos. El bond graph se sitúa como intermediario entre los sistemas físicos y los modelos matemáticos que después son asociados con ellos (matrices de transferencia en los casos lineales, ecuación de estados lineales o no lineales, sistemas de ecuaciones diferenciales de segundo orden). La representación en bond graph permite un modelo que al mismo tiempo es funcional por su representación por bond graph en palabras, estructural por la visualización de las propiedades de causalidad y comportamental por la deducción de los modelos matemáticos (matrices de transferencia, ecuaciones de estado) directamente del modelo en bond graph [Dauphin-Tanguy, 2000].

### **A.1.2. Presentación del lenguaje bond graph**

Las principales características de esta herramienta son las siguientes [Dauphin-Tanguy, 2000]:

- Es un lenguaje de representación de transferencias de potencia dentro de un sistema.
- Es gráfico.
- Está fundado sobre la noción de analogía.
- Supone los parámetros localizados dentro del sistema.
- Tiene apariencia explícita de las relaciones de causa y efecto (causalidad).
- Permite construir de manera sistemática los modelos matemáticos “clásicos”.

### **A.1.3. Representación de las transferencias de potencia**

Considerando los dos sistemas, uno mecánico y el otro eléctrico, presentados en la Figura A.1.

Dentro del sistema global compuesto de los dos subsistemas A y B, existen tanto conservación de la energía como continuidad de potencia. La transferencia de potencia (o flujo de energía) entre los dos subsistemas es representada por una semiflecha que corresponde al “bond” (o enlace) del bond graph; la potencia instantánea intercambiada se calcula, en el sistema

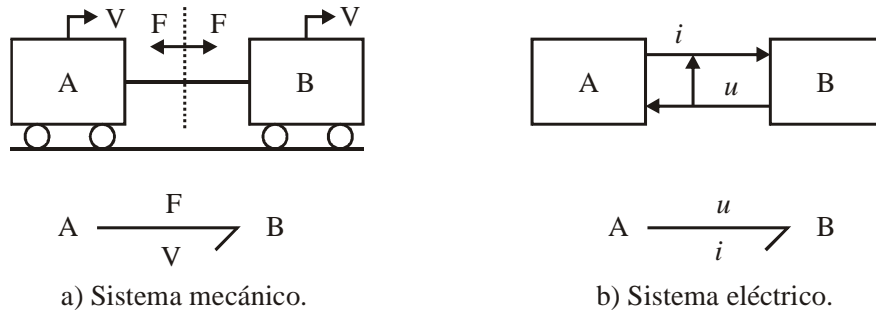


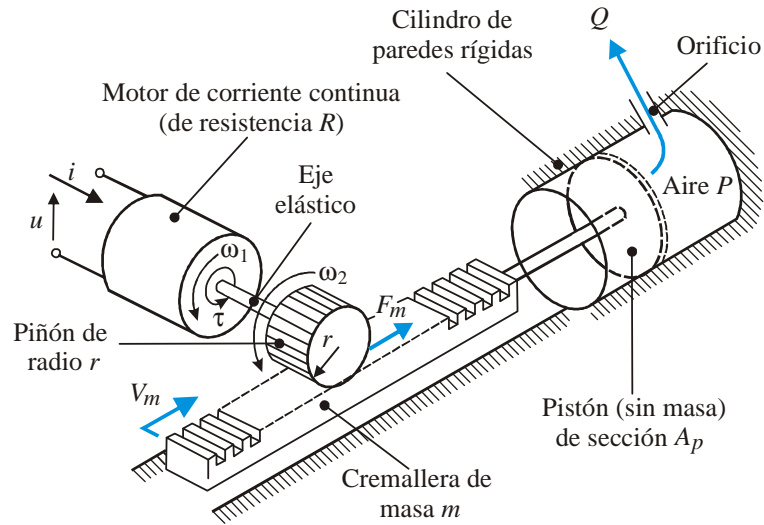
Figura A.1: Esquemas físicos y representación de transferencia de potencia.

mecánico como  $F \cdot V$ , en el sistema eléctrico por  $u \cdot i$ . El enlace porta las dos variables generalizadas en el cálculo de la potencia, y el sentido de la semiflecha es el que corresponde al sentido positivo de la potencia y de la variable  $V$  o  $i$  [Dauphin-Tanguy, 2000].

Desde un punto de vista general, la metodología bond graph está basada sobre un análisis y una caracterización de las transferencias de potencia dentro del sistema estudiado. Para una mejor comprensión de las transferencias de potencia considérese el sistema representado en la Figura A.2.

El sistema físico de la Figura A.2 se compone de un motor de corriente directa que provoca, mediante un eje elástico, un movimiento en rotación de un piñón; el cuál está acoplado a una cremallera que provoca un movimiento de traslación de un pistón que comprime el aire contenido dentro de un cilindro, induciendo a escapar por un orificio [Dauphin-Tanguy, 1999]. En este sistema aparecen varios dominios de energía: eléctrico, mecánico de rotación, mecánico de traslación y neumático. De tal manera que los diferentes subsistemas de naturaleza física ponen en evidencia el intercambio de potencia entre ellos.

Dentro del sistema global compuesto de los subsistemas, existe conservación de la energía y continuidad de potencia. El flujo de energía intercambiado entre dos subsistemas es representado por una línea de potencia, caracterizada por una semiflecha que corresponde al *enlace* del bond graph; la potencia instantánea intercambiada se calcula, en mecánica por  $F \cdot V$  (para movimiento lineal) o  $\tau \cdot \omega$  (para movimiento rotacional), en eléctrica por  $u \cdot i$ , en neumática



- $P$  Presión
- $u e i$  Tensión y corriente de alimentación del motor
- $Q$  Caudal de escape
- $F_m$  Fuerza aplicada a la cremallera en el punto de contacto del piñón
- $V_m$  Velocidad de la cremallera
- $\omega_1$  y  $\omega_2$  Velocidades angulares
- $\tau$  Par

Figura A.2: Esquema físico.

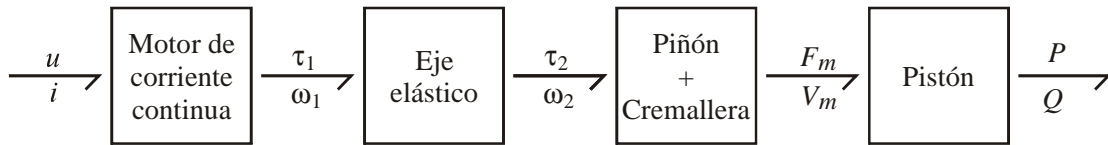


Figura A.3: Bond graph asociado al esquema de la Figura A.2.

$P \cdot Q$ . El enlace lleva las variables generalizadas para el cálculo de la potencia, tal como se vio en la Figura A.1, el sentido de la semiflecha es el que corresponde al sentido positivo de la potencia y de las variable  $V$ ,  $\omega$ ,  $i$ , o  $Q$ . El esquema físico de la Figura A.2 conduce a una representación bajo la forma de bond graph en palabras representado por la Figura A.3 [Dauphin-Tanguy, 1999].

#### A.1.4. Variables generalizadas

##### Variables de potencia

La potencia intercambiada  $P(t)$  se expresa como el producto de dos variables complementarias. Independientemente del dominio considerado, estas variables son llamadas *variables generalizadas* de esfuerzo y de flujo, expresadas como  $e(t)$  y  $f(t)$ , respectivamente. Estas son las variables de potencia, y se tiene que

$$P(t) = e(t) \cdot f(t). \quad (\text{A.1})$$

##### Variables de energía

En sistemas dinámicos las variables de esfuerzo y flujo, y por lo tanto también la potencia, varían con respecto al tiempo. Otros dos tipos de variables se presentan y son importantes para describir los sistemas dinámicos. Estas variables de energía son conocidas como el momento  $p(t)$  y el desplazamiento  $q(t)$  en la notación generalizada [Karnopp, 2012].

El momento está definido como la integral con respecto al tiempo de la variable de esfuerzo, es decir,

$$p(t) \equiv \int e(t) dt = \int_{t_0}^t e(t) dt + p(0), \quad (\text{A.2})$$

De la misma forma, la variable de desplazamiento está definida como la integral con respecto a tiempo de la variable de flujo:

$$q(t) \equiv \int f(t) dt = \int_{t_0}^t f(t) dt + q(0), \quad (\text{A.3})$$

Otra forma de escribir las definiciones en las ecuaciones (A.2) y (A.3) considerando la forma

diferencial en lugar de la forma integral,

$$\frac{dp(t)}{dt} = e(t), \quad dp = edt; \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{dq(t)}{dt} = f(t), \quad dq = fdt. \quad (\text{A.5})$$

La energía,  $E(t)$  que circula hacia adentro o hacia afuera de un puerto es la integración de la potencia  $P(t)$ . De este modo,

$$E(t) = \int^t P(t) dt = \int^t e(t) f(t) dt + E(0). \quad (\text{A.6})$$

La razón por la que,  $p(t)$  y  $q(t)$  son también conocidas como variables de energía es porque en la ecuación (A.6) una forma posible de escribir  $edt$  como  $dp$  o  $fdt$  como  $dq$  usando las ecuaciones (A.4) y (A.5). Entonces una expresión alternativa para  $E(t)$  es

$$E(t) = \int^t e(t) dq(t) = \int^t f(t) dp(t). \quad (\text{A.7})$$

En algunos sistemas se encontrarán casos en los que un esfuerzo es una función de un desplazamiento o que un flujo sea función de un momento. Entonces la energía puede ser expresada no sólo como función del tiempo sino también como una función de una de las variables de energía; es decir,

$$E(q) = \int^q e(q) dq, \quad (\text{A.8})$$

$$E(p) = \int^p f(p) dp. \quad (\text{A.9})$$

Esta es la razón por la que la que  $p(t)$  y  $q(t)$  son llamadas variables de energía en distinción a las variables de potencia  $e(t)$  y  $f(t)$  [Karnopp, 2012].

### A.1.5. Tetraedro de estado

En la Figura A.4 se observa un elemento imaginativo llamado *tetraedro de estado* que sirve para ayudar a recordar cómo se relacionan las variables de bond graph entre ellas. Los cuatro tipos variables,  $e(t)$ ,  $f(t)$ ,  $p(t)$  y  $q(t)$ , están asociadas con los cuatro vértices de un tetraedro. A lo largo de dos de los bordes del tetraedro son indicadas las relaciones entre  $e(t)$  y  $p(t)$  y las que existen entre  $f(t)$  y  $q(t)$  [Karnopp, 2012].

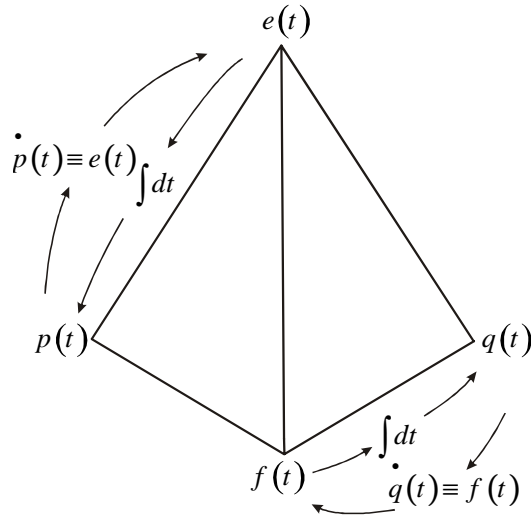


Figura A.4: Tetraedro de estado.

Es un hecho interesante el que sólo los tipos de variables que se necesitarán para modelar sistemas físicos sea mediante las variables de potencia y energía  $e(t)$ ,  $f(t)$ ,  $p(t)$  y  $q(t)$ . Para demostrar lo anterior, se analizarán las variables en varios dominios de energía de una manera más detallada.

La Tabla A.1 muestra las variables de energía y de potencia (variables generalizadas) para los principales dominios de energía de la física [Dauphin-Tanguy, 1999].

Para los dominios magnético, químico y termodinámico, no existe variable de momento  $p$  porque no es posible definir las variables de esfuerzo correspondientes (la fuerza magnetomotriz, el potencia químico, la temperatura) como derivadas de una función de las variables complementarias de flujo (derivadas de flujo magnético, caudal molar, flujo de entropía) como ocurre en el caso del dominio mecánico donde la ley característica de una masa  $M$  se expresa (en lineal)  $F = M dV/dt$  o en el dominio eléctrico donde la ley (lineal) característica de una bobina es  $u = L di/dt$ .

Tabla A.1: Significado de las variables generalizadas para diferentes dominios de la física.

Dominio	Esfuerzo $e$	Flujo $f$	Momento $p$	Desplazamiento $q$
Mecánico de Translación	Fuerza $F$	Velocidad $V$	Impulso $p$	Desplazamiento $x$
Mecánico de Rotación	Par $\tau$	Velocidad angular $\omega$	Impulso angular $h$	Ángulo $\theta$
Hidráulico	Presión $P$	Caudal $Q$	Impulso de Presión $\Gamma$	Volumen $V$
Eléctrico	Tensión $u$	Corriente $i$	Enlace de flujo $\lambda$	Carga $q$
Magnético	Fuerza Magnetomotriz	Derivada del Flujo Magnético	—	Flujo Magnético
Químico	Potencial Químico	Flujo molar	—	Masa molar
Termodinámico	Temperatura	Flujo de Entropía	—	Entropía

### A.1.6. Elementos básicos del lenguaje bond graph

Los elementos básico del bond graph pueden ser categorizados y representados matemáticamente de acuerdo en cómo ellos usan o convierten la energía. La representación matemática resulta de las relaciones de entrada-salida. Estas relaciones están basadas sobre formalismos de energía y son diseñadas para representar la distribución y el flujo de potencia dentro del sistema dinámico.

De primera instancia, este tipo de modelado puede parecer extraño y poco convencional, sin embargo, el modelar sistemas usando bond graph provee un método generalizado para analizar una gran variedad de sistemas y es particularmente útil obteniendo modelos matemáticos para sistemas moderadamente complejos que operan en una variedad de dominios de potencia [Kypuros, 2013].

#### Elementos básicos puerto-1

La relación constitutiva para los elementos básico *puerto-1* referente a las variables de energía y de potencia identifica si estos son elementos almacenadores de energía potencial (*elemento-*

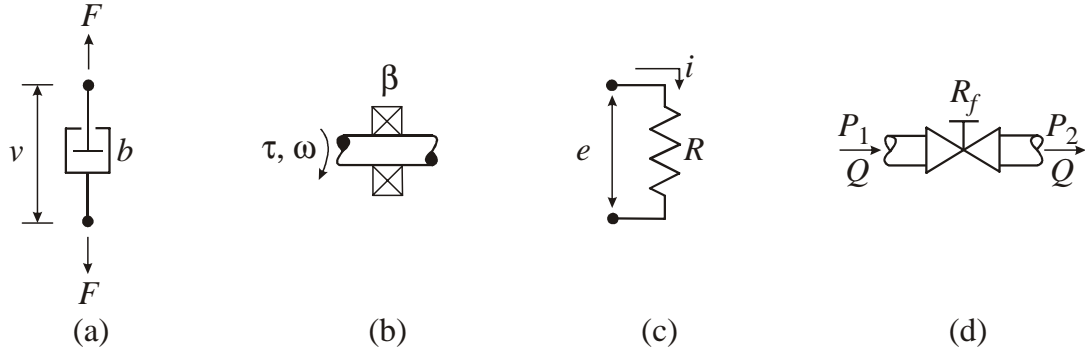


Figura A.5: Elementos puerto-1, ejemplos de elemento-R (a) un amortiguador mecánico; (b) un cojinete de rodillos; (c) una resistencia eléctrica; y (d) una válvula hidráulica.

C), almacenadores de energía cinética (*elemento-I*), o disipadores de energía (*elemento-R*).

**Elementos-R.** Son elementos de puerto-1 que *disipan energía*. Estos elementos están caracterizados mediante la relación constitutiva que relaciona directamente el esfuerzo con el flujo,

$$e = \Phi_R(f) \quad \text{o} \quad f = [\Phi_R(e)]^{-1}, \quad (\text{A.10})$$

donde  $\Phi_R(f)$  y  $[\Phi_R(e)]^{-1}$  son en general funciones no lineales. En la Figura A.5 se muestran algunos ejemplos de elementos puerto-1, los elementos-R son un amortiguador mecánico, un cojinete de rodillos rotacional, una resistencia eléctrica, y una válvula hidráulica [Kypuros, 2013].

Tomando el ejemplo del amortiguador mecánico simple. La relación constitutiva para un amortiguador mecánico es que la fuerza es proporcional a la diferencial de velocidad  $v$ , mediante la constante de amortiguamiento  $b$ ,

$$F_b = bv. \quad (\text{A.11})$$

Notar que en la ecuación anterior, el esfuerzo mecánico  $F_b$ , está relacionado directamente con el flujo mecánico  $v$ . Aunque los cojinetes están diseñados para minimizar las pérdidas debidas a la fricción, estos amortiguadores, disipan energía y pueden ser modelados de una manera similar. La pérdida de torque o par debida al amortiguamiento rotacional en los cojinetes

puede ser representada como

$$\tau = \beta\omega, \quad (\text{A.12})$$

donde  $\beta$  es la constante de amortiguamiento rotacional. En el caso del ejemplo (c) de la Figura A.5, la caída de voltaje a través de una resistencia  $e$ , es proporcional a la corriente  $i$  que está fluyendo a través de la resistencia  $R$ :

$$e = iR. \quad (\text{A.13})$$

En este ejemplo, el esfuerzo eléctrico  $e$ , está relacionado directamente al flujo eléctrico  $i$ . Las relaciones constitutivas similares pueden ser encontradas para los elementos-R en sistemas mecánicos de rotación y los sistemas hidráulicos.

De forma general, para los elementos-R con relación constitutiva lineal, la resistencia elemental generalizada  $R$ , está definida como

$$R \equiv \frac{e}{f}. \quad (\text{A.14})$$

En la Figura A.6 se muestra las dos causalidades asociadas con la ecuación (A.15) (flujo de entrada/esfuerzo de salida (a) y (b)), y la ecuación (A.16) (esfuerzo de entrada/flujo de salida (c) y (d)). La ecuación (A.10) se simplifica a

$$e = Rf, \quad (\text{A.15})$$

o

$$f = \frac{e}{R}. \quad (\text{A.16})$$

La Tabla A.2 presenta los parámetros y las unidades SI (sistema internacional) para las resistencias en cada dominio de energía. La tabla A.2 representa los símbolos comúnmente usados para cada parámetro. Notar que la resistencia hidráulica lineal ocurre en tuberías con flujo laminar (sin turbulencia). La resistencia hidráulica de una tubería  $R_f$ , se puede obtener a partir de la ecuación de pérdida de carga [Fox, 2004]. Para flujo laminar en una tubería circular

$$Q = \frac{\pi D^4}{128\mu L} \Delta P \implies R_f = \frac{\Delta P}{Q} = \frac{128\mu L}{\pi D^4}. \quad (\text{A.17})$$

donde  $\mu$ ,  $L$ , y  $D$  son las viscosidad cinemática, la longitud y el diámetro de la tubería, respectivamente.



Figura A.6: Elementos puerto-1 lineales, representación de elementos-R, (a) un bond graph con esfuerzo de entrada, (b) un diagrama a bloques con esfuerzo de entrada; (c) un bond graph con flujo de entrada, y (d) un diagrama a bloques con flujo de entrada.

Tabla A.2: Resistencia de los Elemento-R lineales.

Dominio	Parámetro	Unidades SI
Generalizado	$R = e/f$	adimensional
Translacional	$b$ , constante de amortiguamiento	N-s/m
Rotacional	$\beta$ , constante de amortiguamiento rotacional	N-m-s/rad
Eléctrico	$R$ , resistencia	$\Omega$ (ohmios)
Hidráulico	$R_f$ , resistencia hidráulica	Pa-s/m <sup>3</sup>

**Elementos-C.** Son elementos básicos que *almacenan energía potencial*. Estos elementos están caracterizados por una relación constitutiva que relaciona directamente el esfuerzo con la variable generalizada de desplazamiento,

$$q = \Phi_C(e) \quad \text{o} \quad e = [\Phi_C(q)]^{-1}. \quad (\text{A.18})$$

De la ecuación anterior se puede notar que generalmente el desplazamiento es una función no lineal del esfuerzo, o viceversa, el esfuerzo es una función inversa no lineal del desplazamiento. La Figura A.7 muestra ejemplos comunes donde se presentan elementos-C de puerto-1 [Kypuros, 2013].

Cada elemento de la Figura A.7 puede ser modelado usando una relación constitutiva que relaciona el par de variables generalizadas de esfuerzo y de desplazamiento. Por ejemplo, la fuerza en el resorte es

$$F = k(y_1 - y_2) = k\Delta y, \quad (\text{A.19})$$

donde  $k$  es la rigidez del resorte, y  $\Delta y$  es la deflexión del resorte o el desplazamiento relativo entre los dos extremos del resorte. Una barra de torsión tiene una relación similar entre el

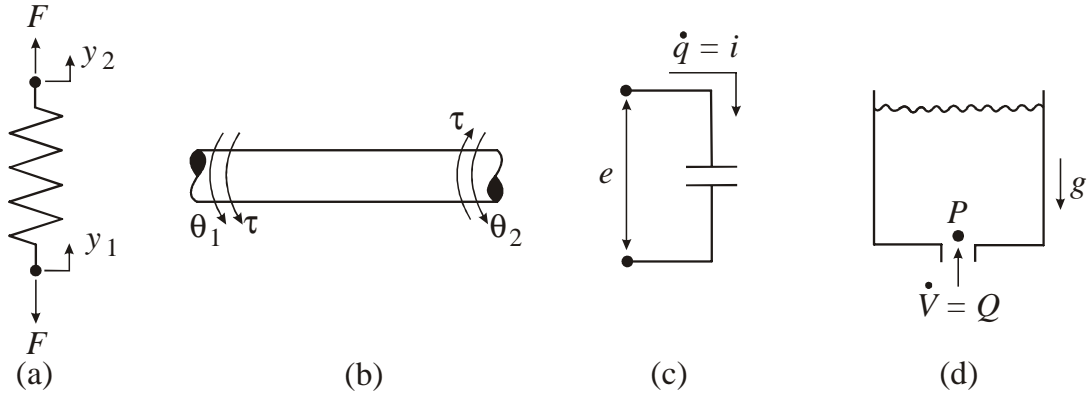


Figura A.7: Elementos de puerto-1, ejemplos de elementos-C, (a) un resorte, (b) una barra de torsión, (c) un capacitor eléctrico, y (d) un acumulador hidráulico.

par de torsión y el desplazamiento angular,

$$\tau = \kappa (\theta_1 - \theta_2) = \kappa \Delta\theta, \quad (\text{A.20})$$

El sistema análogo eléctrico de un resorte es un capacitor. Mientras que normalmente se caracteriza un resorte en términos de su rigidez, un capacitor es caracterizado en términos de su capacitancia. El voltaje en el capacitor es

$$e = \frac{q}{C}, \quad (\text{A.21})$$

donde  $C$  es la capacitancia. En los tres casos, el esfuerzo está directamente relacionado con el desplazamiento respectivo. Si vamos más a fondo en las analogías de las relaciones constitutivas entre el resorte y el capacitor, la capacitancia es el análogo de la elasticidad o el inverso de la rigidez (i.e.  $1/k$ ).

Es importante recordar que los enlaces o bonds en un bond graph están asociados con el esfuerzo y el flujo (no con el desplazamiento). Además, cada puerto unido a un bond tiene una causalidad distinta. Es decir, para cualquier puerto-1, ya sea el esfuerzo o el flujo pueden ser la entrada, pero no ambos. En un elemento-C de puerto-1, si el esfuerzo es la entrada como se representa en la Figura A.8 (a) y (b), el desplazamiento  $q$  es calculado a partir del esfuerzo  $e$ , y la derivada con respecto al tiempo del desplazamiento es tomada para generar

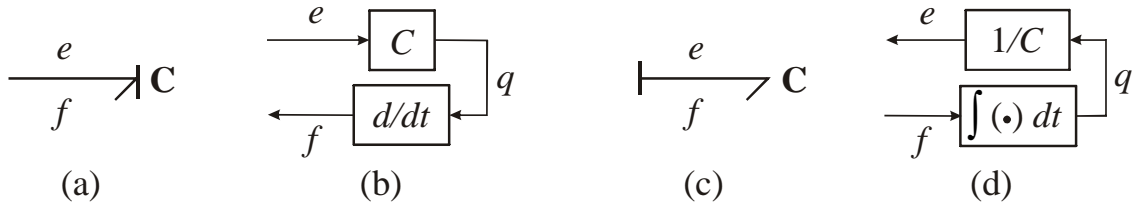


Figura A.8: Elementos puerto-1 lineales, representación de elementos-C, (a) un bond graph en causalidad derivativa, (b) un diagrama a bloques de una causalidad derivativa; (c) un bond graph con causalidad integral, y (d) un diagrama a bloques de una causalidad integral.

el flujo  $f$ . Si el elemento es lineal, la capacitancia generalizada  $C$ , es definida como

$$C \equiv \frac{q}{e}. \quad (\text{A.22})$$

Entonces la relación flujo-esfuerzo es

$$f = \frac{d}{dt} (Ce) = \frac{dq}{dt}, \quad (\text{A.23})$$

y su formulación es conocida como *causalidad derivativa* debido a que es usada una derivada del tiempo para relacionar el flujo con el esfuerzo.

Por otro lado, sí como se representa en la Figura A.8 (c) y (d), el flujo es la entrada al elemento-C de puerto-1, el flujo  $f$  es integrado con respecto al tiempo para generar el desplazamiento  $q$ , y el desplazamiento es usado para calcular el esfuerzo  $e$ . Sí el elemento es lineal, el desplazamiento es dividido entre la capacitancia  $C$  para calcular el esfuerzo,

$$e = \frac{q}{C}, \quad (\text{A.24})$$

Entonces, la relación de esfuerzo-flujo es

$$e = \frac{\int f dt}{C} = \frac{q}{C}, \quad (\text{A.25})$$

y como se usa una integral para relacionar el esfuerzo con el flujo en esta formulación por lo que es llamada *causalidad integral*.

Los parámetros de los elementos-C, así como los símbolos comúnmente usados y sus unidades SI para varios dominios de energía son dados en la Tabla A.3. Se puede notar que, comúnmente, para el elemento-C hidráulico con relación constitutiva lineal como el acumulador

Tabla A.3: Elasticidad de los Elementos-C lineales.

Dominio	Parámetro	Unidades SI
Generalizado	$C = q/e$	adimensional
Translacional	$1/k$ , elasticidad del resorte	m/N
Rotacional	$1/\kappa$ , elasticidad rotacional	rad/N-m
Eléctrico	$C$ , capacitancia	F (faradios)
Hidráulico	$C_f$ , capacitancia hidráulica	m <sup>3</sup> /Pa

descrito en la Figura A.7 (d). La elasticidad hidráulica puede ser inmediatamente obtenida recordando la ecuación para la presión hidrostática en una columna de un fluido

$$P = \rho gh = \rho g \frac{V}{A} \implies C_f = \frac{V}{P} = \frac{A}{\rho g}, \quad (\text{A.26})$$

donde  $V$  es el volumen de la columna de fluido con un área constante transversal  $A$  y una densidad del fluido  $\rho$ . Aunque los sistemas que se analizarán no son hidrostáticos. Los caudales volumétricos asociados tienen variaciones relativamente lentas, así que basta con suponer sistemas hidrostáticos.

**Elementos-I.** Son elementos básicos que *almacenan energía cinética*. Estos elementos están caracterizados mediante la relación constitutiva que relaciona directamente el momento con el flujo,

$$p = \Phi_I(f) \quad \text{o} \quad f = [\Phi_I(p)]^{-1}. \quad (\text{A.27})$$

De la ecuación anterior se puede notar que, generalmente el momento es una función no lineal del flujo, o viceversa, el flujo es una función inversa no lineal del momento. En la Figura A.9 se describen varios elementos-I de puerto-1 comunes [Kypuros, 2013].

Cada uno de los componentes descritos en la Figura A.9 puede ser modelado mediante una relación constitutiva lineal relacionando los flujos y los momentos respectivos. El momento de un cuerpo rígido es

$$p = mv = \int F dt, \quad (\text{A.28})$$

donde  $v$  es la velocidad,  $m$  es la masa del cuerpo rígido, y  $F$  es la fuerza. El momento angular

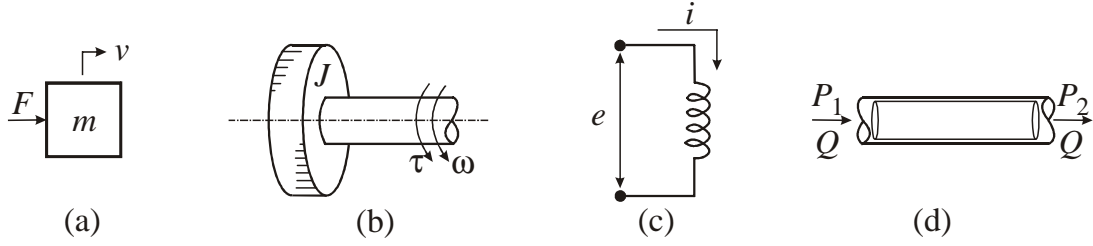


Figura A.9: Elementos de puerto-1, ejemplos de elementos-I, (a) una masa, (b) una inercia rotacional, (c) un inductor, y (d) un tapón de fluido.

de una inercia rotacional  $J$ , es

$$h = J\omega = \int \tau dt, \quad (\text{A.29})$$

donde  $\omega$  es la velocidad angular de la inercia rotacional  $J$  y  $\tau$  es el par de torsión. Para ambos casos, la masa y la inercia rotacional, Los momentos respectivos son directamente proporcionales a las velocidades. El equivalente de un momento en circuitos eléctricos es el enlace de flujo,

$$\lambda = Li = \int edt, \quad (\text{A.30})$$

donde  $L$  es la inductancia,  $i$  es la corriente, y  $e$  es el voltaje. Sí el elemento-I es modelado mediante una relación constitutiva lineal, la inercia generalizada  $I$  es,

$$I \equiv \frac{p}{f}. \quad (\text{A.31})$$

Tal como en los elementos-C, los elementos-I de puerto-1 tienen causalidad integral y causalidad derivativa. Para cuerpos rígidos, la masa es constante y la ecuación anterior simplifica a su forma usada más común. Como previamente se reveló, La fuerza  $F(t)$ , y el momento  $p(t)$ , están relacionados mediante la integración ( $\int(\cdot)dt$ ) o la diferenciación ( $d/dt$ ):

$$F = \dot{p} \quad \text{o} \quad p = \int F dt. \quad (\text{A.32})$$

Si la fuerza  $F(x)$  es conocida, puede ser integrada  $\int(\cdot)dt$ , para determinar el momento  $p(t)$ , y entonces, el momento puede ser relacionado a la velocidad  $v(t)$ . De manera inversa, sí la velocidad  $v(t)$  es conocida, puede ser relacionada con el momento  $p(t)$ , y el resultado puede ser diferenciado  $d/dt$ , para determinar la fuerza  $F(x)$ .

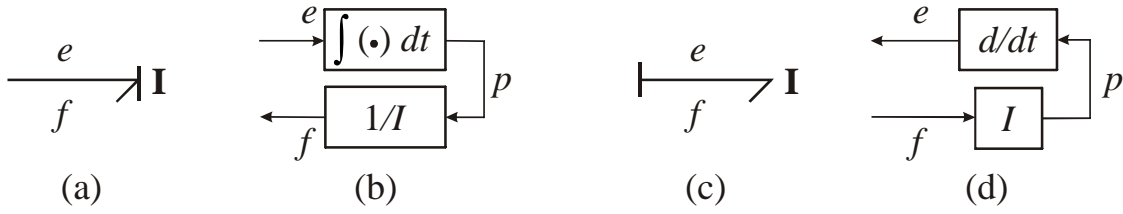


Figura A.10: Elementos puerto-1 lineales, representación de elementos-I, (a) un bond graph en causalidad integral, (b) un diagrama a bloques de una causalidad integral; (c) un bond graph con causalidad derivativa, y (d) un diagrama a bloques de una causalidad derivativa.

Para un elemento-I lineal en causalidad integral (ver las Figuras A.9 (a) y (b)) el esfuerzo  $e$ , es integrado para determinar el momento  $p$ , y el momento es dividido entre la inercia  $I$ , para calcular el flujo,

$$f = \frac{\int e dt}{I} = \frac{p}{I}. \quad (\text{A.33})$$

Por otro lado, sí el elemento-I tiene causalidad derivativa (Figuras A.10 (c) y (d)), el flujo  $f$ , es multiplicado por la inercia  $I$ , para calcular el momento  $p$ , y la derivada con respecto al tiempo del momento es tomada para generar el esfuerzo  $e$ ,

$$e = \frac{d}{dt} (If) = \frac{dp}{dt} = \dot{p}. \quad (\text{A.34})$$

Los parámetros, símbolos comúnmente usados y las unidades SI de los elementos-I para varios dominios de energía son dados en la Tabla A.4. Para obtener la inercia de un fluido lineal, se aplica la segunda ley de Newton a un volumen de control para una obstrucción del fluido como se ilustra en la Figura A.9 (d). Asumiendo un flujo incompresible y un volumen de control constante, la sumatoria de fuerzas en el tapón de fluido en una longitud de la tubería  $l$ , resulta en lo siguiente:

$$\sum F_x = P_2 A - P_1 A = m \dot{v} + 0 \implies \Delta P A = (\rho V) \frac{\dot{Q}}{A} = (\rho l) \frac{dQ}{dt}. \quad (\text{A.35})$$

donde el volumen es  $V = lA$ . La razón de flujo volumétrico,  $Q = dV/dt$ , es directamente proporcional a la velocidad del fluido promedio  $v$ , suponiendo un área transversal constante

Tabla A.4: Inercia de los Elementos-I lineales.

Dominio	Parámetro	Unidades SI
Generalizado	$I = p/f$	adimensional
Translacional	$m$ , masa	kg
Rotacional	$J$ , inercia rotacional	kg·m <sup>2</sup>
Eléctrico	$L$ , inductancia	H (henrios)
Hidráulico	$I_f$ , inercia hidráulica	kg/m <sup>4</sup>

$A$  (i.e.  $Q = vA$  y  $\dot{Q} = \dot{v}A$ ). Para determinar la inercia hidráulica, se resuelve la relación para la diferencial de presión (A.35) y usando la ecuación (A.33),

$$\Delta P = \frac{\rho l}{A} \frac{dQ}{dt} \implies \Delta P dt = \frac{\rho l}{A} dQ \implies \int \Delta P dt = \frac{\rho l}{A} dQ \implies I_f = \frac{\int \Delta P dt}{Q} = \frac{\rho l}{A}. \quad (\text{A.36})$$

Por lo tanto, el momento hidráulico es

$$\Gamma = \int \Delta P dt. \quad (\text{A.37})$$

**Fuentes de esfuerzo y fuentes de flujo.** Las fuentes de esfuerzo y las fuentes de flujo son usadas para la representación ideal de los elementos tales como las fuentes de voltaje y las fuentes de corriente, agitadores por vibración, fuerzas externas, fuentes de presión, etc. Como su nombre sugiere, una fuente de esfuerzo especifica un esfuerzo que entra al sistema, y una fuente de flujo especifica un flujo que entra hacia el sistema. En la Figura A.11 se ilustran varios ejemplos de fuentes de esfuerzo y fuentes de flujo [Kypuros, 2013].

Las fuentes de voltaje y las fuentes de corriente ideales obviamente especifican un esfuerzo y un flujo hacia el circuito, respectivamente. La fuerza externa es tratada como una fuente de esfuerzo, y la entrada de velocidad la cual podría venir de un agitador, por ejemplo, podría ser una fuente de flujo.

Como se ilustra en la Figura A.12, cada tipo de fuente tiene una sola causalidad distinta. Las fuentes de esfuerzo especifican que sale del elemento fuente un esfuerzo y va hacia adentro

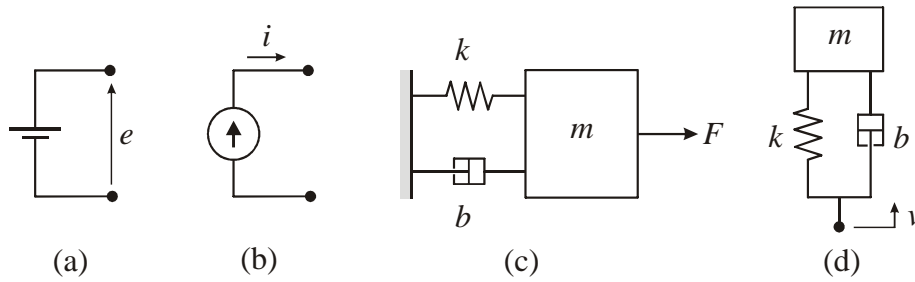


Figura A.11: Ejemplos de fuentes de esfuerzo y fuentes de flujo, (a) una fuente de voltaje, (b) una fuente de corriente, (c) una fuerza de entrada externa, y (d) una velocidad de entrada externa.

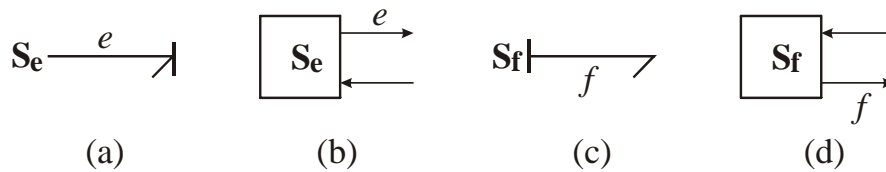


Figura A.12: Elementos fuente de esfuerzo y fuentes de flujo, (a) un bond graph de una fuente de esfuerzo, (b) un diagrama a bloques de una fuente de esfuerzo; (c) un bond graph de una fuente de flujo, y (d) un diagrama a bloques de una fuente de flujo.

del sistema. De manera contraria, las fuentes de flujo especifican que sale del elemento fuente un flujo y va hacia el elemento conectado o unión.

Un caso especial son las fuentes de esfuerzo y fuentes de flujo moduladas  $MS_e$  y  $MS_f$ , respectivamente, las cuales se diferencian de las  $S_e$  y  $S_f$  en que tienen una entrada moduladora que definirá el valor de esfuerzo o flujo que entregará la fuente al sistema, es decir, el valor entregado por la fuente no necesariamente será constante, algunos ejemplos en sistemas eléctricos son las fuente dependientes de voltaje y corriente.

### Elementos básicos puerto-2

Anteriormente se describieron los elementos que almacenan energía, los elementos que disipan energía y los elementos tipo fuente. Existen también elementos que ni almacenan ni disipan energía pero si la transmiten desde un elemento o unión hacia otro, mientras que con frecuencia realizan esta acción pasando de un dominio de energía a otro. Existen dos tipos básicos de

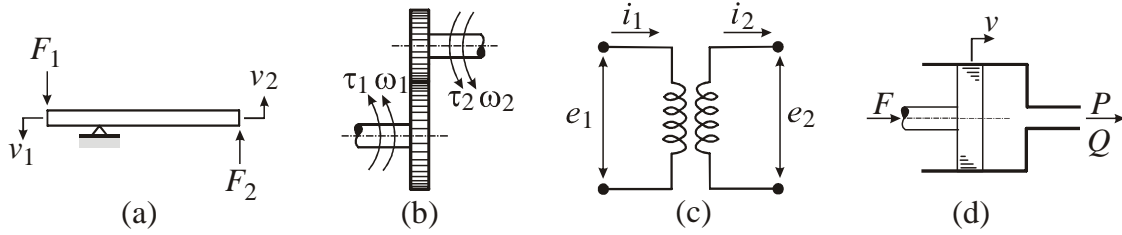


Figura A.13: Ejemplos de elementos-TF, (a) un nivelador rígido, (b) un par de engranes, (c) un transformador eléctrico, y (d) un ariete hidráulico.

elementos de *puerto-2* usados para transmitir energía. Estos son *el transformador* (-TF-) y *el girador* (-GY-). Idealmente, en cada uno de ellos, la potencia se conserva. (i.e. la potencia de entrada es igual a la potencia de salida) [Kypuros, 2013].

**Elementos-TF (transformadores).** Son caracterizados por la relación constitutiva que relaciona directamente el esfuerzo en el primer puerto  $e_1$ , con el esfuerzo en el segundo puerto  $e_2$ , y el flujo en el segundo puerto  $f_2$ , con el flujo en el primer puerto  $f_1$ . Las relaciones constitutivas para el transformador ideal lineal son,

$$e_1 = ne_2 \quad \text{y} \quad nf_1 = f_2, \quad (\text{A.38})$$

donde  $n$  es conocida como *el módulo del transformador* e indica la relación proporcional entre los esfuerzos y los flujos en cada puerto del elemento. Sin embargo, la relación constitutiva generalmente puede ser no lineal.

Algunos ejemplos de transformadores ideales son descritos en la figura A.13. En cada ejemplo, los esfuerzos en cada lado son proporcionales a los de otro lado, ocurre lo mismo con los flujos. Tomando el ejemplo del par de engranes (Figura A.13 (b)). El par de torsión de salida  $\tau_2$ , es proporcional al par de torsión de entrada  $\tau_1$ , mediante la relación de engranes. De igual forma, la velocidad angular en el lado del par de torsión de la entrada  $\omega_1$ , es proporcional a la velocidad angular en el lado del par de torsión de salida  $\omega_2$ , mediante la relación de engranes, es decir,

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = n, \quad (\text{A.39})$$

donde  $n$  es la relación de engranes  $N_1/N_2$ . Esto se puede confirmar utilizando cinemática básica y se puede observar que, para un par de engranes ideal, la potencia de entrada en un lado es la misma que la potencia salida en el otro.

Relaciones similares pueden ser encontradas para el brazo nivelador, el transformador eléctrico y para el pistón hidráulico. Si el brazo nivelador (A.13 (a)) es dividido en dos longitudes, midiendo  $l_1$  desde el pivote hasta donde se aplica  $F_1$  y midiendo  $l_2$  desde el pivote hasta la aplicación de  $F_2$  la relación cinemática podría ser

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{l_2}{l_1}. \quad (\text{A.40})$$

Estos resultados son partiendo del hecho de que cada punto sobre el nivelador tiene la misma velocidad angular,

$$\omega = \frac{v_1}{l_1} = \frac{v_2}{l_2}. \quad (\text{A.41})$$

Para el transformador mostrado en la Figura A.13 (c) la relación de embobinado o relación de número de vueltas  $N_1/N_2$ , la relación de voltaje y corriente es,

$$\frac{e_1}{e_2} = \frac{i_2}{i_1} = \frac{N_1}{N_2}. \quad (\text{A.42})$$

Para el cilindro hidráulico (Figura A.13 (d)), la fuerza y la presión así como la velocidad y el caudal de flujo volumétrico están relacionados mediante el área transversal del pistón  $A$ ,

$$\frac{F}{P} = \frac{Q}{v} = A. \quad (\text{A.43})$$

Se debe notar que en los primeros tres ejemplos, se transforma energía en un sólo dominio de energía, El sistema de engranes, por ejemplo, transforma energía rotacional a energía rotacional. El cuarto ejemplo, el pistón hidráulico, transforma energía mecánica a energía hidráulica.

El transformador puede tener una de dos posibles causalidades, como se muestra en la Figura A.14 (a)-(d). La dirección del flujo de potencia (indicada con la punta de la semiflecha) es omitida del bond graph en las Figuras (a) y (c) solamente para enfatizar la causalidad. Una vez que el esfuerzo es especificado como entrada a un puerto, el esfuerzo que sale por el otro puerto es determinado inmediatamente mediante el modulo del transformador  $n$ . De este

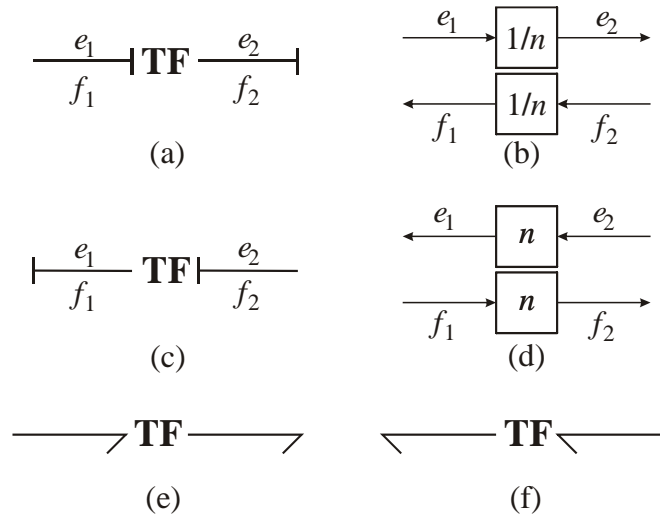


Figura A.14: Representación de elementos-TF, (a) un bond graph de un esfuerzo de entrada-esfuerzo de salida, (b) un diagrama de un esfuerzo de entrada-esfuerzo de salida; (c) un bond graph de un flujo de entrada-flujo de salida, y (d) un diagrama de un flujo de entrada-flujo de salida; (e) un bond graph de potencia de entrada-potencia de salida, y (f) un bond graph de potencia de salida-potencia de entrada.

modo, un transformador sólo puede tener un puerto donde el esfuerzo es especificado como una entrada. Además, la dirección de flujo de potencia positiva es asumida que va hacia adentro de un puerto y sale por el otro, como se representa en la Figura A.14 (e) y (f).

Se debe tener cuidado al distinguir la causalidad y la dirección de la potencia. Se debe recordar que la semiflecha indica la dirección supuesta del flujo de potencia positiva, y la barra vertical en cada bond indica el puerto donde el esfuerzo es una entrada. La barra *no indica* si el esfuerzo es positivo o negativo.

**Elementos-GY (giradores).** El segundo tipo de elementos-2 es el del *girador*, al igual que el transformador, el girador transmite energía. Sin embargo, a diferencia del transformador, la relación directa no es entre los esfuerzo o entre los flujos. La relación directa es entre el esfuerzo de un lado y el flujo del otro lado. Las relaciones constitutivas para el girador ideal lineal son

$$e_1 = r f_2 \quad \text{y} \quad r f_1 = e_2, \quad (\text{A.44})$$

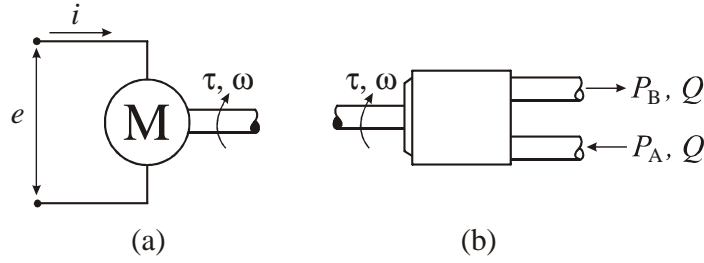


Figura A.15: Representación de elementos-GY, (a) un motor eléctrico ideal y (b) una bomba centrífuga ideal.

donde  $r$  es conocido como *el módulo del girador* e indica la relación proporcional entre el esfuerzo de un lado y el flujo del otro lado. Nuevamente, es importante notar que en lugar de una relación lineal entre esfuerzos y flujos. En general puede existir una relación no lineal.

Los ejemplos físicos de giradores ideales son muy poco comunes. Sin embargo, un girador que aparece comúnmente en sistemas electromecánicos es el motor ideal descrito en la Figura A.15 (a). En un motor eléctrico ideal, el par de torsión de salida  $\tau$ , es proporcional a la corriente de entrada  $i$ , mediante la constante del motor  $k_m$ ,

$$\tau = k_m i. \quad (\text{A.45})$$

De forma alterna, la velocidad angular  $\omega$ , puede ser especificada como una entrada para generar el voltaje del motor  $e$  como una salida,

$$e = k_m \omega. \quad (\text{A.46})$$

Otro ejemplo de girador es una bomba centrífuga ideal, Aquí la diferencial de presión de salida  $\Delta P = P_B - P_A$ , es proporcional a la velocidad angular de entrada  $\omega$ , se puede observar que para ambos ejemplos, el motor ideal y la bomba centrífuga ideal, la relación entrada-salida es entre un esfuerzo de un lado y un flujo del otro lado. También, se puede notar que ambos giradores acoplan dominios de energía diferentes en cada puerto, El motor ideal acopla rotación mecánica con sistemas electrónicos, y la bomba centrífuga acopla rotación mecánica con sistemas hidráulicos.

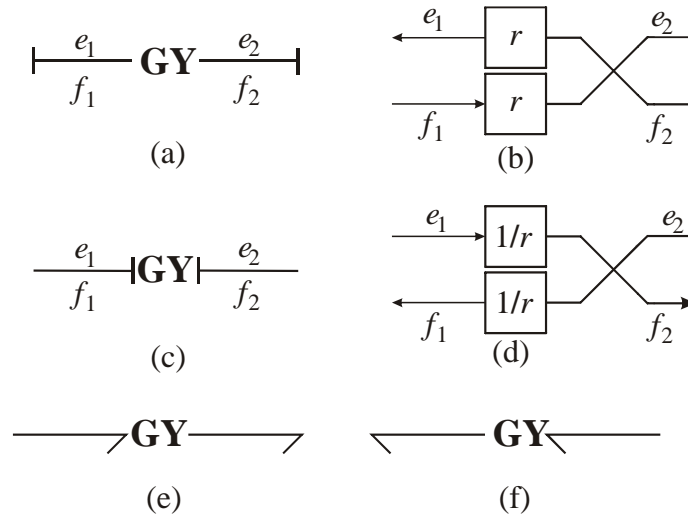


Figura A.16: Representación de elementos-GY, (a) un bond graph de flujo de entrada-esfuerzo de salida, (b) un diagrama de flujo de entrada-esfuerzo de salida; (c) un bond graph de un esfuerzo de entrada-flujo de salida, y (d) un diagrama de un esfuerzo de entrada-flujo de salida; (e) un bond graph de potencia de entrada-potencia de salida y (f) un bond graph de potencia de salida-potencia de entrada.

Al igual que el transformador, el girador puede tener una de dos posibles causalidades como se muestra en la Figura A.16. A diferencia del transformador, ambos esfuerzos o ambos flujos deben ser especificados como entradas a ambos puertos. Es decir, una vez que el esfuerzo es especificado como entrada a un puerto, el flujo en el otro puerto es inmediatamente generado como una salida. De forma inversa, una vez que un flujo es especificado como una entrada a un puerto, el esfuerzo es inmediatamente generado como una salida en el puerto opuesto.

De igual forma que en las fuentes de esfuerzo y las fuentes de flujo, existen los transformadores y los giradores modulados  $MTF$  y  $MGY$ , respectivamente, las cuales se diferencian de las  $TF$  y  $GY$  en que tienen una entrada moduladora que modificará el valor del módulo del transformador o del girador, es decir, el valor en la relación de transformación o giro de variables no necesariamente será constante, y puede ser modificada por alguna variable del sistema.

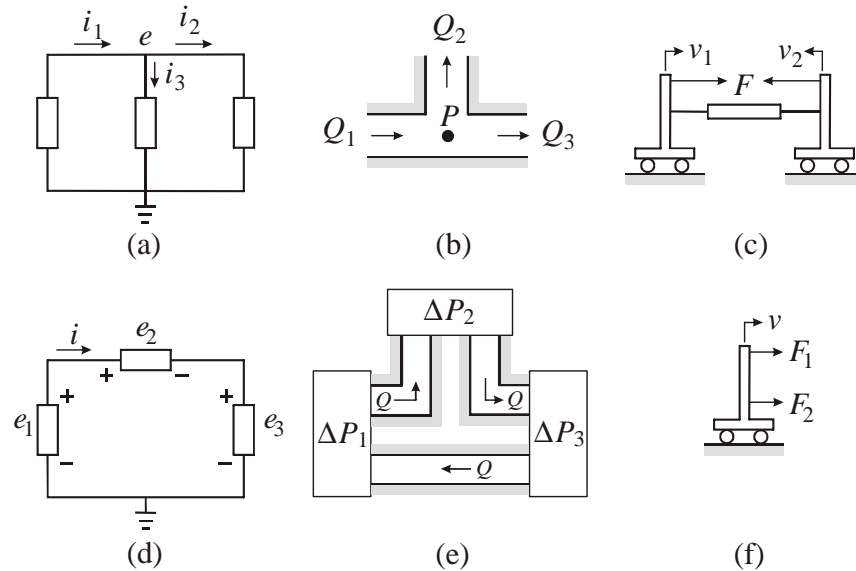


Figura A.17: (a)-(c) Ejemplos de uniones-0 y (d)-(f) ejemplos de uniones-1.

### Elementos de unión

Hasta ahora se han descrito los elementos de carga, disipación y transmisión de energía. Además de estos, también fueron presentados los elementos usados para representar fuentes. Lo que resta es lo que constituye a un bond graph básico, las uniones. *Las uniones* son usadas para interconectar los elementos básicos que se introdujeron en las secciones anteriores. Ellas se utilizan para representar la interacción de las relaciones constitutivas asociadas con los elementos de puerto-1 y puerto-2. Al igual que con los puertos-2 básicos, las uniones presentan conservación de la energía.

Las uniones ocurren de manera natural en los sistemas dinámicos. Estas son caracterizadas por dos condiciones. Tomando el ejemplo de las uniones ilustrado en la Figura A.17. Examinando los primeros ejemplos (a) y (b), aparecen dos rasgos en común:

1. La *primera condición* en cada ejemplo es que los componentes unidos tienen un *esfuerzo común*. En el circuito eléctrico, las impedancias generalizadas conectadas en paralelo tienen la misma caída de voltaje  $e$  a través de ellas. Cuando se unen segmentos de tuberías en una

unión, estas comparte una presión común  $P$ . Si se tiene un elemento como un amortiguador o un resorte uniendo dos carritos sin masa, los carritos experimentan una fuerza opuesta igual  $F$ .

2. La *segunda condición* en cada ejemplo es que está ocurriendo una *sumatoria de flujos*. El nodo en la parte de arriba de la Figura A.17 (a) conecta las tres ramas del circuito, y como dicta la ley de corrientes de Kirchhoff, la suma de las corrientes en un nodo es cero (i.e.  $i_1 - i_2 - i_3 = 0$ ). De manera similar, en un circuito hidráulico, los flujos en una unión suman cero,  $Q_1 - Q_2 - Q_3 = 0$ . Finalmente, una diferencial de velocidad aparece entre los dos carritos sin masa,  $\Delta v = v_1 - v_2$ .

En bond graphs, las uniones que tienen esfuerzo común y suma de flujos son conocidas como *uniones-0*. Un ejemplo de unión-0 es mostrado en la Figura A.18 (a). Las uniones en general, pueden tener dos a más puertos de conexión. Debido a que existe conservación de la potencia en una unión, la potencia de entrada es igual a la potencia de salida,

$$P_{ent} = P_{salida}, \quad (\text{A.47})$$

la ecuación anterior puede ser reescrita como,

$$P_{ent} - P_{salida} = 0. \quad (\text{A.48})$$

Para una unión con  $j$  número de puertos (donde  $j = 1, 2, 3, \dots, n$ ) la ecuación anterior se puede escribir de manera general como

$$\sum_{j=1}^n P_j = \sum_{j=1}^n e_j f_j = 0, \quad (\text{A.49})$$

(i.e. la suma de la potencia que entra a la unión es cero). Para una unión de esfuerzo común, la primera condición dicta que

$$e_1 = e_2 = e_3 = \dots = e. \quad (\text{A.50})$$

La suma de los flujos para una unión de esfuerzo común (unión-0) resulta de sustituir la ecuación (A.50) en la ecuación (A.49),

$$\sum_{j=1}^n P_j = \sum_{j=1}^n e_j f_j = e \sum_{j=1}^n f_j = 0 \implies \sum_{j=1}^n f_j = 0. \quad (\text{A.51})$$

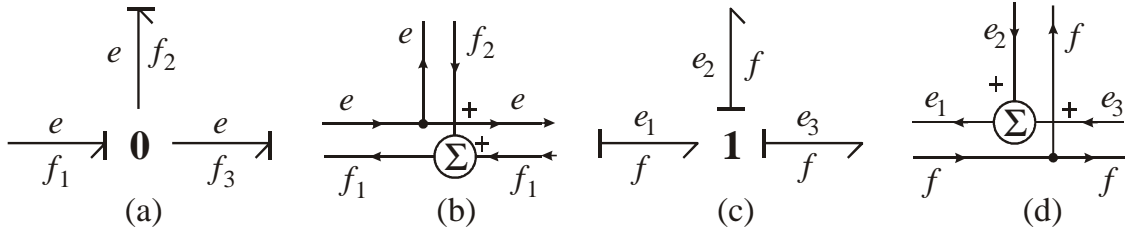


Figura A.18: (a) bond graph de una unión-0, (b) diagrama de bloques de una unión-0, (c) bond graph de una unión-1, (d) diagrama de bloques de una unión-1.

Debido a que el flujo de potencia dentro de una unión-0 se asume positivo, y todos los esfuerzos de los bonds conectados son iguales, la dirección de la potencia indica si el flujo en cada bond conectado es positivo o negativo. Por lo tanto, el ejemplo de unión-0 en la Figura A.18 (a) debería tener la siguiente suma de flujos:

$$f_1 - f_2 - f_3 = 0. \quad (\text{A.52})$$

Además, debido a que los esfuerzos de cada bond conectado a una unión-0 son iguales, sólo un bond conectado puede tener especificado un esfuerzo como una entrada. Regresando al ejemplo de la Figura A.18 (a), las causalidades en los bond conectados indican que  $f_2$  y  $f_3$  son entradas hacia la unión-0 usadas para calcular  $f_1$  como una salida. Por eso, la ecuación anterior debería ser reescrita como

$$f_1 = f_2 + f_3. \quad (\text{A.53})$$

Para dejar bien claro la asignación de la causalidad, La figura A.18 (a) muestra el diagrama de bloques correspondiente.

Ahora, para el ejemplo de la unión de las Figura A.17 (d) y (f). Tras una examinación detallada, surgen dos rasgos en común:

1. En cada ejemplo, la *primera condición* es que los elementos interconectados tiene un *flujo común*. Los componentes eléctricos conectados en flujo en serie tiene la misma corriente  $i$ . De igual forma, en un circuito hidráulico si tres elementos, por ejemplo, son conectados “en serie”, estos tienen el mismo caudal de flujo  $Q$ . Los elementos de fuerzas múltiples conectados a un carrito sin masa se moverá todos con una misma velocidad  $v$ .

2. Para cada ejemplo, la *segunda condición* es que existe una *suma de esfuerzos*. Recordando la ley de voltajes de Kirchhoff que la caída de voltaje dentro de un lazo suman cero,  $e_1 - e_2 - e_3 = 0$ . Básicamente ocurre lo mismo en circuitos hidráulicos,  $\Delta P_1 - \Delta P_2 - \Delta P_3 = 0$ . Cuando los resortes o los amortiguadores se unen en un mismo punto a un cuerpo rígido ocurre una sumatoria de fuerza,  $F_1 + F_2 = 0$ .

En bond graphs, las uniones que tienen flujo común y suma de esfuerzos se conocen como *uniones-1*. Para uniones de flujo común se tiene,

$$f_1 = f_2 = f_3 = \dots = f. \quad (\text{A.54})$$

Mediante la sustitución anterior en la ecuación (1.49), la suma de esfuerzos para la unión-1 resulta en

$$\sum_{j=1}^n P_j = \sum_{j=1}^n e_j f_j = f \sum_{j=1}^n e_j = 0 \implies \sum_{j=1}^n e_j = 0. \quad (\text{A.55})$$

La dirección de la potencia para los bonds conectados a una unión-1 indica, relativo a la unión, si el esfuerzo que entra a cada bond conectado es positivo o negativo. Además, solo un bond conectado a una unión-1 puede estar especificado como una entrada. Por consiguiente, el ejemplo de unión-1 en la Figura A.18 (c) tiene la relación entrada-salida que resulta de la suma de los esfuerzos:

$$e_1 = e_2 + e_3. \quad (\text{A.56})$$

Para aclarar, las direcciones de la potencia en una *unión-0* son usadas para indicar la convención de signos para la sumatoria de *flujos* en los bonds conectados, y las direcciones de potencia en una *unión-1* son usadas para indicar la convención de signos para la sumatoria de *esfuerzos* en los bonds conectados. La Tabla A.5 resume las condiciones primera y segunda, y la convención de signos para las uniones tanto -0 como -1.

Las uniones son las representaciones naturales comúnmente usadas de algunas leyes físicas y formulaciones matemáticas. La mayoría ya han sido mencionadas brevemente. En mecánica de traslación, la unión-1 representa la sumatoria de fuerzas que ocurren en movimiento de masas independientes. Cualquier cosa unida a la masa se moverá con la misma velocidad e impondrá una fuerza sobre la masa. Así, una unión-1 en mecánica de traslación representa

Tabla A.5: Resumen de las condiciones de las uniones.

Tipo de Unión	Primera Condición	Segunda Condición	Dirección indicada del bond
<b>Unión-0</b>	Esfuerzo común, $e_1 = e_2 = e_3 = \dots = e$	Suma de flujos, $\sum f_i = 0$	Convención de los signos de los flujos
<b>Unión-1</b>	Flujo común, $f_1 = f_2 = f_3 = \dots = f$	Suma de esfuerzos, $\sum e_i = 0$	Convención de los signos de los esfuerzos

la segunda ley de Newton, o la sumatoria de fuerzas,

$$\sum F = \dot{p}. \quad (\text{A.57})$$

En sumatoria de fuerzas, si se considera la fuerza de inercia  $\dot{p}$  en la suma, las fuerzas ciertamente suman cero:

$$\sum F - \dot{p} = 0. \quad (\text{A.58})$$

Como se verá más adelante cuando se analice la causalidad, la primer formulación separa las causas ( $\sum F$ ) a partir del efecto ( $\dot{p}$ ). De forma similar, en mecánica de rotación, una unión-1 representa una sumatoria de momentos angulares. En circuitos eléctrico, una unión-1 representa la ley de voltajes de Kirchhoff, esta ley establece que la suma de las caídas de voltaje en torno de una malla de lazo cerrada es cero. Al igual que en circuitos eléctricos, las caídas de presión en torno a un lazo en circuitos hidráulicos la suma debe ser también cero. De manera similar, las uniones-0 representan conceptos de ingeniería comunes. En traslación, las uniones-0 representan las velocidades relativas o puntos donde las velocidades son sumadas para determinar una diferencial de velocidad,

$$\Delta v = v_1 - v_2. \quad (\text{A.59})$$

En esta construcción, las causas ( $v_1 - v_2$ ) son aisladas a partir del efecto ( $\Delta v$ ). La velocidad relativa  $\Delta v$ , es técnicamente todavía una velocidad. Por lo tanto, si se considera estos en la sumatoria, la suma de velocidades es exactamente cero.

$$v_1 - v_2 - \Delta v = 0. \quad (\text{A.60})$$

Tabla A.6: Resumen de las condiciones secundarias en las uniones en dominios de energía específicos.

<b>Dominio</b>	<b>Unión-1</b>	<b>Unión-0</b>
Mecánica de Traslación	Segunda ley de Newton $\sum F = \dot{p}$	Velocidad relativa $\Delta v = v_2 - v_1$
Mecánica de Rotación	Sumatoria de momentos $\sum \tau = \dot{h}$	Velocidad angular relativa $\Delta \omega = \omega_2 - \omega_1$
Circuitos Eléctricos	Ley de voltajes de Kirchhoff $\sum e_j = 0$	Ley de corrientes de Kirchhoff $\sum i_j = 0$
Circuitos Hidráulicos	Caída de presión en torno a un lazo $\sum \Delta P = 0$	Suma de caudales de flujo dentro de una unión $\sum Q_j = 0$

Las velocidades angulares relativas o diferenciales aparecen en sistemas rotacionales. Las uniones-0 en circuitos eléctricos representan la ley de corrientes de Kirchhoff (la sumatoria de las corrientes que llegan a un nodo). Una unión hidráulica es el análogo de un nodo en un circuito eléctrico. El caudal de flujo volumétrico debe sumar cero en una unión. Por lo tanto, las condiciones secundarias de la unión representan algunos conceptos de ingeniería comúnmente usados. Estas formulaciones y leyes son resumidas en la Tabla A.6.

## A.2. La causalidad

Un modelo en bond graph representa la arquitectura de un sistema y la manera en que la potencia se intercambia entre los diferentes elementos. Lo anterior permite también que aparezcan explícitamente las relaciones de causa y efecto y la estructura del cálculo de las ecuaciones características asociadas al modelo [Dauphin-Tanguy, 2000].

### A.2.1. El concepto de causalidad

Partiendo de la importante observación de que ningún elemento puede determinar ambas variables de potencia (esfuerzo y flujo) en el bond conectado a él mismo. Si este elemento determina el valor de una de las variables, la magnitud de la otra variable debe ser determinada por el resto del sistema. Para cada bond, si la “información” acerca del esfuerzo es dictada

mediante el elemento en un extremo, la “información” acerca del flujo debe venir desde el extremo opuesto, y viceversa [Banerjee, 2005].

Para entender este punto, se puede imaginar una fuente de voltaje conectada a una resistencia. La fuente de voltaje establece la variable de esfuerzo de manera unilateral, pero no puede determinar la variable de flujo. La corriente que fluye a través del circuito es determinada por la resistencia. Por lo tanto, un elemento  $S_e$  entrega la información de esfuerzo y recibe la información de flujo, mientras que el elemento-R recibe la información del esfuerzo, y entrega la información de flujo. De igual forma, para una fuente de corriente conectada a una resistencia, el elemento  $S_f$  dicta el flujo mientras que el elemento-R dicta el esfuerzo. En un lenguaje ligeramente diferente, se puede decir que el elemento  $S_e$  causa la información de esfuerzo y elemento  $S_f$  causa la información de flujo. El elemento-R causa la información de esfuerzo o la información de flujo dependiendo de la información que recibe.

Dado que en cada bond la información de esfuerzo y la información de flujo van en direcciones opuestas, es suficiente con mostrar la dirección de una de las variables. La convención general es poner la traza causal (barra vertical) en el extremo en el cual se entrega la información de flujo [Banerjee, 2005].

### **A.2.2. Reglas de asignación de la causalidad**

La asignación de la causalidad no es arbitraria, obedece a las reglas reunidas en la Figura A.19.

El procedimiento siguiente (conocido dentro de la literatura anglófona bajo la terminología SCAP, *Sequential Causality Assignment Procedure*) detalla las diferentes etapas en la asignación de la causalidad a un modelo en bond graph [Dauphin-Tanguy, 2000].

### **A.2.3. Procedimiento de Asignación de la Causalidad**

1. Destinar la causalidad obligatoria a las fuentes y a los elementos-R no lineales y entender las implicaciones causales en el entorno respetando las restricciones de causalidad de las uniones que se muestran en la Figura A.19.

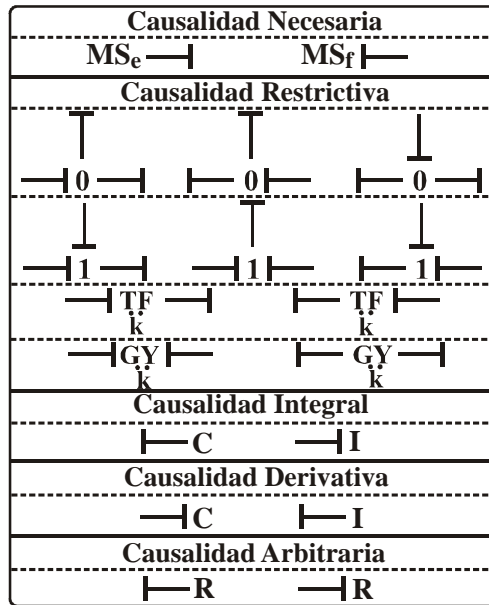


Figura A.19: Consideraciones de causalidad para los elementos en bond graph.

2. Asignar una causalidad integral preferentemente a los elementos-I y -C y extender las implicaciones causales respetando las restricciones de causalidad de las uniones.
3. Completar la causalidad sobre los elementos-R lineales respetando las restricciones de causalidad de las uniones.
4. En caso de conflicto en una unión, buscar el elemento-I o -C que causa el conflicto y colocarle una causalidad derivativa. Regresar al paso 3.

Un Bond Graph es *causalmente correcto*, cuando no existe conflicto de causalidades entre los elementos y las uniones. Se debe observar que la causalidad derivativa de un elemento almacenador de energía proporciona propiedades importantes que se explican a continuación.

#### A.2.4. La causalidad derivativa en un bond graph

En el procedimiento anterior para asignar la causalidad a los elementos de almacenamiento, se dice que la *causalidad apropiada* deber ser mediante una relación integral. Sin embargo, en algunas circunstancias esto no puede ser posible y se tiene que forzar y colocar el trazo

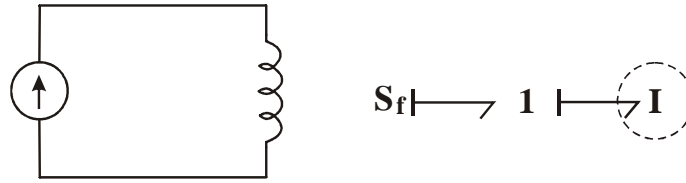


Figura A.20: Ejemplo de causalidad derivativa.

causal en el lado opuesto del bond. Esta causalidad inversa es llamada causalidad derivativa [Banerjee, 2005].

Con la finalidad de que el concepto de causalidad derivativa quede más claro, se verá bajo qué circunstancias puede ocurrir este tipo de causalidad. Considerar una fuente de corriente en serie con un inductor, como se muestra en la Figura A.20.

Es importante notar que en el bond graph se tiene que respetar la regla de asignación de causalidad restrictiva de la Figura A.19 y como resultado se tiene una causalidad derivativa en el elemento-I, mostrado en el círculo. Se sabe que el inductor tiene la propiedad de no permitir que la corriente que fluye a través de él cambie instantáneamente, y el voltaje inducido está dado por,

$$v = L \frac{di}{dt}. \tag{A.61}$$

Entonces, si la corriente enviada por la fuente cambia instantáneamente, el voltaje inducido sería infinito. Esto quiere decir que, no se debería conectar una fuente de corriente en serie con un inductor.

De manera similar, si se conecta una fuente de voltaje en paralelo con un capacitor como se muestra en la Figura A.21.

En la Figura A.21, nuevamente se tienen que respetar la asignación de causalidad restrictiva de la fuente de esfuerzo y de la unión-0. Entonces, el elemento-I presenta una causalidad integral; el elemento-R puede tener ambas causalidades, pero el elemento-C tiene causalidad derivativa. La razón es la misma que en el ejemplo anterior, el capacitor no permite al voltaje de la fuente variar de manera independiente, Si por decir, el voltaje de la fuente entrega una onda cuadrada, la corriente a través del capacitor será infinita en la transición. La conclusión

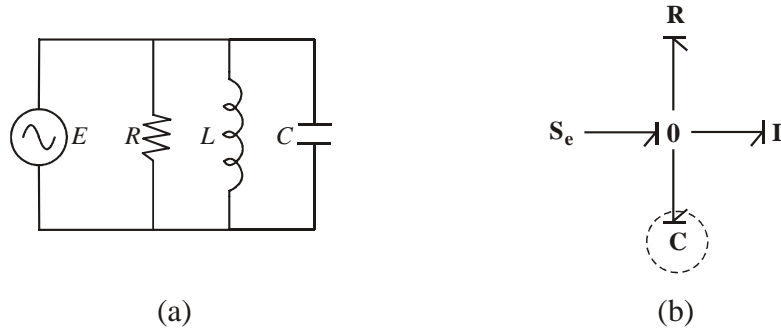


Figura A.21: Circuito RLC en paralelo con causalidad derivativa.

es que un capacitor nunca deberá ser conectado en paralelo con una fuente independiente de voltaje [Banerjee, 2005].

Del circuito de la Figura A.21, se pueden obtener dos posibles bond graphs dependiendo si al elemento-I se le asigna una causalidad integral, entonces el elemento-C tendrá causalidad derivativa o viceversa, es decir, los elementos almacenadores I y C son linealmente dependientes (ya que la carga del capacitor C dependerá de la energía cinética almacenada en el inductor I, o viceversa, el enlace de flujo en el inductor I dependerá de la energía potencial almacenada en el capacitor C) y por lo tanto no es posible asignar causalidad integral a ambos. El número de elementos almacenadores de energía en un sistema en causalidad integral es el número de ecuaciones linealmente independientes en el mismo.

### A.3. Campos Multipuerto

Con los elementos de la metodología de bond graph que se han visto hasta ahora, se pueden construir modelos dinámicos para una variedad de sistemas físicos, es decir, utilizando elementos de puerto-1:  $-R$ ,  $-C$ ,  $-I$ ,  $S_e$ ,  $S_f$ ; elementos de puerto-2:  $TF$ , y  $GY$ ; y los puerto-3: uniones 0 y 1. En esta sección se introducen los campos, los cuales son generalizaciones de multipuerto- $R$ ,  $-C$ ,  $-I$ .

Utilizando campos y estructuras unión, se pueden estudiar, de manera conveniente, sistemas que contengan componentes multipuertos complejos usando bond graph, de hecho, los bond

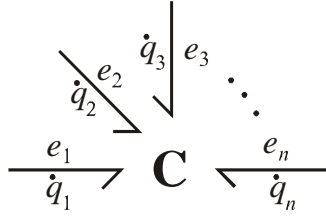


Figura A.22: Símbolo de un campo-C con n puertos.

graphs con campos y estructura de unión prueban ser el camino más efectivo en el modelado de sistemas multipuerto complejos, combinando detalles estructurales y una claridad de fácil visualización [Karnopp, 2012].

### A.3.1. Campos de Almacenamiento de Energía

Las generalizaciones de multipuerto de -C y -I, las cuales son llamadas *campos-C* y *campos-I*, respectivamente, las cuales también son conservativas de energía.

### A.3.2. Campos-C

El símbolo es simplemente la letra C con tantos bonds como tenga de puertos el campo-C.

Un campo-C de  $n$  puertos se muestra en la Figura A.22 [Karnopp, 2012].

La energía  $E$  almacenada en el campo-C puede ser expresada como,

$$\begin{aligned}
 E &= \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^n (e_i, f_i) dt = \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^n e_i \dot{q}_i dt, \\
 E &= \int_{q_0}^q \sum_{i=1}^n e_i(q) dq_i = \int_{q_0}^q \sum_{i=1}^n e(q) dq = E(q), \tag{A.62}
 \end{aligned}$$

donde  $f_i dt = dq_i$ .

En la Figura A.23 se muestra un sistema mecánico y otro eléctrico para mostrar el uso de los campos-C donde las leyes constitutivas de los puertos externos deben ser deducidas desde las leyes constitutivas de los elementos constituidos en el campo-C.

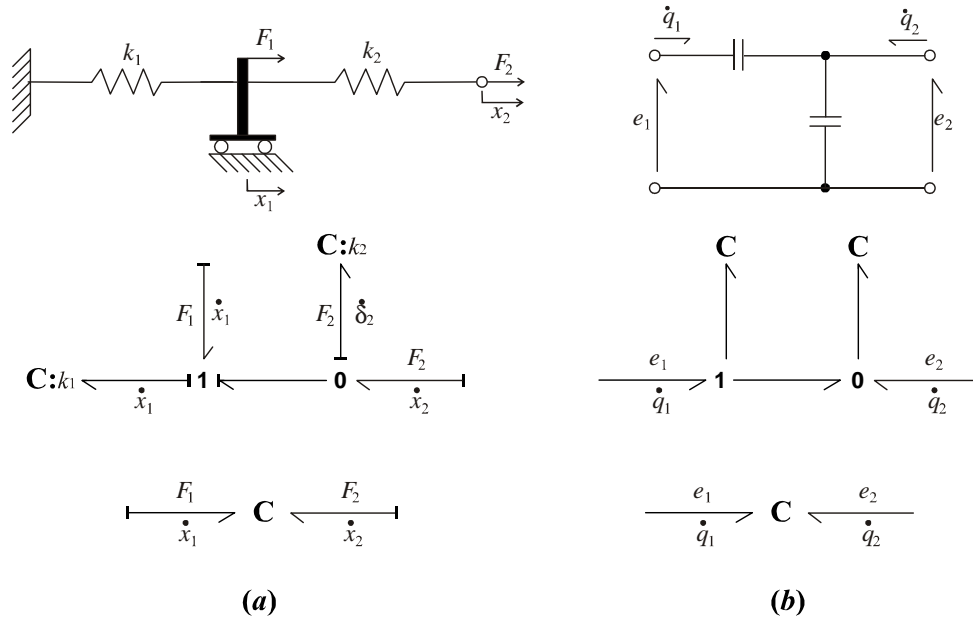


Figura A.23: Un Campo-C compuesto por elementos de puertos-1, -C y uniones, (a) ejemplo mecánico; (b) ejemplo eléctrico.

### Consideraciones causales para campos-C

Como en el caso de los elementos de puerto-1, se puede diferenciar entre causalidad derivativa y causalidad integral para los campos-C multipuerto, pero los campos multipuerto también admiten la causalidad integral-derivativa mezclada. La forma de causalidad completamente integral es la que se muestra en la Figura A.24 [Karnopp, 2012].

Las leyes constitutivas pueden ser establecidas por,

$$e_i = [\Phi_{C_i}(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n)]^{-1} \quad \text{donde } i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (\text{A.63})$$

La forma de causalidad completamente derivativa se muestra en la Figura A.25.

Las leyes constitutivas están en la forma,

$$q_i = \Phi_{C_i}(e_1, e_2, e_3, \dots, e_n) \quad \text{donde } i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (\text{A.64})$$

En algunos sistemas mecánicos se puede tener un campo-C con causalidad mezclada, es decir, con bonds en causalidad derivativa e integral quedando de la forma que se representa en la

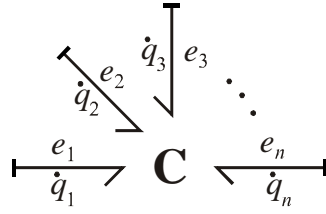


Figura A.24: Un campo-C con  $n$  puertos con causalidad completamente integral.

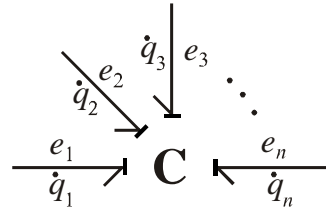


Figura A.25: Un campo-C con  $n$  puertos con causalidad completamente derivativa.

Figura A.26.

Entonces las leyes constitutivas son,

$$\begin{aligned}
 e_i &= \Phi_i(q_1, q_2, \dots, q_j, e_{j+1}, \dots, e_n) \quad \text{donde } i = 1, 2, \dots, j. \\
 q_k &= \Phi_k(q_1, q_2, \dots, q_j, e_{j+1}, \dots, e_n) \quad \text{donde } k = j + 1, \dots, n.
 \end{aligned}
 \tag{A.65}$$

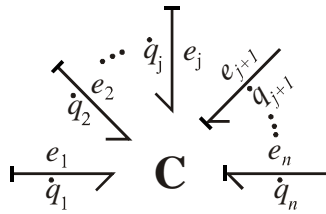
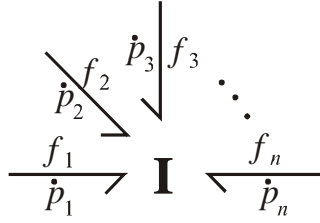


Figura A.26: Un campo-C con  $n$  puertos con causalidad mezclada integral-derivativa.


 Figura A.27: Símbolo de un campo-I con  $n$  puertos.

### A.3.3. Campos-I

Los campos-I son estrictamente análogos (es decir, no son iguales) a los campos capacitivos. En lugar de leyes constitutivas relacionando esfuerzos a desplazamientos, los elementos inerciales tienen leyes constitutivas relacionando flujos con momentos de inercia.

Todos los resultados para campos-C se pueden aplicar para los campos-I, si los flujos son sustituidos por esfuerzos y momentos de inercia son sustituidos por desplazamientos. Por ejemplo, la energía almacenada en un campo-I de  $n$  puertos de la Figura A.27 es,

$$\begin{aligned}
 E &= \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^n f_i e_i dt = \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^n f_i \dot{p}_i dt, \\
 E &= \int_{p_0}^p \sum_{i=1}^n f_i(p) dp_i = \int_{p_0}^p \sum_{i=1}^n f(p) dp = E(p), \tag{A.66}
 \end{aligned}$$

Para el caso lineal, las matrices de masas y las matrices de inductancias, deben de ser simétricas para satisfacer la conservación de energía. En la Figura A.28 se muestran tres ejemplos de los campos-I.

Las leyes constitutivas para los ejemplos de la Figura A.28, son las ecuaciones (A.67), (A.68) y (A.69), para los ejemplos (a), (b) y (c) respectivamente.

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & M_{12} \\ M_{12} & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}, \tag{A.67}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & -M_{12} \\ -M_{12} & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}, \tag{A.68}$$

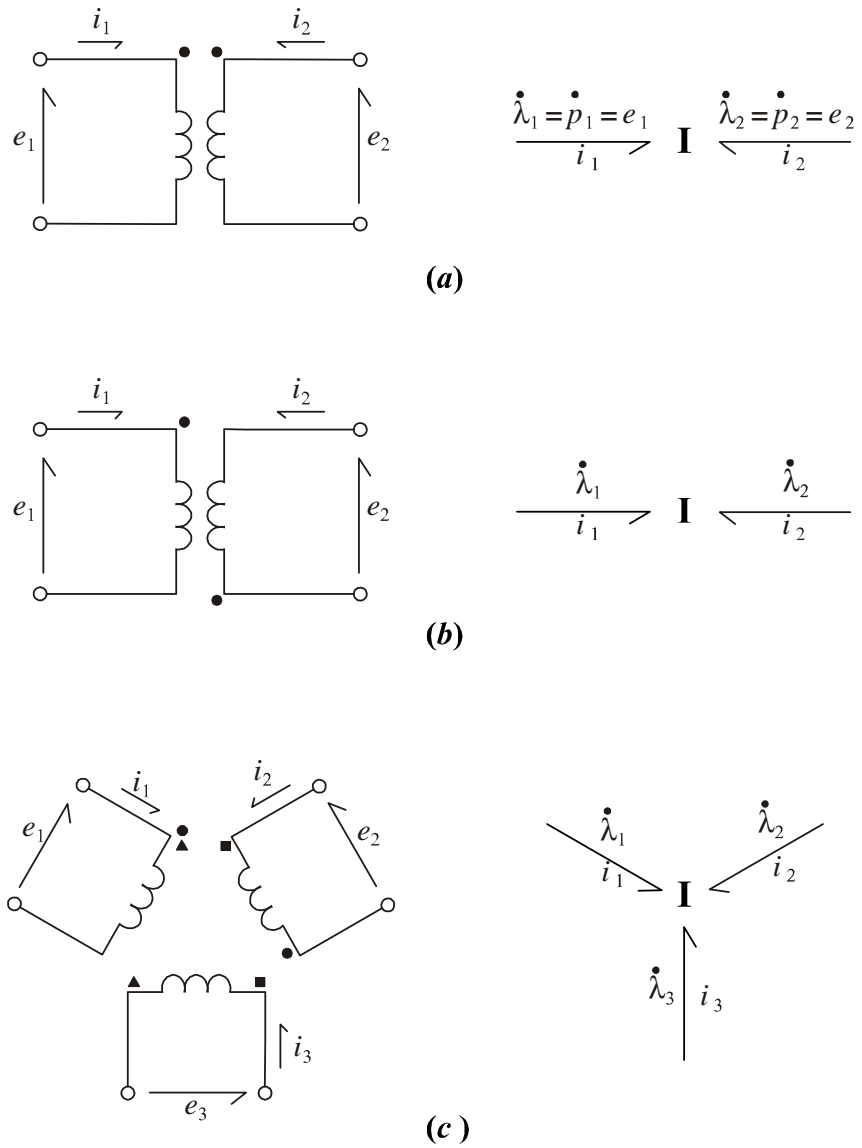


Figura A.28: Inductancia mutua en sistemas eléctricos, (a) y (b) campos-I con diferente orientación de embobinado; (c) un campo-I con tres puertos.

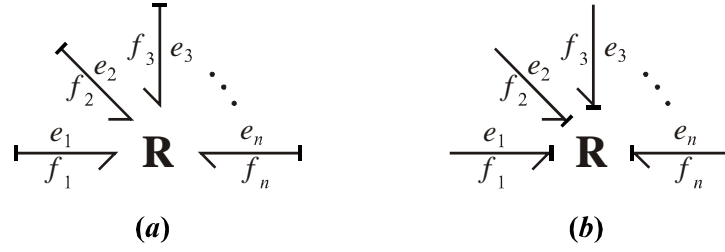


Figura A.29: El campo-R (a) en forma de resistencia; (b) en forma de conductancia.

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & -M_{12} & -M_{13} \\ -M_{12} & L_2 & M_{23} \\ -M_{13} & M_{23} & L_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.69})$$

Independientemente de la convención en la orientación de embobinado, la matriz de inducancia y su inversa serán simétricas si el campo-I es conservativo de energía.

#### A.3.4. Campos-R

Las leyes constitutivas que relacionan los esfuerzos y los flujos de los  $n$  puertos de un campo-R, son por medio de funciones estáticas (no relacionan los estados), o algebraicas. Esta definición incluye elementos conservativos de potencia tal como uniones 0 y 1, y elementos que contienen fuentes como los campos-R, pero en la práctica la mayoría de los campos-R que son estudiados disipan potencia. La causalidad para los campos-R usualmente es determinada por la fuente y por los elementos de almacenamiento de energía en el sistema. Dos modelos causales fundamentales son mostrados en la Figura A.29.

Las leyes constitutivas para la causalidad de resistencia de la Figura A.29 (a) son,

$$e_i = \Phi_{R_i}(f_1, f_2, f_3, \dots, f_n) \quad \text{donde } i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (\text{A.70})$$

Las leyes constitutivas para la causalidad de conductancia de la Figura A.29 (b) son,

$$f_i = [\Phi_{R_i}(e_1, e_2, e_3, \dots, e_n)]^{-1} \quad \text{donde } i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (\text{A.71})$$

En la Figura A.30 se ilustra un ejemplo para causalidad de resistencia de un campo-R y sus

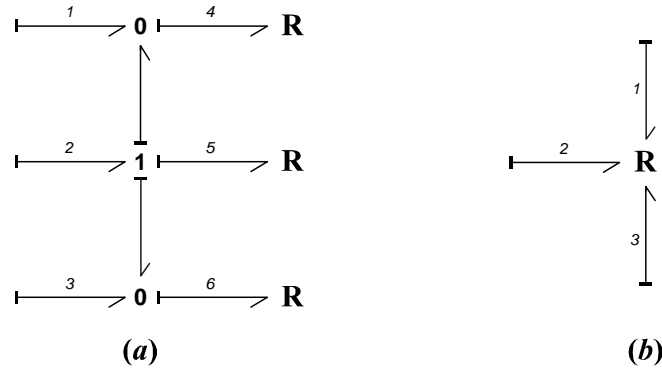


Figura A.30: (a) Ejemplo de un campo-R en forma de resistencia; y (b) su representación reducida.

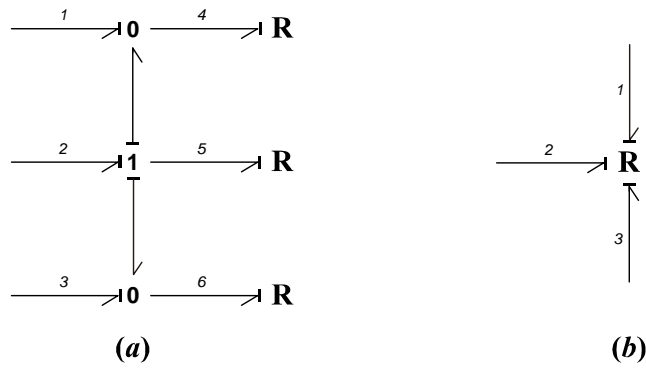


Figura A.31: (a) Ejemplo de un campo-R en forma de conductancia; y (b) su representación reducida.

leyes constitutivas son,

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_4 & R_4 & 0 \\ R_4 & R_4 + R_5 + R_6 & R_6 \\ 0 & R_6 & R_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.72})$$

En la Figura A.31 se ilustra el mismo ejemplo pero ahora con causalidad de conductancia del un campo-R.

Sus leyes constitutivas son,

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} & -\frac{1}{R_5} & \frac{1}{R_5} \\ -\frac{1}{R_5} & \frac{1}{R_5} & -\frac{1}{R_5} \\ \frac{1}{R_5} & -\frac{1}{R_5} & \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.73})$$

#### A.4. Ejemplos de Sistemas Simples en Bond Graph

Ya han sido presentados todos los elementos necesarios para construir un bond graph básico. Más adelante se mostrará cómo construir bond graphs para sistemas moderadamente más complicados y como obtener sistemáticamente, a partir del bond graph resultante, las ecuaciones de espacio de estado correspondientes que describen la respuesta dinámica del sistema. En esta sección, se presentan uno cuantos ejemplos simples, estos ejemplo se dan con la finalidad de introducir la aplicación de los bond graphs en el modelado de sistemas dinámicos [Kypuros, 2013].

Tomando el primer ejemplo de un sistema de amortiguador-resorte-masa descrito en la Figura A.32 (a). Es aparente que la masa, el resorte, el amortiguador y la fuerza externa tiene una cosa en común. La fuerza externa  $F$ , aplicada en el extremo izquierdo del resorte es la misma fuerza que experimenta la masa y el amortiguador; es decir, tienen la misma fuerza llamada  $F$ . Por consiguiente, puede ser usada una unión de esfuerzo común para conectar la fuente de esfuerzo ( $F$ ), el elemento-C (el resorte), el elemento-R (el amortiguador), y el elemento-I (la masa). La Figura A.32 (b) muestra el bond graph y (c) ilustra las relaciones matemáticas y de causalidad representadas mediante el bond graph.

El sistema de amortiguador-resorte-masa de la Figura A.32 (d). En este, el amortiguador, el resorte, la masa y la fuerza se mueven con la misma velocidad, por lo tanto, tienen un flujo común. La unión-1 en la Figura A.32 (e) indica que los cuatro elementos tienen la misma velocidad y que allí ocurre una sumatoria de fuerzas. Por lo tanto, la razón de cambio con respecto al tiempo de la deflexión del resorte  $x$ , es

$$\dot{x} = \frac{1}{m}p, \quad (\text{A.74})$$

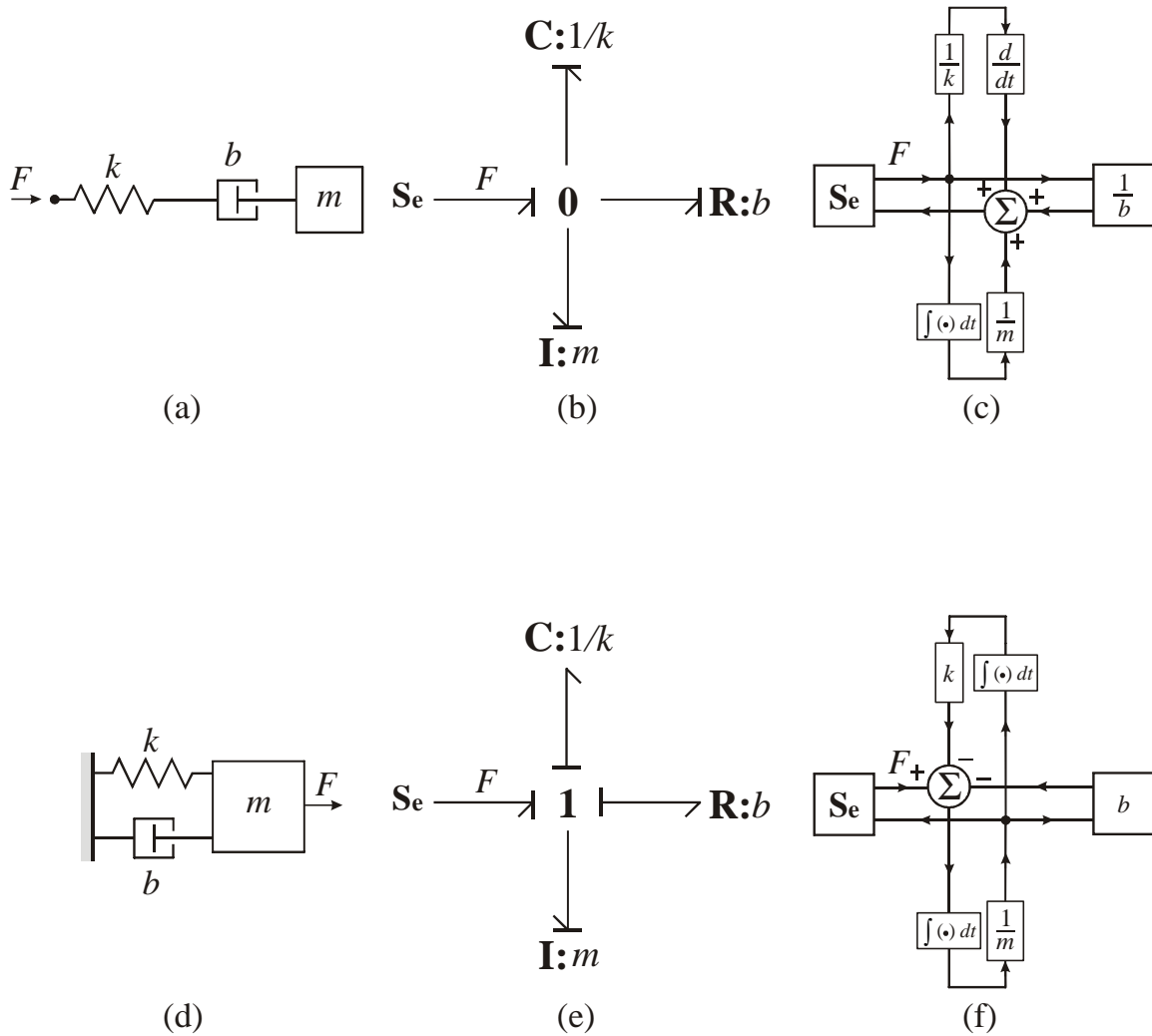


Figura A.32: (a) - (c) Diagrama esquemático, bond graph y diagrama de bloques para un sistema amortiguador-resorte-masa con esfuerzo común; (d) - (f) Diagrama esquemático, bond graph y diagrama de bloques para un sistema amortiguador-resorte-masa con flujo común.

y la razón de cambio con respecto al tiempo del momento  $p$ , es

$$\dot{p} = F - kx - \frac{b}{m}p. \quad (\text{A.75})$$

El modelo resultante es un conjunto de dos ecuaciones diferenciales de primer orden. Si la masa se considera constante, reordenando se tiene

$$\dot{p} = \frac{d}{dt}(mv) = \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = m\ddot{x}, \quad (\text{A.76})$$

Las ecuaciones anteriores pueden ser combinadas para obtener una sola ecuación de segundo orden para el sistema amortiguador-resorte-masa que resulta más familiar

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F, \quad (\text{A.77})$$

El análogo en circuitos eléctricos para el sistema amortiguador-resorte-masa es mostrado en la Figura A.33.

Los elementos del circuito de la Figura A.33 (a) están conectados en paralelo y tienen la misma caída de voltaje, esta caída de voltaje es especificada como voltaje de entrada. Por lo tanto, el bond graph correspondiente tiene conectados cuatro elementos a una unión-0, una fuente de esfuerzo (una fuente de voltaje), un elemento-R (una resistencia), un elemento-C (un capacitor), y un elemento-I (un inductor). La unión-0 representa la sumatoria de corrientes en el nodo superior debida a la ley de corrientes de Kirchhoff. Se puede notar que el bond graph resultante y el diagrama a bloques correspondiente son exactamente los mismos que para el sistema amortiguador-resorte-masa en la Figura A.32 (a).

El circuito de la Figura A.33 (c) tiene cuatro elementos conectados en serie, y por lo tanto fluye la misma corriente a través de ellos. El circuito es gobernado por la ley de voltajes de Kirchhoff. Como se describe en la Figura A.32 (d), una unión-1 es usada para indicar que se tienen una corriente común,

$$\dot{q} = \frac{1}{L}\lambda, \quad (\text{A.78})$$

fluye a través de los elementos y representa la suma de las caídas de voltaje en la malla del circuito,

$$\dot{\lambda} = e - \frac{1}{C}q - \frac{R}{L}\lambda. \quad (\text{A.79})$$

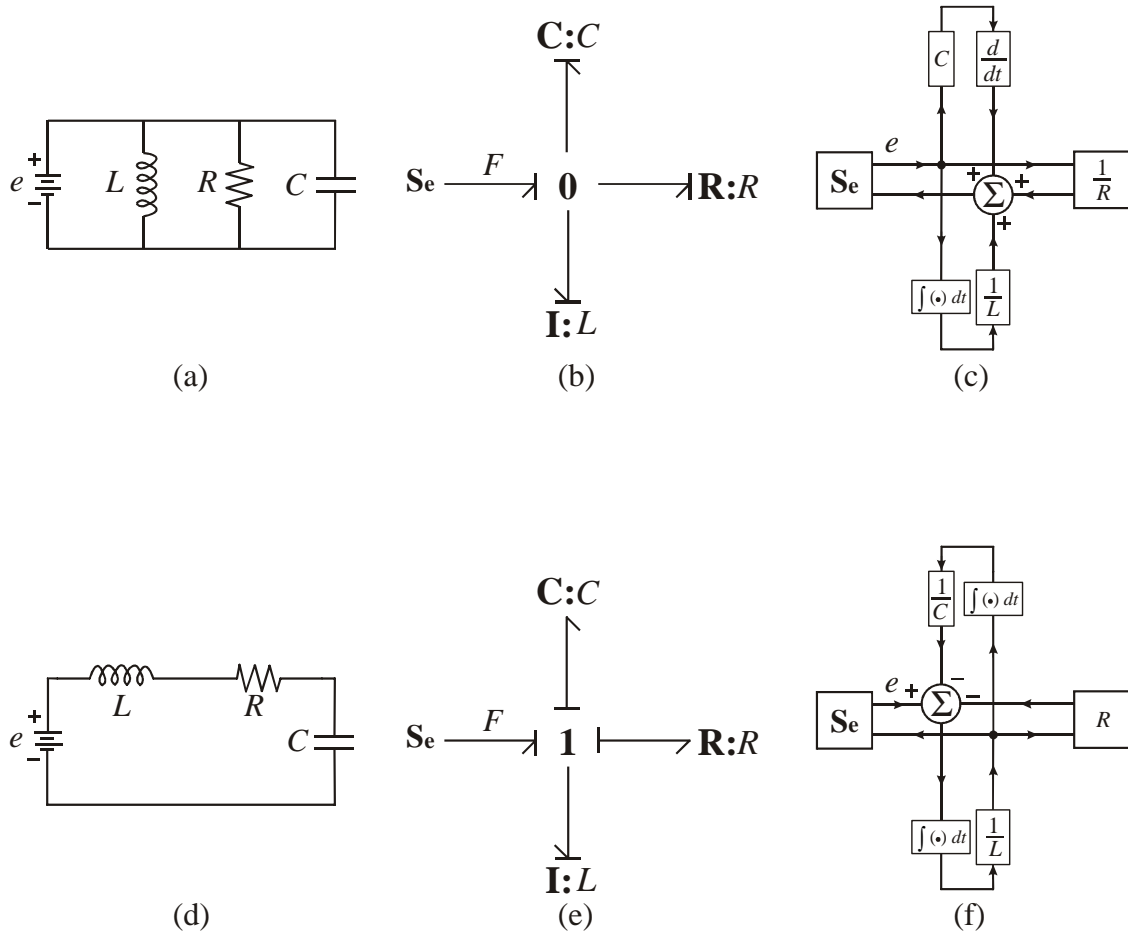


Figura A.33: (a) - (c) Diagrama esquemático, bond graph y diagrama de bloques para un circuito eléctrico con esfuerzo común; (d) - (f) Diagrama esquemático, bond graph y diagrama de bloques para un circuito eléctrico con flujo común.

Recordando que  $\lambda$  es el momento eléctrico,

$$\lambda = Li = L\dot{q}, \quad (\text{A.80})$$

las ecuaciones anteriores pueden ser reorganizadas para obtener una ecuación diferencial de segundo orden más común para un circuito RLC en serie,

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = e. \quad (\text{A.81})$$

El diagrama a bloques en la Figura A.33 (c) muestra las relaciones matemáticas y de causalidad representadas mediante el bond graph en la Figura A.33 (d). Nuevamente, se puede notar que el bond graph y el diagrama a bloques son los mismos que los mostrados para el sistema amortiguador-resorte-masa descrito en la Figura A.32 (d). También, se debe notar que la ecuación diferencial de segundo orden (A.81) tiene el mismo formato que la ecuación diferencial de segundo orden (A.77) analizada para el sistema amortiguador-resorte-masa en la Figura A.32 (d) [Kypuros, 2013].

## A.5. Obtención de las Ecuaciones de Estado en Bond Graph

Una amplia clase de sistemas dinámicos pueden ser descompuestos en los elementos vistos en secciones anteriores, elementos almacenadores de energía (elementos-I y -C), disipadores de energía (elementos-R), convertidores de energía (transformadores y giradores), fuentes externas (fuentes de esfuerzo y fuentes de flujo), y relaciones tanto de esfuerzo como de flujo común (uniones-0 y -1) [Kypuros, 2013].

En esta sección se introducen las reglas generales para obtener, a partir de la representación en bond graph, las ecuaciones algebraicas y diferenciales que definen un sistema dinámico utilizando una representación matemática para los cuatro dominios de energía principales.

### A.5.1. Reglas Generales

Existen algunas reglas generales que ya han sido introducidas o dadas de manera implícita en secciones anteriores, pero en esta sección se volverán a exponer de manera explícita para

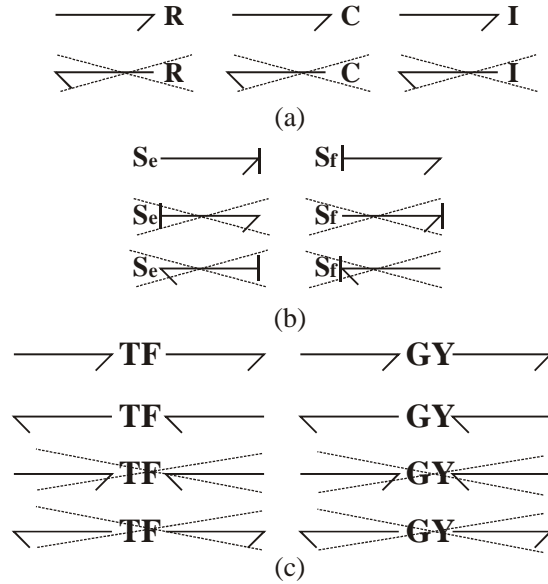


Figura A.34: Direcciones de potencia asumidas generalmente para elementos disipadores y elementos almacenadores de energía.

un mejor entendimiento. Usualmente, como los describe la Figura A.34 (a), se asume que la potencia fluye desde el sistema hacia los elementos almacenadores de energía, por consiguiente, la semiflecha del bond graph casi siempre apunta hacia los elementos-I, -C, -R.

Además, como se muestra en la Figura A.34 (b), en las fuentes de esfuerzo y fuentes de flujo se asume que proporcionan potencia hacia el sistema. Las fuentes de esfuerzo especifican que un esfuerzo entra al sistema y las fuentes de flujo especifican un flujo que está entrado al sistema.

Los elementos de dos puertos tienen una convención de la potencia que pasa a través de ellos, donde los bonds conectados apuntan en la misma dirección. Esto es descrito en la Figura A.34 (c). En los transformadores y en los giradores, un bond debe especificar la potencia que entra y otro la potencia que sale.

Ocasionalmente, para sintetizar o simplificar un bond graph se utiliza la Figura A.35 Estas estructuras pueden ser simplificadas rápidamente. Si una unión-0 ó -1 tiene solo dos bond, entonces los esfuerzos deben ser iguales y los flujos también. Esto se puede demostrar matemáti-

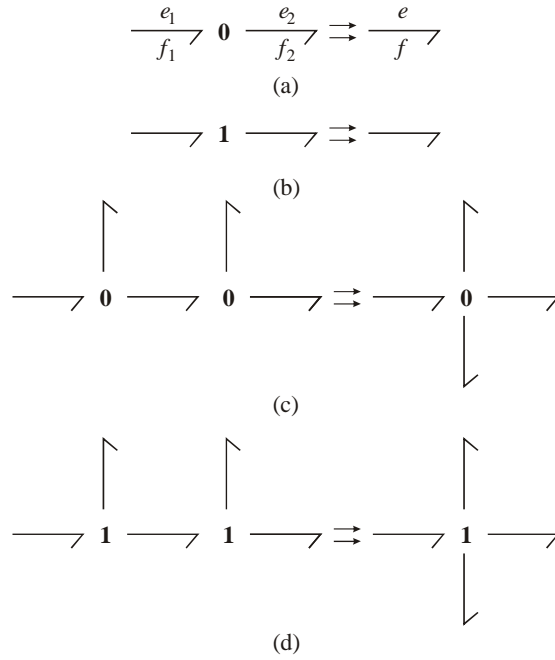


Figura A.35: a) unión-0 de dos puertos, (b) unión-1 de dos puertos, (c) uniones-0 adyacentes y (d) uniones-1 adyacentes.

amente analizando las uniones de puerto-2. Tomando por ejemplo la unión-0 descrita en la Figura A.35 (a).

Las relaciones para la unión-0 son

$$e_1 = e_2 \text{ (esfuerzo común),} \tag{A.82}$$

y

$$f_1 - f_2 = 0 \text{ (suma de flujos).} \tag{A.83}$$

De tal manera que, a partir de (A.35) se puede demostrar que  $f_1 = f_2$ , y de este modo no sólo los esfuerzos son iguales, sino que también los flujos lo son. La unión en sí misma es redundante y puede ser reducida a un bond simple como se describe en la Figura A.35 (a). Lo mismo ocurre con las uniones-1 de dos puertos. Cuando dos uniones-0 o dos uniones-1 están adyacentes una a la otra, las uniones conectadas pueden ser reducidas a una sola como se muestra en la Figura A.35 (c) y (d).

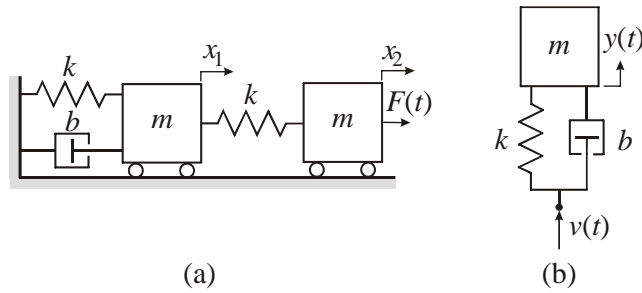


Figura A.36: (a) Sistema amortiguador-resorte-masa y (b) modelo simple de un cuarto de la suspensión de un vehículo.

### A.5.2. Traslación Mecánica

Los sistemas mecánicos que son puramente traslativo se clasifican como sistemas de traslación mecánica. Algunos ejemplos como son un sistema de suspensión y amortiguador-resorte-masa son descritos en la Figura A.36. Aunque la traslación ocurre generalmente en tres dimensiones, los problemas analizados aquí serán restringidos a un movimiento planar. Sin embargo, los métodos presentados son aplicables usualmente a movimiento tridimensional [Kypuros, 2013]. Los sistemas amortiguador-resorte-masa son evaluados usando mecánica newtoniana básica. Antes de introducir las reglas básicas para la síntesis de un bond graph para sistemas mecánicos de traslación, se recordaran los elementos básicos de mecánica de traslación. Las masas almacenan energía cinética cuando están en movimiento y son consideradas elementos-I. Los estados integrados asociados con las masas son los momentos de masa y las fuerzas frecuentemente son sumadas en una masa. Los resortes son almacenadores de energía potencial, por lo que son considerados elementos-C. Sus estados integrados asociados son las deflexiones del resorte. La deflexión del resorte está relacionada mediante una integral de la velocidad relativa o la velocidad diferencial entre los extremos del resorte. Los amortiguadores o absorbedores de impacto disipa energía y son considerados elementos-R. Las palancas y los balancines operan como transformadores. Las diferenciales de velocidad son representadas mediante uniones-0, y las uniones-1 son usadas para el modelado de la suma de fuerzas.

Las reglas básicas para sintetizar bond graphs para sistemas de traslación mecánica son:

1. *Identificar las velocidades distintas.* Para cada velocidad distinta establecer una unión-1. Las velocidades distintas son con frecuencia asociadas a las masas. Por consiguiente, si una masa es asociada específicamente con una velocidad distinta debe ser colocado un elemento-I para representar la masa, la cual debe ser colocado directamente usando una unión-1 mediante un bond. Además, si existe cualquier otro elemento relacionado directamente con una velocidad específica, también debe aparecer en la unión-1 asociada.
2. *Insertar la generación de fuerzas con puertos-1 y los convertidores de energía con puertos-2.* Los generadores de fuerza puertos-1 (i.e. amortiguadores y resortes) son colocados entre los pares apropiados de uniones-1 mediante uniones-0. Recordando que la condición secundaria para una unión-0 es una sumatoria de flujos. En sistemas mecánicos, las uniones-0 son usadas para calcular las velocidades diferenciales. Si un resorte o un amortiguador es sujetado entre dos puntos que se están moviendo, este experimentará una diferencial de velocidad entre sus dos extremos. Además, los resortes y los amortiguadores generan fuerzas de igual magnitud pero sentido opuesto en sus extremos. Sus extremos se mueven generalmente a velocidades diferentes. De este modo, estos elementos son conectados mediante uniones-0 para indicar la fuerza de magnitud común y las velocidades distintas en cada extremo del mismo. Los transformadores y los giradores pueden aparecer también entre las velocidades distintas conectados mediante palancas o poleas.
3. *Asignar las direcciones de las potencias.* Usando las reglas generales para asignar las direcciones de las potencias detalladas en la sección anterior. Los bonds remanentes con una dirección de potencia no asignada se puede hacer una asignación de forma arbitraria al igual que en sistemas dinámicos donde una convención de signos es elegida y usada de manera consistente. Sin embargo, algunas reflexiones pueden minimizar la necesidad de trabajo extra en la obtención del modelo. Por ejemplo, en el siguiente paso se eliminarán las uniones de velocidad cero, Esto llevará de manera inevitable que las uniones tengan sólo dos bonds conectados, Así, es conveniente seguir una convención de potencia de entrada-potencia de salida tal que la unión pueda ser reducida como se ilustra en la Figura A.35 sin tener que involucrarse ningún cambio de signo.
4. *Eliminar las velocidades cero.* Para diferenciar entre las velocidades en cada extremo

de un resorte o de un amortiguador, las velocidades cero son puntos distintos identificados de manera explícita y se usa una unión-1 como un “marcador de referencia”. Las uniones-1 de velocidad cero son redundantes. Por lo tanto, las uniones-1 de velocidad cero y sus bonds conectados son eliminados. Esto ayuda a simplificar el bond graph resultante.

5. *Simplificar.* Simplificar el bond graph resultante mediante la reducción de uniones-1 y -0 de puerto-2 como se describe en la Figura A.35 (a) y (b) y reorganizar las uniones adyacentes que pueden ser reducidas como lo describen las Figura A.35 (c) y (d).

6. *Asignar la causalidad.* Asignar las trazas causales (barra vertical en la punta de la semiflecha) en los bonds para indicar las relaciones entrada-salida en cada puerto. Este paso será discutido con más detalle en una sección más adelante. Por ahora se enfocará en sintetizar y simplificar el bond graph sin causalidad. La asignación de la causalidad es el último paso antes de obtener las ecuaciones algebraicas y diferenciales que representan la dinámica del sistema a partir del bond graph.

Las reglas generales para sistemas mecánicos de traslación son mejor ilustradas mediante un ejemplo.

**Ejemplo A.1.** Obtener el bond graph para el sistema amortiguador-resorte-masa descrito en la Figura A.36 (a).

**Solución.** El primer paso es *identificar las velocidades diferentes*. Como se muestra en la Figura A.37 (b), existen tres velocidades distintas, la velocidad cero del suelo, la velocidad de la masa que está más a la izquierda, y la velocidad de la masa del extremo derecho. Como se indica en la Figura A.37 (c), hay tres elementos asociados directamente con cada una de esas velocidades. Una fuente de flujo es usada para identificar la velocidad cero del suelo. Elementos-I son colocados directamente fuera de las otras uniones-1 para representar las dos masas, y una fuente de esfuerzo es colocada fuera de la tercera unión-1 para agregar la fuerza externa  $F(t)$ .

El siguiente paso es *insertar la generación de fuerzas con puertos-1 y los convertidores de energía con puertos-2*. Entre el suelo y la primera masa, hay un amortiguador (elemento-R) y un resorte (elemento-C). Además, otro resorte (elemento-C) aparece entre las dos masas. Por consiguiente, como se muestra en la Figura A.37 (d), un elemento-C es colocado usando una

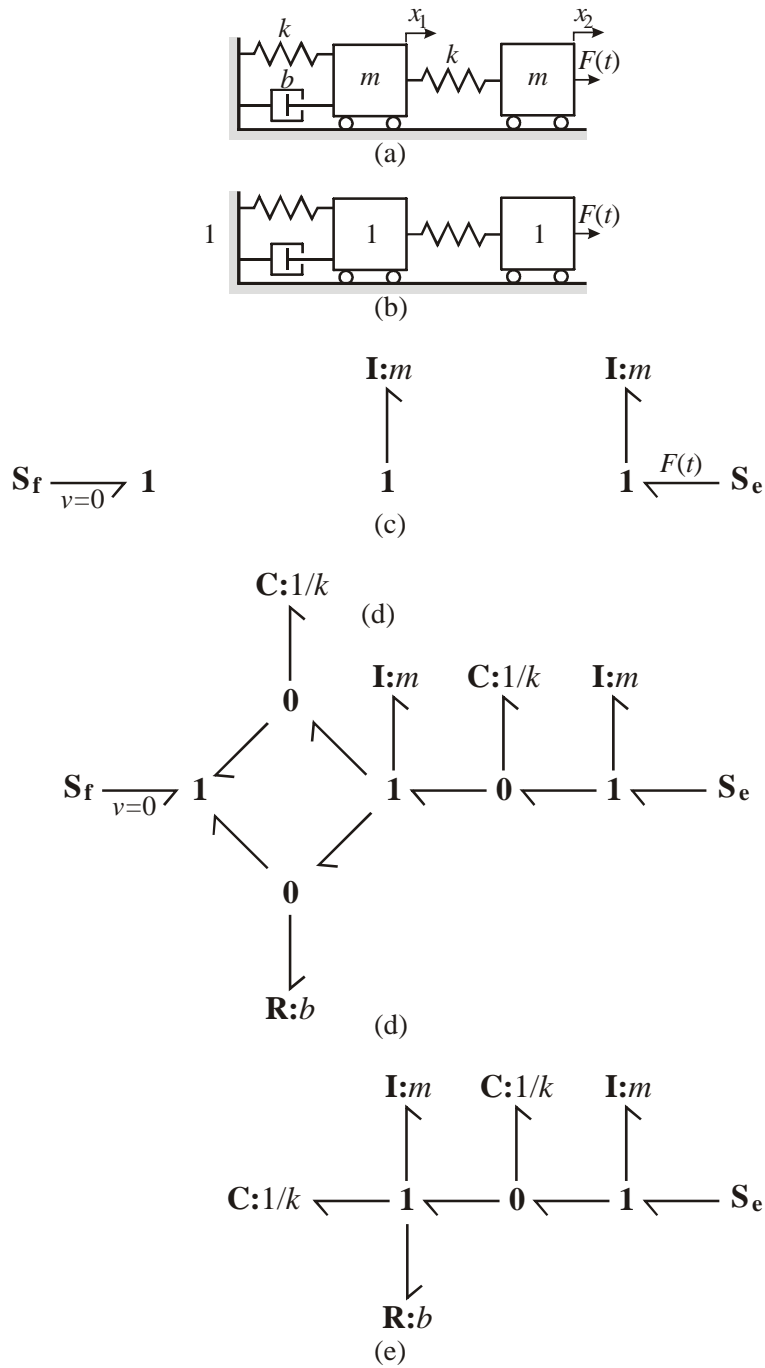


Figura A.37: Ejemplo de sistema mecánico de traslación.

unión-0 entre las uniones-1 más al extremo izquierdo y la de en medio tal como un elemento-R. El otro elemento-C es colocado entre la unión-1 de en medio y la unión-1 en el extremo derecho.

En ese punto, se pueden *asignar las direcciones de las potencias*. Se puede notar que en la Figura A.37 (d) los bonds son dirigidos generalmente de derecha a izquierda y así en cada unión-0 la velocidad relativa es calculada como la velocidad del bond de la derecha menos la velocidad del bond de la izquierda. Esto podría ser hecho en dirección opuesta para obtener un bond graph equivalente.

Ahora que el bond graph básico está establecido, se puede comenzar con la simplificación. Primero, se eliminan las fuentes de velocidad cero involucradas borrando las uniones y los bonds conectados directamente a esa unión. Una vez realizado esto, el bond graph resultante simplificado luce como se muestra en la Figura A.37 (e). Este ejemplo ilustra todo el proceso de modelado, excepto la regla general final (*la asignación de la causalidad*). Esta se tocará más adelante.

### A.5.3. Rotación Mecánica

Los sistemas mecánicos de rotación son análogos directamente a los sistemas mecánicos de traslación. Esto resulta del hecho de que las ecuaciones de movimiento para rotación, al igual que para traslación, son obtenidas mediante el uso de las leyes de Newton, especialmente de la segunda ley de Newton. Por lo tanto, no debería causar ninguna sorpresa que las reglas generales para la obtención del bond graph para mecánica rotacional son similares para mecánica traslacional [Kypuros, 2013].

Antes de comenzar, se revisarán brevemente los elementos en los sistemas de rotación. Recordando que aunque con frecuencia los rodamientos son diseñados para ser muy eficientes, estos disipan una cantidad nominal de energía y por esto son clasificados como elementos-R. Una barra de torsión o resorte almacena energía potencial cuando sus extremos tienen un giro relativo el uno con el otro. Esta energía potencial es liberada cuando el eje se descarga. Por lo tanto, un resorte de torsión es un elemento-C. Las inercias rotacionales están compuestas

de masas. Como las masas están girando, estas se cargan de energía cinética haciendo de la inercia un elemento-I. Los pares de engranes y los engranes de cadena operan como transformadores en sistemas rotacionales. Las diferenciales de velocidad angular ocurren en las uniones-0, y los momentos (pares de torsión) son agregados a las uniones-1.

Al igual que en los sistemas mecánicos de traslación, se inicia el proceso de síntesis del bond graph mediante la identificación de lugares donde el sistema tiene velocidades distintas. Estas frecuentemente ocurren donde hay una inercia y/o donde los elementos están rígidamente conectados.

Las reglas básicas para la obtención del bond graph para sistemas mecánicos de rotación son:

1. *Identificar las velocidades angulares distintas.* Para cada velocidad angular distinta establecer una unión-1. Las velocidades distintas son con frecuencia asociadas a las inercias giratorias. Si una inercia giratoria tiene una velocidad distinta, un elemento-I que representa esta inercia debe ser colocado directamente afuera de la unión-1. Además, si existen más elementos directamente relacionados con una velocidad angular específica, estos también deben aparecer fuera de la unión-1 asociada.
2. *Insertar la generación de par de torsión con puertos-1 y los convertidores de energía con puertos-2.* Los puertos-1 para representar los pares de torsión o generadores de momento son colocados entre los pares de uniones-1 apropiados usando uniones-0. De manera similar a los sistemas mecánicos de traslación, los resortes de torsión y algunas veces los rodamientos generan momentos de magnitud igual en cada extremo de ellos pero aplicados en direcciones opuestas. Debido a que estos pueden estar conectados entre dos puntos en movimiento, estos pueden experimentar una diferencial de velocidad angular. Sus extremos generalmente se mueven a diferentes velocidades. La condición secundaria en una unión-0 es la suma de las velocidades angulares o la diferencial de velocidad angular. De este modo, estos elementos son conectados fuera de las uniones-0 para indicar el par de torsión de magnitud común y velocidad angular distinta en cada extremo de los estos elementos. Los transformadores o pares de engranes también pueden aparecer entre velocidades angulares distintas.
3. *Asignar las direcciones de las potencias.* Como se vio anteriormente, Usando las reglas generales para asignar las direcciones de las potencias. Los bonds remanentes con una

dirección de potencia no asignada se puede hacer una asignación de forma arbitraria. Es conveniente seguir una convención de potencia de entrada-potencia de salida para facilitar la reducción de uniones redundantes.

4. *Eliminar las velocidades cero.* Así como se hizo con los sistemas de traslación, para diferenciar entre las velocidades angulares en cada extremo de un resorte de torsión o algún otro elemento giratorio, las velocidades cero son identificadas como puntos considerados distintos y se usa una unión-1 como un “marcador de referencia”. Las uniones-1 de velocidad angular cero son redundantes. Por lo tanto, para ayudar en la simplificación, se eliminan las uniones-1 de velocidad angular cero y sus bonds conectados.

5. *Simplificar.* Simplificar el bond graph resultante mediante la reducción de uniones-1 y -0 de puerto-2, y reorganizar las uniones adyacentes que son del mismo tipo y que pueden ser condensadas dentro de una sola unión.

6. *Asignar la causalidad.* Asignar las trazas causales (barra vertical en la punta de la semiflecha) en los bonds para indicar las relaciones entrada-salida en cada puerto

Para ilustrar el proceso de síntesis del bond graph en este tipo de sistemas, se examina el sistema rotacional que se ilustra en la Figura A.38.

**Ejemplo A.2.** Sintetizar el bond graph para el sistema rotacional dado en la Figura 1.5 (a).

**Solución.** Al igual que para los sistemas mecánicos de traslación, el primer paso es *identificar las velocidades diferentes*. La Figura A.38 (b) muestra que existen tres velocidades angulares distintas, una en la inercia rotacional, y una en cada rueda dentada. La inercia rotacional es unida a un extremo del eje junto a un rodamiento. Además, cada rueda dentada también está unida a un rodamiento adyacente. Además, un momento de torsión externo  $\tau_m$ , es aplicado directamente a la inercia rotacional. Por lo tanto, como se muestra en la Figura A.38 (c), un elemento-I, un elemento-R y una fuente de esfuerzo son conectadas fuera de la unión-0 del extremo izquierdo para representar el par de torsión externo, la inercia rotacional y el rodamiento. Los elementos-R son conectados a la unión-1 restante para representar los rodamientos adyacentes a cada rueda dentada.

El siguiente paso es *insertar la generación de par de torsión con puertos-1 y los convertidores de energía con puertos-2* entre los pares apropiados de uniones-1. El eje, el cual almacena

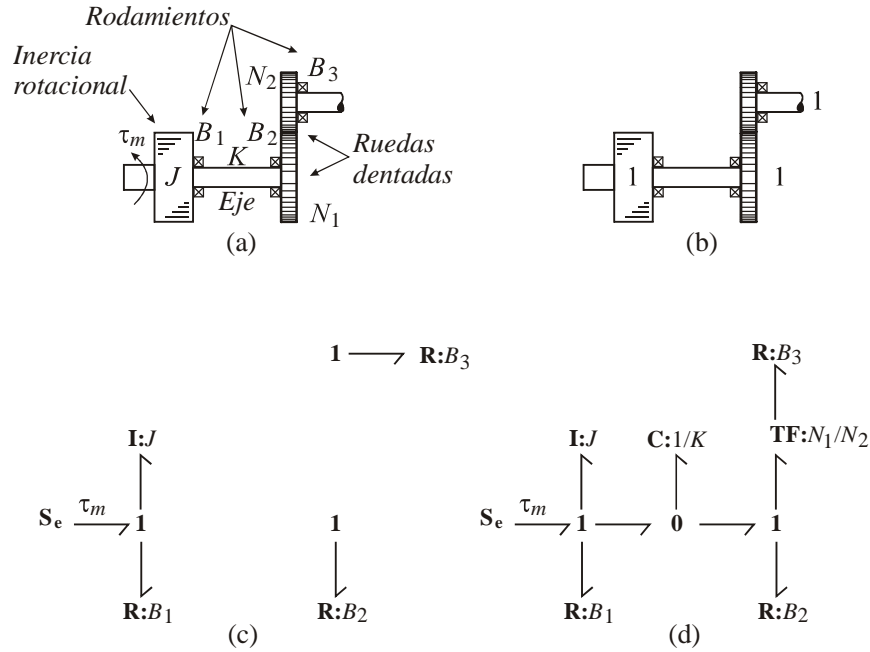


Figura A.38: Ejemplo de sistema rotacional simple.

energía potencial, es representado mediante un elemento-C que va conectado usando una unión cero entre la unión-1 conectada a la inercia rotacional y la primera rueda dentada. El par de engranes es representado mediante un transformador entre las uniones-1 considerando la velocidad angular en cada engrane.

Ahora se *asignan las direcciones de las potencias*. Notar como los bonds de potencia que no tienen asignación de dirección se inclinan hacia el flujo desde la fuente hacia afuera de los rodamientos disipadores de energía en el extremo derecho. No hay uniones de velocidad cero explícitas por considerar, así que se continúa con el siguiente paso.

*Simplificación.* Este problema tiene solo una unión redundante, la unión-1 conectada al elemento-R representando el rodamiento a un lado de la rueda dentada superior, el cuál puede ser eliminado y así su extremos son conectados directamente al extremo del transformador como se muestra en la Figura A.38 (d).

#### A.5.4. Circuitos Eléctricos

El proceso para obtener el bond graph de circuitos eléctricos varía de manera significativa de los sistemas mecánicos. En sistemas mecánicos, tanto de rotación como de traslación, primero se identifican las velocidades diferentes y se establece una unión-1 para cada una. Esto se genera a partir del hecho de que la velocidad común (un flujo) es compartida en los puntos donde los elementos mecánicos están unidos rígidamente. En circuitos eléctricos donde los elementos están conectados comparte un mismo voltaje (esfuerzo) más que una corriente (flujo). Esto implica un cambio fundamental en cómo se sintetiza el bond graph. Se deben identificar los puntos con esfuerzo común en lugar de los puntos con flujo común [Kypuros, 2013].

Nuevamente, antes de comenzar, se revisarán brevemente los elementos en los circuitos eléctricos. Las resistencias disipan energía y son por lo tanto elementos-R. La energía potencial es almacenada en los capacitores haciendo de ellos elementos-C, mientras que la energía cinética es almacenada en los inductores los cuales sirven como elementos-I en circuitos eléctricos. Las fuentes de voltaje ideales y las baterías sirven como fuentes de esfuerzo, mientras que las fuentes de corriente ideales suministran flujo. Los transformadores eléctricos operan de manera similar a los pares de engranes en que los voltajes (o esfuerzos) son proporcionales en ambos lados a las corrientes (o flujos). Las leyes de Kirchhoff son usadas para determinar las corrientes y los voltajes en un circuito. En circuitos eléctricos, los elementos conectados en serie comparten una corriente común (un flujo). Así que, las uniones-1 son usadas para representar mallas cerradas donde las corrientes es compartida y los voltajes son sumados usando la ley de voltajes de Kirchhoff. Cuando la conexión es en paralelo, los elementos del circuito comparte un voltaje y las corrientes son sumadas en el nodo. Un esfuerzo común o unión-0 es usado para representar nodos en circuitos donde es aplicada la ley de corrientes de Kirchhoff.

La síntesis de un bond graph de circuitos eléctricos difiere de la utilizada para sistemas mecánicos. Aunque muchos de los pasos permanecen básicamente igual, la obtención de bond graphs en circuitos eléctricos comienza por identificar los esfuerzos únicos en lugar de los

flujos únicos.

1. *Identificar los voltajes distintos.* Al igual que en los sistemas mecánicos donde primero se identificaban las velocidades distintas (o flujos) y se establecía una unión-1 para cada una, en circuitos eléctricos se identifican los potenciales de voltaje distintos (o esfuerzos) incluyendo la tierra y se establece una unión-0 para cada uno. Si hay algún otro elemento relacionado directamente a cualquier voltaje distinto, se colocan usando una unión-1 directamente en la unión-0 respectiva.
2. *Insertar los elementos del circuito con puertos-1 y los convertidores de energía con puertos-2.* Los elementos del circuito que almacenan y disipan energía típicamente generan caídas de voltaje. Por lo tanto, se colocan con uniones-1 entre los pares apropiados de uniones-0 representando los voltajes en los extremos de los elementos. Esto aparecen con uniones-1 porque la condición secundaria para una unión-1 dicta una sumatoria de esfuerzos. En circuitos eléctricos, esto se puede hacer mediante un cálculo de la caída de voltaje. Además, los puertos-2 convertidores de energía tal como los transformadores pueden causar un cambio en el voltaje y pueden aparecer entre un par de uniones-0 para representar los distintos potenciales en cada extremo.
3. *Asignar las direcciones de las potencias.* Recordando el uso de las reglas generales para asignar la potencia. A los bonds restantes se les asigna de manera arbitraria, pero es conveniente seguir una convención potencia de entrada-potencia de salida para facilitar la eliminación de uniones redundantes.
4. *Eliminar la tierra explícita.* Para facilitar la colocación apropiada de puertos-1, se incluyó de manera explícita como un voltaje diferente en el primer paso. En circuitos eléctricos generalmente se miden los voltajes haciendo referencia a tierra. En este punto se pueden eliminar las uniones-0 asociadas con la tierra y todos los bonds conectados directamente a ella.
5. *Simplificar.* Simplificar el bond graph resultante mediante la reducción de uniones-1 y -0 de puerto-2, y reorganizar las uniones adyacentes que son del mismo tipo y que pueden ser condensadas dentro de una sola unión.
6. *Asignar la causalidad.* Asignar las trazas causales (barra vertical en la punta de la

semiflecha) en los bonds para indicar las relaciones entrada-salida en cada puerto.

Para ilustrar el proceso de síntesis del bond graph en este tipo de sistemas, se examina el circuito eléctrico que se ilustra en la Figura A.39 (a).

**Ejemplo A.3.** Obtener el bond graph para el circuito eléctrico ilustrado en la Figura A.39 (a).

**Solución.** La primera cosa por hacer es identificar los distintos voltajes (observar la Figura A.39 (b)). También, en este punto se requiere *identificar un elemento asociado directamente con un voltaje distinto* (Ver la Figura A.39 (c)). En este caso existe solamente la tierra explícita.

Ahora *se insertan los elementos de circuito de puerto-1 y -2*. Un rasgo característico resulta cuando se inserta el transformador. Un extremo del transformador está entre el inductor y la tierra, y el otro entre la resistencia y la tierra. Esto es, cada extremo se sitúa entre distintos pares de uniones-0. Como se ilustra en la Figura A.39 (c), las uniones-1 son insertadas entre cada par de uniones-0, y el transformador conecta las dos con uniones-1.

Entonces, *se asignan las direcciones de la potencia*. La simplificación del proceso comienza por la *eliminación de la tierra explícita*. Siguiendo con la simplificación, se eliminan los bonds conectados a ella y los bonds que son posibles reducir usando las reglas generales vistas anteriormente. El bond graph resultante simplificado esta dado en la Figura A.39 (d). Los bond graphs para circuitos eléctricos algunas veces pueden ser obtenidos rápidamente mediante inspección. El circuito está compuesto de dos lazos o mallas conectadas a un transformador. El bond graph simplificado esta hecho de dos ramas. La rama de la izquierda es la fuente de voltaje, el inductor y el lado izquierdo del transformador que comparten un flujo común. El brazo de la derecha es el lado derecho del transformador, la resistencia, y el capacitor en serie. Los lados derecho e izquierdo aparecen conectados con uniones-1 porque cada rama comparte una corriente común. Las dos mallas interactúan mediante el transformador.

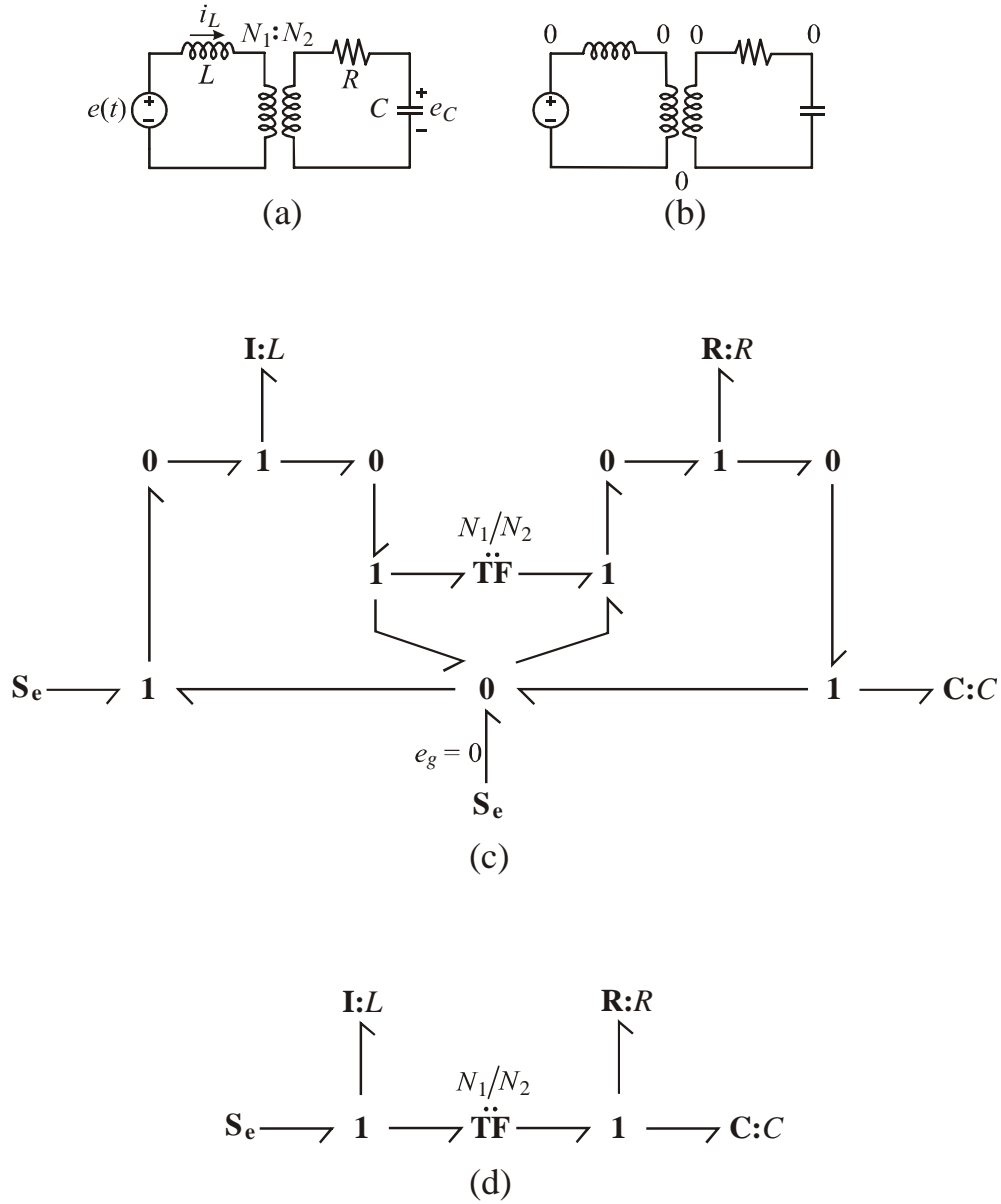


Figura A.39: Ejemplo de circuito eléctrico con transformador.

### A.5.5. Circuitos Hidráulicos

Los sistemas mecánicos tanto de rotación como de traslación son representados de forma consecutiva porque los dos tienen un proceso similar para la obtención de su representación en bond graph. Esto no es ninguna sorpresa ya que ambos son gobernados básicamente por las mismas reglas (Mecánica Newtoniana). Aunque parezca mentira, los circuitos hidráulicos son muy similares a los circuitos eléctricos. Así las reglas generales para la obtención de los bond graphs para circuitos hidráulicos son directamente análogas a las que se utilizan para los circuitos eléctricos [Kypuros, 2013].

De igual forma que se hizo en los sistemas anteriores, antes de comenzar, se revisarán brevemente los elementos en los circuitos hidráulicos. Los elementos-R en circuitos hidráulicos son usados para representar caídas de presión que resultan de pérdidas de energía mediante válvulas o debidas a la agitación a lo largo de la superficie de las paredes de la tubería. Los acumuladores pueden almacenar energía potencial mediante la variación del peso (o volumen) del fluido. Los fluidos tienen densidad y pueden almacenar cantidades considerables de energía cinética al fluir a través de las tuberías. Una bomba de desplazamiento es usada con frecuencia para suministrar una presión a un circuito hidráulico y puede ser tratada como una fuente de presión ideal. Por otro lado, una bomba centrífuga generalmente controla el flujo a través de un sistema hidráulico y por lo tanto es tratada como una fuente de flujo ideal. Las uniones físicas en un circuito hidráulico donde las tuberías o canales se conectan son similares a un nodo en un circuito eléctrico donde las ramas de un circuito se conectan. En estas uniones físicas, los caudales de flujo se combinan (i.e. resultando una suma de caudales de flujo) Además, las uniones físicas son puntos de presión común. Los elementos de circuitos hidráulicos pueden ser conectado “en serie” al igual que los elementos de los circuitos eléctricos. Cuando están conectados de esta manera los elementos comparte un caudal de flujo volumétrico común y resulta en una caída de presión a través del elemento.

Dada la similitud entre los circuitos eléctrico e hidráulicos, no debe haber sorpresa en que las reglas generales para la obtención del bond graph de estos dos sistemas idénticas.

1. *Identificar las presiones distintas.* En circuitos hidráulicos se identifican las presiones

distintas (o esfuerzos) incluyendo la presión atmosférica y establecer un unión-0 por cada una de ellas. Si hay cualquier otro elemento relacionado directamente con cualquiera de las presiones distintas, se colocan usando una unión-1 en la respectiva unión-0. Las presiones diferentes son localizadas entre los elementos hidráulicos.

2. *Insertar los elementos del circuito hidráulico con puertos-1 y los convertidores de energía con puertos-2.* Los elementos de circuito hidráulico que almacenan y disipan energía típicamente generan caídas de presión. Por lo tanto, se colocan con uniones-1 entre los pares apropiados de uniones-0 representando las presiones en los extremos de los elementos. Esto aparecen con uniones-1 porque la condición secundaria para una unión-1 dicta una sumatoria de esfuerzos. En circuitos hidráulicos, esto se puede hacer mediante un cálculo de la caída de presión. Además, los puertos-2 convertidores de energía pueden causar un cambio en la presión y pueden aparecer entre un par de uniones-0 para representar los distintos potenciales en cada extremo.

3. *Asignar las direcciones de la potencia.* Recordando el uso de las reglas generales para asignar la potencia. A los bonds restantes se les asigna de manera arbitraria, pero es conveniente seguir una convención potencia de entrada-potencia de salida para facilitar la eliminación de uniones redundantes.

4. *Eliminar la presión atmosférica.* Al igual que en los circuitos eléctricos donde típicamente la medición de voltaje es relativa a tierra, en circuitos hidráulicos la medición de calibración de presión o diferencial de presión es relativa a la presión atmosférica. Si se usa típicamente la calibración como opuesta a la presión absoluta, se puede eliminar la presión atmosférica. En este punto se pueden eliminar las uniones-0 asociadas con la presión atmosférica y todos los bonds conectados directamente a ella.

5. *Simplificar.* Simplificar el bond graph resultante mediante la reducción de uniones-1 y -0 de puerto-2, y reorganizar las uniones adyacentes que son del mismo tipo y que pueden ser condensadas dentro de una sola unión.

6. *Asignar la causalidad.* Asignar las trazas causales en los bonds para indicar las relaciones causa-efecto en cada puerto. Más adelante se revisará este paso.

Para ilustrar el proceso de obtención del bond graph en este tipo de sistemas, se examina el

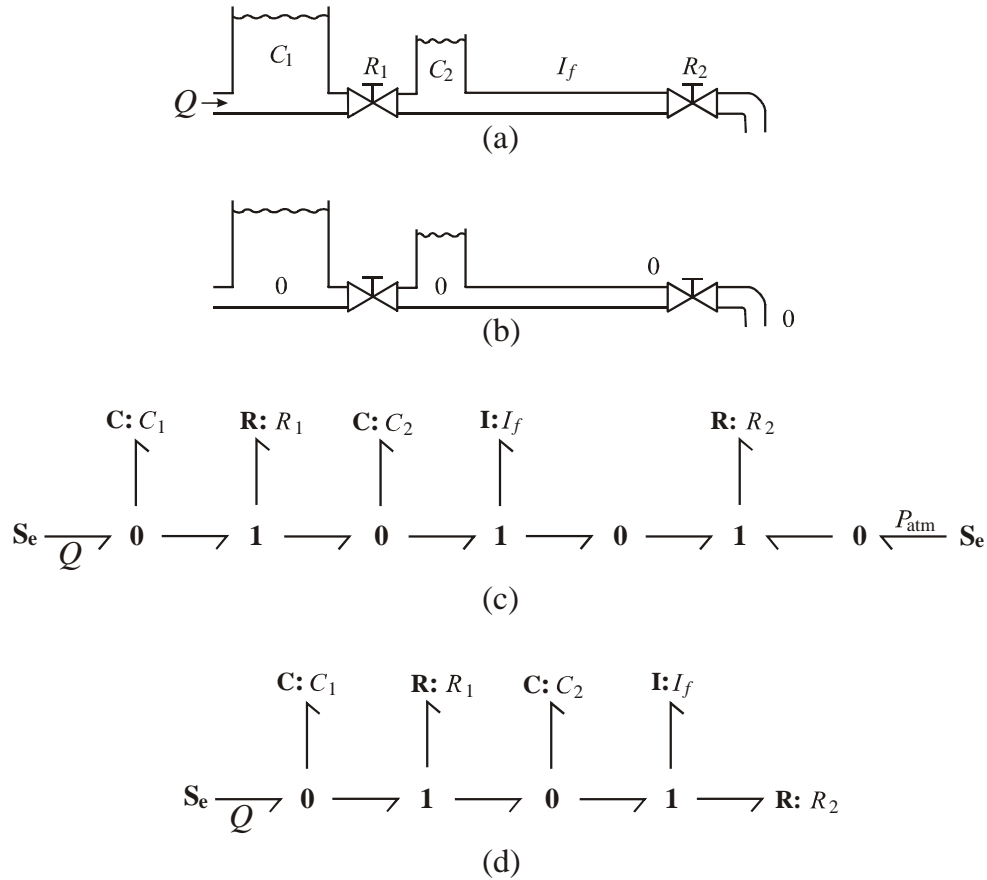


Figura A.40: Ejemplo de circuito hidráulico.

circuito hidráulico que se ilustra en la Figura A.40.

**Ejemplo A.4.** Obtener el bond graph para el circuito hidráulico ilustrado en la Figura A.40 (a).

**Solución.** El circuito hidráulico está compuesto de una fuente de flujo, dos acumuladores, dos válvulas y una tubería. El primer paso es *identificar las presiones distintas*. En este problema, existen presiones distintas en los fondos de cada acumulador o tanque, en el extremo derecho de la tubería larga, y en la salida del sistema (Ver la Figura A.40 (b)). Para cada caso, se establece una unión-0. Como se ilustra en la Figura A.40 (c), los acumuladores están asociados con dos de las uniones y la presión atmosférica es asociada con una tercera

unión. De este modo, los elementos-C y una fuente de esfuerzo son colocados en las uniones-0 apropiadas.

En seguida *se insertan los elementos de puerto-1 y -2*. Hay una válvula entre los dos acumuladores o tanques la cual causa una caída de presión. Esto es representado mediante un elemento-R conectado con una unión-1 entre las dos uniones-0 del extremo izquierdo. En la tubería larga fluye una cantidad significativa de fluido con inercia. Por lo tanto, un elemento-I es colocado con una unión-1 entre la segunda y tercera unión-0 para representar las presiones en los extremos izquierdo y derecho de la tubería. Existe otra válvula entre el final de la tubería y la salida del sistema la cual está expuesta a la presión atmosférica. Esta válvula es representada mediante un elemento-R conectado a una unión-1 entre las dos uniones-0 del extremo derecho.

Ahora, *se asignan las direcciones de las potencias*. Las direcciones se eligen de manera que tengan sentido y faciliten más tarde una simplificación. En el siguiente paso, *se elimina la presión atmosférica* lo cual involucra remover la fuente de esfuerzo asociada, las uniones-0 conectadas, y cualquier bond conectado a esa unión-0. Esto permite *simplificar* el bond graph mediante la eliminación de los bonds y la reorganización de uniones adyacentes. Finalmente se llega al bond graph simplificado que se muestra en la Figura A.40 (d).

### A.5.6. Sistemas mezclados

Muchos sistemas dinámicos no son puramente de un sólo dominio de energía, es decir, son sistemas mezclados con subsistemas que operan en varios dominios de energía. Los sistemas pueden ser electromecánicos, hidromecánicos, de rotación y de traslación, etc. Los sistemas de energía mezclados pueden ser descompuestos en subsistemas, cada uno de ellos en un sólo dominio de energía. De esta manera, los subsistemas pueden ser manejados usando las reglas generales detalladas en la sección anterior para sistemas mecánicos de rotación, mecánicos de traslación, circuitos eléctricos, y circuitos hidráulicos. Los subsistemas están acoplados mediante dispositivos referenciados como transductores, los cuales convierten la energía de un dominio a otro. Algunos de estos dispositivos son descritos en la Figura A.41. Típicamente, los

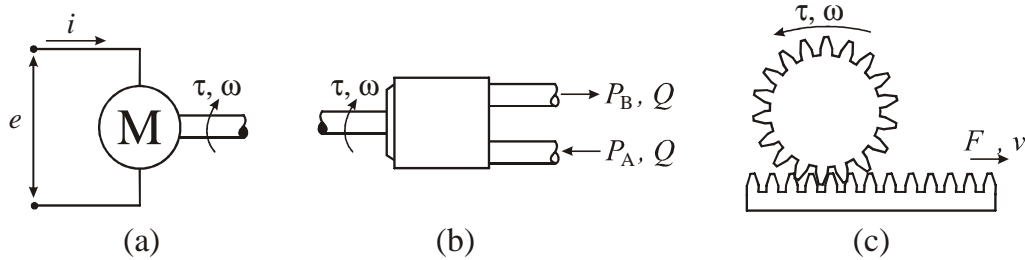


Figura A.41: Ejemplos de transductores que incluyen (a) un motor ideal, (b) una bomba centrifuga, y (c) un piñón y cremallera.

transductores son considerados conservativos de energía y pueden ser representados mediante transformadores o giradores dependiendo en cómo convierten la energía. Se estudiará un ejemplo de sistemas mezclados para ilustrar como un transductor puede acoplar dominios de energía y cómo un sistema puede ser descompuesto en subsistemas que operan en un sólo dominio de energía [Kypuros, 2013].

**Ejemplo A.5.** Sintetizar el bond graph para el motor de corriente directa de imán permanente (PMDC) que se muestra en la Figura A.42 (a).

**Solución.** Muchos dispositivos electromecánicos tales como brazos robóticos, turbinas de viento, y maquinas controladas mediante computación numérica (CNC) usan motores y/o servos. Estos dispositivos, aunque se manejan eléctricamente, son usados para sistemas de posición y movimiento mecánico. Un dispositivo usado comúnmente en ese tipo de sistemas es un motor PMDC.

El motor en sí mismo es un sistema electromecánico. El motor está compuesto de una bobina giratoria que está hecha de un enrollado de cobre con resistencia, inductancia y, dependiendo del tamaño del cable enrollado, una cantidad significativa de inercia rotacional. Por un lado se tiene un circuito con una fuente de voltaje, una resistencia, y una inductancia conectados en serie. El bond graph para la parte del lado eléctrico puede ser obtenido mediante inspección. Este está compuesto de una fuente de esfuerzo, un elemento-R, un elemento-I, y un bond sin conexión unido a una unión-1.

Por el otro lado se tiene la inercia rotacional del embobinado, un tren de engranes, y un

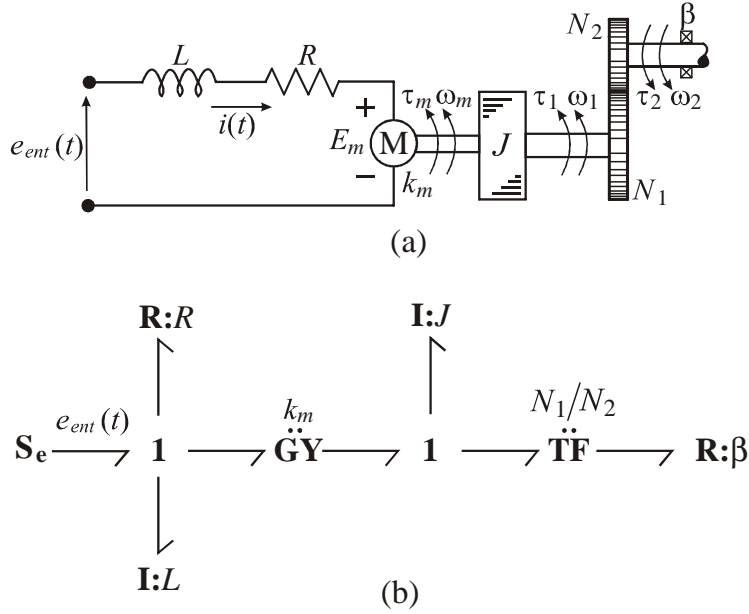


Figura A.42: Modelo de un motor de corriente directa de imán permanente (PMDC).

rodamiento. Los lados eléctrico y mecánico del sistema se acoplan mediante un “motor ideal”, el cuál representa el acoplamiento electromecánico que existe entre los dos lados del sistema. Este motor ideal relaciona el par de torsión generado del lado mecánico con la corriente que fluye a través del lado eléctrico. Además, relaciona la fuerza electromotriz (la caída de voltaje en el lado eléctrico debido a la generación de par de torsión en el lado mecánico) con la velocidad angular de la bobina giratoria. Una constante del motor  $k_m$ , es usada para relacionar los esfuerzos y los flujos en los lados eléctrico y mecánico del sistema,

$$\tau_m = k_m i(t) = 0 \quad \text{y} \quad E_m = k_m \omega_m. \quad (\text{A.84})$$

Además, el “motor ideal” puede ser representado mediante un elemento girador con un módulo de  $k_m$ .

El lado mecánico del sistema está caracterizado por dos velocidades angulares distintas (una en el eje de salida del motor y otra después del tren de engranes). El engrane de salida se conecta a la flecha mediante un rodamiento. Se establecen dos uniones-1, una por cada veloci-

dad diferente. En la primera se conecta un elemento-I para representar la inercia rotacional de la bobina. En la segunda, se conecta un elemento-R para representar el rodamiento. Entre las dos uniones-1 se inserta un transformador para representar el tren de engranes. El bond graph resultante se puede simplificar conectando directamente el elemento-R que representa el rodamiento en el eje de salida del transformador.

### **A.5.7. Modelos matemáticos deducidos de un bond graph**

El modelo en bond graph de un sistema físico dinámico se sitúa como en intermediario entre el esquema físico y los modelos matemáticos asociados (ecuación de estado lineal o no lineal, matriz de transferencia dentro del caso lineal). La casualidad permite escribir sistemáticamente y de una forma bien estructurada las relaciones que caracterizan la evolución dinámica del sistema y combinar las ecuaciones diferenciales y ecuaciones algebraicas, para realizar la simulación dinámica [Dauphin-Tanguy, 2000].

#### **Ecuación de estado**

El modelo de estado resultante de un bond graph tiene una forma perfectamente definida, puesto que las variables de estado son establecidas de manera sistemática. Existen diferentes métodos para su construcción: aquí se presenta el método más directo, que puede ser un poco más largo para un modelo en bond graph de grandes dimensiones, pero que conduce al resultado sin dificultad [Dauphin-Tanguy, 2000].

#### **Estructura de unión**

La estructura de unión es la que conjunta las uniones-0 y -1, los transformadores, y los giradores, además en la estructura unión no se genera ni se disipa energía, es decir, la potencia neta que entra a una estructura unión es igual a la que se desvanece a través de los puertos conectados a ella. Una estructura unión provee las relaciones entre los esfuerzos y los flujos en sus puertos [Karnopp, 2012].

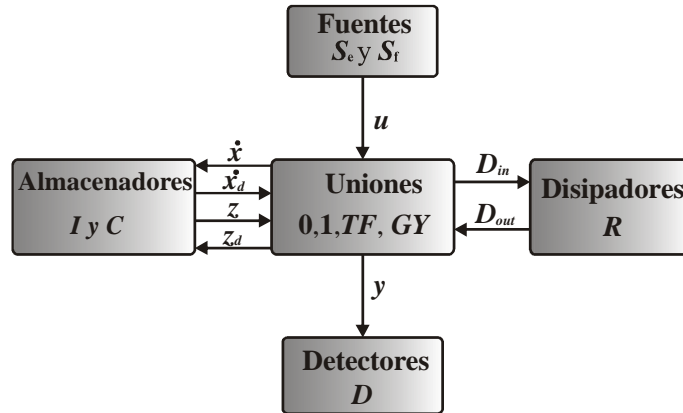


Figura A.43: Diagrama a bloques de la estructura de unión de un bond graph.

### Vectores clave

En un bond graph en forma convencional es posible clasificar como *bonds externos* a los elementos o puertos que conectan a elementos-R, -C, -I, Se y Sf y a los que conectan con los elementos 0, 1, TF y GY se les llaman *bonds internos*. Los bonds externos pueden ser clasificados de acuerdo a su forma de manifestación de energía. La Figura A.43 muestra un diagrama a bloques que describe la *estructura unión* de un modelo en bond graph.

En la Figura A.43, los vectores clave son formados por las fuentes ( $S_e$  y  $S_f$ ), los elementos almacenadores (I y C), los disipadores (R), los detectores (D) y por último se tiene en la estructura unión donde intervienen los transformadores, giradores, uniones-0 y uniones-1 (1, 0, TF, GY).

Los vectores clave son los que representan el sistema, estos vectores se muestran en la Figura A.43, donde  $u(t) \in \mathbb{R}^p$  contiene las variables de potencia debidas a las fuentes en la estructura de unión. Los estados  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  y  $x_d(t) \in \mathbb{R}^m$  están compuestos de variables de energía, *momento generalizado*  $p(t)$  en elementos almacenadores-I y *desplazamiento generalizado*  $q(t)$  en elementos almacenadores-C en causalidad integral y derivativa respectivamente;  $z(t) \in \mathbb{R}^n$  y  $z_d(t) \in \mathbb{R}^m$  son variables de co-energía en causalidad integral y derivativa, respectivamente.  $D_{in}(t) \in \mathbb{R}^r$  y  $D_{out}(t) \in \mathbb{R}^r$  son una mezcla de esfuerzos y flujos que contienen los intercambios

energéticos entre el campo de disipación y la estructura de unión,  $n$  y  $m$  son el número de elementos almacenadores en causalidad integral y derivativa, respectivamente;  $p$  es el número de fuentes y  $r$  es el número de elementos disipadores de energía [Gonzalez, 2004].

### Relaciones de campo y ecuaciones de estado

Las relaciones de campo no lineales de la Figura A.43 de los elementos de almacenamiento y de disipación son:

$$z(t) = \Phi_F(x), \quad (\text{A.85})$$

$$z_d(t) = \Phi_{Fd}(x_d), \quad (\text{A.86})$$

$$D_{out}(t) = \Phi_L(D_{in}), \quad (\text{A.87})$$

donde:

$\Phi_F$  es una función que relaciona cada  $z_i$  con  $x_i$  para  $i = 1, \dots, n$ .

$\Phi_{Fd}$  representa una función que relaciona cada  $z_d^i$  con  $x_d^i$  para  $i = 1, \dots, m$ .

$\Phi_L$  denota una función que relaciona cada  $D_{out}^i$  con  $D_{in}^i$  para  $i = 1, \dots, r$ .

El comportamiento de un elemento específico está descrito por una ley física que se conoce como relación constitutiva. Si las relaciones constitutivas son tipo lineal, se tiene:

$$z(t) = Fx(t), \quad (\text{A.88})$$

$$z_d(t) = F_dx_d(t), \quad (\text{A.89})$$

$$D_{out}(t) = LD_{in}(t), \quad (\text{A.90})$$

donde:

$L$ ,  $F$  y  $F_d$  son matrices reales de dimensión  $r \times r$ ,  $n \times n$  y  $m \times m$ , respectivamente.

Las relaciones de la estructura de unión están dadas por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ D_{in}(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz de Estructura Unión S}} \begin{bmatrix} z(t) \\ D_{out}(t) \\ u(t) \\ \dot{x}_d(t) \end{bmatrix}, \quad (\text{A.91})$$

$$z_d(t) = -S_{14}^T z(t) \quad (\text{A.92})$$

Los elementos de la matriz de estructura unión  $S$  toman valores dentro del conjunto  $\{0, \pm 1, \pm k_t, \pm k_g\}$  donde  $k_t$  y  $k_g$  representan el módulo o relación del transformador y del girador, respectivamente. La matriz  $S$  está particionada de acuerdo a la dimensión de sus vectores clave. Las submatrices  $S_{ij}$  tienen las siguientes propiedades:

- Propiedad 1:  $S_{11}$  y  $S_{22}$  son matrices cuadradas anti simétricas.
- Propiedad 2:  $S_{12}$  es la matriz transpuesta negativa de  $S_{21}$  y viceversa.

Las propiedades 1 y 2 están basadas en el principio de conservación de energía.

Un sistema LTI (Lineal con parámetros invariantes en el tiempo) MIMO (múltiple entrada múltiple salida) se representa en variables de estado por:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (\text{A.93})$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t). \quad (\text{A.94})$$

Relacionando las ecuaciones (A.88) a la (A.90) con (A.93) y (A.94) se obtienen las matrices que representan este tipo de sistemas y que permiten conocer el modelo matemático en variables de estado utilizando la representación en bond graph:

$$A = E^{-1} (S_{11} + S_{12}MS_{21}) F, \quad (\text{A.95})$$

$$B = E^{-1} (S_{13} + S_{12}MS_{23}), \quad (\text{A.96})$$

$$C = (S_{31} + S_{32}MS_{21}) F, \quad (\text{A.97})$$

$$D = S_{33} + S_{32}MS_{23}. \quad (\text{A.98})$$

Las matrices  $E$  y  $M$  se encuentran mediante las siguientes expresiones,

$$E = I + S_{14}F_d^{-1}S_{14}^T F, \quad (\text{A.99})$$

$$M = (I - LS_{22})^{-1} L. \quad (\text{A.100})$$

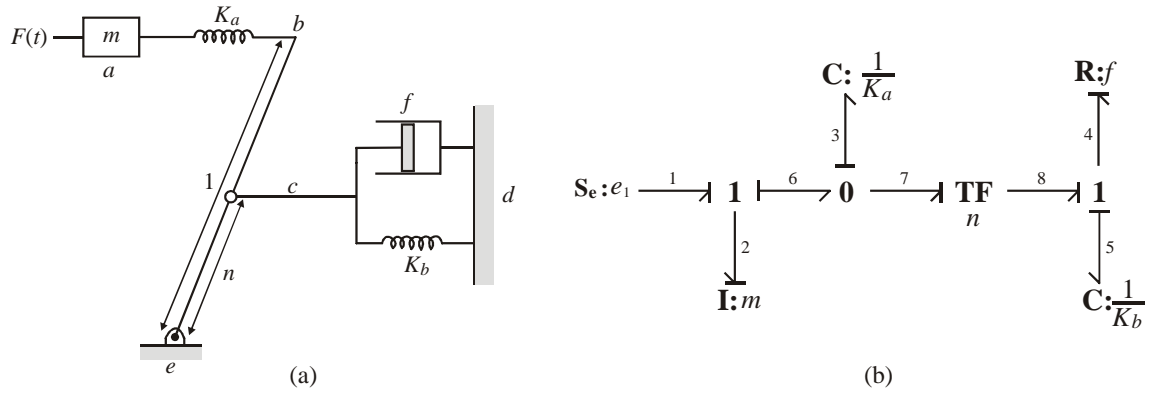


Figura A.44: (a) Sistema mecánico, y (b) su bond graph correspondiente.

### Ejemplo de la obtención de un modelo en espacio de estado en bond graph

Usando el sistema mecánico mostrado de la Figura A.44 (a), tomando como salida la velocidad de la masa  $m$ , al modelo en bond graph que se obtuvo se le agrega una numeración a los bonds tal como se muestra en la Figura A.44 (b).

Los vectores clave son,

$$x = \begin{bmatrix} p_2 \\ q_3 \\ q_5 \end{bmatrix}; \dot{x} = \begin{bmatrix} e_2 \\ f_3 \\ f_5 \end{bmatrix}; z = \begin{bmatrix} f_2 \\ e_3 \\ e_5 \end{bmatrix}; D_{in} = e_4; D_{out} = f_4; y = f_2; u = e_1. \quad (\text{A.101})$$

Las relaciones constitutivas para los elementos son,

$$F = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & K_a & 0 \\ 0 & 0 & K_b \end{bmatrix}; L = \frac{1}{f}. \quad (\text{A.102})$$

Como no hay elementos almacenadores en causalidad derivativa

$$F_d = 0. \quad (\text{A.103})$$

De acuerdo con la ecuación (A.91) para la matriz de estructura de unión se tiene,

$$\begin{bmatrix} e_2 \\ f_3 \\ f_5 \\ e_4 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_2 \\ e_3 \\ e_5 \\ f_4 \\ e_1 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.104})$$

Un análisis del modelo en Bond Graph de la Figura A.44 (b) permite determinar las ecuaciones que definen a  $\dot{x}(t)$ ,  $D_{in}(t)$ , y  $y(t)$ . Por lo que la matriz de estructura unión queda,

$$\begin{bmatrix} e_2 \\ f_3 \\ f_5 \\ e_4 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_2 \\ e_3 \\ e_5 \\ f_4 \\ e_1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.105})$$

De la estructura unión, ecuación (A.105) por comparación con (A.104) se tiene que,

$$S_{11} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad S_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{n} \\ 1 \end{bmatrix}; \quad S_{13} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad S_{21} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{n} & -1 \end{bmatrix}; \quad (\text{A.106})$$

$$S_{22} = [0]; \quad S_{23} = [0]; \quad S_{31} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad S_{32} = [0]; \quad S_{33} = [0]. \quad (\text{A.107})$$

Usando las ecuaciones (A.95) a (A.98) para obtener la representación en espacio de estado. De las ecuaciones (A.99) y (A.100) como no hay elementos almacenadores en causalidad derivativa se tiene que,

$$E = I + S_{14} \underbrace{F_d^{-1}}_0 S_{14}^T F = I \quad \text{y} \quad M = \left[ I - L \underbrace{S_{22}}_0 \right]^{-1} L = L, \quad (\text{A.108})$$

Entonces  $E = E^{-1} = I$ . Por lo que para  $A$  se tiene,

$$A = \underbrace{E^{-1}}_I \left( \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{n} \\ 1 \end{bmatrix} \left[ \frac{1}{f} \right] \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{n} & -1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & K_a & 0 \\ 0 & 0 & K_b \end{bmatrix} \quad (\text{A.109})$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -K_a & 0 \\ \frac{1}{m} & -\frac{K_a}{n^2 f} & \frac{K_b}{n f} \\ 0 & \frac{K_a}{n f} & -\frac{K_b}{f} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.110})$$

$B$  se obtiene mediante,

$$B = \underbrace{E^{-1}}_I \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{n} \\ 1 \end{bmatrix} \left[ \frac{1}{f} \right] [0] \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.111})$$

Ahora para encontrar  $C$  se tiene,

$$C = \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + [0] \left[ \frac{1}{f} \right] \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{n} & -1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & K_a & 0 \\ 0 & 0 & K_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.112})$$

y para  $D$  se tiene,

$$D_p = [0] + [0] \left[ \frac{1}{f} \right] [0] = 0. \quad (\text{A.113})$$

Por lo que la representación de espacio de estados queda:

$$\begin{bmatrix} e_2 \\ f_3 \\ f_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -K_a & 0 \\ \frac{1}{m} & -\frac{K_a}{n^2 f} & \frac{K_b}{n f} \\ 0 & \frac{K_a}{n f} & -\frac{K_b}{f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 \\ q_3 \\ q_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e_1, \quad (\text{A.114})$$

$$f_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 \\ q_3 \\ q_5 \end{bmatrix}.$$

Donde las variables de estado son:

$p_2$  es el momento inercial en la masa  $m$  y  $e_2$  es la fuerza en dicha masa.

$q_3$  es el desplazamiento del resorte  $K_a$  y  $f_7$  es la velocidad en dicho resorte.

$q_5$  es el desplazamiento del resorte  $K_b$  y  $f_5$  es la velocidad en dicho resorte.

Además  $e_1$  es la fuerza externa aplicada a la masa  $m$ ;  $f_2$  es la velocidad en la masa  $m$  la cual es la variable seleccionada como salida del sistema.



## Apéndice B

# Transformación de Park en Bond Graph

### B.1. Transformación de Park o dq0

La transformación de Park o d-q convierte las componentes “ $abc$ ” del sistema trifásico a otro sistema de referencia “ $dq0$ ”. El objetivo de la transformación consiste en convertir los valores trifásicos “ $abc$ ”, variables senoidalmente en el tiempo, a valores constantes “ $dq0$ ”, en régimen permanente. El vector con las componentes del nuevo sistema de referencia  $[x_r]$  se obtiene multiplicando el vector de coordenadas trifásicas  $[x]$  por la matriz de transformación  $[P]$  [Anderson, 1977], según la expresión siguiente:

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_d \\ x_q \end{bmatrix} = [x_r] = [P][x] = [P] \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix}. \quad (\text{B.1})$$

La expresión de la matriz de transformación  $[P]$  se tiene en la ecuación siguiente,

$$[P] = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos(\theta) & \cos\left(\theta - \frac{2}{3}\pi\right) & \cos\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right) \\ \sin(\theta) & \sin\left(\theta - \frac{2}{3}\pi\right) & \sin\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right) \end{bmatrix}, \quad (\text{B.2})$$

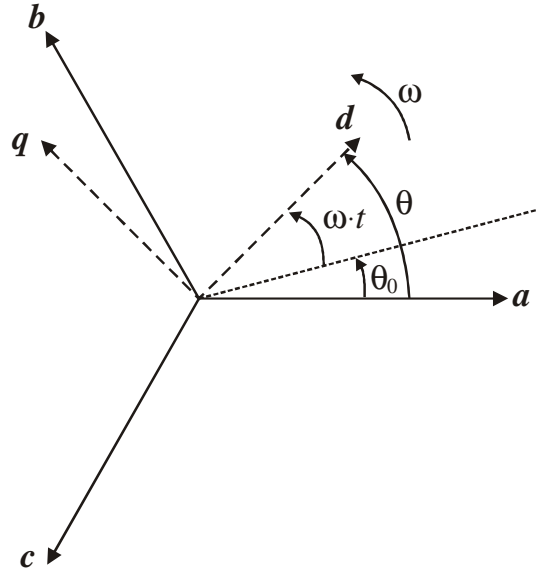


Figura B.1: Sistema de referencia trifásico y la referencia dq0.

En (B.2)  $\theta$  es el ángulo de la referencia rotativa (ejes  $d - q$ ) (ver Figura B.1) igual a,

$$\theta = \int_0^{\infty} (\omega \cdot t) dt + \theta_0, \quad (\text{B.3})$$

donde:  $\omega$  y  $\theta_0$  son la velocidad angular y el ángulo inicial de la referencia  $d - q$  (igual a la pulsación del sistema trifásico del lado de alterna del convertidor).

Para corrientes, un sistema trifásico está balanceado si  $i_a + i_b + i_c = 0$ ,  $i_0 = 0$ . La transformación de Park se expresa en la siguiente ecuación,

$$\begin{bmatrix} i_0 \\ i_d \\ i_q \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos(\theta) & \cos(\theta - \frac{2}{3}\pi) & \cos(\theta + \frac{2}{3}\pi) \\ \sin(\theta) & \sin(\theta - \frac{2}{3}\pi) & \sin(\theta + \frac{2}{3}\pi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix}, \quad (\text{B.4})$$

La matriz de transformación  $[P]$  es ortonormal, es decir  $[P]^{-1} = [P]^T$ . Por lo que la transformación inversa de Park es,

$$\begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos(\theta - \frac{2}{3}\pi) & \sin(\theta - \frac{2}{3}\pi) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos(\theta + \frac{2}{3}\pi) & \sin(\theta + \frac{2}{3}\pi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_0 \\ i_d \\ i_q \end{bmatrix}, \quad (\text{B.5})$$

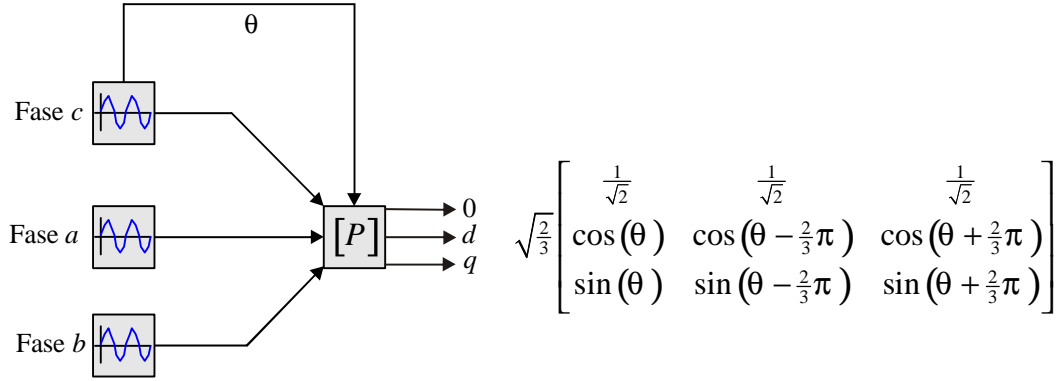


Figura B.2: Modelo en bloques de la transformada de Park.

El término  $\sqrt{\frac{2}{3}}$  en la transformación determina que sea ortonormal, este tipo de transformaciones se caracterizan por mantener invariante el producto escalar, como consecuencia de esto, el valor de la potencia instantánea se mantiene invariante, independientemente del dominio donde se calcule “ $abc$ ” ó “ $dq0$ ”.

$$\begin{aligned}
 Pot_{abc} &= Pot_{dq0}, \\
 Pot_{abc} &= v_a i_a + v_b i_b + v_c i_c = v_{abc}^T i_{abc},
 \end{aligned} \tag{B.6}$$

como  $v_{abc} = P^{-1} v_{dq0}$  e  $i_{abc} = P^{-1} i_{dq0}$ , entonces,

$$\begin{aligned}
 Pot_{abc} &= (P^{-1} v_{dq0})^T (P^{-1} i_{dq0}), \\
 Pot_{abc} &= v_{dq0}^T (P^{-1})^T (P^{-1}) i_{dq0}, \\
 Pot_{abc} &= v_{dq0}^T P P^{-1} i_{dq0}, \\
 Pot_{abc} &= v_{dq0}^T i_{dq0} = Pot_{dq0},
 \end{aligned} \tag{B.7}$$

### B.1.1. Modelo en bloques y simulación de la transformación de Park

En la Figura B.2 se muestra el modelo a bloques de la transformación de Park en 20-sim usando tres señales senoidales desfasadas 120 grados y una ganancia matricial que es la transformada de Park. En la Figura B.3 se muestra la simulación de la transformación.

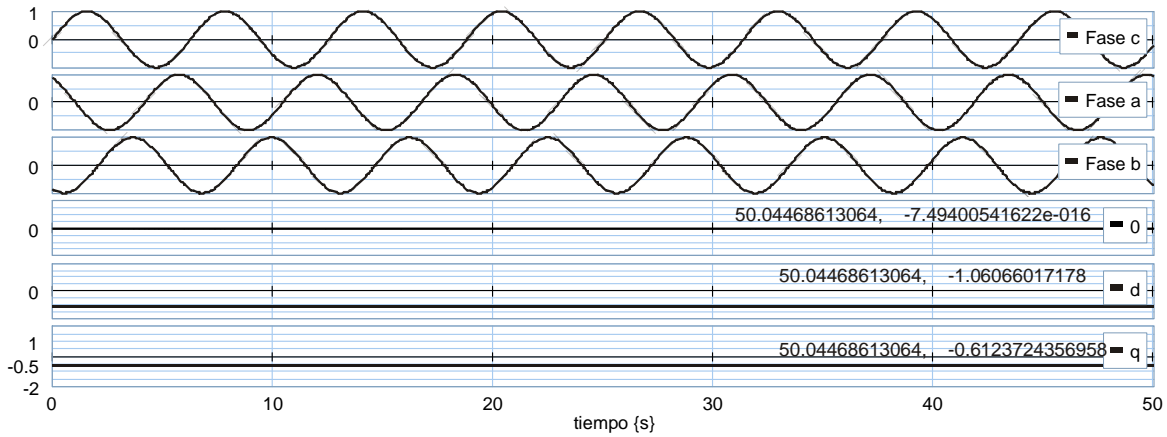


Figura B.3: Simulación del modelo en bloques de la transformación de Park de la Figura B.2.

### B.1.2. Modelado en Bond Graph de la transformación de Park

En la metodología de Bond Graph se puede realizar la transformación de Park para esfuerzos (voltajes) o para flujos (corrientes).

#### Modelado para esfuerzos

En las Figuras B.4 y B.5 se muestran el modelo en bond graph usando fuentes de esfuerzo y usando fuentes de flujo, respectivamente.

Una tercera forma de obtener la transformación de Park es usando un sólo transformador modulado, el cuál tiene como módulo de transformación la transformada de Park. Esto se muestra en la Figura B.6.

El resultado de la simulación de los modelos de las Figuras B.4, B.5 y B.6 son idénticos (ver la Figura B.3), la diferencia radica en lo que se obtiene a la salida, esfuerzos (voltajes) o flujos (corrientes).

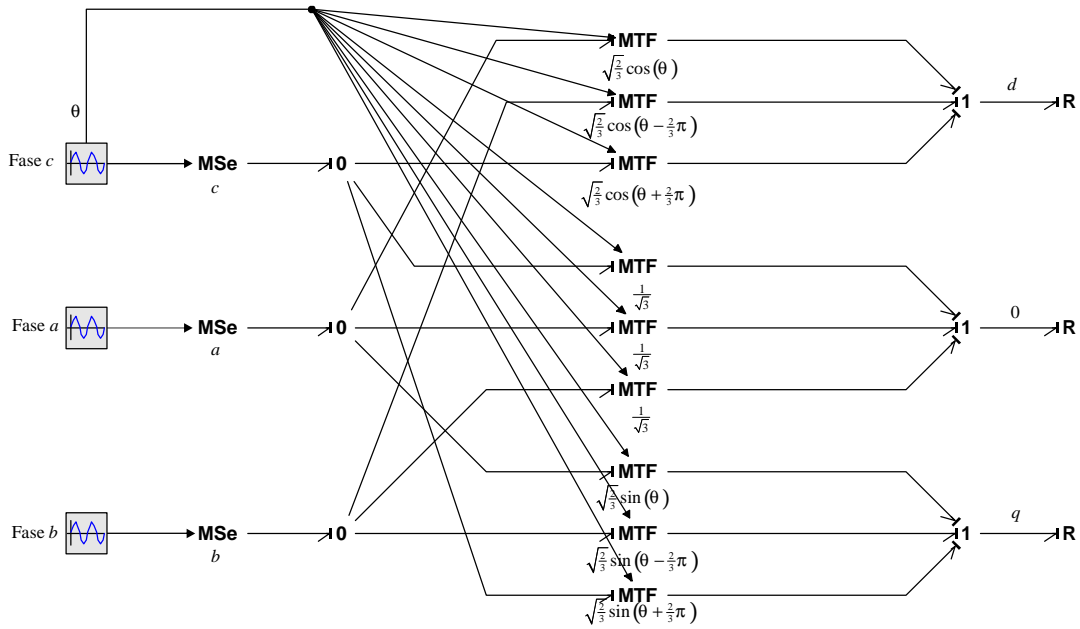


Figura B.4: Modelado en Bond Graph de la transformación de Park para esfuerzos.

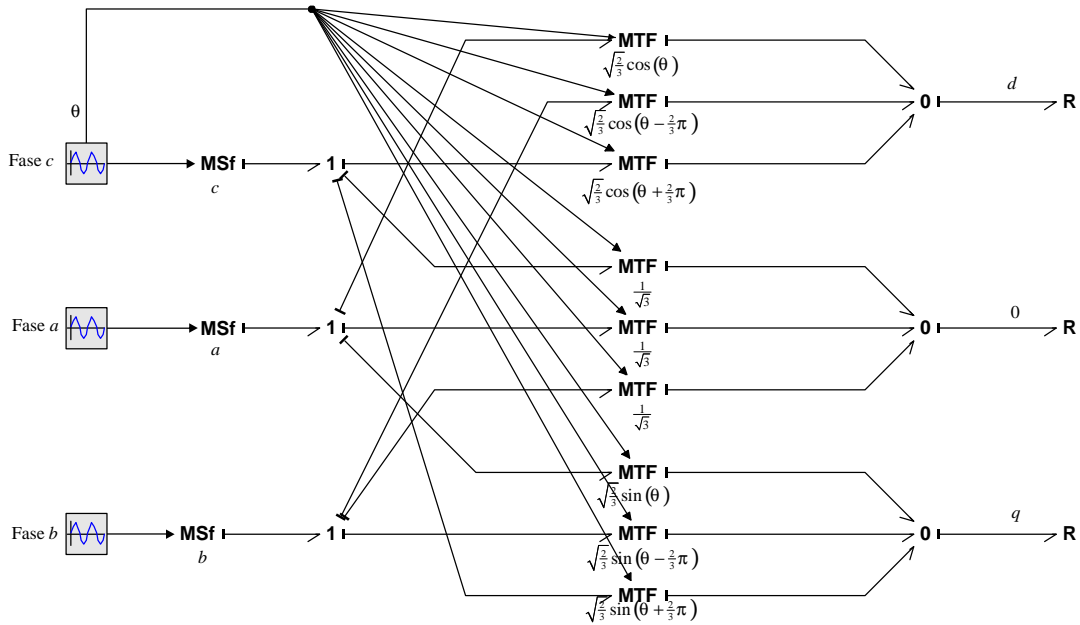
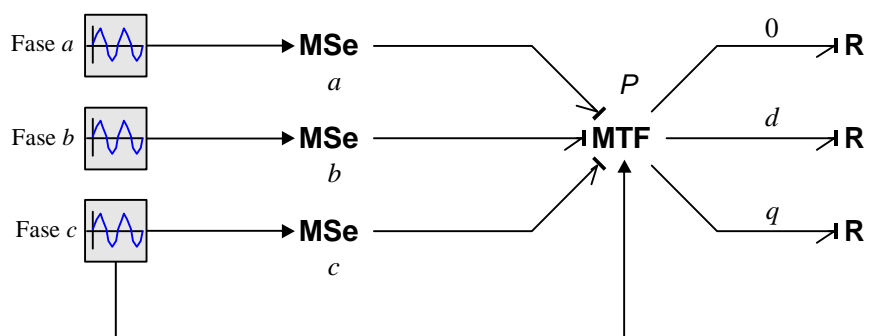


Figura B.5: Modelado en Bond Graph de la transformación de Park para flujos.



$$0 = \frac{1}{\sqrt{3}} v_a + \frac{1}{\sqrt{3}} v_b + \frac{1}{\sqrt{3}} v_c = 0,$$

$$d = \sqrt{\frac{2}{3}} \cos(\theta) v_a + \sqrt{\frac{2}{3}} \cos\left(\theta - \frac{2}{3}\pi\right) v_b + \sqrt{\frac{2}{3}} \cos\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right) v_c,$$

$$q = \sqrt{\frac{2}{3}} \sin(\theta) v_a + \sqrt{\frac{2}{3}} \sin\left(\theta - \frac{2}{3}\pi\right) v_b + \sqrt{\frac{2}{3}} \sin\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right) v_c.$$

Figura B.6: Transformación de Park en bond graph usando un sólo transformador modulado.

# Apéndice C

## Publicaciones

Los artículos generados de esta investigación son:

- Artículo de congreso: "*A quasi-Steady State Model of a Singular Perturbed Synchronous Machine Modelled by Bond Graphs*". Publicado en el congreso IASTED International Conference Modelling, Identification and Control (MIC 2013) del 11 al 13 de Febrero del 2013, Innsbruck, Austria.
- Artículo de revista: "*Quasy State Model of a Class of Non-Linear Singularly Perturbed System in a Bond Graph Approach with an Application to a Turbine-Generator*". En revisión (cuarta) en Electrical Engineering Journal Archiv Für Elektrotechnik ISSN: 0948-7921. ISI Impact Factor 0.367.
- Artículo de revista: "*A Quasi-steady State Model of a Singularly Perturbed Wind Turbine with an Induction Machine Considering Nonlinear Friction in a Bond Graph Approach*". Enviado a: Journal of Control Engineering and Applied Informatics. ISSN 1454-8658. ISI Impact Factor 0.537.
- Artículo de congreso: "*Steady State of a Synchronous Machine in a Bond Graph Approach*". Publicado en el congreso IASTED International Conference Modelling, Identification and Control (MIC 2016) del 15 al 16 de Febrero del 2016, Innsbruck, Austria.

## A QUASI-STEADY STATE MODEL OF A SINGULAR PERTURBED SYNCHRONOUS MACHINE MODELLED BY BOND GRAPHS

J. Aaron Padilla<sup>1</sup>, Gilberto Gonzalez-A<sup>2</sup>  
University of Michoacan, Faculty of Electrical Engineering  
Mexico

<sup>1</sup>joseaaronp@gmail.com, <sup>2</sup>gilmichga@yahoo.com.mx

### ABSTRACT

The singular perturbations theory for a class of nonlinear systems with a bond graph approach is proposed. Also, the state equation of a class of nonlinear systems with singular perturbations modelled by bond graphs is described. Hence, a new junction structure to get the quasi-steady state model for a class of nonlinear systems is proposed. This junction structure has the fast storage elements in derivative causality and the slow storage elements in integral causality. The proposed methodology is applied to a synchronous machine.

### KEY WORDS

Bond graph, Singular perturbations, Synchronous machine.

## 1 Introduction

The synchronous machine has long been the most important of the electromechanical power conversion devices, playing a key role both in the production of electricity and in certain special drive applications.

Synchronous generators form the principal source of electric energy in power systems. Many large loads are driven by synchronous motors, and synchronous condensers are sometimes used as a means of providing reactive power compensation and controlling voltage. These devices operate on the same principle and are collectively referred to as synchronous machines.

Thus, an understanding of their characteristics and accurate modelling of their dynamic performance are of fundamental importance to the study of power system stability.

The modelling and analysis of the synchronous machine has always been a challenge. The problem was worked on intensely in the 1920s and 1930s, and has been the subject of several more recent investigations.

Many books and papers have used the traditional mathematical model of a synchronous machine [1], [2], [3]. Nevertheless in [4] a synchronous machine model considering a class of equivalent circuits with sufficient

flexibility to permit the introduction of an arbitrary number of damper windings. Also, the singular perturbation method is applied to synchronous machine without damper windings in [5]. The transfer function block diagram model of a generator has been employed to analyze generator dynamic characteristic in [6].

Hence, it is useful to develop mathematical models of a synchronous machine to explain their electric, magnetic and mechanical behaviour. These phenomena using a bond graph model of the system can be analyzed in a direct and graphical way.

The main key points of the bond graph methodology are: a model containing the energetic junction structure, *i.e.*, the system architecture; different energy domains are covered and the coupling of subsystems are allowed, the cause to effect relations of each element are obtained graphically; and the state variables have a physical meaning [17, 18, 19].

A fundamental problem in the theory of systems and control is the mathematical modelling of a physical system. The realistic representation of many systems calls for high-order dynamic equations. The presence of some parasitic parameters, such as small time constants, resistances, inductances, capacitances, moments of inertia, and Reynolds number, is often the source for the increased order and stiffness of these systems. The stiffness, attributed to the simulations occurrence of slow and fast phenomena, gives rise to time scales. The systems in which the suppression of a small parameter is responsible for the degeneration (or reduction) of dimension (or order) of the system are labeled as singularly perturbed systems, which a special representation of the general class of time scale systems [7]. There are several references of singular perturbations methods, some of them are [8] and [9]. A common approximation used in the analysis of power systems is the neglect of the dynamic saliency in synchronous machines, then singular perturbations can be applied to the model [10]. We can find some papers applying bond graph to singular perturbations methods. In [11] describes how the bond graph model is a helpful tool for system analysis in the

special case of simplifying the modelling of two time scale systems. The fast and slow dynamics of bond graph models can be estimated by determination of causal loop gains. In [12] the notion of a reciprocal system which, with singular perturbations techniques can obtain more accuracy on the fast time scale behavior of the system.

In this paper the modelling in bond graph of a synchronous machine is presented. In order to determine the quasi-steady model of the machine a junction structure of a new bond graph is proposed. The characteristic of this new bond graph is to assign integral causality to the slow storage elements and derivative causality for fast storage elements. The proposed methodology is applied to the machine model, which is a class of nonlinear systems.

There are some references of singular perturbations applied to synchronous machine. In [13] discusses the use of integral manifolds as a tool for reduced order modeling in nonlinear systems. It is specifically addresses its application to synchronous machine modeling. Time-scale decomposition is used to systematically produce improved reduced order models of interconnected multimachine power systems in [14].

Also, synchronous machine has been modelled by bond graphs [15, 16]. Thus, the proposed paper gives a relation between bond graph with singular perturbation and its application to the synchronous machine.

Section 2 describes the singular perturbation model. The modelling of a class of nonlinear system with two time scale in the physical domain is proposed in Section 3. In Section 4 a quasi steady state model with a bond graph approach is presented. The proposed methodology is applied to a synchronous machine in Section 5. Finally, Section 6 gives the conclusions.

## 2 The Standard Singular Perturbation Model

The singular perturbation model of finite dimensional dynamic systems, extensively studied in the mathematical literature by Tikhonov (1984, 1952), Levinson (1950), Vasil'eva (1963), Wasow (1965), O'Malley (1971), etc. was also the first model to be used in control and systems. This model is in the explicit state variable form

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f(x_1, x_2, \epsilon, t), x_1(t_0) = x_1^0, x_1 \in \mathbb{R}^n(1) \\ \epsilon \dot{x}_2(t) &= g(x_1, x_2, \epsilon, t), x_2(t_0) = x_2^0, x_2 \in \mathbb{R}^m(2) \end{aligned}$$

where  $f$  and  $g$  are assumed to be sufficiently many times continuously differentiable functions for their arguments,  $x_1, x_2, \epsilon, t$ . The scalar represents all the small parameters to be neglected [8].

In control and systems theory, the model (1) and (2) is a step towards reduced order model, a common engineering task. The order reduction is converted into a parameter perturbation called singular. When we set  $\epsilon = 0$ , the dimension of the state space of (1) and (2) reduces from  $n + m$  to  $n$  because the differential equation (2) degenerates into the algebraic equation

$$0 = g(\bar{x}_1, \bar{x}_2, 0, t) \quad (3)$$

where the bar is used to indicate that the variables belong to a system with  $\epsilon = 0$  [8]. Also, in a domain of interest (3) has  $k \geq 1$  distinct real roots

$$\bar{x}_2 = \bar{\phi}_i(\bar{x}_1, t), \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (4)$$

This assumption ensures that a well defined  $n$  dimensional reduced model will correspond to each root (4). To obtain the reduced model, we substitute (4) into (1).

$$\dot{\bar{x}}_1 = f(\bar{x}_1, \bar{\phi}_i(\bar{x}_1, t), 0, t), \quad \bar{x}_1(t_0) = x_1^0 \quad (5)$$

and keep the same initial condition for the state variable  $\bar{x}_1(t)$  as for  $x_1(t)$ . In the sequel, we shall drop the subscript  $i$  and rewrite (5) more compactly as

$$\dot{\bar{x}}_1 = f(\bar{x}_1, t), \quad \bar{x}_1(t_0) = x_1^0 \quad (6)$$

This model is sometimes called a quasi-steady state model because  $x_2$  may rapidly converge to a root of (3), which is the quasi-steady state form of (2).

## 3 Modelling in Bond Graph of a Class of Nonlinear Systems with Singular Perturbations

The symbolic form of a bond graph in integral causality assignment (BCI) of a system is shown in Fig. 1.

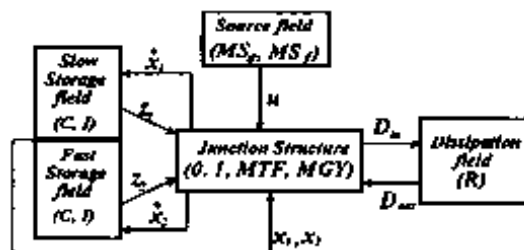


Fig. 1. Key vectors of the BCI.

In Fig. 1,  $(MS_s, MS_f)$ ,  $(J, C)$  and  $(R)$  denote the source, the energy storage and the energy dissipation fields and  $(0, I, MTF, MGY)$  the junction structure with transformers,  $MTF$ , and gyrators,  $MGY$ .

The state  $x_1(t) \in \mathbb{R}^n$  and  $x_2(t) \in \mathbb{R}^m$  are composed of energy variables  $p(t)$  and  $q(t)$  associated with  $I$  and  $C$  elements in integral causality for slow and fast variables, respectively;  $u(t) \in \mathbb{R}^p$  denotes the plant input,  $z_1(t) \in \mathbb{R}^n$  and  $z_2(t) \in \mathbb{R}^m$  the co-energy vector for slow and fast variables, respectively; and  $D_{in}(t) \in \mathbb{R}^r$  and  $D_{out}(t) \in \mathbb{R}^r$  are a mixture of  $e(t)$  and  $f(t)$  showing the energy exchanges between the dissipation field and the junction structure. The feedback between storage field and junction structure shows that *MTP* or *MGY* by using an active bond are modulated.

The relations of the storage and dissipation fields are linear. These relations are described by

$$z_1(t) = F_1 x_1(t) \quad (7)$$

$$z_2(t) = F_2 x_2(t) \quad (8)$$

$$D_{out}(t) = L D_{in}(t) \quad (9)$$

The relations of the junction structure are,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ D_{in}(t) \end{bmatrix} = S(x) \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (10)$$

where

$$S(x) = \begin{bmatrix} S_{11}^{11}(x) & S_{11}^{12}(x) & S_{12}^{11}(x) & S_{13}^{11}(x) \\ S_{11}^{21}(x) & S_{11}^{22}(x) & S_{12}^{21}(x) & S_{13}^{21}(x) \\ S_{21}^{11}(x) & S_{21}^{12}(x) & S_{22}(x) & S_{23}(x) \end{bmatrix} \quad (11)$$

The entries of  $S$  take values inside the set  $\{0, \pm 1, \pm k_r, \pm k_g\}$  where  $k_r$  and  $k_g$  are transformer and gyrator modules. The state space equations are

$$\dot{x}_1(t) = A_{11}(x) x_1(t) + A_{12}(x) x_2(t) + B_1(x) u(t) \quad (12)$$

$$\dot{x}_2(t) = A_{21}(x) x_1(t) + A_{22}(x) x_2(t) + B_2(x) u(t) \quad (13)$$

where

$$A_{11}(x) = [S_{11}^{11}(x) + S_{12}^{11}(x) M(x) S_{21}^{11}(x)] F_1 \quad (14)$$

$$A_{12}(x) = [S_{11}^{12}(x) + S_{12}^{11}(x) M(x) S_{21}^{12}(x)] F_2 \quad (15)$$

$$B_1(x) = S_{13}^{11}(x) + S_{12}^{11}(x) M(x) S_{23}(x) \quad (16)$$

$$A_{21}(x) = F_2^{-1} [S_{11}^{21}(x) + S_{12}^{21}(x) M(x) S_{21}^{11}(x)] F_1 \quad (17)$$

$$A_{22}(x) = F_2^{-1} [S_{11}^{22}(x) + S_{12}^{21}(x) M(x) S_{21}^{12}(x)] F_2 \quad (18)$$

$$B_2(x) = F_2^{-1} [S_{13}^{21}(x) + S_{12}^{21}(x) M(x) S_{23}(x)] \quad (19)$$

being

$$M(x) = [I - L S_{22}(x)]^{-1} L \quad (20)$$

In the next section, a new junction structure of a bond graph to get the quasi-steady state model of a system is presented.

#### 4 A Bond Graph to determine the Quasi-Steady State Model

A scheme to obtain the quasi-steady state model for a class of nonlinear systems is shown in Fig. 2. This junction structure proposes to assign derivative causality for the fast storage elements and the slow storage elements have to maintain the integral causality assignment.

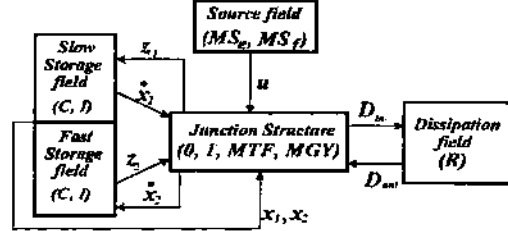


Fig. 2. A junction structure to get the quasi-steady state model.

The junction structure of the Fig. 2 is given by

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ D_{in}(t) \end{bmatrix} = H(x) \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (21)$$

where

$$H(x) = \begin{bmatrix} H_{11}^{11}(x) & H_{11}^{12}(x) & H_{12}^{11}(x) & H_{13}^{11}(x) \\ H_{11}^{21}(x) & H_{11}^{22}(x) & H_{12}^{21}(x) & H_{13}^{21}(x) \\ H_{21}^{11}(x) & H_{21}^{12}(x) & H_{22}(x) & H_{23}(x) \end{bmatrix} \quad (22)$$

The constitutive relation of the dissipation field is

$$D_{out}^h(t) = L_h D_{in}^h(t) \quad (23)$$

The second line of (21) gives

$$x_2 = \widetilde{A}_{21}(x) x_1 + \widetilde{A}_{22}(x) \dot{x}_2 + \widetilde{B}_2(x) u \quad (24)$$

where

$$\widetilde{A}_{21}(x) = F_2^{-1} [H_{11}^{21}(x) + H_{12}^{21}(x) Q(x) H_{21}^{11}(x)] F_1 \quad (25)$$

$$\widetilde{A}_{22}(x) = F_2^{-1} [H_{11}^{22}(x) + H_{12}^{21}(x) Q(x) H_{21}^{12}(x)] F_2 \quad (26)$$

$$\widetilde{B}_2(x) = F_2^{-1} [H_{13}^{21}(x) + H_{12}^{21}(x) Q(x) H_{23}(x)] \quad (27)$$

$$Q(x) = [I - L_h H_{22}(x)]^{-1} L_h \quad (28)$$

The real roots of the form (4) with (24) are defined by

$$x_2 = \widetilde{A}_{21}(x) z_1(x) + \widetilde{B}_2(x) u \quad (29)$$

From the first line of (21) yields

$$\dot{x}_1 = \widetilde{A}_{11} x_1 + \widetilde{A}_{12} \dot{x}_2 + \widetilde{B}_1 u \quad (30)$$

where

$$\widetilde{A}_{11} = [H_{11}^{11}(x) + H_{12}^{11}(x)Q(x)H_{21}^{11}(x)]F_1 \quad (31)$$

$$\widetilde{A}_{12} = H_{11}^{12}(x) + H_{12}^{12}(x)Q(x)H_{21}^{12}(x) \quad (32)$$

$$\widetilde{B}_1 = H_{13}^{11}(x) + H_{12}^{11}(x)Q(x)H_{23}(x) \quad (33)$$

and the quasi-steady state model is given by

$$\dot{\overline{x}}_1 = \widetilde{A}_{11}\overline{x}_1 + \widetilde{B}_1u \quad (34)$$

In the next section the proposed methodology is applied to a synchronous machine.

### 5 A Bond Graph Model of a Synchronous Machine

Consider the representation of a synchronous machine of Fig. 3 [2].

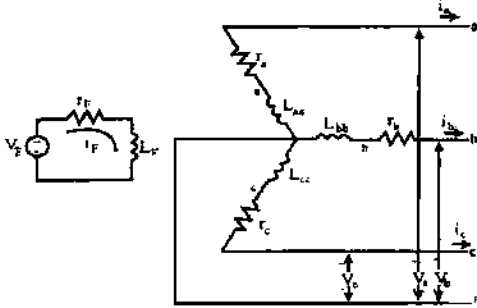


Fig. 3. Schematic diagram of a synchronous machine.

In Fig. 3, we can identify the following elements:

- $a, b, c$ : stator phase windings. So,  $i_a, i_b, i_c$  denote the stator phase currents;  $v_a, v_b, v_c$  denote the stator phase voltages,  $r_a, r_b, r_c$  denote the stator phase resistances and  $L_{aa}, L_{bb}, L_{cc}$  denote the stator phase self inductances.
- $F$ : field winding with  $i_F$  and  $v_F$  denote the field current and voltage, respectively;  $r_F$  denotes the field resistance and  $L_F$  denotes the field self inductance.

The synchronous generator of Fig. 3, is represented by six windings are magnetically coupled. The magnetic coupling between the windings is a function of the rotor position. The instantaneous terminal voltage  $v$  of any winding is in the form,

$$v = \pm \sum r i \pm \dot{\lambda} \quad (35)$$

where  $\lambda$  is the flux linkage,  $r$  is the winding resistance and  $i$  is the current with positive directions of stator currents flowing out of the generator terminals.

A great simplification in the mathematical description of the synchronous machine is obtained from the Park's transformation. The effect of Park's transformation is simply to transform all stator quantities from phases  $a, b$  and  $c$  into new variables the frame of reference of which moves with the rotor. Thus by definition [1]

$$i_{dq} = P i_{abc} \quad (36)$$

where the current vectors are defined as,

$$i_{0dq} = [i_0 \ i_d \ i_q]^T \quad (37)$$

$$i_{abc} = [i_a \ i_b \ i_c]^T \quad (38)$$

and the Park's transformation is

$$P = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ \cos \theta & \cos(\theta - 2\pi/3) & \cos(\theta + 2\pi/3) \\ \sin \theta & \sin(\theta - 2\pi/3) & \sin(\theta + 2\pi/3) \end{bmatrix} \quad (39)$$

The angle between the  $d$  axis and the rotor is given by

$$\theta = \omega_R t + \delta + \pi/2 \quad (40)$$

where  $\omega_R$  is the rated angular frequency in rad/s and  $\delta$  is the synchronous torque angle in electrical radians.

Similarly, to transform the voltages and flux linkages,

$$v_{0dq} = P v_{abc} \quad (41)$$

$$\lambda_{0dq} = P \lambda_{abc} \quad (42)$$

In according with Fig. 3, we described the bond graph model of the synchronous machine on  $d$ - $q$  axis, in Fig. 4 that satisfies the previous conditions of this section. This bond graph is different respect to [15] on the directions of the bonds 14, 15, 17 and 19, and we use a voltage source on the exciting winding.

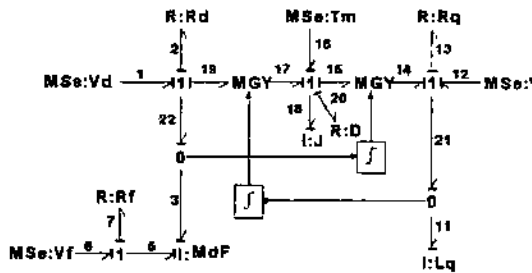


Fig. 4. BGI of the synchronous machine.

The key vectors of the bond graph in an integral causality assignment are

$$x_2 = \begin{bmatrix} p_3 \\ p_5 \\ p_{11} \end{bmatrix}; \dot{x}_2 = \begin{bmatrix} e_3 \\ e_5 \\ e_{11} \end{bmatrix}; z_2 = \begin{bmatrix} f_3 \\ f_5 \\ f_{11} \end{bmatrix}$$

$$x_1 = p_{18}; \dot{x}_1 = e_{18}; z_1 = f_{18};$$

$$D_{in} = \begin{bmatrix} f_{20} \\ f_2 \\ f_7 \\ f_{13} \end{bmatrix}; D_{in} = \begin{bmatrix} e_{20} \\ e_2 \\ e_7 \\ e_{13} \end{bmatrix}; u = \begin{bmatrix} e_{16} \\ e_1 \\ e_6 \\ e_{12} \end{bmatrix}$$

the constitutive relations of the fields are

$$L = \text{diag}\{R_d, R_f, R_q, D\} \quad (43)$$

$$F_2^{-1} = \begin{bmatrix} L_d & M & 0 \\ M & L_f & 0 \\ 0 & 0 & L_q \end{bmatrix} \quad (44)$$

$$F_1 = \frac{1}{J} \quad (45)$$

and the junction structure is

$$S_{11}^{12}(x) = \begin{bmatrix} -p_{11} \\ 0 \\ p_3 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} S_{12}^{11} \\ S_{12}^{21} \end{bmatrix} = -I_3 = -\begin{bmatrix} S_{13}^{11} \\ S_{13}^{21} \end{bmatrix}$$

$$S_{22}^{11} = 0_{3 \times 3}; \begin{bmatrix} S_{21}^{11} & S_{21}^{12} \end{bmatrix} = I_4; S_{22} = S_{23} = 0_{4 \times 4}$$

$$S_{11}^{21}(x) = -(S_{11}^{12}(x))^T; S_{11}^{11} = 0 \quad (46)$$

Note that, the submatrices  $S_{12}^{11}$ ,  $S_{12}^{21}$ ,  $S_{13}^{11}$ ,  $S_{13}^{21}$ ,  $S_{22}^{11}$ ,  $S_{22}$  and  $S_{23}$  are constant matrices, and  $S_{11}^{12}(x)$  and  $S_{11}^{21}(x)$  are submatrices depending of  $x$ . From (14) to (20) and (43) to (46) the state variables representation is

$$A_{11} = \frac{-D}{J}; A_{12}(x) = \begin{bmatrix} \frac{L_f p_{11}}{\Delta} & \frac{-M p_{11}}{\Delta} & \frac{-p_3}{L_q} \end{bmatrix}$$

$$A_{21}(x) = \begin{bmatrix} \frac{-p_{11} L_d}{J} \\ \frac{-p_{11} M}{L_f} \\ \frac{p_3 L_q}{J} \end{bmatrix}; A_{22} = \begin{bmatrix} N & 0_{2 \times 1} \\ 0_{1 \times 2} & -r_g \end{bmatrix}$$

$$B_2 = 1; B_1 = I_3$$

where

$$N = \begin{bmatrix} \frac{-r_d L_f L_d + M^2 r_f}{\Delta} & \frac{M L_d r_d - r_f L_d M}{\Delta} \\ \frac{-r_d M L_f + r_f M}{\Delta} & \frac{M^2 r_d - r_f L_f L_d}{\Delta} \end{bmatrix}$$

In order to verify that the synchronous machine is a singularly perturbed system, the performance of the fast and slow variables is shown in Fig. 5, where the numeric parameters are:  $J = 2.37N - s^2/m$ ,  $R_d = 0.1\Omega$ ,  $R_q = 0.1\Omega$ ,  $D = 3N - s/m$ ,  $L_d = 1.7H$ ,  $L_q = 1.64H$ ,  $M = 1.55H$ ,  $R_f = 11\Omega$ ,  $e_1 = -0.105V$ ,  $e_6 = 30V$ ,  $e_{12} = 165.27V$  and  $e_{16} = 100N$ .

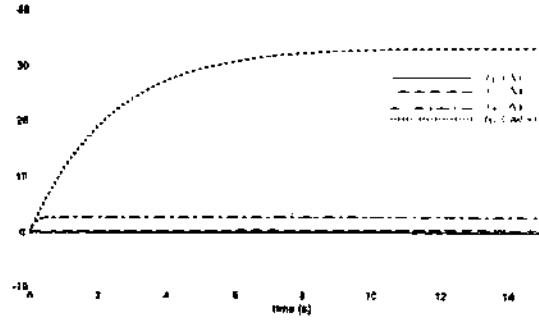


Fig. 5. Performance of the fast and slow variables.

The corresponding bond graph to get the quasi-steady state model is shown in Fig. 6. Note that, the fast storage elements have derivative causality and the slow storage element has integral causality.

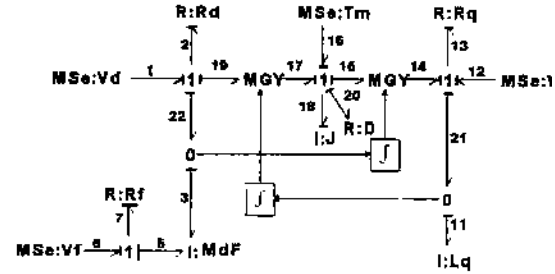


Fig. 6. Bond graph to get the quasi-steady state model of the machine.

The junction of the proposed bond graph is given by

$$H_{11}^{11} = 0; H_{11}^{12} = 0_{1 \times 3} = (H_{11}^{21})^T; H_{22} = 0_{4 \times 4}$$

$$H_{13}^{21} = 0_{3 \times 4}; H_{11}^{22} = 0_{3 \times 3}$$

$$H_{12}^{21} = \begin{bmatrix} I_3 & 0_{3 \times 1} \end{bmatrix}; H_{21}^{12} = -(H_{12}^{21})^T;$$

$$H_{12}^{11}(x) = \begin{bmatrix} p_{11} & 0 & -p_3 & -1 \end{bmatrix} = -(H_{21}^{11})^T$$

$$H_{23} = \begin{bmatrix} I_3 & 0_{3 \times 1} \\ 0_{1 \times 3} & 0 \end{bmatrix}; H_{13}^{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T \quad (47)$$

From (25), (27), (29), (43), (44), (45) and (47) the real roots can be obtained by

$$\begin{bmatrix} \bar{p}_3 \\ \bar{p}_5 \\ \bar{p}_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \frac{-p_{11}}{T_d} \\ \frac{-M}{r_d} \frac{p_{11}}{T_f} \\ \frac{p_3}{T_q} \end{bmatrix} \bar{p}_{18} + F_2^{-1} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_6 \\ e_{12} \end{bmatrix} \quad (48)$$

where  $T_d = \frac{L_d}{r_d}$  and  $T_q = \frac{L_q}{r_q}$ .

From (34), (31), (33), (43), (44), (45) and (47) the quasi-steady state model is defined by

$$\frac{\dot{p}_{18}}{p_{18}} = \frac{-1}{J R_d} \frac{p_{11}^2}{p_{18}} - \frac{1}{J R_q} \frac{p_3^2}{p_{18}} - \frac{D}{J} \frac{p_{18}}{p_{18}} + \frac{p_{11}}{R_d} e_1 - \frac{p_3}{R_q} e_{12} + e_{16} \quad (49)$$

By solving (48) we have,

$$\begin{bmatrix} \frac{p_3}{p_{11}} \\ \frac{p_5}{p_{11}} \\ \frac{p_{11}}{p_{11}} \end{bmatrix} = \alpha \phi(\bar{p}_{18}) \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-M \bar{p}_{18}^2}{J^2 T_d R_d} \\ \frac{p_{11}^2}{J T_q} \end{bmatrix} \quad (50)$$

where  $\alpha = \frac{J e_1}{T_d} - \frac{e_{14}}{T_d T_q} + \frac{J M e_{11}}{R_d}$  and  $\phi(\bar{p}_{18}) = \left[ J^2 + \frac{p_{11}^2}{T_d T_q} \right]^{-1}$ .

By substituting (50) into (49) the quasi-steady state model of the synchronous machine is

$$\frac{\dot{p}_{18}}{p_{18}} = \frac{-\alpha^2}{J^3 R_d T_q^2} \bar{p}_{18}^3 \phi^2(\bar{p}_{18}) - \frac{\alpha^2}{J R_q} \bar{p}_{18} \phi^2(\bar{p}_{18}) - \frac{D}{J} \frac{p_{18}}{p_{18}} + \frac{\alpha}{J R_d T_q} \bar{p}_{18} \phi(\bar{p}_{18}) - \frac{\alpha}{R_q} \phi(\bar{p}_{18}) e_{12} + e_{16}$$

Fig. 7 shows the simulation results of the quasi-steady model respect to the slow variable of synchronous machine. Note that, the approximate state  $\bar{p}_{18}$  is very close to slow state  $f_{18}$  of the machine.

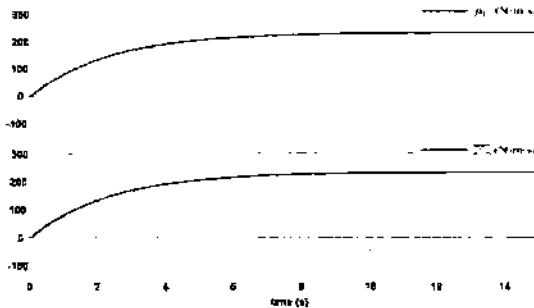


Fig. 7. Performance of the quasi-steady state model and the slow variable.

It is important to know, that the proposed methodology is easy and direct and it can be extended to another class of nonlinear systems.

## 6 Conclusion

In this paper a class of nonlinear systems with singular perturbations modelled by bond graphs is presented. A junction structure to analyze the singularly perturbed system is proposed. This junction structure has the fast storage elements in a derivative causality assignment and the slow storage elements maintain

an integral causality assignment, with this the quasi-steady state model of the system can be obtained in a direct way.

The proposed methodology is applied to the synchronous machine, simulation results are given showing the original states performance and comparing with the quasi-steady state model behaviour, and these results are very close, indicating the effectiveness of the methodology.

## References

- [1] P. M. Anderson, "Power System Control and Stability", The IOWA State University Press, (1977).
- [2] P. Kundur, "Power System Stability and Control", Mc.Graw-Hill, (1994).
- [3] John R. Smith, Meng-Jen Chen, "Three-Phase Electrical Machine Systems Computer Simulation", John Wiley & Sons Inc., (1993).
- [4] I. Kamwa, R. Wamkeue, X. Dai-Do, "General approaches to efficient d-q simulation and model translational for synchronous machines: a recap", Electric Power Systems Research Vol. 42, pp. 173-180, 1997.
- [5] Milenko Duric, Zoran Rdajevic, Emilija Turkovic, "A practical approach to the order reduction of a power system model for small stability analysis", Electric Power System Research, vol. 41, pp. 13-18, 1997.
- [6] M. Saïdy and F. M. Hughes, "An extended block diagram transfer function model of a synchronous machine", Electric Power & Energy Systems, vol 18, No. 2 pp. 139-142, 1996.
- [7] D. Subbaram Naidu and A. J. Calise, "Singular Perturbations and Time Scales in Guidance and Control of Aerospace Systems: A Survey, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 24, No. 6, Nov-Dec, 2001.
- [8] P.V. Kokotovic, H. K. Khalil and J. O'Reilly, "Singular Perturbation Methods in Control: Analysis and Design", Academic Press, 1986.
- [9] Khalil, "NonLinear Systems".
- [10] Steven D. Pekarek, M. T. Lemanski and E. A. Walters, "On the Use of Singular Perturbations to Neglect the Dynamic Saliency of Synchronous Machines", IEEE Transactions on Energy Conversion, Vol. 17, No. 3, Sep 2002.

- 
- [11] C. Sueur and G. Dauphin-tanguy, "Bond Graph Approach to Multi-time Scale Systems Analysis", *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 328, No.5/6, pp. 1005-1026, 1991.
- [12] G. Dauphin-Tanguy, P. Borne and M. Lebrun, "Order Reduction of Multi-Time Scale Systems Using Bond Graphs, the Reciprocal System and the Singular Perturbation Method", *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 319, No. 1/2, pp.157-171, January-February 1985.
- [13] Petar V. Kokotic and P. W. Sauer, "Integral Manifold as a Tool for Reduced-Order Modeling of Nonlinear Systems: A Synchronous Machine Case Study", *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol.36, No.3, March 1989, pp. 403-410.
- [14] P. W. Sauer, D. J. La Gesse, S. Ahmed-Zaid and M.A. Pai, "Reduced order Modelling of interconnected Multimachine Power System using time-scale decomposition", *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. PWRS-2, No.2 May 1987, pp. 310-319.
- [15] Dietrich Sahn, "A Two-Axis Bond Graph Model of the Dynamics of Synchronous Electrical Machine", *Journal of the Franklin Institute*, vol. 308, No. 3, pp.205-218 (1979).
- [16] H. Morel, P. H. Lautier, B. Allard, J. P. Masson and H. Fraisse, "A bond graph model of the synchronous motor", *Proceedings of ICBGM'97*, 3rd International Conference on Bond Graph Modelling and Simulation, pp. 227-232, 1997.
- [17] Dean C. Karnopp, Donald L. Margolis and Ronald C. Rosenberg, *System Dynamics Modeling and Simulation of Mechatronic Systems*, Wiley, John & Sons, 2000.
- [18] P. E. Wellstead, *Physical System Modelling*, Academic Press, London, 1979.
- [19] C. Sueur and G. Dauphin-Tanguy, "Bond graph approach for structural analysis of MIMO linear systems", *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 328, No. 1, pp. 55-70, 1991.
- [20] G. Dauphin-Tanguy and P. Borne, Order Reduction of Multi-time Scale Systems Using Bond Graphs, the Reciprocal System and Singular Perturbation Method, *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 319, No. 1/2, pp. 157-171, 1985.

## Electrical Engineering

### Quasi Steady State Model of a Class of Non-linear Singularly Perturbed System in a Bond Graph Approach with an Application to a Turbine-Generator --Manuscript Draft--

<b>Manuscript Number:</b>	ELEN-D-13-00196R4
<b>Full Title:</b>	Quasi Steady State Model of a Class of Non-linear Singularly Perturbed System in a Bond Graph Approach with an Application to a Turbine-Generator
<b>Article Type:</b>	Original Research
<b>Corresponding Author:</b>	Gilberto Gonzalez University of Michoacan Morelia, Michoacan MEXICO
<b>Corresponding Author Secondary Information:</b>	
<b>Corresponding Author's Institution:</b>	University of Michoacan
<b>Corresponding Author's Secondary Institution:</b>	
<b>First Author:</b>	Gilberto Gonzalez
<b>First Author Secondary Information:</b>	
<b>Order of Authors:</b>	Gilberto Gonzalez Aaron Padilla, phd Student
<b>Order of Authors Secondary Information:</b>	
<b>Funding Information:</b>	
<b>Abstract:</b>	<p>A particular class of non-linear singularly perturbed systems by using a bond graph approach is proposed. The class of non-linear systems is defined by terms of product of state variables and/or state variables to the power of bigger than one whose bond graph representation is described by MTF or MGY elements modulated by these same state functions. The singular perturbations applied to the system permit the separation of time scales.</p> <p>When the assumptions of Tikhonov Theorem are satisfied then a new bond graph called Singularly Perturbed Non-linear Bond Graph (SPNBG) to determine the quasi steady state model of the system is presented. The SPNBG is characterized by having an integral causality assignment for the storage elements that represent the slow dynamic and the storage elements of the fast dynamic have a derivative causality assignment.</p> <p>The proposed methodology is applied to the nonlinear system formed by the connection between a synchronous generator and the turbines, i.e. a turbine-generator. In order to verify the effectiveness of the paper, simulations results are shown.</p>
<b>Response to Reviewers:</b>	<p>Dear reviewer, I have modified the paper with your valuable comments:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- I have re-written Assumption 4.</li> <li>- I have corrected the class of non-linear systems of the proposed paper.</li> <li>- I have corrected the proof of Lemma removing the particular case.</li> <li>- I have corrected the different mistakes on the paper including English spelling and grammar.</li> </ul>

# Quasi Steady State Model of a Class of Non-linear Singularly Perturbed System in a Bond Graph Approach with an Application to a Turbine-Generator

Gilberto Gonzalez-A<sup>1</sup> and J. Aaron Padilla<sup>2</sup>

Faculty of Electrical Engineering, University of Michoacan, Mexico

<sup>1</sup>gilmichga@yahoo.com.mx, <sup>2</sup>aaron@yahoo.com.mx

July 20, 2015

## Abstract

A particular class of non-linear singularly perturbed systems by using a bond graph approach is proposed. **The class of non-linear systems is defined by terms of product of state variables and/or state variables to the power of bigger than one** whose bond graph representation is described by *MTF* or *MGY* elements modulated by state variables. The singular perturbations applied to the system permit the separation of time scales.

When the assumptions of Tikhonov Theorem are satisfied then a new bond graph called Singularly Perturbed Non-linear Bond Graph (SPNBG) to determine the quasi steady state model of the system is presented. The SPNBG is characterized by having an integral causality assignment for the storage elements that represent the slow dynamics and the storage elements of the fast dynamics have a derivative causality assignment.

The proposed methodology is applied to the non-linear system formed by the connection between a synchronous generator and the turbines, *i.e.* a turbine-generator. In order to verify the effectiveness of the paper, simulations results are shown.

**Key Words:** Bond graph, singular perturbations, quasi steady state model, synchronous machine, turbo-generator

## 1 Introduction

Singularly perturbed systems and, more generally, multi-time scale systems, often occur naturally due to the presence of small ‘parasitic’ parameters, typically small time

constants, masses, etc., these parasitic parameters can be presented multiplying time derivatives or, in more disguised form, due to the presence of large feedback gains and weak coupling. The chief purpose of the singular perturbation approach to analysis and design is the alleviation of the high dimensionality and illconditioning resulting from the interaction of slow and fast dynamic modes. This time-scale approach is asymptotic, by means, exact in the limit as the ratio  $\varepsilon$  of the speeds of the slow versus the fast dynamics tends to zero. When  $\varepsilon$  is small, approximations are obtained from reduced-order models in separate time scales [1].

A fundamental problem, in the theory of systems and control, is the mathematical modeling of a physical system. The realistic representation of many systems calls for high-order dynamic equations. The presence of some parasitic parameters is often the source for the increased order and stiffness of these systems. The stiffness, attributed to the simultaneous occurrence of slow and fast phenomena, gives rise to time scales. The systems, in which the suppression of a small parameter is responsible for the degeneration (or reduction) of dimension (or order) of the system, are labeled as singularly perturbed systems, which are a special representation of the general class of time scale systems [2].

There are several references of singular perturbations methods, some of them are given by [3] and [4]. A common approximation used in the analysis of power systems is the neglect of the dynamic saliency in synchronous machines, then singular perturbation to the machine is applied in [5].

The progress in the use of singular perturbation and two-time scale methods of modelling and design for control is reviewed in [1]. In [6], there are reviews of some results in applying singular perturbation theory to obtain simplified power system models for stability analysis and control design.

The synchronous machine has long been one of the most important electromechanical power conversion devices, playing a key role both in the production of electricity and in certain special drive applications. Thus, an understanding of their characteristics and accurate modelling of their dynamic performance are of fundamental importance to the study of power system stability.

There are some interesting papers applying singular perturbations methods to synchronous machine. For example, in [7] an iterative method to derive multi-time-scale reduced-order models of synchronous machines is proposed. Time-scale decomposition is used to systematically produce improved reduced order models of interconnected multimachine power systems in [8]. Some results are reviewed by [9] in applying singular perturbation theory to obtain simplified power system models for stability analysis and control design. The topics include synchronous machine modelling, slow coherency and dynamic equivalence of large power networks, and transient stability analysis using direct methods. [10] discusses the use of integral manifolds as a tool for reduced order modeling in nonlinear systems. It specifically addresses its application to synchronous machine modeling.

Bond graph works through a graphical approach of system modelling, the essential

feature of the bond graph approach is the representation of energetic interactions between systems and/or system components by a single line. It can represent many energy types and describes how the power flows through the system [11].

The main key points of the bond graph methodology are: a model containing the energetic junction structure, *i.e.*, the system architecture; different energy domains are covered and the coupling of subsystems is allowed; the cause to effect relations of each element are obtained graphically; and the state variables have a physical meaning [12].

We can find some papers applying bond graph to singular perturbations methods. [13] describes how the bond graph model is a helpful tool for systems analysis in the special case of simplifying the modeling of two time scale systems. The fast and slow dynamics of bond graph models can be estimated by determination of causal loop gains. In [14] the notion of a reciprocal system which, with singular perturbations techniques, can obtain more accuracy on the fast time scale behavior of the system than for classical singular reduction since the dynamics are inverted and the fast part becomes the slow reciprocal part, which can be separated by singular perturbation techniques. Also, a model reduction procedure that uses information of the physical-based model reduction methods using bond graphs and power and energy level information eliminates elements that are considered unnecessary from the physical domain in [15] is presented. Orbak et al. in [15] proposes a methodology that exploits the idea of decomposition of physical systems suitable for the identification of dominant subsystems.

A new idea to manipulate the causality of the storage elements of a bond graph model to obtain the steady state response of Linear Time Invariant (LTI) systems was published in [16]. If a bond graph model in which is assigned a derivative causality to the storage elements, the steady state can be obtained. Also, in [17] the quasi steady state model of a LTI system with singular perturbations by fixing the causality of the storage field of the corresponding bond graph model is determined.

The reference [15] does not propose how we can do with bond graphs containing storage elements in derivative causality and the mathematical descriptions of the reduced models are not established. Hence, in [17] are considered storage elements in integral and derivative causality assignments for both dynamics.

In this paper, the direct determination of the quasi steady state model for a class of non-linear singularly perturbed systems is proposed. Firstly, the class of non-linear systems is defined **by terms of product of state variables and/or state variables to the power of bigger than one**. Then, a junction structure of the bond graph model in an integral causality assignment for this particular class of non-linear systems is presented. Also, by assigning a derivative causality to the storage elements of the fast dynamics and maintaining integral causality for the storage elements of the slow dynamics a new bond graph called Singular Perturbation Non-linear Bond Graph (SPNBG) is proposed. From the SPNBG the quasi steady state model can be obtained.

The references [13, 14, 15] consider only storage elements in an integral causality assignment. The mathematical representation of the reduced models are not given in [15]. An advantage of [17] is to know if the quasi steady state model of the system can be obtained by using a proposed property. This property indicates if the matrix  $A_{22}$  is nonsingular by using a proposed bond graph for a LTI singularly perturbed system defined by  $\dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t) + B_1u(t)$  and  $\varepsilon\dot{x}_2(t) = A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t) + B_2u(t)$ .

Hence, the present paper is an extension of the results of [17] for the class of non-linear systems with singular perturbations defined in this paper. Also, the SPNBG is obtained in only one step.

The references [13, 14, 15, 17] give bond graph methodologies for LTI systems and the present article describes a particular class of non-linear systems in a bond graph approach and it is an initial step to analyze more general nonlinear systems with singular perturbations. Another difference of this paper respect to [17] is to use a realistic application of a turbine-generator for obtaining the quasi steady state model.

Section 2 describes the singular perturbation model. The modelling of a class of non-linear system with two time scale in the physical domain is proposed in section 3. In section 4, a quasi steady state model with a bond graph approach is presented. The synchronous machine with the shaft system is modelled by bond graphs in section 5. The quasi steady state model of the synchronous machine with the mechanical system is presented in section 6. Section 7 describes the simulating results of the synchronous machine. Finally, the conclusions are given in section 8.

## 1.1 Notation

The following notation will be employed in this paper.

$A(x)$ state matrix with argument $x$	$L$ constitutive relation of the dissipation field on the BGI
$A_0(x_1)$ state matrix of the reduced model with argument $x_1$	$L_n$ constitutive relations of the dissipation field on the SPNBG
$B(x)$ input matrix with argument $x$	$M(x)$ algebraic loops matrix on the BGI
BGI bond graph model with a preferred integral causality	$O(\varepsilon)$ approximation function
BGD bond graph model with a preferred derivative causality	$Q(x)$ algebraic loops matrix on the SPNBG
$B_0(x_1)$ input matrix of the reduced model with argument $x_1$	$R_c\{\bullet\}$ real part
$D_{in}(t)$ input vector of the dissipation elements on the BGI	$S(x)$ junction structure of the BGI

$D_{out}(t)$ output vector of the dissipation elements on the BGI	SPNMG singular perturbed nonlinear bond graph model
$D_{in}^h(t)$ input vector of the dissipation elements on the SPNMG	$u$ input
$D_{out}^h(t)$ output vector of the dissipation elements on the SPNMG	$x_1, x_2$ state variables of the slow and fast dynamics
$f(\bullet)$ slow dynamics function	$\bar{x}_1, \bar{x}_2$ state variables of the slow and fast dynamics with $\varepsilon = 0$
$F_1$ constitutive relation of the slow storage elements	$\hat{x}_2$ state variables approximation of the slow dynamics
$F_2$ constitutive relation of the fast storage elements	$x_1^0, x_2^0$ initial conditions of the state variables of the slow and fast dynamics
$g(\bullet)$ fast dynamics function	$z_1, z_2$ co-energy vectors for $x_1, x_2$
$H(x)$ junction structure of the SPNMG	$\varepsilon$ parameter perturbation

## 2 The Standard Singular Perturbation Model

The singular perturbation model of finite dimensional dynamic systems, extensively studied in the mathematical literature by [18, 19, 20, 21, 22] was also the first model to be used in control and systems. This model is in the explicit state variable form

$$\dot{x}_1 = f(x_1, x_2, \varepsilon, t), \quad x_1(t_0) = x_1^0 \quad x_1 \in \mathfrak{R}^n \quad (1)$$

$$\varepsilon \dot{x}_2 = g(x_1, x_2, \varepsilon, t), \quad x_2(t_0) = x_2^0 \quad x_2 \in \mathfrak{R}^m \quad (2)$$

where  $f$  and  $g$  are assumed to be sufficiently many times continuously differentiable functions for their arguments,  $x_1, x_2, \varepsilon, t$ . The scalar  $\varepsilon$  represents all the small parameters to be neglected [3, 4].

In control and systems theory, the model (1) and (2) is a step towards reduced order model, a common engineering task.

The order is converted into a parameter perturbation, called singular. When we set  $\varepsilon = 0$ , the dimension of the state space of (1) and (2) reduces from  $n + m$  to  $n$  because the differential equation (2) degenerates into the algebraic equation

$$0 = g(\bar{x}_1, \bar{x}_2, 0, t) \quad (3)$$

where the bar is used to indicate that the variables belong to a system with  $\varepsilon = 0$  [3, 4]. The model (1), (2) is in standard form if and only if the following assumption concerning (3) is satisfied.

**Assumption 1** [3, 4]. In a domain of interest (3) has  $k \geq 1$  distinct roots and the quasi steady state is

$$\bar{x}_2 = \bar{\phi}_i(\bar{x}_1, t), \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (4)$$

This assumption ensures that a well defined  $n$  dimensional reduced model will correspond to each root (4). To obtain the reduced model, we substitute (4) into (1).

$$\dot{\bar{x}}_1 = f(\bar{x}_1, \bar{\phi}_i(\bar{x}_1, t), 0, t), \bar{x}_1(t_0) = x_1^0 \quad (5)$$

and keep the same initial condition for the state variable  $\bar{x}_1(t)$  as for  $x_1(t)$ . In the sequel, we shall drop the subscript  $i$  and rewrite (5) more compactly as

$$\dot{\bar{x}}_1 = f(\bar{x}_1, t), \bar{x}_1(t_0) = x_1^0 \quad (6)$$

This model is sometimes called a quasi-steady-state model, because  $x_2$  may rapidly converge to a root of (3), which is the quasi-steady-state form of (2).

The discrepancy between the response of the reduced model (6) and that of the full model (1) and (2) is the fast transient and the stability properties are stated as two separate assumptions.

**Assumption 2** [3, 4]. The equilibrium  $\hat{x}_2(\tau) = 0$  of

$$\frac{d\hat{x}_2}{d\tau} = g(x^0, \hat{x}_2 + \bar{x}_2(t_0), 0, t_0) \quad (7)$$

where  $\hat{x}_2 = x_2 - \bar{x}_2$  and  $\tau = \frac{t-t_0}{\varepsilon}$ , is asymptotically stable uniformly in  $x^0$  and  $t_0$ , and  $x_2^0 - \bar{x}_2(t_0)$  belongs to its domain of attraction, so  $\hat{x}_2(\tau)$  exists for  $\tau \geq 0$ .

If this assumption is satisfied, then

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \hat{x}_2(\tau) = 0 \quad (8)$$

uniformly in  $x_1^0, t_0$ ; that is,  $x_2$  will come close to its quasi steady state  $\bar{x}_2$  at some time  $t_1 > t_0$ . To ensure that  $x_2$  stays close to  $\bar{x}_2$ , we think as if any instant  $t \in [t_1, T]$  can be the initial instant, and make the following assumption about the linearization of (7).

**Assumption 3** [3, 4]. The eigenvalues of  $\frac{\partial g}{\partial x_2}$  evaluated, for  $\varepsilon = 0$ , along  $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ , have real parts smaller than a fixed negative number, *i.e.*

$$\operatorname{Re} \lambda \left\{ \frac{\partial g}{\partial x_2} \right\} \leq -c \leq 0 \quad (9)$$

Both assumptions describe a strong stability property of the boundary layer system (7). If  $x_2^0$  is assumed to be sufficiently close to  $\bar{x}_2(t_0)$ , then Assumption 3 encompasses Assumption 2. We also note from (9) that nonsingularity of  $\frac{\partial g}{\partial x_2}$  implies that the root  $\bar{x}_2$  is distinct as required by Assumption 1.

**Theorem 1 (Tikhonov's theorem)** [3, 4]. If Assumptions 2 and 3 are satisfied, then the approximation

$$\begin{aligned} x_1 &= \bar{x}_1 + O(\varepsilon) \\ x_2 &= \bar{x}_2 + \hat{x}_2 + O(\varepsilon) \end{aligned}$$

is valid for all  $t \in [t_0, T]$ , and there exists  $t_1 \geq t_0$  such that

$$x_2 = \bar{x}_2 + O(\varepsilon)$$

is valid for all  $t \in [t_1, T]$ .

Next section proposes a class of non-linear system with singular perturbations modelled by bond graphs.

### 3 Modelling in Bond Graph of a Singularly Perturbed System

When two components are connected, power interactions are always presented. Due to power flowing in either direction, a sign convention for describing the power variables is necessary. In the bond graph language, the power variables are called effort  $e(t)$  and flow  $f(t)$ . The power,  $P(t)$ , flowing into or out of a port can be expressed as the product of an effort and a flow variable. Fig. 1 shows the graphical representation of a bond [11].

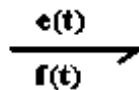


Fig. 1. A bond.

Dynamic models for a variety of physical systems can be constructed using 1-port resistors  $-R$ , 1-port capacitors  $-C$ , 1-port inertias  $-I$ , effort sources  $MS_e$ , flow sources  $MS_f$ ; the port elements: transformers  $-MTF$  and gyrators  $-MGY$ ; and the 3-port elements: flow junctions 0-junctions and effort junctions 1-junctions; the concept of a junction structure, which is an assemblage of power conserving elements,  $-0-$ ,  $-1-$ ,  $-MTF-$ , and  $-MGY-$ , is given [11]. Now, a class of non-linear systems represented in a Bond Graph in an Integral causality assignment (BGI) whose junction structure and key vectors are shown in Fig. 2.

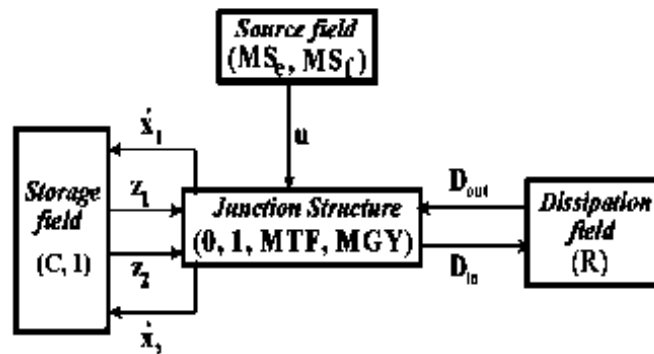


Fig. 2. Bond graph in an integral causality assignment.

In Fig. 2 ( $MS_e, MS_f$ ), ( $C, I$ ) and ( $R$ ) denote the source, the energy storage and the energy dissipation fields, ( $D$ ) the detector and ( $0, 1, MTF, MGY$ ) the junction structure with modulated transformers,  $MTF$ , and modulated gyrators  $MGY$ .

The state  $x_1(t) \in \mathfrak{R}^n$  and  $x_2(t) \in \mathfrak{R}^m$  are composed of energy variables  $p(t)$  and  $q(t)$  associated with  $I$  and  $C$  elements in integral causality for slow and fast dynamics, respectively;  $u(t) \in \mathfrak{R}^p$  denotes the plant input;  $z_1(t) \in \mathfrak{R}^n$  and  $z_2(t) \in \mathfrak{R}^m$  co-energy vectors for slow and fast dynamics, respectively; and  $D_{in}(t) \in \mathfrak{R}^r$  and  $D_{out}(t) \in \mathfrak{R}^r$  are a mixture of  $e(t)$  and  $f(t)$  showing the energy exchanges between the dissipation field and the junction structure.

The relations of the storage and dissipation fields are defined in the following assumption

**Assumption 4.** The constitutive relations of the fields are linear and decoupled and these relations are described by

$$z_1(t) = F_1 x_1(t) \quad (10)$$

$$z_2(t) = F_2 x_2(t) \quad (11)$$

$$D_{out}(t) = LD_{in}(t) \quad (12)$$

Firstly,  $F_1$  and  $F_2$  have to be decoupled representing a bond graph model of a system with singular perturbations. In case of  $z_1(t)$  and  $z_2(t)$  are related, the constitutive relations would be

$$\begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 & F_{12} \\ F_{21} & F_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (13)$$

where  $F_{12}$  and  $F_{21}$  would be constitutive relations between  $z_1(t)$  and  $z_2(t)$ , both dynamics would have another relation through the constitutive relations and this paper does not consider this relation.

Also, this paper does not consider non-linear constitutive relations and  $z_1(t)$ ,  $z_2(t)$  and  $D_{out}(t)$  are not functions of  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  and  $D_{in}(t)$ . The implications due to the possibility of considering non-linear constitutive relations are explained in Appendix A.

**Assumption 5.** The class of non-linear systems is defined by non-linear terms of the following form

1.  $x_{i,j}^{\alpha+1}(t)$  where  $i = 1$  is the slow dynamics vector and  $j = 1, \dots, n$ , or  $i = 2$  is the fast dynamics vector and  $j = 1, \dots, m$ ; and  $\alpha = 1, 2, 3, \dots$ , when  $x_{i,j}(t)$  is a term of

$$\begin{aligned} x_1(t) &= [x_{1,1}(t) \ x_{1,2}(t) \ \cdots \ x_{1,n}(t)]^T \\ x_2(t) &= [x_{2,1}(t) \ x_{2,2}(t) \ \cdots \ x_{2,m}(t)]^T \end{aligned}$$

2.  $x_{i_1 j_1}^{\alpha_1}(t) \bullet x_{i_2 j_2}^{\alpha_2}(t)$  where  $i_1, i_2; j_1, j_2$  and  $\alpha_1, \alpha_2$  are defined as  $i, j$  and  $\alpha$  of 1, respectively.

The non-linear terms of the class of non-linear systems of this paper in a bond graph approach are obtained by the *MTF* or *MGY* elements modulated by state variables.

**Assumption 6.** All the storage elements accept an integral causality assignment. This paper does not consider linearly dependent state variables, *i.e.* storage elements in a derivative causality assignment.

The relations of the junction structure are defined by

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ D_{in}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}^{11}(x) & S_{11}^{12}(x) & S_{12}^{11}(x) & S_{13}^{11}(x) \\ S_{11}^{21}(x) & S_{11}^{22}(x) & S_{12}^{21}(x) & S_{13}^{21}(x) \\ S_{21}^{11}(x) & S_{21}^{12}(x) & S_{22}(x) & S_{23}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \frac{D_{out}(t)}{u(t)} \end{bmatrix} \quad (14)$$

The entries of  $S$  take values inside the set  $\{0, 1, k_l, k_g\}$  where  $k_l$  and  $k_g$  are transformer and gyrator modules, for the class of non-linear system of this paper, these modules can be  $p(t)$  and/or  $q(t)$  associated with  $I$  and/or  $C$  elements in integral causality, respectively. Also,  $S_{11}^{11}(x)$ ,  $S_{11}^{22}(x)$  and  $S_{22}(x)$  are square skew-symmetric matrices; and  $S_{12}^{11}(x)$ ,  $S_{12}^{21}(x)$ ,  $S_{11}^{12}(x)$  and  $S_{21}^{11}(x)$ ,  $S_{21}^{12}(x)$ ,  $S_{11}^{21}(x)$  are matrices each other negative transpose, respectively.

The input and output relationships of the junction structure of Fig. 3 permit to derive (14). From the third line of (14) with (12), we have

$$D_{in}(t) = [I - S_{22}(x)L]^{-1} [S_{21}^{11}(x)z_1(t) + S_{21}^{12}(x)z_2(t) + S_{23}(x)u(t)] \quad (15)$$

the matrix  $S_{22}(x)$  is a square skew-symmetric matrix, then other assumption is considered.

**Assumption 7.** The term  $I - S_{22}(x)L$  will be structurally invertible, but the numerical state variables  $x$  can give some singularities and it is necessary to avoid this. Also, this paper does not consider magnetic couplings for  $L$  matrix.

**Note that if the constitutive relation of the dissipation field is a non-linear function defined by  $D_{out}(t) = \phi_L(D_{in}(t))$  then (15) would be**

$$D_{in}(t) - S_{22}(x)\phi_L(D_{in}(t)) = [S_{21}^{11}(x)z_1(t) + S_{21}^{12}(x)z_2(t) + S_{23}(x)u(t)] \quad (16)$$

**and this case it is not possible to find a general solution for  $D_{in}(t)$ . Hence, in this paper a linear constitutive relation defined by (12) is considered.**

By substituting (15) into the first and second lines of (14) with (10), (11) and (12), the state equation for the class of non-linear systems with singular perturbations in a bond graph approach is defined by

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \varepsilon \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}(x) & A_{12}(x) \\ A_{21}(x) & A_{22}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1(x) \\ B_2(x) \end{bmatrix} u(t) \quad (17)$$

$$A_{11}(x) = [S_{11}^{11}(x) + S_{12}^{11}(x) M(x) S_{21}^{11}(x)] F_1 \quad (18)$$

$$A_{12}(x) = [S_{11}^{12}(x) + S_{12}^{11}(x) M(x) S_{21}^{12}(x)] F_2 \quad (19)$$

$$A_{21}(x) = F_2^{-1} [S_{11}^{21}(x) + S_{12}^{21}(x) M(x) S_{21}^{11}(x)] F_1 \quad (20)$$

$$A_{22}(x) = F_2^{-1} [S_{11}^{22}(x) + S_{12}^{21}(x) M(x) S_{21}^{12}(x)] F_2 \quad (21)$$

$$B_1(x) = S_{13}^{11}(x) + S_{12}^{11}(x) M(x) S_{23}(x) \quad (22)$$

$$B_2(x) = F_2^{-1} [S_{13}^{21}(x) + S_{12}^{21}(x) M(x) S_{23}(x)] \quad (23)$$

with

$$M(x) = L [I - S_{22}(x) L]^{-1} \quad (24)$$

and  $\varepsilon = F_2^{-1}$ .

By depending on the causality *MTF* and *MGY* elements modulated by state variables or state functions, these variables can be on the numerator or denominator. Then, the singularities problem due to numerical values can be found into the submatrices of the junction structure  $S(x)$  and/or  $M(x)$ .

It is important to validate Assumption 3 for the particular class of non-linear systems given in (17), then from (2) and the second line of (17), the non-linear function of the fast dynamic is

$$g(x) = A_{21}(x) x_1(t) + A_{22}(x) x_2(t) + B_2(x) u(t) \quad (25)$$

by applying (9), Assumption 3 has to be satisfied.

The *MTF* and *MGY* elements can be modulated by state variables that represent:

- The fast dynamics, then the algebraic equation given by

$$A_{21}(\bar{x}_2) \bar{x}_1(t) + A_{22}(\bar{x}_2) \bar{x}_2(t) + B_2(\bar{x}_2) u(t) = 0 \quad (26)$$

has to be solved in terms of (4).

- The slow dynamics, then the algebraic equation

$$A_{21}(\bar{x}_1) \bar{x}_1(t) + A_{22}(\bar{x}_1) \bar{x}_2(t) + B_2(\bar{x}_1) u(t) = 0 \quad (27)$$

can be solved in terms of (4).

Hence, the algebraic equation (26) or (27) are solved. Thus, the quasi steady state model of the system can be obtained.

**Assumption 8.** The  $A_{22}(x_1)$  matrix is nonsingular. This is a critical condition to analyze a system with singular perturbations.

For the class of non-linear systems considered in this paper and Assumption 8, (4) can be written by

$$\bar{x}_2(t) = -[A_{22}(\bar{x}_1)]^{-1} A_{21}(\bar{x}_1) \bar{x}_1(t) - [A_{22}(\bar{x}_1)]^{-1} B_2(\bar{x}_1) u(t) \quad (28)$$

and the quasi steady state model is

$$\dot{\bar{x}}_1(t) = A_0(\bar{x}_1) \bar{x}_1(t) + B_0(\bar{x}_1) u(t) \quad (29)$$

where

$$A_0(\bar{x}_1) = A_{11}(\bar{x}_1) - A_{12}(\bar{x}_1) [A_{22}(\bar{x}_1)]^{-1} A_{21}(\bar{x}_1) \quad (30)$$

$$B_0(\bar{x}_1) = B_1(\bar{x}_1) - A_{12}(\bar{x}_1) [A_{22}(\bar{x}_1)]^{-1} B_2(\bar{x}_1) \quad (31)$$

The structure of the  $A_{22}(x)$  matrix defined by the matrices  $M(x)$ ,  $S_{11}^{22}(x)$ ,  $S_{12}^{21}(x)$  and  $S_{21}^{12}(x)$  can determine a singularities problem. Hence, it is necessary to be careful with the structure and the numerical values of the argument  $x_1$  into  $A_{22}(\bar{x}_1)$  and  $[A_{22}(\bar{x}_1)]^{-1}$  to avoid singularities.

In the next section, the junction structure of a bond graph to obtain the quasi steady state model is proposed.

## 4 A Quasi Steady State Model in a Bond Graph Approach

A direct graphical technique to determine the roots from algebraic equation and a quasi steady state model is presented. A scheme to analyze the properties of a singularly perturbed system represented in a bond graph called Singularly Perturbed Non-linear Bond Graph (SPNBG) is shown in Fig. 3.

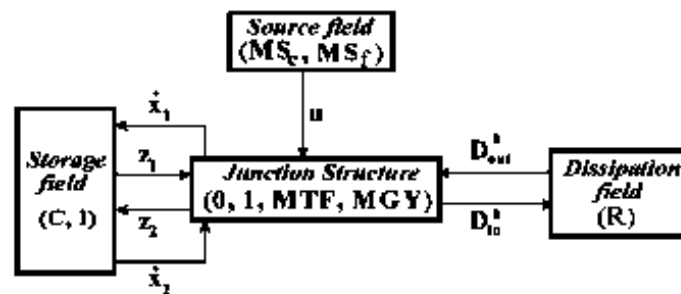


Fig. 3. Singularly perturbed non-linear bond graph.

This section proposes to assign derivative causality to storage elements that represent the fast dynamics and the storage elements of slow dynamics maintain an integral causality assignment as it is shown in Fig. 3.

Fig. 3 shows that the key vectors of the fast storage elements  $(\dot{x}_2, z_2)$  have been changed respect to Fig. 2 due to the derivative causality assignment for these elements. Also, the key vectors of the dissipation elements  $(D_{in}^h, D_{out}^h)$  of Fig. 3 can be different respect to key vectors  $(D_{in}, D_{out})$  of Fig. 2 depending of the causality of the rest of the elements of the bond graph.

The junction structure and the main results on the following Lemma are presented.

**Lemma**

*Consider a class of non-linear singularly perturbed systems defined by the product of state variables and/or state variables to the power of bigger than one where the constitutive relations of the elements are linear and decoupled, and the matrix  $A_{22}(x)$  is nonsingular; this system is modelled by bond graphs according to the scheme of Fig. 3 where the storage elements of the fast dynamics have an integral causality assignment and the storage elements of the slow dynamics a derivative causality assignment whose junction structure is given by,*

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ z_2(t) \\ \frac{D_{in}^h(t)}{D_{out}^h(t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11}^{11}(x) & H_{11}^{12}(x) & H_{12}^{11}(x) & H_{13}^{11}(x) \\ H_{11}^{21}(x) & H_{11}^{22}(x) & H_{12}^{21}(x) & H_{13}^{21}(x) \\ H_{21}^{11}(x) & H_{21}^{12}(x) & H_{22}(x) & H_{23}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \frac{D_{out}^h(t)}{u(t)} \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$D_{out}^h(t) = L_h D_{in}^h(t) \quad (33)$$

Then, a representation of the system for the state variable of the slow dynamics is described by,

$$\dot{x}_1(t) = \widetilde{A}_{11}(x) x_1(t) + \widetilde{A}_{12}(x) \dot{x}_2(t) + \widetilde{B}_1(x) u(t) \quad (34)$$

where

$$\widetilde{A}_{11}(x) = [H_{11}^{11}(x) + H_{12}^{11}(x) Q(x) H_{21}^{11}(x)] F_1 \quad (35)$$

$$\widetilde{A}_{12}(x) = H_{11}^{12}(x) + H_{12}^{11}(x) Q(x) H_{21}^{11}(x) \quad (36)$$

$$\widetilde{B}_1(x) = H_{13}^{11}(x) + H_{12}^{11}(x) Q(x) H_{23}(x) \quad (37)$$

for the state variable of the fast dynamics is

$$x_2(t) = \widetilde{A}_{21}(x) x_1(t) + \widetilde{A}_{22}(x) \dot{x}_2(t) + \widetilde{B}_2(x) u(t) \quad (38)$$

where

$$\widetilde{A}_{21}(x) = F_2^{-1} [H_{11}^{21}(x) + H_{12}^{21}(x) Q(x) H_{21}^{11}(x)] F_1 \quad (39)$$

$$\widetilde{A}_{22}(x) = F_2^{-1} [H_{11}^{22}(x) + H_{12}^{21}(x) Q(x) H_{21}^{12}(x)] \quad (40)$$

$$\widetilde{B}_2(x) = F_2^{-1} [H_{13}^{21}(x) + H_{12}^{21}(x) Q(x) H_{23}(x)] \quad (41)$$

being

$$Q(x) = L_h [I - H_{22}(x) L_h]^{-1} \quad (42)$$

Moreover, the quasi steady state from differential equation of the state variables of the fast dynamics by setting  $\varepsilon = 0$  are,

$$\bar{x}_2(t) = \widetilde{A}_{21}(x_1) \bar{x}_1(t) + \widetilde{B}_2(x_1) u(t) \quad (43)$$

and the quasi-steady state model is defined by,

$$\dot{\bar{x}}_1(t) = \widetilde{A}_{11}(\bar{x}_1) \bar{x}_1(t) + \widetilde{B}_1(\bar{x}_1) u(t) \quad (44)$$

**Proof.** Considering Assumptions from 4 to 6 and from the third line of (32) and using (33) we have,

$$[I - H_{22}(x) L_h] D_{in}^h(t) = H_{21}^{11}(x) F_1 x_1(t) + H_{21}^{12}(x) \dot{x}_2(t) + H_{23}(x) u(t) \quad (45)$$

if Assumption 7 for  $H_{22}(x)$  is satisfied then

$$D_{in}^h(t) = [I - H_{22}(x) L_h]^{-1} \left[ H_{21}^{11}(x) z_1(t) + H_{21}^{12}(x) \dot{x}_2(t) + H_{23}(x) u(t) \right] \quad (46)$$

by substituting (10), (46) into the first line of (32) and using (33)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) = & \{ H_{11}^{21}(x) + H_{12}^{11}(x) L_h [I - H_{22}(x) L_h]^{-1} H_{21}^{11}(x) \} F_1 x_1(t) + \\ & \{ H_{11}^{12}(x) + H_{12}^{11}(x) L_h [I - H_{22}(x) L_h]^{-1} H_{21}^{12}(x) \} \dot{x}_2(t) + \\ & \{ H_{13}^{21}(x) + H_{12}^{11}(x) L_h [I - H_{22}(x) L_h]^{-1} H_{23}(x) \} u(t) \end{aligned} \quad (47)$$

by using (35) to (37) with (42), we determine (34). From the second line of (32) and taking (33) and (46)

$$\begin{aligned} z_2(t) = & \{ H_{11}^{21}(x) + H_{12}^{21}(x) L_h [I - H_{22}(x) L_h]^{-1} H_{21}^{11}(x) \} z_1(t) + \\ & \{ H_{11}^{22}(x) + H_{12}^{21}(x) L_h [I - H_{22}(x) L_h]^{-1} H_{21}^{12}(x) \} \dot{x}_2(t) + \\ & \{ H_{13}^{21}(x) + H_{12}^{21}(x) L_h [I - H_{22}(x) L_h]^{-1} H_{23}(x) \} u(t) \end{aligned} \quad (48)$$

by considering (11), (39), (40), (41) and (48), we prove (38).

Considering that Assumption 8 and from (38),

$$\dot{x}_2(t) = - [\widetilde{A}_{22}(x)]^{-1} \widetilde{A}_{21}(x) x_1(t) + [\widetilde{A}_{22}(x)]^{-1} x_2(t) - [\widetilde{A}_{22}(x)]^{-1} \widetilde{B}_2(x) u(t) \quad (49)$$

and considering that the matrices  $A_{22}(x)$  and  $\widetilde{A}_{22}(x)$  are nonsingular, and comparing (49) with the second line of (17), the relations between BGI and SPNBG are

$$\widetilde{A}_{22}(x) = [A_{22}(x)]^{-1} \varepsilon \quad (50)$$

$$\widetilde{A}_{21}(x) = -[A_{22}(x)]^{-1} A_{21}(x) \quad (51)$$

$$\widetilde{B}_2(x) = -[A_{22}(x)]^{-1} B_2(x) \quad (52)$$

from (25), (50), (51) and (52) we have

$$x_2(t) = \widetilde{A}_{21}(x) x_1(t) + \widetilde{B}_2(x) u(t) \quad (53)$$

by solving (53) for the state variables of the slow dynamics, *i.e.* in some cases (53) can require algebraic steps for  $x_1(t)$ , (43) is proved.

In order to explain with more detail, (53) re-writing in an extended form given by

$$\begin{bmatrix} x_{2,1}(t) \\ x_{2,2}(t) \\ \vdots \\ x_{2,m}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{a}_{11}(x) & \widetilde{a}_{12}(x) & \cdots & \widetilde{a}_{1n}(x) \\ \widetilde{a}_{21}(x) & \widetilde{a}_{22}(x) & \cdots & \widetilde{a}_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widetilde{a}_{m1}(x) & \widetilde{a}_{m2}(x) & \cdots & \widetilde{a}_{mn}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,1}(t) \\ x_{1,2}(t) \\ \vdots \\ x_{1,n}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \widetilde{b}_{11}(x) & \widetilde{b}_{12}(x) & \cdots & \widetilde{b}_{1p}(x) \\ \widetilde{b}_{21}(x) & \widetilde{b}_{22}(x) & \cdots & \widetilde{b}_{2p}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widetilde{b}_{m1}(x) & \widetilde{b}_{m2}(x) & \cdots & \widetilde{b}_{mp}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_p(t) \end{bmatrix} \quad (54)$$

where  $x_2(t) = [x_{2,1}(t) \ x_{2,2}(t) \ \cdots \ x_{2,m}(t)]^T$ ,  $x_1(t) = [x_{1,1}(t) \ x_{1,2}(t) \ \cdots \ x_{1,n}(t)]^T$  and  $u(t) = [u_1(t) \ u_2(t) \ \cdots \ u_p(t)]^T$ . **When  $\widetilde{A}_{21}(x)$  and  $\widetilde{B}_2(x)$  depend of  $x_1(t)$ , (43) is proved in a direct way. However, in case of (54) depends of  $x_2(t)$**

$$\begin{bmatrix} x_{2,1}(t) \\ x_{2,2}(t) \\ \vdots \\ x_{2,m}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{a}_{11}(x_2) & \widetilde{a}_{12}(x_2) & \cdots & \widetilde{a}_{1n}(x_2) \\ \widetilde{a}_{21}(x_2) & \widetilde{a}_{22}(x_2) & \cdots & \widetilde{a}_{2n}(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widetilde{a}_{m1}(x_2) & \widetilde{a}_{m2}(x_2) & \cdots & \widetilde{a}_{mn}(x_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,1}(t) \\ x_{1,2}(t) \\ \vdots \\ x_{1,n}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \widetilde{b}_{11}(x_2) & \widetilde{b}_{12}(x_2) & \cdots & \widetilde{b}_{1p}(x_2) \\ \widetilde{b}_{21}(x_2) & \widetilde{b}_{22}(x_2) & \cdots & \widetilde{b}_{2p}(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widetilde{b}_{m1}(x_2) & \widetilde{b}_{m2}(x_2) & \cdots & \widetilde{b}_{mp}(x_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_p(t) \end{bmatrix} \quad (55)$$

(55) describes a general case because we can have  $m$  algebraic equations and assuming that it exists a solution in terms of  $x_1(t)$  then (43) can be proved.

By substituting (49) into (34)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \left\{ \widetilde{A}_{11}(x) - \widetilde{A}_{12}(x) [\widetilde{A}_{22}(x)]^{-1} \widetilde{A}_{21}(x) \right\} x_1(t) + \widetilde{A}_{12}(x) [\widetilde{A}_{22}(x)]^{-1} x_2(t) \\ &\quad + \left\{ \widetilde{B}_1(x) - \widetilde{A}_{12}(x) [\widetilde{A}_{22}(x)]^{-1} \widetilde{B}_2(x) \right\} u(t) \end{aligned} \quad (56)$$

comparing (56) with the first line of (17)

$$\widetilde{A}_{12}(x) = A_{12}(x) [A_{22}(x)]^{-1} \varepsilon \quad (57)$$

$$\widetilde{A}_{11}(x) = A_{11}(x) - A_{12}(x) [A_{22}(x)]^{-1} A_{21}(x) \quad (58)$$

$$\widetilde{B}_1(x) = B_1(x) - A_{12}(x) [A_{22}(x)]^{-1} B_2(x) \quad (59)$$

In order to obtain the quasi steady state model described by (29) and considering (58) and (59) we have

$$\dot{\bar{x}}_1(t) = \widetilde{A}_{11}(x) \bar{x}_1(t) + \widetilde{B}_1(x) u(t) \quad (60)$$

by solving (60) for the state variables of the slow dynamics, in the general case this final step can require an algebraic process, with (29), we prove (44). In order to explain these algebraic steps, the description for a similar case given by (54) can be derived. ■

For a LTI singularly perturbed system modelled by a bond graph, the corresponding  $A_{22}$  matrix is nonsingular if the proposed property in [17] is satisfied. This property defines that all the storage elements of the fast dynamics that have integral causality assignment on the BGI and accept derivative causality on the SPBG, where SPBG has the same structure that SPNGB but for LTI systems. Hence, the matrix  $A_{22}(x)$  will be structurally invertible if the property [17] is satisfied.

The SPNGB representation of the system can represent singularities problems due to numerical values of the argument  $x$  into the submatrices  $H(x)$ ,  $Q(x)$  and  $\widetilde{A}_{22}(x)$ . Hence, it is important to know that for preserving stability and simulation results. Also, the matrix  $A_{22}(x)$  has to be nonsingular in order to apply the proposed Lemma.

Next section applies the proposed methodology to the turbine-generator.

## 5 A Synchronous Generator and Shaft System in a Bond Graph Approach

The physical model generators are accurate models capable of detailed representation of the electromechanical interactions between generators and a power system. For the purpose of this study, the system is represented by inertias describing the generator and turbine sections connected by torsional springs as shown in Fig. 4 [23].

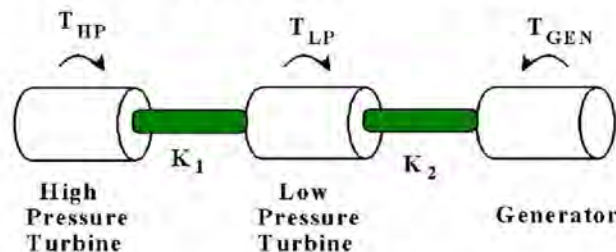


Fig. 4. Shaft system model.

Synchronous generators form the principal source of electric energy in power systems. Many large loads are driven by synchronous motors, and synchronous condensers are sometimes used as a means of providing reactive power compensation and controlling voltage. These devices operate on the same principle and are collectively referred to as synchronous machines.

The modelling and analysis of the synchronous machine has always been a challenge. The problem was worked on intensely in the 1920s and 1930s, and has been the subject of several more recent investigations.

Many books and papers have used the traditional mathematical model of a synchronous machine [24, 25, 27]. Nevertheless in [28] a synchronous machine model considering a class of equivalent circuits with sufficient flexibility to permit the introduction of an arbitrary number of damper windings is studied. Also, the singular perturbations method is applied to synchronous machine without damping windings in [29]. The transfer function block diagram model of a generator has been employed to analyze generator dynamic characteristics in [30].

Hence, it is useful to develop mathematical models of a synchronous machine to explain their electric, magnetic and mechanical behavior. However, these phenomena using a bond graph model of the system can be analyzed in a direct and graphical way.

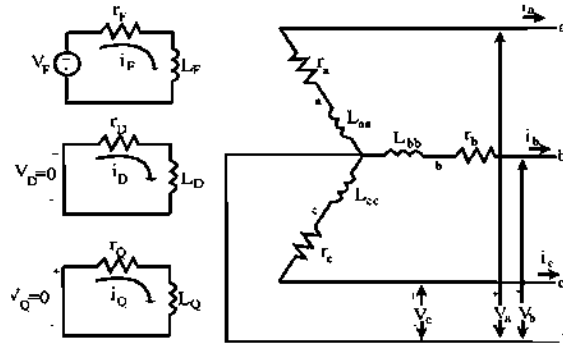


Fig. 5. Stator and rotor circuits of a synchronous machine.

In this paper, the following assumptions are made for the development of a mathematical and graphical model for a synchronous machine:

$S_1$  : the stator windings are sinusoidally distributed along the air-gap

$S_2$  : the stator slots cause no appreciable variation of the rotor inductances with rotor position

$S_3$  : magnetic hysteresis is negligible

$S_4$  : magnetic saturation effects are negligible

Consider the representation of a synchronous generator of Fig. 5. In this Fig. 5, we can identify the followings elements:

- $a, b, c$  : stator phase windings. So,  $(i_a, i_b, i_c)$ ,  $(v_a, v_b, v_c)$ ,  $(r_a, r_b, r_c)$  and  $(L_{aa}, L_{bb}, L_{cc})$  denote the currents, voltages, resistances and self inductances on these windings, respectively.

- $F$  : field winding with  $i_F$ ,  $v_F$ ,  $r_F$  and  $L_F$  denote the current, voltage, resistance and self inductance on this winding, respectively.
- $D$  :  $d$ -axis damping circuit with  $i_D$ ,  $v_D$ ,  $r_D$  and  $L_D$  denote the current, voltage, resistance and self inductance on this circuit, respectively.
- $Q$  :  $q$ -axis damping circuit with  $i_Q$ ,  $v_Q$ ,  $r_Q$  and  $L_Q$  denote the current, voltage, resistance and self inductance on this circuit, respectively.

The synchronous generator of Fig. 5 is represented by six windings that are magnetically coupled. The magnetic coupling between the windings is a function of the rotor position. The instantaneous terminal voltage  $v$  of any winding is in the form,

$$v(t) = \pm ri(t) \pm \dot{\lambda}(t) \quad (61)$$

where  $\lambda(t)$  is the flux linkage,  $r$  is the winding resistance and  $i(t)$  is the current with positive directions of stator currents flowing out of the generator terminals.

A great simplification in the mathematical description of the synchronous machine is obtained from the Park's transformation. The effect of Park's transformation is simply to transform all stator quantities from phases  $a$ ,  $b$  and  $c$  into new variables the frame of reference of which moves with the rotor. Thus by definition [24]

$$i_{0dq} = Pi_{abc} \quad (62)$$

where the current vectors are defined as,

$$i_{0dq} = \begin{bmatrix} i_0 \\ i_d \\ i_q \end{bmatrix}; i_{abc} = \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix}$$

and the Park's transformation is

$$P = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos \theta & \cos \left( \theta - \frac{2\pi}{3} \right) & \cos \left( \theta + \frac{2\pi}{3} \right) \\ \sin \theta & \sin \left( \theta - \frac{2\pi}{3} \right) & \sin \left( \theta + \frac{2\pi}{3} \right) \end{bmatrix} \quad (63)$$

The angle between the  $d$ -axis and the rotor is given by

$$\theta = w_R t + \delta + \frac{\pi}{2} \quad (64)$$

where  $w_R$  is the rated angular frequency in rad/s and  $\delta$  is the synchronous torque angle in electrical radians.

Similarly, to transform the voltages and flux linkages,

$$v_{0dq} = Pv_{abc} \quad (65)$$

$$\lambda_{0dq} = P\lambda_{abc} \quad (66)$$

In according with Fig. 5, we describe the bond graph model (BGI) of the synchronous machine on  $d$ - $q$  axis, in Fig. 6 that satisfies the conditions  $S_1 - S_4$  of this section. This bond graph is different respect to [31] on the directions of the bonds 14, 15, 17 and 19, and we use a voltage source on the exciting winding. All the storage elements have an integral causality assignment, *i.e.* all the state variables are linearly independent.

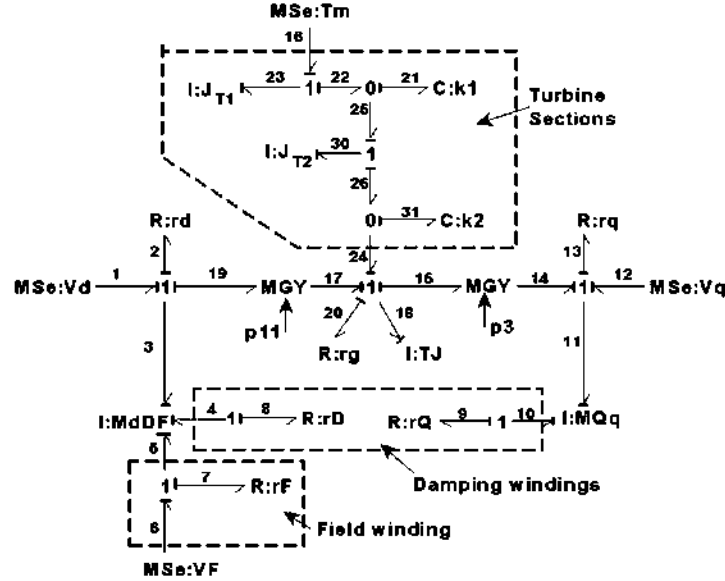


Fig. 6. Bond graph of a turbo-machine.

In Fig. 6,  $T_m$  is the mechanical torque,  $T_J$  is the moment of inertia,  $r_g$  is the damper coefficient,  $I : M_{dDF}$  and  $I : M_{Qq}$  are the magnetic coupling between self and mutual inductances of the windings on  $d$ -axis and on  $q$ -axis, respectively. The turbines sections are described by  $I : J_{T1}$  and  $C : k_1$  of the high pressure turbine and  $I : J_{T2}$  and  $C : k_2$  of the low pressure turbine.

The key vectors for the storage elements of the slow dynamics are

$$x_1 = \begin{bmatrix} p_{18} \\ q_{21} \\ p_{23} \\ p_{30} \\ q_{31} \end{bmatrix}; \dot{x}_1 = \begin{bmatrix} e_{18} \\ f_{21} \\ e_{23} \\ e_{30} \\ f_{31} \end{bmatrix}; z_1 = \begin{bmatrix} f_{18} \\ e_{21} \\ f_{23} \\ f_{30} \\ e_{31} \end{bmatrix}$$

for storage elements of the fast dynamics are

$$x_2 = \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_{10} \\ p_{11} \end{bmatrix}; \dot{x}_2 = \begin{bmatrix} e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_{10} \\ e_{11} \end{bmatrix}; z_2 = \begin{bmatrix} f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_{10} \\ f_{11} \end{bmatrix}$$

and for the rest of the elements

$$D_{in} = \begin{bmatrix} f_2 \\ f_7 \\ f_8 \\ f_9 \\ f_{13} \\ f_{20} \end{bmatrix}; D_{out} = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_7 \\ e_8 \\ e_9 \\ e_{13} \\ e_{20} \end{bmatrix}; u = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_6 \\ e_{12} \\ e_{16} \end{bmatrix}$$

the constitutive relations of the fields are

$$L = \text{diag} \{r_d, r_F, r_D, r_Q, r_q, r_g\} \quad (67)$$

$$F_1 = \text{diag} \left\{ \frac{1}{T_J}, k_1, \frac{1}{J_{T1}}, \frac{1}{J_{T2}}, k_2 \right\} \quad (68)$$

$$F_2^{-1} = \text{diag} \{M_{dDF}, M_{Qq}\} \quad (69)$$

where

$$M_{dDF} = \begin{bmatrix} L_d & M_{dD} & M_{dF} \\ M_{dD} & L_D & M_{DF} \\ M_{dF} & M_{DF} & L_F \end{bmatrix} \quad (70)$$

$$M_{Qq} = \begin{bmatrix} L_Q & M_{qQ} \\ M_{qQ} & L_q \end{bmatrix} \quad (71)$$

The junction structure of the BGI for the turbine-generator is given by

$$\begin{bmatrix} e_{18} \\ f_{21} \\ e_{23} \\ e_{30} \\ f_{31} \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_{10} \\ e_{11} \\ f_2 \\ f_7 \\ f_8 \\ f_9 \\ f_{13} \\ f_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & p_{11} & 0 & 0 & 0 & -p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -p_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{18} \\ f_{21} \\ e_{23} \\ e_{30} \\ f_{31} \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_{10} \\ f_{11} \\ e_2 \\ e_7 \\ e_8 \\ e_9 \\ e_{13} \\ f_{20} \\ e_1 \\ e_6 \\ e_{12} \\ e_{16} \end{bmatrix} \quad (72)$$

From (17) and the corresponding junction structure (72) of the given bond graph, the state space equation of the synchronous machine with the shaft system can be obtained. Also, the quasi steady state model of the complete system in a bond graph approach is not necessary to determine the state space equation. However, in order to verify Assumption 3, from (9), (67), (69), (70), (71) and (72); the matrix  $A_{22}(x)$

is given by

$$A_{22}(x) = \begin{bmatrix} \frac{a_{11}}{\Delta} & \frac{a_{12}}{\Delta} & \frac{a_{13}}{\Delta} & 0 & 0 \\ \frac{a_{21}}{\Delta} & \frac{a_{22}}{\Delta} & \frac{a_{23}}{\Delta} & 0 & 0 \\ \frac{a_{31}}{\Delta} & \frac{a_{32}}{\Delta} & \frac{a_{33}}{\Delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-r_Q L_Q L_q + r_q M_{qQ}^2}{\Lambda} & \frac{L_Q M_{qQ}(r_Q - r_q)}{\Lambda} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L_q M_{qQ}(r_q - r_Q)}{\Lambda} & \frac{-r_q L_q L_Q - r_Q M_{qQ}^2}{\Lambda} \end{bmatrix}$$

where  $a_{11} = -r_D M_{dD} \alpha_{FdD} - r_F M_{dF} \alpha_{DdF} + r_d L_d \alpha_{DF}$ ;  $a_{12} = -r_d M_{dD} \alpha_{FdD} - r_F M_{DF} \alpha_{ddF} - r_D L_D \alpha_{dF}$ ;  $a_{13} = -r_d L_d \alpha_{DdF} - r_D M_{dD} \alpha_{ddF} + r_F M_{dF} \alpha_{dD}$ ;  $a_{21} = -r_D L_D \alpha_{FdD} - r_F M_{DF} \alpha_{dD} - r_d M_{dD} \alpha_{DF}$ ;  $a_{22} = -r_d M_{dD} \alpha_{FdD} - r_F M_{DF} \alpha_{ddF} + r_D L_D \alpha_{dF}$ ;  $a_{23} = -r_d M_{dD} \alpha_{DdF} - r_D L_D \alpha_{ddF} + r_F M_{DF} \alpha_{dD}$ ;  $a_{31} = -r_F L_F \alpha_{DdF} - r_D M_{DF} \alpha_{FdD} + r_d M_{dF} \alpha_{DF}$ ;  $a_{32} = -r_d M_{dF} \alpha_{FdD} - r_F L_F \alpha_{ddF} + r_D M_{DF} \alpha_{dF}$ ;  $a_{33} = -r_d M_{dF} \alpha_{DdF} - r_D M_{DF} \alpha_{ddF} + r_F L_F \alpha_{dD}$ ;  $\Delta = -L_d L_D L_F - 2M_{dD} M_{dF} M_{DF} + L_d M_{DF}^2 + L_D M_{dF}^2 + L_F M_{dD}^2$  and  $\Lambda = L_q L_Q - M_{qQ}^2$  with  $\alpha_{DdF} = L_D M_{dF} - M_{DF} M_{dD}$ ;  $\alpha_{DF} = L_D L_F - M_{DF}^2$ ;  $\alpha_{FdD} = L_F M_{dD} - M_{DF} M_{dF}$ ;  $\alpha_{ddF} = L_d M_{dF} - M_{dD} M_{dF}$ ;  $\alpha_{dF} = L_d L_F - M_{dF}^2$ ;  $\alpha_{dD} = L_d L_D - M_{dD}^2$ .

Hence, the SPNBG of the system and simulation results are presented in the next section.

## 6 A Quasi Steady State Model of the Synchronous Generator with the Shaft System

So that the quasi steady state model of the system in a bond graph approach can be determined, the SPNBG is shown in Fig. 7. This approach proposes to assign derivative causality to storage elements that represent the fast dynamic and the storage elements of slow dynamic maintain an integral causality assignment. Then, in Fig. 7 we assign derivative causality to storage elements numbered by the bonds 3, 4, 5, 10 and 11. The storage elements with the bonds 21, 23, 30, 31 and 18 have to maintain an integral causality assignment.



From (39), (41), (42), (43), (68), (69), (73) and (74), the quasi steady state equations given by (43) are;

$$\begin{bmatrix} \bar{p}_3 \\ \bar{p}_4 \\ \bar{p}_5 \\ \bar{p}_{10} \\ \bar{p}_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{T_d T_J} \bar{p}_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{T_{dD} T_J} \bar{p}_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{T_{dF} T_J} \bar{p}_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{T_{dQ} T_J} \bar{p}_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{T_q T_J} \bar{p}_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{p}_{18} \\ \bar{q}_{21} \\ \bar{p}_{23} \\ \bar{p}_{30} \\ \bar{p}_{31} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{T_d} & \frac{1}{T_{FdF}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{T_{dD}} & \frac{1}{T_{FDf}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{T_{dF}} & \frac{1}{T_F} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{T_{qQ}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{T_q} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_6 \\ e_{12} \\ e_{16} \end{bmatrix} \quad (75)$$

where the time constants of this model are  $T_d = \frac{r_d}{L_d}$ ,  $T_q = \frac{r_q}{L_q}$ ,  $T_F = \frac{r_F}{L_F}$ ,  $T_{dD} = \frac{r_d}{M_{dD}}$ ,  $T_{qQ} = \frac{r_q}{M_{qQ}}$ ,  $T_{dF} = \frac{r_d}{M_{dF}}$ ,  $T_{FdF} = \frac{r_F}{M_{dF}}$  and  $T_{FDf} = \frac{r_F}{M_{DF}}$ .

If we substitute (68), (69), (73) and (74) into (35), (37) with (42), a quasi steady state model of the synchronous machine with the shaft system is given by (44) which is

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{p}}_{18} \\ \dot{\bar{q}}_{21} \\ \dot{\bar{p}}_{23} \\ \dot{\bar{p}}_{30} \\ \dot{\bar{q}}_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{T_J} \left( \frac{1}{r_d} \bar{p}_{11}^2 \frac{1}{r_q} \bar{p}_3^2 + r_g \right) & 0 & 0 & 0 & k_2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{J_{T1}} & \frac{-1}{J_{T2}} & 0 \\ 0 & -k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 & 0 & 0 & -k_2 \\ \frac{-1}{T_J} & 0 & 0 & \frac{1}{J_{T2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{p}_{18} \\ \bar{q}_{21} \\ \bar{p}_{23} \\ \bar{p}_{30} \\ \bar{q}_{31} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{r_d} \bar{p}_{11} & 0 & \frac{-1}{r_q} \bar{p}_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_6 \\ e_{12} \\ e_{16} \end{bmatrix} \quad (76)$$

In order to have the quasi steady state model of the form (6), it is necessary to substitute the remaining fast state variables by taking the first and last lines of (75), and we have

$$\bar{p}_3 = \frac{-\bar{p}_{11}}{T_d T_J} \bar{p}_{18} + \frac{e_1}{T_d} + \frac{e_6}{T_{FdF}} \quad (77)$$

$$\bar{p}_{11} = \frac{\bar{p}_3}{T_q T_J} \bar{p}_{18} + \frac{e_{12}}{T_q} \quad (78)$$

by substituting (78) into (77) and solving for  $\bar{p}_3$

$$\bar{p}_3 = \left[ \frac{T_d T_q T_J^2}{T_d T_q T_J^2 + \bar{p}_{18}^2} \right] \left[ \frac{-\bar{p}_{18} e_{12}}{T_d T_J T_q} + \frac{e_1}{T_d} + \frac{e_6}{T_{FdF}} \right] \quad (79)$$

from (78) and (79) the solution for  $\bar{p}_{11}$  is

$$\bar{p}_{11} = \left[ \frac{T_d T_J \bar{p}_{18}}{T_d T_q T_J^2 + \bar{p}_{18}^2} \right] \left[ \frac{-\bar{p}_{18} e_{12}}{T_d T_J T_q} + \frac{e_1}{T_d} + \frac{e_6}{T_{FdF}} \right] + \frac{e_{12}}{T_q} \quad (80)$$

and substituting (79) and (80) into the first line of (76), the quasi-steady state model of the state  $\bar{p}_{18}$  is described by

$$\begin{aligned} \dot{\bar{p}}_{18} = & \frac{-1}{T_J} \left\{ \frac{1}{r_d} \left[ \frac{T_d T_J \bar{p}_{18}}{T_d T_q T_J^2 + \bar{p}_{18}^2} \right]^2 \left[ \frac{-\bar{p}_{18} e_{12}}{T_d T_J T_q} + \frac{e_1}{T_d} + \frac{e_6}{T_{FDF}} \right]^2 + \frac{e_{12}^2}{r_d T_q^2} + \right. \\ & \left. \frac{1}{r_q} \left[ \frac{T_d T_q T_J^2}{T_d T_q T_J^2 + \bar{p}_{18}^2} \right]^2 \left[ \frac{-\bar{p}_{18} e_{12}}{T_d T_J T_q} + \frac{e_1}{T_d} + \frac{e_6}{T_{FDF}} \right]^2 + r_g \right\} \bar{p}_{18} + k_2 \bar{q}_{31} \\ & \frac{e_1}{r_d} \left\{ \left[ \frac{T_d T_J \bar{p}_{18}}{T_d T_q T_J^2 + \bar{p}_{18}^2} \right] \left[ \frac{-\bar{p}_{18} e_{12}}{T_d T_J T_q} + \frac{e_1}{T_d} + \frac{e_6}{T_{FDF}} \right] + \frac{e_{12}}{T_q} \right\} - \\ & \frac{e_{12}}{r_q} \left[ \frac{T_d T_q T_J^2}{T_d T_q T_J^2 + \bar{p}_{18}^2} \right] \left[ \frac{-\bar{p}_{18} e_{12}}{T_d T_J T_q} + \frac{e_1}{T_d} + \frac{e_6}{T_{FDF}} \right] \end{aligned} \quad (81)$$

The next section describes the performance of the state variables of the Turbine-Generator.

## 7 Simulations Results

In order to verify the quasi steady state model of the complete system, simulation results are obtained. Hence, the parameters of the synchronous generator were obtained from the literature [24], the values are for an actual machine with some quantities, denoted by an asterisk, being estimated for academic study according to the reference [24], which are given in Table 1.

Table 1. Parameters of the synchronous generator.

Rated MVA = 160MVA	$L_q = 6.118 \times 10^{-3} H$
Rated voltage = 15kV, Y connected	$L_Q = 1.423 \times 10^{-3} H^*$
Excitation voltage = 375V	$M_{dD} = 5.782 \times 10^{-3} H^*$
Stator current = 6158.40A	$M_{DF} = 5.782 \times 10^{-3} H^*$
Field current = 926A	$M_{qQ} = 2.779 \times 10^{-3} H^*$
Power factor = 0.85	$r_d = 0.001542 \Omega$
Frequency = 60Hz	$r_F = 0.371 \Omega$
$L_F = 2.189 H$	$r_D = 18.421 \times 10^{-3} \Omega^*$
$L_D = 5.989 \times 10^{-3} H^*$	$r_Q = 18.969 \times 10^{-3} \Omega^*$
$L_d = 6.3541 \times 10^{-3} H$	$T_J = 2.37 N \cdot m \cdot s^2$
$r_g = 1 N \cdot m \cdot s$	$T_m = 1 kN \cdot m$
$J_{T1} = 7 W \cdot s / kVA$	$C_1 = 1 \times 10^{-2} F$
$J_{T2} = 3 W \cdot s / kVA$	$C_2 = 1 \times 10^{-2} F$
$r_q = 1.542 \times 10^{-3} \Omega^*$	

It is assumed that the machine is connected to a bus whose voltage and frequency remain constant, at the rated values, regardless of the stator current. This is com-

monly referred to as an infinite bus, since its characteristics do not change regardless of the power supplied or consumed by any device connected to it.

It is necessary to verify Assumption 3 given in (9) by substituting the parameters of the system defined by Table 1, we have

$$\text{Re } \lambda \left\{ \begin{bmatrix} 0.12361 & -0.1363 & -9.4643 \times 10^{-4} & 0 & 0 \\ 0.12962 & -0.14275 & -9.4528 \times 10^{-4} & 0 & 0 \\ 0.22245 & 0.12643 & -0.37192 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.15587 & 0.07010 \\ 0 & 0 & 0 & -0.30139 & 0.13536 \end{bmatrix} \right\} \quad (82)$$

then the eigenvalues are

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -1.4901 \times 10^{-3}; \lambda_2 = -1.8571 \times 10^{-2}; \lambda_3 = -0.371 \\ \lambda_4 &= -1.5725 \times 10^{-3}; \lambda_5 = -1.8937 \times 10^{-2} \end{aligned} \quad (83)$$

and the assumption is satisfied.

It is instructive to observe the dynamic performance of the currents  $i_d = f_3$ ,  $i_q = f_{11}$  and  $i_f = f_5$  when the generator is operating under nominal conditions, which is shown in Fig. 8.

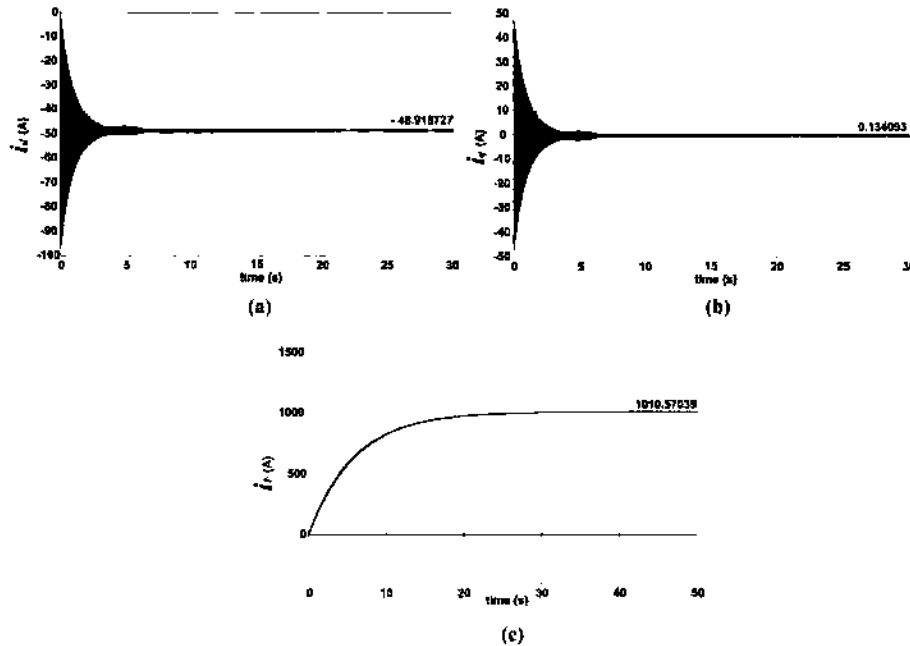


Fig. 8. Performance of the currents: (a)  $i_d$ ; (b)  $i_q$ ; (c)  $i_f$ .

From the literature [24, 26], the dynamic behavior of the synchronous generator and their steady state values obtained in this paper can be verified.

The dynamic response of the damping currents,  $i_D = f_4$  and  $i_Q = f_{10}$  are shown in Fig. 9.

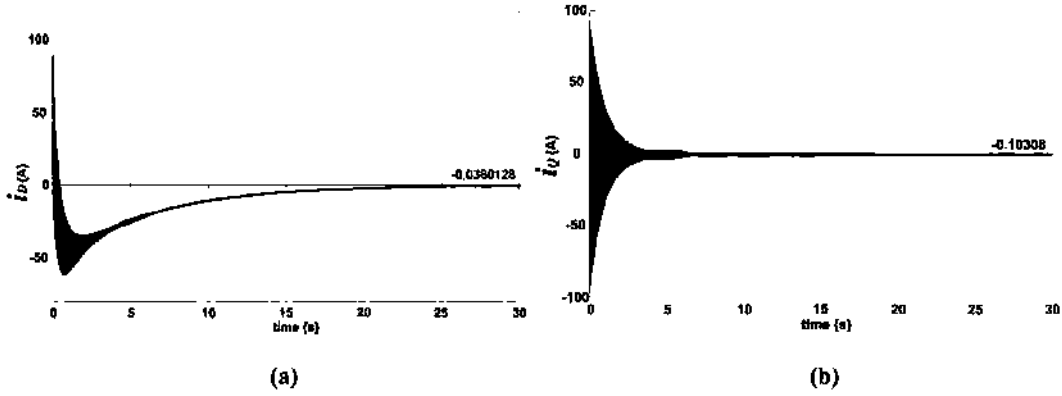


Fig. 9. Performance of the currents: (a)  $i_D$ ; (b)  $i_Q$ .

The performance of the damping currents under balanced steady state conditions are zero, which is shown in Fig. 9. This is to be expected since, under steady state, the rotating magnetic field, due to the stator currents, is stationary with respect to the rotor. As the damping windings are closed circuits with no applied voltage, currents are induced into them only when the magnetic field, due to the stator windings, or the field winding is changing.

Note that the steady state of the field winding current is

$$i_F = \frac{v_F}{r_F} = \frac{375V}{0.371\Omega} = 1010.78A$$

which is verified in Fig. 8.

The plots of the currents represent the state variables for the fast dynamics of the system and they are stable and by simulation (9) is proved.

Fig. 10 illustrates the dynamic performance of the synchronous machine rotor where  $p_{18}$  is the exact velocity and  $\bar{p}_{18}$  is the velocity using the quasi steady model.

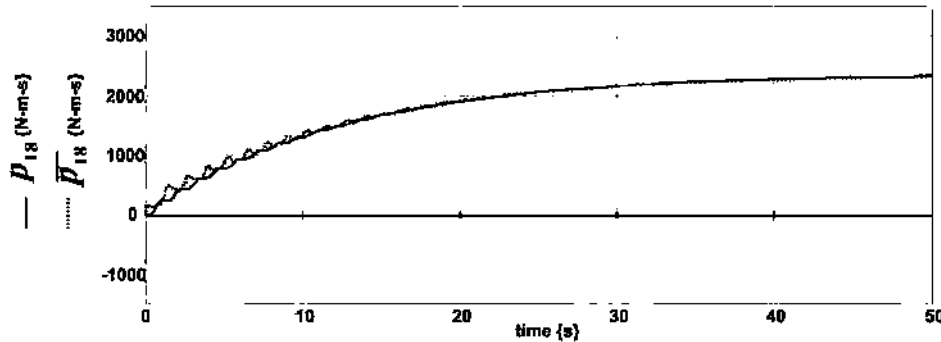


Fig. 10. Time responses of  $p_{18}$  and  $\bar{p}_{18}$ .

Fig. 11 shows the oscillations of the angle  $q_{31}$  and  $q_{21}$  and their corresponding  $\bar{q}_{31}$  and  $\bar{q}_{21}$  of the quasi steady state model, respectively. The angle  $q_{31}$  is related to the connection between low pressure turbine and generator and  $q_{21}$  is the angle due to the connection of high and low pressure turbines.

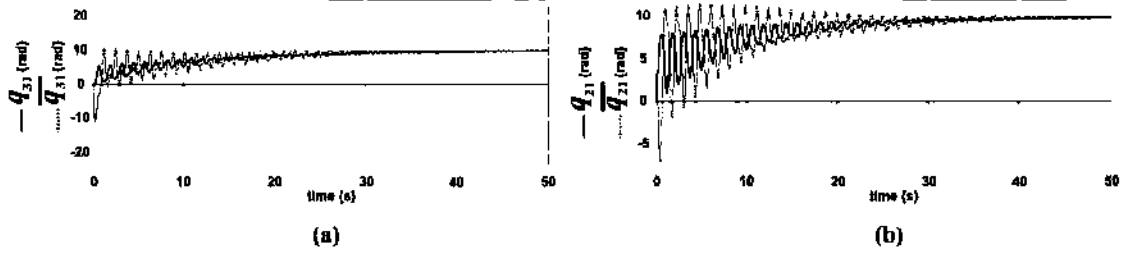


Fig. 11. Time responses of the angles: (a)  $q_{31}$  and  $\overline{q}_{31}$ ; (b)  $q_{21}$  and  $\overline{q}_{21}$ .

The velocities of the turbine sections are shown in Fig. 12 where the  $p_{30}$  and  $\overline{p}_{30}$  are the velocities of the low pressure turbine. Also, the velocity of the high pressure turbine  $p_{23}$  and its quasi steady state model  $\overline{p}_{23}$  is shown in this figure.

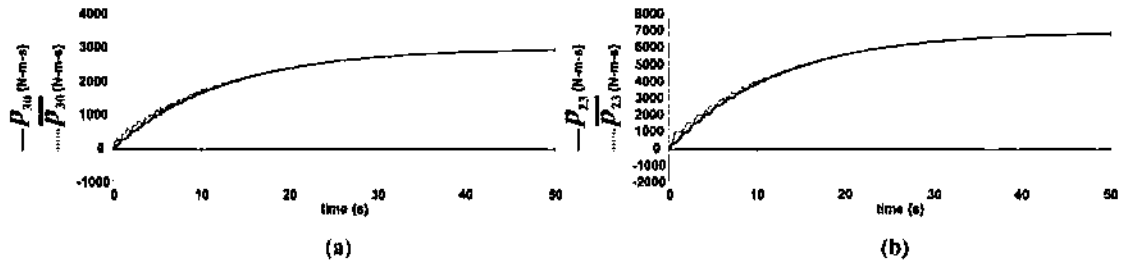


Fig. 12. Time responses of the velocities: (a)  $p_{30}$  and  $\overline{p}_{30}$ ; (b)  $p_{23}$  and  $\overline{p}_{23}$ .

It is clear that the simulation results describe a good performance of the quasi steady state model of the synchronous machine with the shaft system. Moreover, this quasi steady state model is obtained in a direct way with an algebraic process by using a bond graph approach.

## 8 Conclusions

A bond graph model of a class of non-linear systems with singular perturbations is proposed. This system is characterized by having slow and fast dynamics and the product of a state variable and state functions define the class of non-linear systems. An advantage of the singular perturbations methods is to obtain reduced models. Hence, a new bond graph called singularly perturbed non-linear bond graph (SPNBLG) is presented. This SPNBLG is defined by storage elements of the fast dynamics with a derivative causality assignment and the slow dynamics represented by storage elements having an integral causality assignment. Thus, the quasi steady state model of the system by using SPNBLG can be obtained.

The assumptions of Thikonov Theorem have to be verified in order to use the results of this paper.

It is important to recognize that the mathematical model of the non-linear singularly perturbed systems or the quasi steady state model can present some singularities

due to numerical values of their parameters, then it is necessary to be careful during the simulation process in order to avoid these possible problems.

In this paper, an interesting case of study of the class of non-linear systems with singular perturbations described by the connection of a synchronous generator to a turbine sections is proposed. The order of the complete system is 10. The corresponding BGI and SPNBG of this system are obtained. Hence, the quasi steady state model of the turbine-generator is determined by applying the proposed Lemma. The order of this reduced model is 5 since the slow dynamics has five storage elements.

The dynamic behavior of the state variables of the synchronous generator are shown and these results can be verified in the literature [24, 26]. Simulations results of the quasi steady state model are shown and these plots illustrate the effectiveness of the proposed methodology.

Some future works are described from this article. First, storage elements in a derivative causality assignment when a predefined integral causality assignment of the bond graph model can describe a more general result giving a non-linear singularly perturbed system with a linearly dependent state variables. Also, it is possible to extend the results of this paper to time functions to modulate *MTF* or *MIGY* elements describing a more general class of non-linear system. Finally, it is possible to verify the assumptions of Tikhonov Theorem in a bond graph approach.

## References

- [1] V. R. Saksena, J. O'Reilly and P. Kokotovich, Singular Perturbations and Time-scale Methods in Control Theory: Survey 1976-1983, *Automatica*, Vol. 20, No. 3, pp. 273-293, 1984.
- [2] D. Subbaram Naidu and A. J. Calise, Singular perturbations and time scales in guidance and control of aerospace systems: a survey, *Journal of Guidance Control Dynamics*, 24(6) (2001), pp. 1057-1078.
- [3] P. V. Kokotovic, H. K. Khalil and J. O'Reilly, *Singular Perturbation Methods in Control: Analysis and Design*, Academic Press, London, 1986.
- [4] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2002.
- [5] S. D. Pekarek, M. T. Lemanski and E. A. Walters, On the use of singular perturbations to neglect the dynamic saliency of synchronous machines, *IEEE Trans. Energy Conver.* 17(3) (2002), pp. 385-391.
- [6] J. H. Chow, J. R. Winkelman, M. A. Pai and P. W. Saver, Singular perturbations and time-scales methods in control theory: survey 1976-1983, *Automatica* 20(3) (1984), pp. 273-293.

- 
- [7] V. P. Singh, Y. P. Singh and S. I. Ahson, An iterative approach to Reduced-Order Modeling of Synchronous Machines Using Singular Perturbation, *Proceedings of the IEEE*, vol, 74, No. 6, June 1986, pp. 892-893.
- [8] P. W. Saver, D. J. La Gesse, S. Ahmed-Zaid, M. A. Pai, Reduced Order Modeling of Interconnected Multimachine Power Systems using Time-scale Decomposition, *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. PWRs-2, No. 2, May 1987.
- [9] J. H. Chow, J. R. Winkelman, M. A. Pai and P. W. Saver, Singular perturbation analysis of large-scale power systems, *Electrical Power and Energy Systems*, vol. 12, No. 2, April 1990, pp. 117-126.
- [10] Petar V. Kokotovich and P. W. Saver, Integral Manifold as a Tool for Reduced-Order Modeling of Nonlinear Systems: A Synchronous Machine Case Study, *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, Vol. 36, No. 3 1989, pp. 403-410.
- [11] Dean C. Karnopp, Donald L. Margolis, Ronald C. Rosenberg, *System Dynamics Modeling and Simulation of Mechatronic Systems*, Wiley Interscience, (2000).
- [12] Forbes T. Brown, *Engineering System Dynamics*, Marcel Dekker Inc., 2001.
- [13] C. Sueur and G. Dauphin-Tanguy, Bond Graph approach to Multi-time Systems Analysis, *Journal of the Franklin Institute*, vol. 328, No. 5/6, pp. 1005-1026, 1991.
- [14] G. Dauphin-Tanguy, P. Borne and M. Lebrun, Order Reduction of Multi-Time Scale Systems Using Bond Graphs, the Reciprocal System and the Singular Perturbation Method, *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 319, No. 1/2, pp. 157-171, January-February, 1985.
- [15] A. Y. Orbak, O. S. Turkay, E. Eskimat and K. Youcef-Toumi, Model Reduction in the physical domain, *Proc. Instn. Mech. Engrs. Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, Vol. 217, pp. 481-496, 2003.
- [16] G. Gonzalez and R. Galindo, Steady state determination using bond graphs for systems with singular state matrix, *Proc. of the Institution of Mechanical Engineers Part I: J. of Systems and Control Engineering*, 2009
- [17] Gilberto Gonzalez A. and Noe Barrera G., Quasi-steady state model determination for systems with singular perturbations modelled by bond graphs, *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems: Methods, Tools and Applications in Engineering and Related Sciences*, DOI: 10.1080/13873954.2013.766214.
- [18] A. N. Tikhonov, Systems of differential equations containing a small parameter multiplying the derivative, *Mat. Sb.*, 31, 575-586, 1952.

- 
- [19] N. Levinson, Perturbations of discontinuous solutions of non-linear systems of differential equations, *Acta Math*, 82, 71-106.
- [20] A. B. Vasil'eva, Singularly perturbed systems with an indeterminacy in their degenerate equations, *J. Diff Eqns.* 12, 1227-1235, 1976.
- [21] W. Wasow, *Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations*, Wiley Interscience, New York, 1965.
- [22] R. E. Malley, The singularly perturbed linear state regulator problem, *SIAM J. Control*, 10, 399-413, 1972.
- [23] M. C. Jackson, S. D. Umans, R. D. Dunlop, S. H. Horowitz and A. C. Parikh, Turbine-Generator shaft and Fatigue: Part I - Simulation Methods and Fatigue Analysis, *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, vol. PAS-98, No. 6 Nov./Dec., pp. 2299-2326, 1979.
- [24] P. M. Anderson, *Power System Control and Stability*, The IOWA University Press, 1977.
- [25] P. Kundur, *Power System Stability and Control*, Mc. Graw-Hill, 1994.
- [26] P. C. Krause, O. Wasynczuk and S. D. Sudhoff, *Analysis of electric machinery*, 1995 (IEEE Press, Piscataway, New Jersey).
- [27] John R. Smith and Meng-Jen Chen, *Three-Phase Electrical Machine Systems Computer Simulation*, John Wiley & Sons Inc., 1993.
- [28] I. Kamwa, R. Wamkeue, X. Dai-Do, General approaches to efficient d-q simulation and model translational for synchronous machines: a recap, *Electric Power Systems Research*, vol. 42, pp.173-180, 1997.
- [29] Milenko Duric, Zoran Readojevic, Emilija Turkovic, A practical approach to the order reduction of a power system model for small stability analysis, *Electric Power System Research*, vol. 41, pp.13-18, 1997.
- [30] M. Saidu and F. M. Hughes, An extended block diagram transfer function model of a synchronous machine, *Electric Power & Energy Systems*, vol. 18, no. 2, pp. 139-142, 1996.
- [31] Dietrich Sahn, A Two-Axis Bond Graph Model of the Dynamics of Synchronous Electrical Machine, *Journal of the Franklin Institute*, vol. 328, no. 1, pp. 45-54, 1991.

## A Non-linear Constitutive Relations

In case that the constitutive relations for storage elements could be non-linear functions defined by

$$z_1(t) = \phi_{F_1}(x_1(t)) \quad (84)$$

$$z_2(t) = \phi_{F_2}(x_1(t)) \quad (85)$$

then (17) would not be the mathematical representation for this system. Hence, this paper would have some problems:

- The parameter  $\varepsilon$  would not be defined by the constitutive relation of the fast storage elements; a different mathematical development of finding a possible solution is required.
- The state equation with linear constitutive relation of the dissipation field would be

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \varepsilon \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \check{A}_{11}(x) & \check{A}_{12}(x) \\ \check{A}_{21}(x) & \check{A}_{22}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1(x) \\ \check{B}_2(x) \end{bmatrix} u(t)$$

where

$$\check{A}_{11}(x) = S_{11}^{11}(x) + S_{12}^{11}(x) M(x) S_{21}^{11}(x) \quad (86)$$

$$\check{A}_{12}(x) = S_{11}^{12}(x) + S_{12}^{11}(x) M(x) S_{21}^{12}(x) \quad (87)$$

$$\check{A}_{21}(x) = S_{11}^{21}(x) + S_{12}^{21}(x) M(x) S_{21}^{11}(x) \quad (88)$$

$$\check{A}_{22}(x) = S_{11}^{22}(x) + S_{12}^{21}(x) M(x) S_{21}^{12}(x) \quad (89)$$

$$\check{B}_2(x) = S_{13}^{21}(x) + S_{12}^{21}(x) M(x) S_{23}(x) \quad (90)$$

It is necessary to verify if it is realized the system can be singularly perturbed, this problem is not attacked in this paper.

- A contribution of this paper is to obtain  $A_{22}^{-1}(x)$  by changing the integral causality to derivative causality of the storage elements for the fast dynamics maintaining an integral causality assignment of the storage elements for the slow dynamics, *i.e.*, SPNBSG is obtained. It is necessary to find the possibility for new results with non-linear constitutive relations for storage elements. For example, a  $C$ -element in an integral causality assignment is shown in Fig. 13.

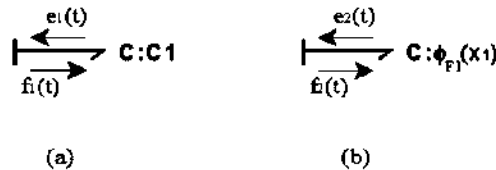


Fig. 13.  $C$ -elements in integral causality: (a) Linear; (b) Non-linear.

The constitutive relation of Fig 13(a) is

$$e_1(t) = \frac{1}{C_1} x_1(t)$$

and for Fig. 13(b) is

$$e_2(t) = \phi_{F_1}(x_1(t))$$

considering the input-output signals of the  $C$ -element of Fig. 13(a)

$$e_1(t) = \frac{1}{C_1} \int f_1(t) dt$$

and Fig. 13(b)

$$e_2(t) = \phi_{F_1} \left( \int f_1(t) dt \right)$$

by changing to a derivative causality which is shown in Fig. 14.

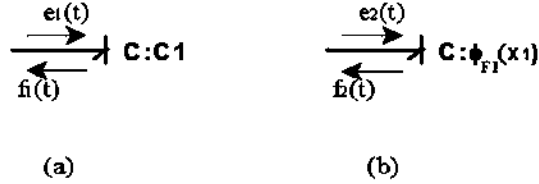


Fig. 14.  $C$ -elements in derivative causality: (a) Linear; (b) Non-linear.

The input-output relationships of Fig. 14 are

$$f_1(t) = C_1 \frac{de_1(t)}{dt}$$

and

$$f_2(t) = \frac{d\phi_{F_1}^{-1}(e_1(t))}{dt}$$

Thus, for non-linear constitutive relations, the inverse of these relations are required in order to change the causality of the storage elements and it is necessary to find new results by applying a similar methodology proposed in this paper.



**JOURNAL OF CONTROL ENGINEERING AND APPLIED INFORMATICS**

HOME ABOUT USER HOME SEARCH CURRENT ARCHIVES ANNOUNCEMENTS  
 SRAIT INFORMATIONS FOR THE AUTHORS

Home > User > Author > Archive

**Archive**

ACTIVE ARCHIVE

ID	NUM DO	SECT	AUTHORS	TITLE	VIEWS	STATUS
3922	DB-19	ART	Fadila	A QUASI-STEADY STATE MODEL OF A SINGULARLY PERTURBED WIND...	—	Archived

1 - 1 of 1 Items

**Start a New Submission**

CLICK HERE to go to step one of the five-step submission process.

Journal Help

USER

You are logged in as...  
**Joanaaronp**  
 • My Profile  
 • Log Out

AUTHOR

**Submissions**

- Active (0)
- Archive (1)
- New Submission

LANGUAGE

English

JOURNAL CONTENT

Search

All   
 Search

Browse

- By Issue
- By Author
- By Title

INFORMATION

- For Readers
- For Authors
- For Librarians

## A Quasi-steady State Model of a Singularly Perturbed Wind Turbine with an Induction Machine Considering Nonlinear Friction in a Bond Graph Approach

J. Aarón Padilla-G\*. Gilberto González-A\*\*

\*Faculty of Electrical Engineering, University of Michoacán. Edificio  $\Omega$ 1 Ciudad Universitaria C.P. 58030 Morelia, Michoacán, México. Tel. 01 (443) 322 35 00 Ext. 1115 y 1194 (e-mail:joseaaronp@gmail.com)

\*\* Faculty of Electrical Engineering, University of Michoacán, México. (e-mail:gilmichga@yahoo.com)

**Abstract:** In this paper, the singular perturbations theory for a class of nonlinear systems with a bond graph approach is proposed. The product of state variables and nonlinear constitutive relations respect to slow state variables of the dissipation field define the class of nonlinear systems in the physical domain. Hence, a new junction structure of the bond graph model to obtain the quasi-steady state model of the class of nonlinear systems with singular perturbations is presented. This junction structure has fast storage elements in a derivative causality assignment and the slow storage elements maintain an integral causality determining a reduced model. The proposed methodology is applied to a wind turbine with an induction generator considering nonlinear friction and it is shown that this model is internally stable.

**Keywords:** Bond graph, singular perturbations, wind turbine, nonlinear friction, internal stability.

### 1. INTRODUCTION

Wind technologies have been developing rapidly over the last few decades, as it is renewable, cost-effective and also cause little harm to the nature with respect to other conventional energy [1]. As a result of this, in the next future, wind turbines may start to influence the behaviour of electrical power systems by interacting with conventional generation and loads; in order to investigate the impact of wind power on power systems dynamics, adequate models are essential [2].

There is a big amount of papers about modelling, analysis and control of wind turbines; in [1] a detailed survey of control methods commonly employed by commercial available small wind turbines is provided, and two dynamic controllers are designed and simulated. The dynamic behaviour of a typical fixed speed wind turbine connected to the grid is described in [2].

A dynamic model of an important contemporary wind turbine concept named a double fed (wound rotor) induction generator with a voltage source converter feeding the rotor is presented in [3], this wind turbine concept is equipped with rotor speed, pitch angle and terminal voltage controllers.

Many books and papers have used traditional mathematical models of an induction machine, in [4] the most important steps and concerns in the design of estimation and control algorithms for induction motors are provided. Also, [5] is a comprehensive reference source for practicing engineers and students specializing in electric power engineering and industrial electronics. It illustrates the state of the art in induction motors. Beginning with characteristics and basic

dynamic models of induction motors, and progressing to low- and high- performance drive systems.

In [6] a computer representation of symmetrical machine in the arbitrary reference frame and its simulation is described. As well as steady state characteristics and control of the machines and the transformation of physical variables of AC machines using reference frame theory are provided in [7].

Hence, it is useful to develop mathematical models of an induction machine to explain its electric, magnetic and mechanical behaviour. These phenomena using a bond graph model of the systems can be analysed in a direct and graphical way.

The main key points of the bond graph methodology are: a model containing the energetic junction structure, i.e., the system architecture; different energy domains are covered and the coupling of subsystems are allowed, the cause and effect relations of each element are obtained graphically; and the state variables have a physical meaning [8, 9, 10].

Furthermore a fundamental problem in the theory of systems and control is the mathematical modelling of a physical system. The realistic representation of many systems calls for high-order dynamic equations. The presence of some parasitic parameters such as small time constants, resistances, inductances, capacitances, moments of inertia, and Reynolds number, is often the source for the increased order and stiffness of these systems. The stiffness, attributed to the simulation occurrence of slow and fast phenomena, gives rise to time scale. The systems in which the suppression of a small parameter is responsible for the degeneration (or reduction) of dimension (or order) of the system are labelled as singularly

perturbed systems, which are a special representation of the general class of time scale systems [11]. There are several references of singular perturbation methods, some of them are [12] and [13]. We can find some papers applying bond graph to singular perturbation methods. In [14] describes how the bond graph model is a helpful tool for systems analysis in the special case of simplifying the modelling of two time scale systems. The fast and slow dynamics of bond graph models can be estimated by determination of causal loop gains. In [15] is provided the notion of a reciprocal system with singular perturbation techniques, which can be obtain more accuracy on the fast time scale behaviour of the system.

There are some references of singular perturbations applied to induction machine. In [16] is developed a bond graph model of an induction machine as well as the graphs of mechanical components and, there are completed some of the missing links in the development of bond graphs for electromechanical machines. A method to model electrical machines, taking into account electric, magnetic and mechanic coupling, as well as simulation results to compare with finite element computation result, is developed in [17]. In [18] a bond graph model of doubly-fed induction machine connected to a whole system with a back-to-back converter and *dq*-transformation is given. Also, a dynamic model of the induction machine that considers the thermal behaviour using bond graph is developed in [19]. In addition, [20] considers bond graph modelling of various types of electrical machines and concludes with a simulation study of the induction motor.

This paper allows for extending the results given in [21] to a class of nonlinear systems. The main contribution of this paper is the modelling in bond graph of a wind turbine with induction generator considering nonlinear constitutive relations of the dissipation elements, that is, nonlinear friction, which is a class of nonlinear systems with multiplication of states. In order to determine the quasi-steady state model of the generator a junction structure of a new bond graph is proposed. The characteristic of this new bond graph is to assign integral causality to the slow storage elements and derivative causality for fast storage elements.

Section 2 describes the singular perturbation model. The modelling of a class of nonlinear systems with two time scale in the physical domain is proposed in Section 3. In Section 4 a quasi-steady state model with a bond graph approach is presented. The proposed methodology is applied to an induction machine in Section 5. Finally, Section 6 gives the conclusions.

## 2. STANDAR SINGULAR PERTURBATION MODEL

The singular perturbation model of finite dimensional dynamic systems, extensively studied in the mathematical literature by [24, 25, 26, 27, 28] was also the first model to be used in control and systems theory.

This model is in the explicit state variable form in which the derivatives of some of the states are multiplied by a small positive scalar  $\varepsilon$ , that is,

$$\dot{\bar{x}}_1(t) = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \varepsilon, t), \bar{x}_1(t_0) = \bar{x}_1^0, \bar{x}_1 \in \mathfrak{R}^n, \quad (1)$$

$$\varepsilon \dot{\bar{x}}_2(t) = g(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \varepsilon, t), \bar{x}_2(t_0) = \bar{x}_2^0, \bar{x}_2 \in \mathfrak{R}^m, \quad (2)$$

where  $f$  and  $g$  are assumed to be sufficiently many times continuously differentiable functions for their arguments,  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \varepsilon, t$ . The scalar  $\varepsilon$  represents all the small parameters to be neglected [12].

In control and systems theory, the model (1) and (2) are a step towards reduced order model, a common engineering task. The order reduction is converted into a parameter perturbation called singular. When we set  $\varepsilon = 0$ , the dimension of the state space of (1) and (2) reduces from  $n + m$  to  $n$  because the differential equation (2) degenerates into the algebraic equation

$$0 = g(\bar{x}_1, \bar{x}_2, 0, t), \quad (3)$$

where the bar is used to indicate that the variables belong to a system with  $\varepsilon = 0$  [14, 15]. The model (1), (2) are in standard form and only if the following assumption concerning to (3) is satisfied.

**Assumption 1** [12, 13]. In a domain of interest (3) has  $k \geq 1$  distinct real roots

$$\bar{x}_2 = \bar{\phi}_i(\bar{x}_1, t), i = 1, 2, \dots, k, \quad (4)$$

This assumption ensures that a well-defined  $n$  dimensional reduced model will correspond to each root (4). To obtain the reduced model, we substitute (4) into (1),

$$\dot{\bar{x}}_1 = f(\bar{x}_1, \bar{\phi}_i(\bar{x}_1, t), 0, t), \bar{x}_1(t_0) = \bar{x}_1^0, \quad (5)$$

and keep the same initial condition for the state variable  $\bar{x}_1^0(t_0)$  as for  $\bar{x}_1(t_0)$ . In the sequel, we shall drop the subscript  $i$  and rewrite (5) more compactly as

$$\dot{\bar{x}}_1 = f(\bar{x}_1, t), \bar{x}_1(t_0) = \bar{x}_1^0. \quad (6)$$

This model is sometimes called a quasi-steady state model, because  $\bar{x}_2$  may rapidly converge to a root of (3), which is the quasi-steady state form of (2).

The discrepancy between the response of the reduced model (6) and that of the full model (1) and (2) is the fast transient and the stability properties are stated as two separate assumptions.

**Assumption 2** [12, 13]. The equilibrium  $\bar{x}_2^*(\tau) = 0$  of

$$\frac{d\hat{x}_2}{d\tau} = g(\hat{x}_1, \hat{x}_2(\tau) + \bar{x}_2(t_0), 0, t_0) \quad (7)$$

is asymptotically stable uniformly in  $\hat{x}_1^0$  and  $t_0$ , and  $\hat{x}_2^0 - \bar{x}_2(t_0)$  belongs to its domain of attraction, so  $\bar{x}_2^*(\tau)$  exists for  $\tau \geq 0$ . In (7)  $\hat{x}_2^*(\tau) = \bar{x}_2 - \bar{x}_2^*$  to describe the behavior of  $\bar{x}_2$  as a function of  $\tau$  using the so-called boundary layer correction and  $\tau = t - t_0/\varepsilon$  to describe that if  $\varepsilon$  tends to zero,  $t$  tends to infinite even for fixed  $t$  only slightly larger than  $t_0$ , while  $\bar{x}_2$  and  $\tau$  almost instantaneously change,  $\bar{x}_1$  remains very near to its initial value  $\bar{x}_1^0$ . If this assumption is satisfied, then

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \widehat{x}_2(\tau) = 0 \quad (8)$$

is uniformly in  $x_1^0, t_0$ ; that is,  $x_2$  will come close to its quasi steady state  $\widehat{x}_2$  at some time  $t_1 > t_0$ . To ensure that  $x_2$  stays close to  $\widehat{x}_2$ , we think as if any instant  $t \in [t_1, T]$  can be the initial instant, and make the following assumption about the linearization of (7).

**Assumption 3** [12, 13]. The eigenvalues of  $\partial g/\partial x_2$  evaluated, for  $\varepsilon = 0$ , along  $\widehat{x}_1(t), \widehat{x}_2(t)$ , have real parts smaller than a fixed negative number, *i.e.*

$$\operatorname{Re} \lambda \left\{ \frac{\partial g}{\partial x_2} \right\} \leq -\nu \leq 0. \quad (9)$$

The last both assumptions describe a strong stability property of the boundary layer system (7). If  $x_2^0$  is assumed to be sufficiently close to  $\widehat{x}_2(t_0)$ , then Assumption 3 encompasses Assumption 2. We also note from (9) that nonsingularity of  $\partial g/\partial x_2$  implies that the root  $\widehat{x}_2(t)$  is distinct as required by Assumption 1. These assumptions are common in much of the singular perturbation literature [24, 25, and 26]. These references contain the proof and refinements of the following fundamental theorem.

**Theorem 1 (Tikhonov's theorem)** [12, 13]. If Assumption 2 and 3 are satisfied, then the approximation

$$x_1 = \widehat{x}_1 + O(\varepsilon), \quad x_2 = \widehat{x}_2 + \widehat{x}_2' + O(\varepsilon), \quad (10)$$

is valid for all  $t \in [t_0, T]$ , and there exist  $t_1 \geq t_0$  such that

$$x_2 = \widehat{x}_2 + O(\varepsilon) \quad (11)$$

is valid for all  $t \in [t_1, T]$ ; where  $O(\varepsilon)$  describes an error function or difference between the behaviour of the full system and the quasi steady system.

Next section proposes a class of nonlinear systems with singular perturbations modelled by bond Graphs.

### 3. MODELING IN BOND GRAPH OF A CLASS OF NONLINEAR SYSTEMS WITH SINGULAR PERTURBATIONS

When two components are connected, power interactions are always present. Because power could flow in either direction, a sing convention for describing the power variables is necessary. In the bond graph language, the power variables are called effort  $e(t)$  and flow  $f(t)$ . The power,  $P(t)$ , flowing into or out of a port can be expressed as the product of an effort and a flow variable. The Fig. 1 shows the graphical representation of a bond [8].

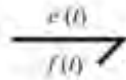


Fig. 1. A bond.

Dynamic models for a variety of physical systems can be constructed using  $-R, -C, -I, MS, -, MS, -;$  the port elements  $-MTF-$  and  $-MGY-$ ; and the 3-port 0 and 1 junctions, the concept of junction structure, which is an assemblage of power

conserving elements,  $-0-, -1-, -MTF-,$  and  $-MGY-$  is given in [11]. Now, a class of nonlinear system represented in a Bond Graph in an Integral causality assignment (BGI) whose junction structure and key vectors are shown in Fig. 2.

The symbolic form of a BGI of a system is shown in Fig. 2. In Fig. 2 ( $MS_s, MS_f$ ), ( $I, C$ ) and ( $R$ ) denote the source, the energy storage and the energy dissipation fields and ( $0, 1, TF, GY$ ) the junction structure with modulated transformers;  $MTF$ , and modulated gyrators,  $MGY$ .

The state  $x_1(t) \in \mathbb{R}^n$  and  $x_2(t) \in \mathbb{R}^m$  are composed of energy variables  $p(t)$  and  $q(t)$  associated with  $I$  and  $C$  elements in integral causality for slow and fast dynamics, respectively;  $u(t) \in \mathbb{R}^p$  denotes the plant input,  $z_1(t) \in \mathbb{R}^n$  and  $z_2(t) \in \mathbb{R}^m$  the co-energy vector for slow and fast dynamics, respectively; and  $D^{lin}(t) \in \mathbb{R}^n, D^{NL}(t, x_1) \in \mathbb{R}^n, D^{lin}(t, x_1) \in \mathbb{R}^m$  and  $D^{NL}(t, x_1) \in \mathbb{R}^m$  are a mixture of  $v(t)$  and  $f(t)$  showing the energy exchanges between the dissipation field and the junction structure.

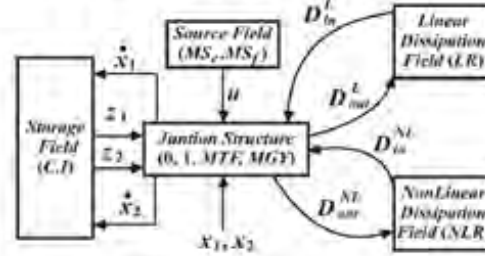


Fig. 2. Bond graph in an integral causality assignment.

The constitutive relations of the storage field are:

$$z_1(t) = F_1 x_1(t), \quad z_2(t) = F_2 x_2(t), \quad (12)$$

and the constitutive relations of the dissipation field can be linear or nonlinear described by

$$D_{in}^L(t) = L^L D_{in}^L(t), \quad D_{out}^{NL}(t) = L^{NL}(x_1) D_{out}^{NL}(t), \quad (13)$$

where  $L^{NL}(x_1)$  contains the nonlinear functions in terms of  $x_1$ . The nonlinear terms of the class of nonlinear systems of this paper are given by the  $MTF$  or  $MGY$  elements modulated by states variables, and nonlinear constitutive relations for the dissipation elements. Also all the states accept an integral causality assignment. The relations of the junction structure are defined by

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \\ D_{in}^L(t) \\ D_{out}^{NL}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}^1(x) & S_{12}^1(x) & S_{13}^1(x) & S_{14}^1(x) & S_{15}^1(x) \\ S_{21}^1(x) & S_{22}^1(x) & S_{23}^1(x) & S_{24}^1(x) & S_{25}^1(x) \\ S_{31}^1(x) & S_{32}^1(x) & S_{33}^1(x) & S_{34}^1(x) & S_{35}^1(x) \\ S_{41}^1(x) & S_{42}^1(x) & S_{43}^1(x) & S_{44}^1(x) & S_{45}^1(x) \\ S_{51}^1(x) & S_{52}^1(x) & S_{53}^1(x) & S_{54}^1(x) & S_{55}^1(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ D_{in}^L(t) \\ D_{out}^{NL}(t) \\ u(t) \end{bmatrix}, \quad (14)$$

The entries of  $S$  take values inside the set  $\{0, 1, k_t, k_g\}$  where,  $k_t$  and  $k_g$  are transformer and gyrator modules, for the class of nonlinear system of this paper, these modules can be  $p(t)$  and/or  $q(t)$  associated with  $I$  and/or  $C$  elements in integral causality, respectively. Also,  $S_{11}^{11}(x), S_{22}^{22}(x), S_{33}^{33}(x)$  and,  $S_{44}^{44}(x)$  are square skew-symmetric matrices; and  $S_{12}^{12}(x), S_{21}^{21}(x), S_{13}^{13}(x), S_{31}^{31}(x), S_{14}^{14}(x), S_{41}^{41}(x), S_{23}^{23}(x), S_{32}^{32}(x), S_{24}^{24}(x), S_{42}^{42}(x), S_{34}^{34}(x), S_{43}^{43}(x)$  are matrices each other negative transpose.

respectively.

The input and output relationships of the junction structure of Fig. 2 determine (14). From the third and fourth lines of (14) with (12) and (13), we have the linear dissipation vector,

$$D_w^L(t) = T(x) [D_w^L(t)_1 + D_w^L(t)_2 + D_w^L(t)_3], \quad (15)$$

where

$$T(x) = [I - M^L(x) S_{22}^{22}(x) L^M(x) M^{NL}(x) S_{22}^{22}(x) L^L]^{-1} M^L(x), \quad (16)$$

and the nonlinear dissipation vector is given by,

$$D_w^N(t) = M^N(x) [D_w^N(t)_1 + D_w^N(t)_2 + D_w^N(t)_3 + D_w^N(t)_4], \quad (17)$$

where

$$M^L(x) = [I - S_{22}^{22}(x) L^L]^{-1}, \quad M^N(x) = [I - S_{22}^{22}(x) L^M(x)]^{-1}, \quad (18)$$

and

$$D_w^L(t)_1 = [S_{21}^{21}(x) z_1(t) + S_{21}^{12}(x) z_2(t)], \quad (19)$$

$$D_w^L(t)_2 = S_{22}^{12}(x) L^M(x) M^{NL}(x) \cdot [S_{21}^{21}(x) z_1(t) + S_{21}^{22}(x) z_2(t) + S_{21}^{23}(x) u(t)], \quad (20)$$

$$D_w^L(t)_3 = S_{21}^{11}(x) u(t), \quad (21)$$

$$D_w^N(t)_1 = S_{21}^{21}(x) z_1(t) + S_{21}^{22}(x) z_2(t), \quad (22)$$

$$D_w^N(t)_2 = S_{22}^{22}(x) L^L T(x) M^L(x) \cdot [S_{21}^{21}(x) z_1(t) + S_{21}^{22}(x) z_2(t)], \quad (23)$$

$$D_w^N(t)_3 = S_{21}^{21}(x) L^L T(x) M^L(x) S_{22}^{22}(x) L^M(x) M^{NL}(x) \cdot [S_{21}^{21}(x) z_1(t) + S_{21}^{22}(x) z_2(t) + S_{21}^{23}(x) u(t)], \quad (24)$$

$$D_w^N(t)_4 = S_{22}^{22}(x) L^L T(x) M^L(x) S_{21}^{21}(x) u(t) + S_{21}^{21}(x) u(t). \quad (25)$$

The matrices  $S_{21}^{21}(x)$ ,  $S_{22}^{22}(x)$ ,  $S_{21}^{12}(x)$  and  $S_{22}^{21}(x)$  are square skew-symmetric matrices, then the terms of (16) and (18) will be structurally invertible, but the numerical state variables  $x$  can give some singularities and it is necessary to avoid this.

By substituting (15) and (17) into the first and second lines of (14) with (12) and (13), the state equation for the class of nonlinear system with singular perturbations in a bond graph approach is defined by

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \varepsilon \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1(x) & A_2(x) \\ A_{21}(x) & A_{22}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1(x) \\ B_2(x) \end{bmatrix} u(t). \quad (26)$$

The matrix  $A_{11}(x)$  is

$$A_{11}(x) = [A_{11}(x)_1 + A_{11}(x)_2] F_1, \quad (27)$$

where

$$A_{11}(x)_1 = S_{11}^{11}(x) + S_{11}^{12}(x) L^L T(x) M^L(x) \Phi(x), \quad (28)$$

$$A_{11}(x)_2 = S_{11}^{11}(x) L^M(x) M^{NL}(x) \cdot [S_{21}^{21}(x) + S_{22}^{22}(x) L^L T(x) M^L(x) \Phi(x)]. \quad (29)$$

$$\Phi(x) = S_{11}^{11}(x) + S_{22}^{22}(x) L^M(x) M^{NL}(x) S_{21}^{21}(x). \quad (30)$$

For the matrix  $A_{12}(x)$  we have

$$A_{12}(x) = [A_{12}(x)_1 + A_{12}(x)_2] F_2, \quad (31)$$

where

$$A_{12}(x)_1 = S_{11}^{12}(x) + S_{11}^{12}(x) L^L T(x) M^L(x) \Gamma(x), \quad (32)$$

$$A_{12}(x)_2 = S_{11}^{12}(x) L^M(x) M^{NL}(x) \cdot [S_{21}^{21}(x) + S_{22}^{22}(x) L^L T(x) M^L(x) \Gamma(x)], \quad (33)$$

$$\Gamma(x) = S_{11}^{12}(x) + S_{22}^{22}(x) L^M(x) M^{NL}(x) S_{21}^{21}(x). \quad (34)$$

The vector  $B_1(x)$  is

$$B_1(x) = [B_1(x)_1 + B_1(x)_2], \quad (35)$$

being

$$B_1(x)_1 = S_{11}^{11}(x) + S_{11}^{11}(x) L^L T(x) M^L(x) K(x), \quad (36)$$

$$B_1(x)_2 = S_{11}^{11}(x) L^M(x) M^{NL}(x) \cdot [S_{21}^{21}(x) + S_{22}^{22}(x) L^L T(x) M^L(x) K(x)]. \quad (37)$$

$$K(x) = S_{11}^{11}(x) + S_{22}^{22}(x) L^M(x) M^{NL}(x) S_{21}^{21}(x). \quad (38)$$

For the matrix  $A_{21}(x)$  we have

$$A_{21}(x) = F_2^{-1} [A_{21}(x)_1 + A_{21}(x)_2] F_1, \quad (39)$$

where

$$A_{21}(x)_1 = S_{11}^{21}(x) + S_{11}^{21}(x) L^L T(x) M^L(x) \Lambda(x), \quad (40)$$

$$A_{21}(x)_2 = S_{11}^{21}(x) L^M(x) M^{NL}(x) \cdot [S_{21}^{21}(x) + S_{22}^{22}(x) L^L T(x) M^L(x) \Lambda(x)], \quad (41)$$

$$\Lambda(x) = S_{11}^{21}(x) + S_{22}^{22}(x) L^M(x) M^{NL}(x) S_{21}^{21}(x). \quad (42)$$

The matrix  $A_{22}(x)$  is given by

$$A_{22}(x) = F_2^{-1} [A_{22}(x)_1 + A_{22}(x)_2] F_2, \quad (43)$$

where

$$A_{22}(x)_1 = S_{11}^{22}(x) + S_{11}^{22}(x) L^L T(x) M^L(x) \Upsilon(x), \quad (44)$$

$$A_{22}(x)_2 = S_{11}^{22}(x) L^M(x) M^{NL}(x) \cdot [S_{21}^{21}(x) + S_{22}^{22}(x) L^L T(x) M^L(x) \Upsilon(x)], \quad (45)$$

$$\Upsilon(x) = S_{11}^{22}(x) + S_{22}^{22}(x) L^M(x) M^{NL}(x) S_{21}^{21}(x), \quad (46)$$

and the vector  $B_2(x)$  is

$$B_2(x) = F_2^{-1} [B_2(x)_1 + B_2(x)_2], \quad (47)$$

being

$$B_2(x)_1 = S_{11}^{21}(x) + S_{11}^{21}(x) L^L T(x) M^L(x) I(x), \quad (48)$$

$$B_2(x)_2 = S_{11}^{21}(x) L^M(x) M^{NL}(x) \cdot [S_{21}^{21}(x) + S_{22}^{22}(x) L^L T(x) M^L(x) I(x)], \quad (49)$$

$$I(x) = S_{11}^{21}(x) + S_{22}^{22}(x) L^M(x) M^{NL}(x) S_{21}^{21}(x). \quad (50)$$

With  $\varepsilon = F_2^{-1}$ .

By depending on the causality *MTF* and *MGY* elements modulated by state variables, these variables can be on the numerator or denominator. Then, the singularities problem due to numerical value can be found into the submatrices of the junction structure  $S(x)$  and/or  $M(x)$ .

It is important to validate Assumption 3 for the particular class of nonlinear systems given in (26), then form (2) and the second line of (26) the nonlinear function of the fast dynamic is

$$g = A_{21}(x)x_1(t) + A_{22}(x)x_2(t) + B_2(x)u(t), \quad (51)$$

by applying (9), Assumption 3 for this paper is defined by

$$\text{Re } \lambda \left( \frac{\partial [A_{21}(x)]}{\partial x_2} x_1(t) + \frac{\partial [A_{22}(x)]}{\partial x_2} x_2(t) + \frac{\partial [B_2(x)]}{\partial x_2} u(t) \right) \leq 0. \quad (52)$$

Thus, this paper considers that (52) and assumptions 1 and 2 are satisfied to verify Tikhonov Theorem.

**Assumption 4.** *MTF* and *MGY* elements can be modulated by state variables that represent:

- The fast dynamic, then the algebraic equation given by

$$A_{21}(x_2)\bar{x}_1(t) + A_{22}(x_2)\bar{x}_2(t) + B_2(x_2)u(t) = 0 \quad (53)$$

has to be solved in terms of (4). This is a possible restriction of this article because the solution of this algebraic equation is a necessary condition for obtaining the quasi steady state model of the system.

- The slow dynamic, then the algebraic equation

$$A_{11}(x_1)\bar{x}_1(t) + A_{12}(x_1)\bar{x}_2(t) + B_1(x_1)u(t) = 0 \quad (54)$$

can be solved in terms of (4).

For the class of nonlinear systems considered in this paper and the assumption that the algebraic equation (53) or (54) are solved, (4) can be written by

$$\dot{\bar{x}}_2(t) = -[A_{22}(x_2)]^{-1} A_{21}(x_2)\bar{x}_1(t) - [A_{22}(x_2)]^{-1} B_2(x_2)u(t), \quad (55)$$

and the quasi steady state model, considering that  $A_{11}(x_1)$  is nonsingular, is

$$\dot{\bar{x}}_1(t) = A_0(x_1)\bar{x}_1(t) + B_0(x_1)u(t), \quad (56)$$

where

$$A_0(x_1) = A_{11}(x_1) - A_{12}(x_1)[A_{22}(x_2)]^{-1} A_{21}(x_2), \quad (57)$$

$$B_0(x_1) = B_1(x_1) - A_{12}(x_1)[A_{22}(x_2)]^{-1} B_2(x_2). \quad (58)$$

In the next section, the junction structure of a bond graph to obtain the quasi steady state model is proposed.

#### 4. STANDARD SINGULAR PERTURBATION MODEL IN BOND GRAPH

A direct graphical technique to determine the roots from algebraic equation and the quasi steady state model is presented. A scheme to analyse the properties of a singularly perturbed system with nonlinear dissipation elements that depend of slow states represented in a bond graph called

Singularly Perturbed Nonlinear Bond Graph (SPNBG) is shown in Fig. 3.

This section proposes to assign derivative causality to storage elements that represent the fast dynamic and the storage elements of slow dynamic maintain an integral causality assignment as is shown in Fig. 3.

Fig. 3 shows that key vector of the storage elements ( $x_2, z_2$ ) has been changed respect to Fig. 2 due to the derivate causality assignment for these elements. Also, the key vectors of the dissipation elements ( $D_{in}^{HL}, D_{out}^{HL}$  and  $D_{in}^{HNL}, D_{out}^{HNL}$ ) of Fig. 3 can be different respect to key vectors ( $D_{in}^L, D_{out}^L$  and  $D_{in}^{NL}, D_{out}^{NL}$ ) of Fig. 2 depending on the causality of the rest of the elements and the nonlinear dissipation elements that depend of slow states of the bond graph.

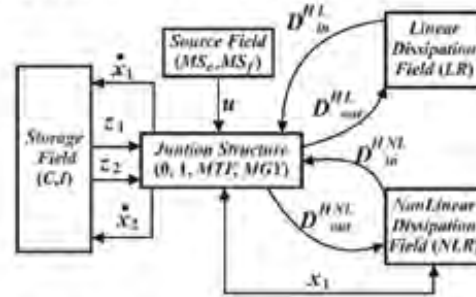


Fig. 3. SPNBG, the nonlinearity is given for nonlinear dissipation elements.

The junction structure and the main results on the following Lemma are presented.

**Lemma** Consider a class of nonlinear singularly perturbed systems defined by the product of states variables around the constitutive relations of the dissipation field can be nonlinear, satisfying (52) and the matrix  $A_{22}(x)$  is non-singular; this system is modelled by bond graphs according to the scheme of Fig. 3 where the storage elements of the fast dynamic have a derivative causality assignment and the storage elements of the slow dynamic an integral causality assignment whose junction structure is given by

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ z_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11}^s(x) & H_{12}^s(x) & H_{13}^s(x) & H_{14}^s(x) & H_{15}^s(x) \\ H_{21}^s(x) & H_{22}^s(x) & H_{23}^s(x) & H_{24}^s(x) & H_{25}^s(x) \\ H_{31}^s(x) & H_{32}^s(x) & H_{33}^s(x) & H_{34}^s(x) & H_{35}^s(x) \\ H_{41}^s(x) & H_{42}^s(x) & H_{43}^s(x) & H_{44}^s(x) & H_{45}^s(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ u(t) \\ z_2(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (59)$$

where

$$D_{out}^{HL}(t) = L^L D_{in}^{HL}(t) : D_{out}^{HNL}(t) = L^{NL}(x_2) D_{in}^{HNL}(t). \quad (60)$$

Then, a representation of the system for the state variables of the slow dynamic is described by

$$\dot{\bar{x}}_1(t) = \bar{A}_1(x)\bar{x}_1(t) + \bar{A}_2(x)\bar{x}_2(t) + \bar{B}_1(x)u(t). \quad (61)$$

The matrix  $\bar{A}_{11}(x)$  is

$$\bar{A}_{11}(x) = [\bar{A}_1(x) + \bar{A}_2(x)] F_1, \quad (62)$$

where

$$\widetilde{A}_1(x)_1 = H_{11}^{11}(x) + H_{12}^{11}(x)L^tW(x)Q^t(x)\Phi^u(x), \quad (63)$$

$$\widetilde{A}_1(x)_2 = H_{12}^{12}(x)L^u(x_1)Q^u(x), \quad (64)$$

$$[H_{11}^{21}(x) + H_{12}^{21}(x)L^tW(x)Q^t(x)\Phi^u(x)],$$

$$\Phi^u(x) = H_{21}^{11}(x) + H_{22}^{11}(x)L^u(x_1)Q^u(x)H_{21}^{21}(x). \quad (65)$$

For the matrix  $\widetilde{A}_{12}(x)$  we have

$$\widetilde{A}_2(x) = [\widetilde{A}_2(x)_1, \widetilde{A}_2(x)_2], \quad (66)$$

where

$$\widetilde{A}_2(x)_1 = H_{11}^{12}(x) + H_{12}^{12}(x)L^tW(x)Q^t(x)\Gamma^u(x), \quad (67)$$

$$\widetilde{A}_2(x)_2 = H_{12}^{12}(x)L^u(x_1)Q^u(x), \quad (68)$$

$$[H_{11}^{22}(x) + H_{12}^{22}(x)L^tW(x)Q^t(x)\Gamma^u(x)],$$

$$\Gamma^u(x) = H_{21}^{12}(x) + H_{22}^{12}(x)L^u(x_1)Q^u(x)H_{21}^{22}(x). \quad (69)$$

The vector  $\widetilde{B}_1(x)$  is

$$\widetilde{B}_1(x) = [\widetilde{B}_1(x)_1, \widetilde{B}_1(x)_2], \quad (70)$$

being

$$\widetilde{B}_1(x)_1 = H_{11}^{11}(x) + H_{12}^{11}(x)L^tW(x)Q^t(x)K^u(x), \quad (71)$$

$$\widetilde{B}_1(x)_2 = H_{12}^{12}(x)L^u(x_1)Q^u(x), \quad (72)$$

$$[H_{11}^{21}(x) + H_{12}^{21}(x)L^tW(x)Q^t(x)K^u(x)],$$

$$K^u(x) = H_{21}^{11}(x) + H_{22}^{11}(x)L^u(x_1)Q^u(x)H_{21}^{21}(x). \quad (73)$$

For the state variables of the fast dynamic is

$$x_2(t) = \widetilde{A}_2(x)_1 x_2(t) + \widetilde{A}_2(x)_2 \dot{x}_2(t) + \widetilde{B}_1(x)u(t). \quad (74)$$

For the matrix  $\widetilde{A}_{21}(x)$  we have

$$\widetilde{A}_2(x) = F_2^{-1} [\widetilde{A}_2(x)_1, \widetilde{A}_2(x)_2] F_1, \quad (75)$$

where

$$\widetilde{A}_{21}(x)_1 = H_{11}^{21}(x) + H_{12}^{21}(x)L^tW(x)Q^t(x)\Lambda^u(x), \quad (76)$$

$$\widetilde{A}_{21}(x)_2 = H_{12}^{22}(x)L^u(x_1)Q^u(x), \quad (77)$$

$$[H_{11}^{21}(x) + H_{12}^{21}(x)L^tW(x)Q^t(x)\Lambda^u(x)],$$

$$\Lambda^u(x) = H_{21}^{11}(x) + H_{22}^{11}(x)L^u(x_1)Q^u(x)H_{21}^{21}(x). \quad (78)$$

The matrix  $\widetilde{A}_{22}(x)$  is given by

$$\widetilde{A}_2(x) = F_2^{-1} [\widetilde{A}_2(x)_1, \widetilde{A}_2(x)_2] F_1, \quad (79)$$

where

$$\widetilde{A}_2(x)_1 = H_{11}^{22}(x) + H_{12}^{22}(x)L^tW(x)Q^t(x)Y^u(x), \quad (80)$$

$$\widetilde{A}_2(x)_2 = H_{12}^{22}(x)L^u(x_1)Q^u(x), \quad (81)$$

$$[H_{11}^{22}(x) + H_{12}^{22}(x)L^tW(x)Q^t(x)Y^u(x)],$$

$$Y^u(x) = H_{21}^{12}(x) + H_{22}^{12}(x)L^u(x_1)Q^u(x)H_{21}^{22}(x). \quad (82)$$

and the vector  $\widetilde{B}_2(x)$  is

$$\widetilde{B}_2(x) = F_2^{-1} [\widetilde{B}_2(x)_1, \widetilde{B}_2(x)_2], \quad (83)$$

being

$$\widetilde{B}_2(x)_1 = H_{11}^{21}(x) + H_{12}^{21}(x)L^tW(x)Q^t(x)\Gamma^u(x), \quad (84)$$

$$\widetilde{B}_2(x)_2 = H_{12}^{22}(x)L^u(x_1)Q^u(x), \quad (85)$$

$$[H_{11}^{21}(x) + H_{12}^{21}(x)L^tW(x)Q^t(x)\Gamma^u(x)],$$

$$\Gamma^u(x) = H_{21}^{11}(x) + H_{22}^{11}(x)L^u(x_1)Q^u(x)H_{21}^{21}(x). \quad (86)$$

where

$$Q^t(x) = [I - H_{11}^{11}(x)L^t]^{-1}, \quad (87)$$

$$Q^u(x) = [I - H_{11}^{12}(x)L^u(x_1)]^{-1}, \quad (88)$$

$$W(x) = [I + Q^t(x)H_{11}^{12}(x)L^u(x_1)Q^u(x)H_{11}^{21}(x)L^t]^{-1}. \quad (89)$$

Moreover, in accord with Assumption 4, the roots of the algebraic equation from differential equation of the state variables of the dynamic by setting  $\varepsilon = 0$  are,

$$\bar{x}_i(t) = \widetilde{A}_i(x_i)\bar{x}_i(t) + \widetilde{B}_i(x_i)u(t), \quad (90)$$

and the quasi steady state model is defined by,

$$\dot{\bar{x}}_i(t) = \widetilde{A}_i(x_i)\bar{x}_i(t) + \widetilde{B}_i(x_i)u(t). \quad (91)$$

**Proof.** Considering that Assumptions 1, 2 and 3 are satisfied, from the third and fourth lines of (59) and using (60) we have

$$D^{\alpha_1}x(t) = W(x)Q^t(x) \left[ H_{11}^{11}(x)F_1x(t) + H_{12}^{11}(x)\dot{x}_1(t) + H_{11}^{11}(x)u(t) \right] + Y(x) \left[ H_{11}^{12}(x)F_1x(t) + H_{12}^{12}(x)\dot{x}_1(t) + H_{11}^{12}(x)u(t) \right], \quad (92)$$

where

$$Y(x) = W(x)Q^t(x)H_{11}^{12}(x)L^u(x_1)Q^u(x), \quad (93)$$

$$D^{\alpha_2}u(t) = Q^u(x) \left[ H_{11}^{21}(x)F_1x(t) + H_{12}^{21}(x)\dot{x}_1(t) + H_{11}^{21}(x)u(t) \right] + Z(t) \left[ H_{11}^{21}(x)F_1x(t) + H_{12}^{21}(x)\dot{x}_1(t) \right] + Z(t)H_{11}^{22}(x)L^u(x_1)Q^u(x) \left[ H_{11}^{21}(x)F_1x(t) + H_{12}^{21}(x)\dot{x}_1(t) \right] + Z(t) \left[ H_{11}^{22}(x) + H_{12}^{22}(x)L^u(x_1)Q^u(x)H_{11}^{22}(x) \right] u(t), \quad (94)$$

where

$$Z(t) = Q^u(x)H_{11}^{21}(x)L^tW(x)Q^t(x), \quad (95)$$

by substituting (10), (92), (94) into the first line of (59) and using (60)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) = & \{H_{11}^n(x) + H_{11}^s(x)L'W(x)Q'(x)\Phi^T(x) + \\ & \Psi(t)\{H_{11}^n(x) + H_{11}^s(x)L'W(x)Q'(x)\Phi^T(x)\}F_{1\lambda}(t) \\ & + \{H_{12}^n(x) + H_{12}^s(x)L'W(x)Q'(x)\Gamma^T(x) + \\ & \Psi(t)\{H_{12}^n(x) + H_{12}^s(x)L'W(x)Q'(x)\Gamma^T(x)\}\dot{x}_2(t) \\ & + \{H_{13}^n(x) + H_{13}^s(x)L'W(x)Q'(x)K^T(x) + \\ & \Psi(t)\{H_{13}^n(x) + H_{13}^s(x)L'W(x)Q'(x)K^T(x)\}u(t), \end{aligned} \quad (96)$$

where

$$\Psi(t) = H_{12}^n(x)L^N(x_1)Q^{N2}(x). \quad (97)$$

By using (62) to (73) with (87) to (89), we determine (61). From the second line of (59) and taking (60), (92) and (94)

$$\begin{aligned} \dot{z}_2(t) = & \{H_{21}^n(x) + H_{21}^s(x)L'W(x)Q'(x)\Phi^T(x) + \\ & \Theta(x)\{H_{21}^n(x) + H_{21}^s(x)L'W(x)Q'(x)\Phi^T(x)\}z_1(t) \\ & + \{H_{22}^n(x) + H_{22}^s(x)L'W(x)Q'(x)\Gamma^T(x) + \\ & \Theta(x)\{H_{22}^n(x) + H_{22}^s(x)L'W(x)Q'(x)\Gamma^T(x)\}\dot{x}_2(t) \\ & + \{H_{23}^n(x) + H_{23}^s(x)L'W(x)Q'(x)K^T(x) + \\ & \Theta(x)\{H_{23}^n(x) + H_{23}^s(x)L'W(x)Q'(x)K^T(x)\}u(t), \end{aligned} \quad (98)$$

where

$$\Theta(x) = H_{22}^n(x)L^N(x_1)Q^{N2}(x). \quad (99)$$

by considering (12), (75) to (86) with (87) to (89) and (98), we prove (74). From (74),

$$\begin{aligned} \dot{x}_2(t) = & -[\tilde{A}_{22}(x)]^{-1} \tilde{A}_{21}(x)x_1(t) + [\tilde{A}_{22}(x)]^{-1} z_2(t) - \\ & [\tilde{A}_{22}(x)]^{-1} \tilde{B}_2(x)u(t), \end{aligned} \quad (100)$$

and considering that the matrices  $A_{22}(x)$  and  $\tilde{A}_{22}(x)$  are non-singular, and comparing (96) with the second line of (26), the relations between BGI and SPNBG are

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{22}(x) = & [A_{22}(x)]^{-1} \epsilon, \quad \tilde{A}_{21}(x) = -[A_{22}(x)]^{-1} A_{21}(x), \\ \tilde{B}_2(x) = & -[A_{22}(x)]^{-1} B_2(x). \end{aligned} \quad (101)$$

By solving (101) for the state variables of the slow dynamic with (54), the (90) is proved.

By substituting (101) into (61)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) = & [\tilde{A}_{11}(x) - \tilde{A}_{12}(x)[\tilde{A}_{22}(x)]^{-1} \tilde{A}_{21}(x)]x_1(t) + \\ & \tilde{A}_{12}(x)[\tilde{A}_{22}(x)]^{-1} z_2(t) + \{\tilde{B}_1(x) - \tilde{A}_{12}(x)[\tilde{A}_{22}(x)]^{-1} \tilde{B}_2(x)\}u(t) \end{aligned} \quad (102)$$

comparing (102) with the first line of (26)

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{11}(x) = & A_{11}(x) - A_{12}(x)[A_{22}(x)]^{-1} A_{21}(x), \\ \tilde{A}_{12}(x) = & A_{12}(x) - A_{12}(x)[A_{22}(x)]^{-1} B_2(x), \end{aligned} \quad (103)$$

by solving (103) for the state variables of the slow dynamic with (56), satisfying Assumption 4, we prove (91).■

The SPNBG representation of the system can represent singularities problems due to numerical values of the argument  $x$  into the submatrices  $H(x)$ ,  $Q(x)$  and  $\tilde{A}_{22}(x)$ . Hence, it is

important to know that for avoiding stability and simulating problems. Also, the matrix  $A_{22}(x)$  has to be non-singular in order to apply the proposed Lemma.

Next section applies the proposed methodology to the wind turbine, which is a singularly perturbed system, because there is a clear difference between speed and slow variables.

### 5. AN INDUCTION GENERATOR AND MECHANICAL MODELS OF WIND TURBINE A BOND GRAPH APPROACH

In this section, the proposed methodology to a singularly perturbed nonlinear system is applied. In this type of systems (electromechanical systems) is clear distinguish between speed and slow variables. The phenomenon of the air friction to high speeds generate that the fluid resistance are nonlinear. In fluid dynamics, *drag* (sometimes called *air resistance*, a type of friction, or *fluid resistance*, another type of friction or fluid friction) refers to forces acting opposite to the relative motion of any object moving with respect to a surrounding fluid. This can exist between two fluid layers (or surfaces) or a fluid and a solid surface. Unlike other resistive forces, such as dry friction, which are nearly independent of velocity, drag forces depend on velocity [30].

#### 5.1 Air resistance

The physics of air resistance applies to motion through any sort of fluid: gas or liquid. To a reasonable approximation, fluid resistance tends to depend on either the first power of the speed (a linear resistance) or the second power (a quadratic resistance) [29]. At small speeds, fluid resistance is linear,

$$F_{\text{res}} = -bv. \quad (\text{Low speeds}) \quad (104)$$

where  $b$  has the units of  $N/(m/s) = \text{kg/s}$ . The force  $-bv$  is sometimes called the viscous drag. It arises mainly from the cohesion of the layers of the fluid. For large speeds, fluid resistance is better described by a quadratic dependence on speed,

$$F_{\text{res}} = -cv^2, \quad (\text{Higher speeds}) \quad (105)$$

where the units of  $c$  are  $N/(m/s)^2 = \text{kg/m}$ . This term is usually called drag. It is related to the momentum transfer between the moving object and the fluid through which it travels. In accordance with Boyle's Law from the kinetic theory of gases, that the pressure was related to the momentum transfer between gas atoms or molecules and the walls of the surrounding container. In much the same way the drag coefficient  $c$  can be related to other quantities,

$$c = \frac{1}{2} C_D \rho A, \quad (106)$$

where  $C_D$  is a geometric factor depending on the shape of the object (equal to 1/2 for a sphere),  $\rho$  is the density of the fluid, and  $A$  the cross-sectional area of the object. The factor 1/2 is put in for convenience. In general, both terms (and others, proportional to higher powers of  $v$ ) may be present,

$$F_{\text{res}} = -bv - cv^2. \quad (107)$$

If  $v \ll 1$ , drop the second term; ignore the first term if  $v \gg 1$ .

5.2 Schematic diagram of the three-mass equivalent model of a wind turbine

A three-mass equivalent model of a wind turbine in the mechanical system is proposed as shown in Fig. 4. The first mass stands for the blades, while the second mass stands for the hub, the third mass stands for the generator including the gearbox, high-speed shafts and generator rotor [22]; where  $H_b$ ,  $H_h$ ,  $H_g$  are inertia constant of the blade, hub and generator rotor, respectively;  $D_{bh}$  damping coefficient between the blade and hub;  $D_{hg}$  damping coefficient between the hub and generator rotor,  $D_b$ ,  $D_h$ ,  $D_g$  are the damping coefficients of the blade, hub and generator, respectively;  $K_{bh}$ ,  $K_{hg}$  are the stiffness of the blade and low-speed shaft.

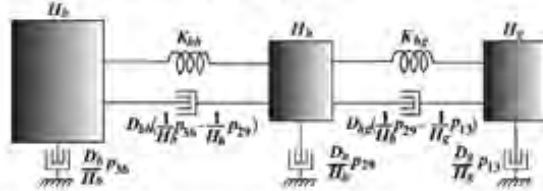


Fig. 4. Schematic diagram of the three-mass equivalent model of a wind turbine.

Considering quadratic resistance in the dissipation elements as shown in Fig. 4; where the constant  $D_s$  is  $c$  of the equation (106), this constant multiply with quadratic of the speed of this section of a wind turbine, that is because the velocities in a wind turbine are considered higher speeds, then the frictions due to these velocities are better described by a quadratic dependence on speed, as shown (106),  $\omega_b^2 = (p_1/H_b)^2$ , the same form, for each dissipation elements.

5.3 Induction machine modelled by bond graphs

The induction motor is also called as asynchronous motor because it runs at a speed less than synchronous speed. Synchronous speed is the speed of rotation of the magnetic field in a rotary machine and it depends upon the frequency and number of poles of the machine. An induction motor always runs at a speed less than synchronous speed because the rotating magnetic field which is produced in the stator will generate flux in the rotor which will make the rotor to rotate, but due to the lagging of flux current in the rotor with flux current in the stator, the rotor will never reach to its rotating magnetic field speed, the synchronous speed. There are basically two types of induction motor that depend upon the input supply - single phase induction motor and three phase induction motor. The induction machine has no independently fed excitation winding. Fig. 5 shows a scheme of a 2-pole induction machine with symmetrical 3-phase winding in both stator and rotor.

Three-phase squirrel-cage induction motors are widely used in industrial drives because they are rugged, reliable and economical. This model has proven to be correct also for squirrel-cage machines. The same modelling assumptions are made for these windings as for the synchronous machine stator winding. Magnetic isotropy (due to material isotropy and

round rotor geometry, uniform air gap, etc.) in both stator and rotor is assumed as well as magnetic linearity [20].

There is no a priori particularly preferred  $(d, q, 0)$ -coordinate system for this machine, so that the equivalent circuit presented in Fig. 6 has been obtained using Park's transformation (108) to convert stator and rotor variables, respectively, to the arbitrary reference frame shown in Fig.5.

$$\vec{i}_{dq0} = P \vec{i}_{cr} \tag{108}$$

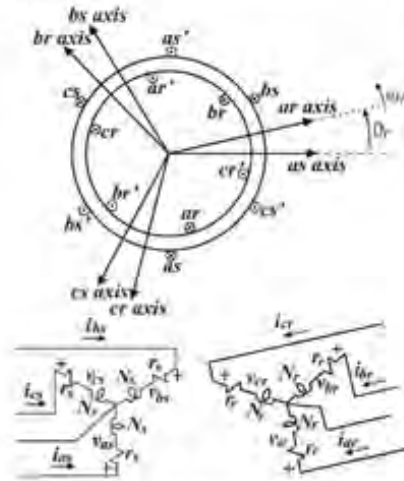


Fig. 5. Schematic of symmetrical 3-phase asynchronous.

where

$$P = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ -\sin\theta & \sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \tag{109}$$

This yields the equivalent circuit of Fig. 6, showing ports to connect any electrical systems to both stator and rotor. Because of the magnetic isotropy and uniform air gap there is a unique 3-phase mutual or magnetizing inductance  $L_M$  common to both axes  $d$  and  $q$ . The superscript  $*$  denotes rotor variables and parameters referred to the stator.

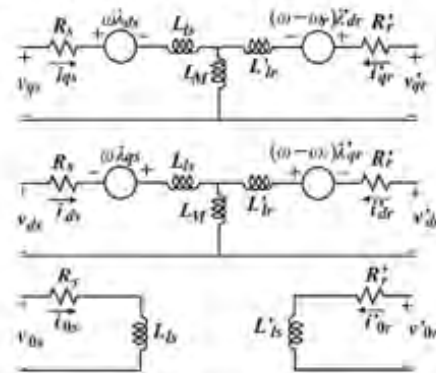


Fig. 6. Arbitrary reference-frame equivalent circuits for a 3-phase, symmetrical induction machine.

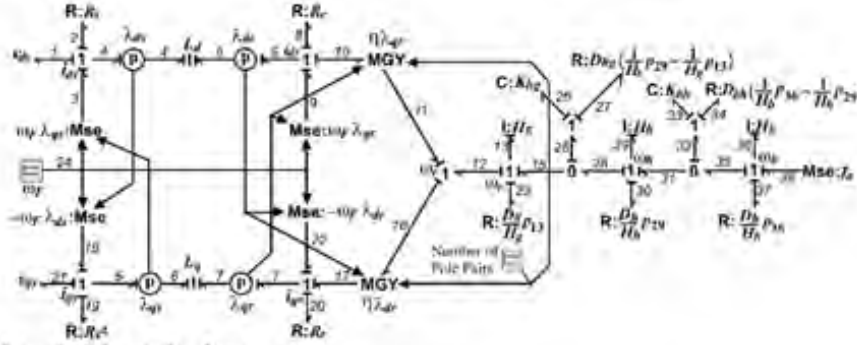


Fig. 7. Bond graph of the wind turbine.

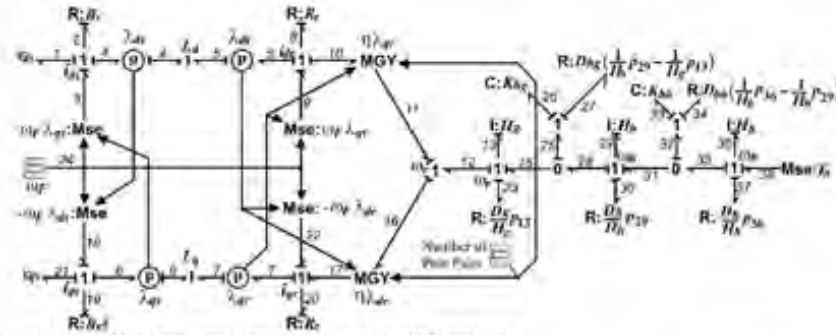


Fig. 8. Singularly perturbed nonlinear bond graph of a wind turbine.

In according with Fig. 6, we describe the bond graph model of the induction machine on d-q axis [20] with mechanical model of the wind turbine added, in Fig. 7, where we can see the stator resistor ( $R_s$ ) and the rotor resistance referred to the stator ( $R_r$ ), also we see the induction effects due to self and mutual inductance in both axes  $d$  and  $q$ , these effects are represented by  $I$ -Fields  $L_d$  and  $L_q$  respectively. This bond graph corresponds to the idealized physical system in Fig. 6, where the letter “p” inside of circle represents a detector of the states, in this case, detectors of the flux linkages into the windings.

Fig. 7 shows a singularly perturbed system in bond graph, where we can difference between fast and slow dynamics. The fast variables are flux linkages into the windings, which are represented by  $I$ -Fields  $L_d$  and  $L_q$  (bonds 4, 5, 6 and 7). The slow dynamics are angular momentum due to moment of inertia into the mass of the mechanical parts, which are represented by  $I$ -elements  $H_s$ ,  $H_b$  and  $H_r$ , also there are two more slow variables, which are the angles or displacements in the shafts between the mechanical parts represented by  $C$ -elements  $K_{sb}$  and  $K_{br}$ . In Fig 7 there are four detectors of state. These detectors only take the state values and they use their values in order to modulate the MTF’s sources, but it does not have effect over the dynamic of the system.

Because the MTF’s source are modulated by state variables, hence there are nonlinearities due a product of states in this system. The key vectors of the bond graph in an integral causality assignment with fast and slow separated dynamics are

$$D_s^1 = [I_s \quad I_r \quad I_m \quad I_w] ; D_s^2 = [I_{sb} \quad I_{br} \quad I_{ms} \quad I_{mr}] ;$$

$$D_m^1 = [e_s \quad e_r \quad e_m \quad e_w] ; D_m^2 = [e_{sb} \quad e_{br} \quad e_{ms} \quad e_{mr}] ;$$

$$u = [e_s \quad e_r \quad e_m \quad I_w] ;$$

slow dynamics are

$$x = [p_s \quad q_s \quad p_m \quad q_m \quad p_w] ; \dot{x} = [e_s \quad I_m \quad e_m \quad I_w \quad e_w] ;$$

$$z = [I_s \quad e_m \quad I_m \quad e_r \quad I_r] ;$$

and fast dynamics are

$$x_2 = [p_s \quad p_r \quad p_b \quad p_1] ; \dot{x}_2 = [e_s \quad e_m \quad e_r \quad e_1] ;$$

$$z_1 = [I_s \quad I_r \quad I_b \quad I_1] ;$$

The constitutive relations of the fields are

$$L^1 = \text{Diag}\{R_s; R_r; R_b; R_r\} ;$$

$$L^{2i}(x_1) = \text{Diag}\left\{\frac{p_s}{n_s}, p_{sb}, \frac{p_r}{n_r}, D_{sb}\left(\frac{1}{n_s} p_{sb} - \frac{1}{n_r} p_{br}\right), \frac{p_m}{n_s}, p_{mr}\right\} ;$$

$$D_{sb}\left(\frac{1}{n_s} p_{sb} - \frac{1}{n_r} p_{br}\right); \frac{p_m}{n_s}, p_{mr}\right\} ;$$

where  $L^{2i}(x_1)$  is obtained from (105), it contains the nonlinear relations given by nonlinear friction depends of square of velocity into each section of the wide turbine, according to Fig. 4.

$$F_1 = \begin{bmatrix} L_s & L_m & 0 & 0 \\ L_m & L_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_b & L_r \\ 0 & 0 & L_m & L_r \end{bmatrix} ; F_1^{-1} = \text{Diag}\{H_s; K_{sb}; H_b; K_{br}; H_r\} ;$$

From (14) we get the required submatrices of the junction structure to obtain  $A_{22}$ , which is necessary to establish internal stability of system, then

$$\begin{aligned} S_{21}^{12}(x) &= I, \quad S_{22}^{12}(x) = -I, \quad S_{21}^{22}(x) = S_{22}^{22}(x) = S_{23}^{22}(x) = \dots \\ S_{21}^{32}(x) &= S_{22}^{32}(x) = S_{23}^{32}(x) = S_{21}^{42}(x) = S_{22}^{42}(x) = 0, \end{aligned} \quad (116)$$

and, for  $A_{22}(x)$  we have

$$A_{22}(x) = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} N & 0_{2 \times 1} \\ 0_{2 \times 2} & N \end{bmatrix}, \quad (117)$$

where

$$\Delta = L_s L_s - L_s^2; \quad N = \begin{bmatrix} L_s^2 R_s - L_s L_s R_s & L_s L_s R_s - L_s L_s R_s \\ L_s L_s R_s - L_s L_s R_s & L_s^2 R_s - L_s L_s R_s \end{bmatrix}, \quad (118)$$

In the section 7, the internal stability of the SPBG substituting the machine parameters and  $A_{22}(x)$  from (117) into (52) is verified.

### 6. A QUASI-STEADY STATE MODEL OF THE INDUCTION GENERATOR AND MECHANICAL MODELS OF WIND TURBINE A BOND GRAPH APPROACH

The corresponding bond graph approach to get the quasi steady state is shown in Fig. 8. Note that, in the SPNBG (Singularly Perturbed Nonlinear Bond Graph) approach proposes that *the fast storage elements have derivative causality and the slow storage elements have integral causality*. Then, Fig. 8 assigns derivative causality to storage elements by the bonds 4, 5, 6 and 7. The storage elements with the bonds 13, 26, 29, 33 and 36 have to maintain an integral causality assignment. The key vectors of the bond graph in an integral causality assignment with fast and slow separated dynamics are

$$\begin{aligned} D^{x_s} &= [e_1 \ e_2 \ e_3 \ e_4]^T; \quad D^{x_f} = [f_1 \ f_2 \ f_3 \ f_4 \ f_5 \ f_6]^T; \\ D^{x_s} &= [f_1 \ f_2 \ f_3 \ f_4]^T; \quad D^{x_f} = [e_1 \ e_2 \ e_3 \ e_4 \ e_5 \ e_6]^T; \quad (119) \\ a &= [a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5]^T. \end{aligned}$$

and slow and fast dynamics are defined by (111) and (112) respectively. The nonlinear constitutive relations are defined by (114), the matrices  $F_1$  and  $F_2$  are defined into (115), and the linear constitutive relations of the fields are

$$L^i = \text{Diag} \left\{ \frac{1}{k}; \frac{1}{k}; \frac{1}{k}; \frac{1}{k} \right\}, \quad (120)$$

and from (63) the submatrices of the junction of the SPNBG is defined by

$$H_{21}^{12}(x) = I; \quad H_{22}^{12}(x) = -I, \quad H_{11}^{12}(x) = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} \\ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \end{bmatrix}, \quad (121)$$

$$H_{11}^{22}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad H_{22}^{22}(x) = -[H_{11}^{12}(x)]^T, \quad (122)$$

$$\begin{aligned} H_{11}^{12}(x) &= H_{11}^{22}(x) = H_{11}^{32}(x) = H_{11}^{42}(x) = H_{11}^{52}(x) = H_{11}^{62}(x) = \dots \\ H_{22}^{12}(x) &= H_{22}^{22}(x) = H_{22}^{32}(x) = H_{22}^{42}(x) = H_{22}^{52}(x) = H_{22}^{62}(x) = 0, \quad (123) \\ H_{21}^{12}(x) &= -[H_{11}^{12}(x)]^T. \end{aligned}$$

$$H_{21}^{22}(x) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad H_{21}^{32}(x) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & p_s \\ 0 & 0 & 0 & p_s \\ 0 & 1 & 0 & -p_s \\ 0 & 0 & 0 & -p_s \end{bmatrix}, \quad (124)$$

From (75) to (86), (111), (112), (115) and (119) to (124) the real roots of the algebraic equation (91) can be obtained by

$$\begin{bmatrix} \overline{p}_s \\ \overline{p}_s \\ \overline{p}_s \\ \overline{p}_s \end{bmatrix} = \frac{x}{\pi} \begin{bmatrix} -T_s \overline{p}_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -T_s \overline{p}_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ T_s \overline{p}_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ T_s \overline{p}_s & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{p}_{11} \\ \overline{q}_{22} \\ \overline{p}_{22} \\ \overline{q}_{11} \\ \overline{p}_{33} \end{bmatrix} + \quad (125)$$

$$\begin{bmatrix} -T_s & 0 & 0 & T_s \overline{p}_s + T_s \overline{p}_s \\ -T_s & 0 & 0 & T_s \overline{p}_s + T_s \overline{p}_s \\ 0 & -T_s & 0 & -T_s \overline{p}_s - T_s \overline{p}_s \\ 0 & -T_s & 0 & -T_s \overline{p}_s - T_s \overline{p}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ f_{23} \end{bmatrix},$$

where

$$T_s = \frac{1}{k}; \quad T_s = \frac{1}{k}; \quad T_s = \frac{1}{k}; \quad T_s = \frac{1}{k}. \quad (126)$$

From (62) to (73), (111), (112), (115) and (119) to (124), the quasi-steady state model is defined by

$$\begin{bmatrix} \overline{p}_{11} \\ \overline{q}_{22} \\ \overline{p}_{22} \\ \overline{q}_{11} \\ \overline{p}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -M_{11}(x) & \frac{1}{k} & -M_{11}(x) & 0 & 0 \\ -\frac{1}{k} & 0 & \frac{1}{k} & 0 & 0 \\ -M_{21}(x) & -\frac{1}{k} & -M_{21}(x) & \frac{1}{k} & M_{21}(x) \\ 0 & 0 & -\frac{1}{k} & 0 & \frac{1}{k} \\ 0 & 0 & M_{31}(x) & -\frac{1}{k} & -M_{31}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{p}_{11} \\ \overline{q}_{22} \\ \overline{p}_{22} \\ \overline{q}_{11} \\ \overline{p}_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k}(\overline{p}_1 + \overline{p}_1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ f_{23} \end{bmatrix}, \quad (127)$$

where

$$\begin{aligned} M_{11}(x) &= \frac{1}{n_s} \left[ \frac{1}{k} (\overline{p}_1^2 + \overline{p}_1^2) - D_{\kappa} \left( \frac{\overline{p}_1}{n_s} - \frac{\overline{p}_1}{n_s} \right) + \frac{n_s \overline{p}_1}{n_s} \right], \\ M_{12}(x) &= \frac{n_s}{n_s} \left( \frac{\overline{p}_1}{n_s} - \frac{\overline{p}_1}{n_s} \right), \quad M_{13}(x) = \frac{n_s}{n_s} \left( \frac{\overline{p}_1}{n_s} - \frac{\overline{p}_1}{n_s} \right), \\ M_{21}(x) &= \frac{1}{n_s} \left[ D_{\kappa} \left( \frac{\overline{p}_1}{n_s} - \frac{\overline{p}_1}{n_s} \right) - D_{\kappa} \left( \frac{\overline{p}_1}{n_s} - \frac{\overline{p}_1}{n_s} \right) + \frac{n_s \overline{p}_1}{n_s} \right], \quad (128) \\ M_{22}(x) &= \frac{n_s}{n_s} \left( \frac{\overline{p}_1}{n_s} - \frac{\overline{p}_1}{n_s} \right), \quad M_{23}(x) = \frac{n_s}{n_s} \left( \frac{\overline{p}_1}{n_s} - \frac{\overline{p}_1}{n_s} \right), \\ M_{31}(x) &= \frac{1}{n_s} \left[ D_{\kappa} \left( \frac{\overline{p}_1}{n_s} - \frac{\overline{p}_1}{n_s} \right) + \frac{n_s \overline{p}_1}{n_s} \right]. \end{aligned}$$

By solving the first, second and fourth line of (125) we have,

$$\overline{p}_s = \frac{(M_{11} \overline{p}_1) \alpha + \beta}{\rho}, \quad \overline{p}_s = \frac{\beta \delta + \rho \gamma}{\rho \kappa - \alpha \delta}, \quad (129a)$$

$$\begin{aligned} \dot{\bar{p}}_1 &= \frac{d\bar{p}_1}{dt} \left( \frac{d\bar{p}_1}{dt} \right) \bar{p}_1 - T_{11} \epsilon_{11} - \\ & \left\{ T_{11} \left[ \frac{d\bar{p}_1}{dt} \right] + T_{11} \left( \frac{d\bar{p}_1}{dt} \right) \right\} f_{11}, \end{aligned} \quad (129b)$$

where

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{d\bar{p}_1}{dt} \bar{p}_1 \left[ -\frac{d\bar{p}_1}{dt} + (2T_{11} + T_{11}) f_{11} \right] - T_{11} (T_{11} + T_{11}) f_{11}'; \\ \beta &= T_{11} T_{11} \epsilon_{11} \left( \frac{d\bar{p}_1}{dt} - f_{11} \right) - T_{11} \epsilon_{11} - T_{11} \epsilon_{11}'; \\ \gamma &= T_{11} T_{11} \epsilon_{11} \left( \frac{d\bar{p}_1}{dt} - f_{11} \right) - T_{11} \epsilon_{11} - T_{11} T_{11} f_{11} \epsilon_{11}'; \\ \kappa &= 1 + \frac{d\bar{p}_1}{dt} \left[ \frac{d\bar{p}_1}{dt} - (2T_{11} + T_{11}) f_{11} \right] + (T_{11} T_{11} + T_{11}') J_{11}'; \\ \rho &= (1 + T_{11} T_{11}) f_{11} \left( -\frac{d\bar{p}_1}{dt} + f_{11} \right) + T_{11} f_{11}'; \\ \delta &= T_{11} T_{11} f_{11} \left( \frac{d\bar{p}_1}{dt} - f_{11} \right) - T_{11} T_{11} f_{11}'. \end{aligned} \quad (130)$$

By substituting (129) into (125) and (127) the quasi steady state model of the wind turbine with induction machine is obtained.

$$\dot{\bar{p}}_1 = -M_{11}(x) \bar{p}_1 + \frac{d\bar{p}_1}{dt} M_{11}(x) \bar{p}_1 + \frac{d\bar{p}_1}{dt} (\bar{p}_1 + \bar{p}_1) f_{11}, \quad (131)$$

$$\dot{q}_{21} = \frac{d\bar{p}_1}{dt} + \frac{d\bar{p}_1}{dt}, \quad (132)$$

$$\dot{\bar{p}}_2 = -M_{21}(x) \bar{p}_2 - \frac{d\bar{p}_1}{dt} M_{21}(x) \bar{p}_2 + \frac{d\bar{p}_1}{dt} M_{21}(x) \bar{p}_2, \quad (133)$$

$$\dot{q}_{31} = -\frac{d\bar{p}_1}{dt} + \frac{d\bar{p}_1}{dt}, \quad (134)$$

$$\dot{\bar{p}}_3 = M_{31}(x) \bar{p}_3 - \frac{d\bar{p}_1}{dt} M_{31}(x) \bar{p}_3 + \epsilon_{31}, \quad (135)$$

(131) to (135) represent the quasi steady state model of slow dynamics of the wind turbine with induction machine.

The next section describes the performance of the state variables of the wind turbine connected to an induction machine.

### 7. SIMULATION RESULTS

In order to verify the quasi steady model of the complete system, simulation results are obtained. Hence, the parameters of the induction generator were obtained from the literature [31]. These parameters are given in Table 1

Table 1. Parameters of simulations for induction generator and mechanical model of the wind turbine.

$H_g = 0.089 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$	$H_b = 0.05 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$
$R_g = 0.435 \text{ } \Omega$	$H_b = 0.03 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$
$R_r = 0.816 \text{ } \Omega$	$D_{h0} = 0.4 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$
$L_g = 0.0713 \text{ H}$	$D_{b0} = 0.4 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$
$L_r = 0.0713 \text{ H}$	$D_h = 0.3 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$
$L_m = 0.0693 \text{ H}$	$D_r = 0.1 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$
$\eta = 2 \text{ pairs of poles}$	$K_{tr} = 1 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m} / \text{rad}$
$V_{nom} = 220 \text{ V}$	$K_{te} = 1 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m} / \text{rad}$
$\omega_s = 377 \text{ rad/s}$	$T_e = 100 \text{ N} \cdot \text{m}$

It is assumed that the machine is connected to a bus whose voltage and frequency remain constant, at the rated values.

This is commonly referred to as infinite bus, since its characteristics do not change regardless of the power supplied or consumed by any device connected to it. It is necessary to verify Assumption 3 given in (52), solving and substituting the parameters of the system defined above, we have

$$\text{Re} \lambda \leq \begin{bmatrix} 6.07193 & -6.69472 & 26.8801 & 26.1261 \\ 6.69472 & -7.32293 & 26.1261 & 26.8801 \\ -26.8801 & -26.1261 & 6.69472 & -6.69472 \\ 26.1261 & 26.8801 & 6.69472 & 7.32293 \end{bmatrix} \leq 0, \quad (136)$$

then the eigenvalues are  $\lambda_1 = -0.6255 + j 53.10255$ ;  $\lambda_2 = -0.6255 - j 53.10255$ ;  $\lambda_3 = 0.6255 + j 0.7547$  y  $\lambda_4 = 0.6255 - j 0.7547$ , and Assumption 3 is satisfied, then we can conclude that this singularity perturbed system has internal stability.

Fig. 9 illustrates the dynamic performance of the generator including the gearbox, high-speed shafts and generator rotor induction machine where  $p_{11}$  is the exact angular momentum and  $\bar{p}_{11}$  is the angular momentum using the quasi steady model (we divide the angular moment by storage element value in order to obtain the velocity).

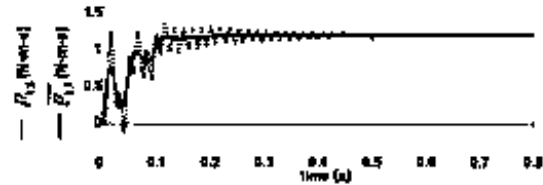


Fig. 9. Performance of the slow variable ( $p_{11}$ ) and the quasi-steady state model ( $\bar{p}_{11}$ ).

Fig. 10 shows the angular momentum of the hub and the blades of the wind turbine,  $p_{20}$  and  $p_{30}$  respectively, and their corresponding  $\bar{p}_{20}$  and  $\bar{p}_{30}$  obtained with the SPNBC.

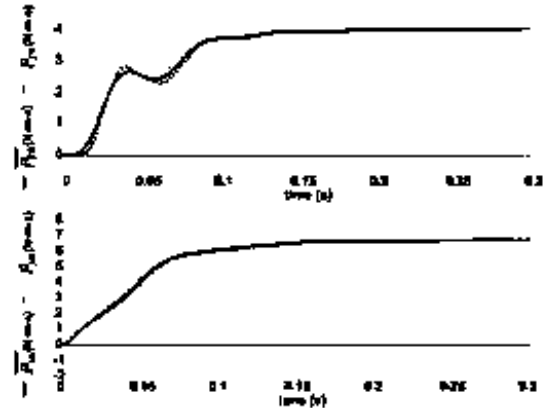


Fig. 10. Performance of the slow variables and their respective quasi-steady responses: (a)  $p_{20}$  and  $\bar{p}_{20}$ ; and (b)  $p_{30}$  and  $\bar{p}_{30}$ .

In Fig. 11 shows the oscillations of the angle  $q_{20}$  and  $q_{31}$  and their corresponding  $\bar{q}_{20}$  and  $\bar{q}_{31}$  of the quasi steady state model, respectively. The angle  $q_{20}$  is related to the connection between the generator and the hub, and  $q_{31}$  is related to the connection between the hub and the blades of the wind turbine.

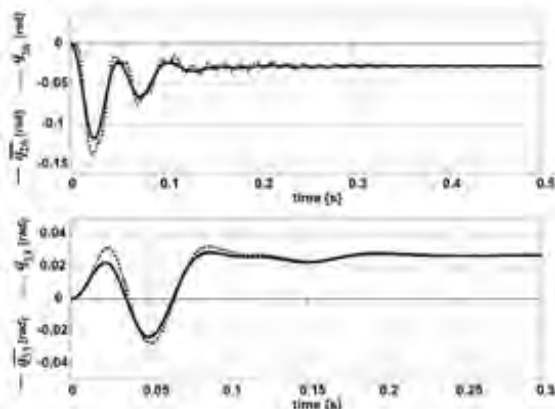


Fig. 11. Performance of the slow variables and their respective quasi steady responses: (a)  $q_{26}$  and  $\bar{q}_{26}$ ; and (b)  $q_{33}$  and  $\bar{q}_{33}$ .

It is important to know, that the proposed methodology allows getting the quasi-steady state model changing the causality to the storage elements that represents the fast states, and this proposed methodology is easy and direct and it can be extended to another class of nonlinear systems.

### 8. CONCLUSIONS

A class of nonlinear systems with singular perturbations modelled by bond graph is presented. This system is characterized by having slow and fast dynamics and the product of the state variables define the class of nonlinear systems, besides; this class of nonlinear systems considers that dissipation elements can be nonlinear functions of the slow states. A junction structure to analyse the singularly perturbed system is proposed. This junction structure has the fast storage elements in a derivative causality assignment and the slow storage elements maintain an integral causality assignment, with this the quasi-steady state model of the system can be obtained in a direct way.

The assumptions of Tikhonov Theorem have to be verified in order to use the results of this paper. The proposed methodology is applied to a wind turbine with an induction machine. Simulation results are given showing the original states performance and comparing with the quasi steady states model behaviour and these results are very close, indicating the effectiveness of the methodology.

### REFERENCES

- [1] Md. Arifujjaman, M. Tariq Iqbal, J. E. Quince and M. Jahangir Khan "Modeling and Control of A Small Wind Turbine". Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering, Saskatoon, Sask. May (2005).
- [2] L. Dasouchei, B. Massaro and E. Tofanetti "Transient Stability Simulation of a Fixed Speed Wind Turbine by Matlab/Simulink". Clean Electrical Power, ICCEP'07, Capri, Italy, May (2007).
- [3] J. G. Slootweg, H. Polinder and W. L. Kling "Dynamic Modelling of a Wind Turbine with Doubly Fed Induction Generator". Power Engineering Society Summer Meeting, Vancouver, British Columbia, Canada (2001).
- [4] R. Marino, P. Tomei and C. M. Verrelli, "Induction Motor Control Design (Advances in Industrial Control)". Springer (2011).
- [5] A. M. Trzynalowski, "Control of Induction Motors", Academic Press (2001).

- [6] P. C. Krause, "Simulation of Symmetrical Induction Machinery". IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-84, No. 11 (1965).
- [7] S.K. Sul, "Control of electric Machine Drive Systems". John Wiley & Sons (2011).
- [8] D. C. Karnopp, D. L. Margolis and R. C. Rosenberg, "System Dynamics Modeling and Simulation of Mechatronic Systems". John Wiley & Sons (2000).
- [9] P. E. Wellstead, "Physical System Modelling". Academic Press, London: (1979).
- [10] C. Sauer and G. Dauphin-Tanguy, "Bond Graph Approach for Structural Analysis of MIMO Linear Systems". Journal of the Franklin Institute, Vol. 328, No. 1, pp. 55-70 (1991).
- [11] D. S. Naidu and A. J. Calise, "Singular perturbations and time Scale in Guidance and Control of Aerospace Systems: A Survey". Journal of Guidance, control, and Dynamics, Vol. 24, No. 6, Nov-Dec (2001).
- [12] P. V. Kokotovic, H. K. Khalil and J. O'Reilly, "Singular Perturbation Methods in Control: Analysis and Design". Academic Press (1986).
- [13] H. K. Khalil, "Nonlinear systems", New Jersey, Prentice Hall, (2002)
- [14] C. Sauer and G. Dauphin-Tanguy, "Bond Graph Approach to Multi-time Scale Systems Analysis". Journal of the Franklin Institute, Vol. 328, No. 5/6, pp. 1005-1026 (1991).
- [15] G. Dauphin-Tanguy, P. Borne and M. Lebrun, "Order Reduction of Multi-Time Scale Systems Using Bond graphs, the Reciprocal System and the Singular Perturbation Method". Journal of the Franklin Institute, Vol. 319, No. 1/2, pp. 157-171, January-February (1985).
- [16] K. Srinadhna, E. F. Richards and M. D. Anderson, "The Application of Bond Graphs to Electrical Machinery and Power Engineering". IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-102, No. 5, may (1983).
- [17] C. DeForge and B. Lemaire-Semail, "Induction Machine Modeling using finite Element and Permeance Network Methods". IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 31, No. 3, May (1995).
- [18] C. Batle and A. Doria-Cerezo, "Energy-based Modelling and Simulation of the Interconnection of a Back-to-back Converter and a Doubly-fed Induction Machine".
- [19] L. I. Silva, P. M. de la Barrera, C. H. De Angelo, G. R. Bossio and G. O. Garcia, "Multi-Domain Modeling of Electric Traction Drives Using Bond Graphs: Application to Fault Diagnosis". Industrial Electronics 2009, IECON '09. 35th Annual Conference of IEEE (2009).
- [20] W. Borutzky, "Bond Graph Modelling of Engineering Systems: Theory, Application and Software Support". Chapter 8: Bond Graph Modeling and Simulation of Electrical Machines by S. Junoi and A. Dewaire, pp. 269-320, Springer (2011).
- [21] G. Gonzalez A., N. Gonzalez G., "Analysis of a Singular Perturbed Synchronous Generator with a Bond Graph Approach". World Academy of Science, Engineering and Technology, Vol: 5 2011-08-29 (2011).
- [22] H. Li and Z. Chen "Transient Stability Analysis of Wind Turbines with Induction Generators Considering Blades and Shaft Flexibility". Industrial Electronics Society, 2007. IECON 2007. 33rd Annual Conference of the IEEE, Taipei, Taiwan. November (2007).
- [23] G. Gonzalez A. and J. A. Gonzalez V., "Linear Time Varying Systems Stability: A Bond Graph Approach". The 33rd IASTED International Conference on Modelling, Identification, and Control (MIC-2014) February (2014).
- [24] A. N. Tikhonov "Systems of Differential Equations Containing a Small Parameter Multiplying the Derivative". Math. Sb., 31, 575-586 (1952).
- [25] N. Levinson "Perturbations of Discontinuous Solutions of Non-Linear Systems of Differential Equations". Acta Math., 82, 71-106 (1950).
- [26] A. B. Vasil'eva "Singularly Perturbed Systems with an Indeterminacy in their Degenerate Equations". J. Diff. Eqns., 12, 1227-1235 (1976).
- [27] W. Wasow "Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations". Wiley Interscience, New York (1965).
- [28] R. E. Mailey "The Singularly Perturbed Linear State Regulator Problem". SIAM J. Control, 10, 399-413 (1972).
- [29] G.K. Batchelor "An Introduction to Fluid Dynamics". Cambridge University Press, (1967).
- [30] A. P. French "Newtonian Mechanics (The M.I.T. Introductory Physics Series)" (1st ed). W. W. Norton & Company Inc. New York (1970).
- [31] P. C. Krause, O. Wasyneck and S. D. Sudhoff, "Analysis of Electric Machinery and Drive Systems" Second Edition. John Wiley & Sons (2002).

## STEADY STATE OF A SYNCHRONOUS MACHINE IN A BOND GRAPH APPROACH

J. Aarón Padilla<sup>1</sup>, González-A Gilbeto<sup>2</sup>  
<sup>1</sup>joscuaroup@gmail.com, <sup>2</sup>gilnichga@yahoo.com.mx  
 University of Michoacan, Faculty of Electrical Engineering  
 Mexico

### Abstract

The determination of the steady state of nonlinear systems can be relatively difficult, especially when a considered nonlinear system has many dynamics, there are many iterative process solving this problem numerically as the Newton-Raphson method, this type of process can have a heavy work computationally speaking. The utilization of the bond graph technique is with the purpose to reduce the order of the system. The first step is to obtain a Bond Graph in an integral causality assignment (BGI) then a Bond Graph in a derivative causality assignment (BGD) can be gotten. Hence, the BGD will be less complex by solving with any iterative process. A methodology and a new junction structure to get the steady state of a class of nonlinear systems are proposed. This junction structure will have the storage elements in a derivative causality assignment. The proposed methodology is applied to a synchronous machine.

**Keywords:** Bond graph, Steady state, Synchronous machine, Newton-Raphson iterative method.

### 1 Introduction

Bond graph proposes a generalized approach to modelling, which unifies physical systems of all energy domains. A structured approach is to analyze the system in terms of its constituent parts, within a defined system boundary (a frame). This process requires the modeler to abstract the model to a structure of interacting sub-models in a hierarchical manner until at the lowest level, each sub-model consists of a structure of elementary component behaviors (expressed as constitutive relations) [1].

The steady state condition of a system is when the system has a dynamic equilibrium. Another definition of the steady state (also called equilibrium state or stationary state) of a system, is that the state of system where all time derivatives of the state variables are zero in the absence of time varying disturbances. This definition of the steady state does not exclude

stationary processes sustained by constant sources [5].

In the linear case, the former steady state condition can be formulated in terms of the system equations

$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + B\vec{u}(t)$  by  $\dot{\vec{x}}(t) = 0$ . In [6] Isidory and Byues introduced the steady state for nonlinear systems. The steady state for nonlinear systems with exogenous inputs which can be unstable is described in [7].

In [8] examines the steady-state analysis and performance of an isolated three-phase self-excited induction generator drive by regulated and unregulated turbine. In [9] describes a nonlinear circuit reduction algorithm for finding the steady-state response. In [10] reviews the most important aspects of time-domain steady-state analysis for nonlinear electrical systems. A program for computing steady-state behavior for a non-linear circuit with periodic inputs is described in [11].

An algorithm is presented which enables one to determine the nature of the equilibrium state of a system with constant inputs by direct inspection of its bond graph representation [5]. In [2] a single and direct graphical procedure to get the steady state value of a physical system represented in bond graph is presented. In order to get this objective an inverse matrix is required. Nevertheless, this procedure describes that a bond graph in a derivative causality assignment permits to obtain the inverse matrix from the corresponding bond graph in an integral causality assignment.

Therefore, the main contribution of this paper is to obtain the steady state for a class of nonlinear systems based on a bond graph model. This result is an extension of the proposed methodology in [2]. The class of nonlinear systems designed as states product is used in this paper. In electrical machines and manipulators, this class of nonlinear systems can be found.

Synchronous generators form the principal source of electric energy in power systems. Many large loads are driven by synchronous motors. The modelling and analysis of the synchronous machine has always been a challenge [3, 4]. A mathematical model for a syn-

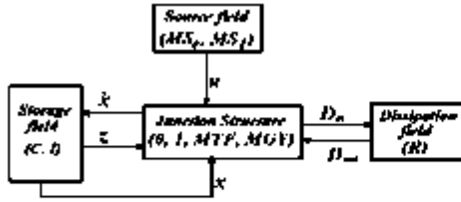


Figure 1: Key vectors of the BGI

chronous machine of using in stability computations and state-space formulation of the machine equations is used in [12]. [3] develops in detail the mathematical model of a synchronous machine and describes the steady-state and transient performance characteristics. Also, [13] summarizes some recent results in the area of the synchronous machine modeling using equivalent circuits. The transfer function block diagram model of a generator based on a standard, widely used and accepted representation, which includes field and one damper windings along the d-axis and two damper windings along the q-axis is presented in [14]. In addition, there are some literature where the synchronous machine has been modelled by bond graphs [15, 16].

Section 2 describes the modelling in bond graph for a class of nonlinear systems. The steady state for a class of nonlinear systems with a bond graph approach is presented in section 3. In section 4, the proposed methodology to a synchronous machine is applied and the simulation results. Finally, section 6 gives our conclusions.

## 2 Modeling in Bond Graph

Consider the following scheme of a Bond Graph model in an Integral causality assignment (BGI) for a system which includes the key vectors of Fig. 1.

The effort and flow sources ( $MS_s, MS_f$ ), storage field ( $C(t), I(t)$ ), dissipation field  $R(t)$  and detectors are described in Fig. 1. Also, the junction structure ( $0, I, MTF, MGY$ ) represented by 0 and I junctions, and transformer and gyrators modulated by state variables ( $MTF, MGY$ ) are found.

The energy variables  $p(t)$  and  $q(t)$  associated with  $I(t)$  and  $C(t)$  elements in an integral causality assignment represent the state vector  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ;  $z(t) \in \mathbb{R}^n$  corresponds to the co-energy state variables in an integral causality assignments;  $u(t) \in \mathbb{R}^p$  denotes the system inputs;  $D_{in}(t) \in \mathbb{R}^r$  and  $D_{out}(t) \in \mathbb{R}^r$  denote the relation between the dissipation field and the junction structure. The feedback between the storage field and the junction structure is introduced by  $MTF$  or/and  $MGY$  elements.

In this paper, the class of nonlinear systems is the states product. Hence, the relations of the storage and dissipation fields are linear. These relations are described by

$$z(t) = Fx(t) \quad (1)$$

$$D_{out}(t) = LD_{in}(t) \quad (2)$$

The relations of the junction structure are

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ D_{in}(t) \end{bmatrix} = S(x) \begin{bmatrix} z(t) \\ D_{out}(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (3)$$

where the junction structure is given by

$$S(x) = \begin{bmatrix} S_{11}(x) & S_{12}(x) & S_{13}(x) \\ S_{21}(x) & S_{22}(x) & S_{23}(x) \end{bmatrix} \quad (4)$$

The parameters of  $S(x)$  are inside the set  $\{0, \pm 1, \pm k_t(x), \pm k_g(x)\}$  where  $k_t(x)$  and  $k_g(x)$  are transformer and gyrator modules which can be modulated by state variables associated with  $I$  and/or  $C$  elements in an integral causality assignment. The power-conservation conditions consider:  $S_{11}(x)$  and  $S_{22}(x)$  are square skew-symmetric matrices and  $S_{12}(x) = -S_{21}^T(x)$ .

The state equation for this class of nonlinear systems is

$$\dot{x}(t) = A(x)x(t) + B(x)u(t) \quad (5)$$

where

$$A(x) = E^{-1}(x)[S_{11}(x) - S_{12}(x)M(x)S_{21}(x)]F \quad (6)$$

$$B(x) = E^{-1}(x)[S_{13}(x) - S_{12}(x)M(x)S_{23}(x)] \quad (7)$$

being

$$M(x) = [I - LS_{22}(x)]^{-1}L \quad (8)$$

$$E(x) = I + S_{11}(x)F_d^{-1}S_{11}(x)^T F \quad (9)$$

The important assumptions for this paper are the following

1. The matrix  $M(x)$  has to be nonsingular. Many systems represented in bond graphs do not have algebraic loops where  $S_{22}(x) = 0$  and these cases  $M(x)$  will be nonsingular.
2. The matrix  $E(x)$  has to be nonsingular. It is very common that the causal relations between the storage elements in an integral causality and derivative causality assignments, respectively have gains, which are constants and these cases  $E(x)$  will be nonsingular.
3. The system is stable in order to determine the steady state response.

In the next section, the steady state response for a class of nonlinear systems represented by a bond graph model is proposed.

### 3 Steady State of a Class of Nonlinear Systems Modelled by Bond Graphs

The response of the steady state is useful to know the value that reaches each state variable of the system when the dynamic period has finished. The properties of a bond graph model in a derivative causality assignment are described in the following Lemma.

**Lemma.** *Let a bond graph model of a class of nonlinear systems of states product with a preferred derivative causality assignment of Fig. 2, a junction structure matrix  $J(x)$  is defined by*

$$\begin{bmatrix} z(t) \\ D_{in}^d(t) \end{bmatrix} = J(x) \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ D_{out}^d(t) \end{bmatrix} \quad (10)$$

where

$$J(x) = \begin{bmatrix} J_{11}(x) & J_{12}(x) & J_{13}(x) \\ J_{21}(x) & J_{22}(x) & J_{23}(x) \end{bmatrix} \quad (11)$$

with

$$D_{out}^d = L_d D_{in}^d(t) \quad (12)$$

The entries of  $J(x)$  take values inside the set  $\{0, \pm 1, \pm l_i(x), \pm l_q(x)\}$  where  $l_i(x)$  and  $l_q(x)$  are transformer and gyrator modules for the class of nonlinear systems of this paper; these modules are  $p(t)$  and/or  $q(t)$  associated with  $I$  and/or  $C$  elements in derivative causality, respectively.

Then a mathematical model considering the constitutive relations given by (1) and (12) is given by

$$z(t) = A^*(x) \dot{x}(t) + B^*(x) u(t) \quad (13)$$

where

$$A^*(x) = J_{11}(x) + J_{12}(x)N(x)J_{21}(x) \quad (14)$$

$$B^*(x) = J_{13}(x) + J_{12}(x)N(x)J_{23}(x) \quad (15)$$

bring

$$N(x) = [I - L_d J_{22}(x)]^{-1} L_d \quad (16)$$

Moreover, suppose that  $A^*(x)$  is invertible, the steady state response is defined by

$$z_{ss} = B^*(x) u_{ss} \quad (17)$$

using (1) we obtain

$$x_{ss} = F^{-1} B^*(x) u_{ss} \quad (18)$$

**Proof.** In the BGD, from the second line of (10) we have

$$D_{in}^d(t) = [I - L_d J_{22}(x)]^{-1} [J_{21}(x) \dot{x}(t) - J_{23}(x) u(t)] \quad (19)$$

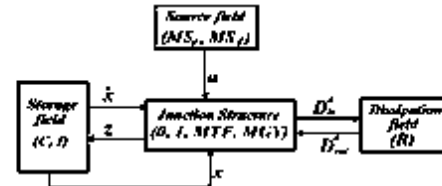


Figure 2: Junction structure of a BGD.

by substituting (19) into the first line of (10) and using (1)

$$\dot{x}(t) = [J_{11}(x) - J_{12}(x)N(x)J_{21}(x)] \dot{x}(t) - [J_{13}(x) - J_{12}(x)N(x)J_{23}(x)] u(t) \quad (20)$$

and the result (19) follows. The steady state response for (5) is

$$x_{ss} = -A^{-1}(x) B(x) u_{ss} \quad (21)$$

where  $x_{ss}$  and  $u_{ss}$  are the steady state of the state variables and the input, respectively; and considering  $A(x)$  as a nonsingular matrix. From (13) we have

$$\dot{x}(t) = [A^*(x)]^{-1} z(t) - [A^*(x)]^{-1} B^*(x) u(t) \quad (22)$$

and the relationships between the BGF and BGD are

$$A^*(x) = FA^{-1}(x) \quad (23)$$

$$B^*(x) = -FA^{-1}(x)B(x) \quad (24)$$

the steady state using (21) can be determined.

In general,  $B^*(x)$  of (18) can have state variables then in order to solve (18) the Newton-Raphson method is used. Methods such as the bisection method and the false position method of finding roots of a nonlinear equation  $f(x) = 0$  require bracketing of the root by two guesses. Such methods are called bracketing methods. These methods are always convergent since they are based on reducing the interval between the two guesses so as to zero in on the root of the equation [17]. In Newton-Raphson method, the root is not bracketed. In fact, only one initial guess of the root is needed to get the iterative process started to find the root of an equation. The method hence falls in the category of open methods. Convergence in open methods is not guaranteed but if the method does converge, it does so much faster than the bracketing methods.

The Newton-Raphson method is based on the principle that if the initial guess of the root of  $f(x) = 0$  is at  $x_i$ , then if one draws the tangent to the curve at  $f(x_i)$ , the point  $x_{i+1}$  where the tangent crosses the  $x$ -axis is an improved estimate of the root. Using the definition of the slope of a function, at  $x = x_i$

$$f'(x_i) = \tan \theta = \frac{f(x_i) - 0}{x_i - x_{i+1}} \quad (25)$$

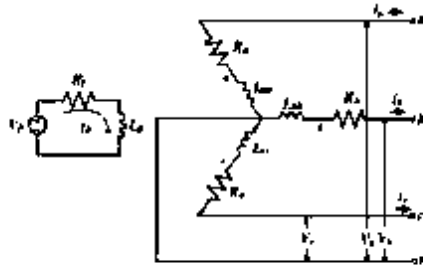


Figure 3: Schematic diagram of a synchronous machine.

which gives

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad (26)$$

Equation (26) is called the Newton-Raphson formula for solving nonlinear equations of the form  $f(x) = 0$ . So starting with an initial guess,  $x_1$ , one can find the next guess,  $x_{i+1}$ , by using Equation (26). One can repeat this process until one finds the root within a desirable tolerance [17]. Natural extension of the Newton-Raphson method to solve a nonlinear equation system of the type  $F(x) = 0$ , with  $x \in \mathbb{R}^n$  and  $F = (F_1, F_2, \dots, F_n)$ , that is,  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , consists in build a succession of vectors by the next iterative process

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - J^{-1}(x^{(k)}) F(x^{(k)}) \quad (27)$$

where  $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \in \mathbb{R}^n$  and  $J^{-1}(x^{(k)})$  is the Jacobian matrix of  $F$ , that matrix is building by partial derivatives [17],

$$J^{-1}(x^{(k)}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1(x^{(k)})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1(x^{(k)})}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n(x^{(k)})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_n(x^{(k)})}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (28)$$

then applying the Newton-Raphson method, (21) is proved. ■

In the next section, the methodology to obtain the steady state for a synchronous machine represented in bond graph is applied.

## 4 A Bond Graph Model of a Synchronous Machine

Consider the representation of a synchronous machine of Fig. 3 [3].

In Fig. 3, we can identify the following elements:

- $a, b, c$ : stator phase windings.  $i_a, i_b, i_c$  denote the stator phase currents;  $V_a, V_b, V_c$  denote the stator phase voltages;  $R_a, R_b, R_c$  denote the stator phase resistances and  $L_{aa}, L_{bb}, L_{cc}$  denote the stator phase self inductances.
- $F$ : field winding with  $i_F$  and  $V_F$  denote the field current and voltage, respectively;  $R_F$  denotes the field resistance and  $L_F$  denotes the field self inductance.

The synchronous generator of Fig. 3 is represented by six windings, which are magnetically coupled. The magnetic coupling between the windings is a function of the rotor position. The instantaneous terminal voltage  $v$  of any winding is in the form,

$$v = r \dot{q} + \dot{\lambda} \quad (29)$$

where  $\lambda$  is the flux linkage,  $r$  is the winding resistance and  $\dot{q}$  is the current with positive directions of stator currents flowing out of the generator terminals.

A great simplification in the mathematical description of the synchronous machine is obtained from the Park's transformation. The effect of Park's transformation is to transform all stator quantities from phases  $a, b$  and  $c$  into new variables the frame of reference of which moves with the rotor. Thus by definition [12]

$$i_{dq} = P i_{abc} \quad (30)$$

where the current vectors are defined as

$$i_{abc} = \begin{bmatrix} i_a & i_b & i_c \end{bmatrix}^T \quad (31)$$

$$i_{dq} = \begin{bmatrix} i_d & i_q & i_0 \end{bmatrix}^T \quad (32)$$

and the Park's transformation is

$$P = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ \cos\theta & \cos(\theta - 2\pi/3) & \cos(\theta + 2\pi/3) \\ \sin\theta & \sin(\theta - 2\pi/3) & \sin(\theta + 2\pi/3) \end{bmatrix} \quad (33)$$

The angle between the  $d$  axis and the rotor is given by

$$\theta = \omega_R t + \delta + \pi/2 \quad (34)$$

where  $\omega_R$  is the rated angular frequency in rad/s and  $\delta$  is the synchronous torque angle in electrical radians.

Similarly, to transform the voltages and flux linkages,

$$v_{dq} = P v_{abc} \quad (35)$$

$$\lambda_{dq} = P \lambda_{abc} \quad (36)$$

In according with Fig. 3, a bond graph model of the synchronous machine on  $d$ - $q$  axis is shown in Fig. 4.

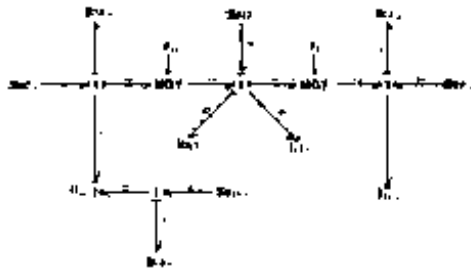


Figure 4: BGD of the synchronous machine.

The key vectors of the BGD are

$$x = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix}; \dot{x} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}; D_{int} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_{12} \\ L_{21} \end{bmatrix}$$

$$z = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{bmatrix}; D_{ext} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_{12} \\ L_{21} \end{bmatrix}; \theta = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_{12} \\ c_{21} \end{bmatrix} \quad (37)$$

the constitutive relations of the fields are

$$L = \text{diag}\{R_d, R_f, R_q, D\} \quad (38)$$

$$F^{-1} = \text{diag}\{M_d, L_q, T_f\} \quad (39)$$

where

$$M_{dB} = \begin{bmatrix} L_d & M \\ M & L_f \end{bmatrix} \quad (40)$$

and the junction structure is

$$S_{11}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -p_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{21} \\ p_{11} & 0 & -p_{21} & 0 \end{bmatrix}; S_{22} = -I_4$$

$$S_{13} = S_{21} = I_1; S_{22} = S_{23} = 0_{4 \times 1} \quad (41)$$

Note that, the submatrices  $S_{12}$ ,  $S_{21}$ ,  $S_{13}$ ,  $S_{22}$ , and  $S_{23}$  are constant matrices, and  $S_{11}(x)$  is a submatrix in terms of  $x$ . From (8) to (10) and (38) to (41) the state space representation is

$$A(x) = \begin{bmatrix} -\frac{L_1 R_d}{\Delta} & \frac{M R_d}{\Delta} & 0 & -\frac{v_f}{T_f} \\ \frac{M R_d}{\Delta} & -\frac{L_2 R_d}{\Delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{R_q}{L_q} & \frac{v_2}{T_f} \\ \frac{L_2 p_{11}}{\Delta} & -\frac{M p_{11}}{\Delta} & -\frac{L_2}{L_q} & -\frac{p_1}{T_f} \end{bmatrix}$$

$$B = I_4 \quad (42)$$

where

$$\Delta = L_1 L_q - M^2 \quad (43)$$

The corresponding bond graph to get the steady state is shown in Fig. 5. Note that all the storage elements have a derivative causality assignment.

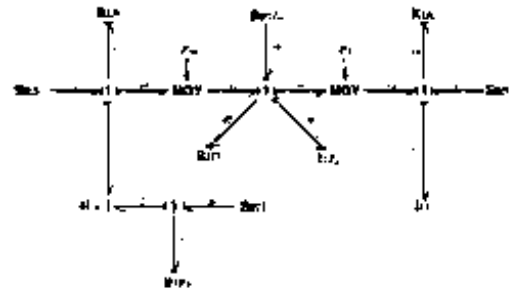


Figure 5: BGD of the synchronous machine.

The key vectors of the BGD are

$$D'_{int} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_{12} \\ L_{21} \end{bmatrix}; D'_{ext} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_{12} \\ L_{21} \end{bmatrix}; \theta = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_{12} \\ c_{21} \end{bmatrix} \quad (44)$$

the constitutive relation is

$$L_d = \text{diag}\left\{\frac{1}{R_d}, \frac{1}{R_f}, \frac{1}{R_q}, \frac{1}{D}\right\} \quad (45)$$

The junction structure of the BGD is

$$S_{22}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -p_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{21} \\ p_{11} & 0 & -p_{21} & 0 \end{bmatrix}; S_{21} = -I_4$$

$$S_{12} = S_{22} = I_2; S_{13} = S_{23} = 0_{1 \times 1} \quad (46)$$

From (45), (46) and (46) to (46) we can get the  $B^*(x)$  matrix in order to obtain the steady state of a machine then

$$B^*(x) = \begin{bmatrix} \frac{L_1 + D R_d}{\Psi(x)} & 0 & \frac{v_2 p_{11}}{\Psi(x)} & -\frac{R_d p_{11}}{\Psi(x)} \\ 0 & \frac{1}{R_f} & 0 & 0 \\ \frac{R_d p_{11}}{\Psi(x)} & 0 & \frac{v_2 + D R_d}{\Psi(x)} & \frac{L_q p_{11}}{\Psi(x)} \\ \frac{R_d p_{11}}{\Psi(x)} & 0 & -\frac{R_d p_{11}}{\Psi(x)} & \frac{R_d R_q}{\Psi(x)} \end{bmatrix} \quad (47)$$

where

$$\Psi(x) = R_d p_{11}^2 + R_q p_{11} + D R_d R_q \quad (48)$$

by substituting (44), (47) and (48) into (18) the steady state of the system is

$$\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix}_{ss} = \begin{bmatrix} \frac{M v_2}{R_q} + \frac{L_1 v_2 c_1 + v_1 p_{11} p_{12} - R_d v_2 p_{11}}{R_q} \\ \frac{L_2 v_2}{R_q} + \frac{M(\delta_1 p_{11} + v_1 p_{11} p_{12}) - R_d v_2 p_{11}}{R_q} \\ \frac{L_2 \delta_2 v_2 p_{11} + (v_1 p_{11} + R_d v_2 p_{11})}{R_q p_{11}^2 + R_d p_{11} + D R_d R_q} \\ \frac{L_2 R_d v_2 p_{11} - R_d v_2 p_{11} + R_d R_q v_2}{R_q p_{11}^2 + R_d p_{11} + D R_d R_q} \end{bmatrix} \quad (49)$$

where  $\delta_1 = p_{11}^2 + D R_d$  and  $\delta_2 = p_{11}^2 + D R_d$ .

By applying Newton-Raphson Method to (49). The first step of Newton-Raphson method is make  $F$  equal to zero in order to obtain  $F_1, F_2, \dots, F_n$

$$F = \begin{bmatrix} F_1 = p_1 - \frac{M \omega_m}{H_T} - \frac{L_d \delta \omega_r + c_{12} p_{11} \omega_r + H_d \omega_r p_{11}}{R_d \omega_r^2 + H_d \omega_r^2 + H_d H_T} \\ F_2 = p_2 - \frac{L_d \omega_r}{H_T} - \frac{M \omega_r (\omega_r + c_{12} p_{11}) + H_d \omega_r p_{11}}{H_d \omega_r^2 + H_d \omega_r^2 + H_d H_T} \\ F_3 = p_{11} - \frac{L_d \omega_r c_{12} + c_{12} p_{11} \omega_r + H_d \omega_r p_{11}}{H_d \omega_r^2 + H_d \omega_r^2 + H_d H_T} \\ F_4 = p_{12} - \frac{T_d H_d \omega_r p_{11} - H_d \omega_r p_{11} + H_d H_T p_{11}}{H_d \omega_r^2 + H_d \omega_r^2 + H_d H_T} \end{bmatrix} \quad (50)$$

Then finding  $F'(x^{(k)})$  for (27) that is, the Jacobian matrix of (49) is

$$F'(x^{(k)}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1(x)}{\partial p_1} & 0 & \frac{\partial F_1(x)}{\partial p_{11}} & 0 \\ \frac{\partial F_2(x)}{\partial p_1} & 1 & \frac{\partial F_2(x)}{\partial p_{11}} & 0 \\ \frac{\partial F_3(x)}{\partial p_1} & 0 & \frac{\partial F_3(x)}{\partial p_{11}} & 0 \\ \frac{\partial F_4(x)}{\partial p_1} & 0 & \frac{\partial F_4(x)}{\partial p_{11}} & 1 \end{bmatrix} \quad (51)$$

where of the first column

$$\frac{\partial F_1(x)}{\partial p_1} = 1 - \frac{L_d (2H_d + c_{12} p_{11}) + H_d c_{12} p_{11} + H_d c_{12} p_{11} p_{11}}{\Gamma} - \frac{L_d (R_d c_{12} p_{11}^2 + H_d H_d c_{12} p_{11})}{\Gamma} \quad (52)$$

$$\frac{\partial F_2(x)}{\partial p_1} = \frac{M H_d (2H_d c_{12} p_{11} + H_d (R_d c_{12} + c_{12} p_{11}^2)) p_{11}}{\Gamma} - \frac{M H_d (2c_{12} p_{11}^2 + c_{12} p_{11}^2 + H_d c_{12} p_{11})}{\Gamma} \quad (53)$$

$$\frac{\partial F_3(x)}{\partial p_1} = \frac{L_d H_d (1 - H_d p_{11} - c_{12} p_{11}) p_{11}^2 - (R_d c_{12} + 2c_{12} p_{11} H_d^2)}{\Gamma} - \frac{D L_d H_d (H_d c_{12} p_{11} + 2H_d c_{12} p_{11} - H_d H_d c_{12} p_{11})}{\Gamma} \quad (54)$$

$$\frac{\partial F_4(x)}{\partial p_1} = \frac{T_d H_d (R_d c_{12} p_{11}^2 + H_d c_{12} p_{11}^2 + H_d H_d c_{12} p_{11})}{\Gamma} - \frac{2T_d H_d H_d c_{12} p_{11} + H_d c_{12} p_{11}}{\Gamma} \quad (55)$$

and the third column

$$\frac{\partial F_1(x)}{\partial p_{11}} = \frac{L_d R_d (-2c_{12} p_{11}^2 - 2M H_d c_{11} + c_{12} p_{11} p_{11}) p_{11} + L_d H_d^2 c_{12} p_{11}^2}{\Gamma} \quad (56)$$

$$\frac{\partial F_2(x)}{\partial p_{11}} = \frac{L_d H_d (c_{12} (p_{11}^2 - H_d p_{11}) p_{11} - H_d (p_{11}^2 - H_d H_d) c_{12})}{\Gamma} \quad (57)$$

$$\frac{\partial F_3(x)}{\partial p_{11}} = \frac{M H_d (H_d (-2D c_{11} - 2D c_{12} p_{11} - c_{12} p_{11}) - 2c_{12} p_{11}^2) p_{11}}{\Gamma} - \frac{M H_d (c_{12} p_{11}^2 - H_d (D c_{12} p_{11} + c_{12} p_{11}^2) - H_d H_d c_{12} p_{11})}{\Gamma} \quad (58)$$

$$\frac{\partial F_4(x)}{\partial p_{11}} = 1 - \frac{L_d (2H_d c_{12} p_{11}^2 + H_d c_{12} p_{11} + 2H_d H_d c_{12} p_{11}) p_{11}}{\Gamma} - \frac{H_d c_{11} (L_d p_{11}^2 - H_d H_d) p_{11}}{\Gamma} \quad (59)$$

$$\frac{\partial F_4(x)}{\partial p_{11}} = 1 - \frac{T_d [2H_d H_d c_{12} p_{11} + H_d^2 (c_{12} p_{11} + 2H_d c_{12} p_{11})] p_{11}}{\Gamma} - \frac{T_d H_d H_d (c_{12} p_{11}^2 + H_d H_d c_{12} p_{11})}{\Gamma} \quad (60)$$

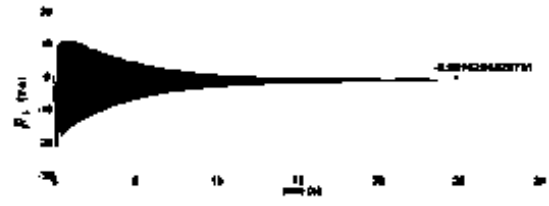


Figure 6: Flux linkage  $p_1$  in  $L_d$  and steady state.

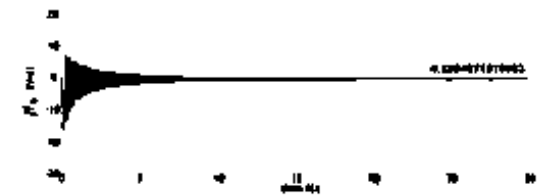


Figure 7: Flux linkage  $p_2$  in  $L_q$  and steady state.

being

$$\Gamma = (R_d p_1^2 + H_d p_{11}^2 + H_d H_d p_{11})^2 \quad (60)$$

Finally, by substituting (51) to (60) into (49) we can solve (49).

In order to verify the steady state of a synchronous machine, the performance of the variables is shown in Fig. 6 to 9, where the numeric parameters are:  $T_d = 2.87N = \omega^2/\omega$ ,  $R_d = 0.11\Omega$ ,  $R_q = 0.11\Omega$ ,  $D = 3N = \omega/\omega$ ,  $L_d = 4.7H$ ,  $L_q = 1.61H$ ,  $M = 1.55H$ ,  $H_T = 115$ ,  $c_{11} = -0.1051$ ,  $c_{12} = 301$ ,  $c_{13} = 165.271$  and  $c_{14} = 100N$ .

Using Newton-Raphson method in (49), after five iterations, we have

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_{11} \\ p_{12} \end{bmatrix}_{ss} = \begin{bmatrix} -0.9910254822747 \text{ V-}\omega \\ -0.2584071910579 \text{ V-}\omega \\ 0.0012119713164 \text{ V-}\omega \\ 394.9976395895742 \text{ N-DT-}\omega \end{bmatrix}_{ss} \quad (61)$$

if we compare the results obtained (61) by Newton-

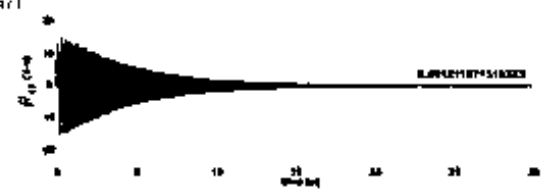


Figure 8: Flux linkage  $p_{11}$  in  $L_q$  and steady state.

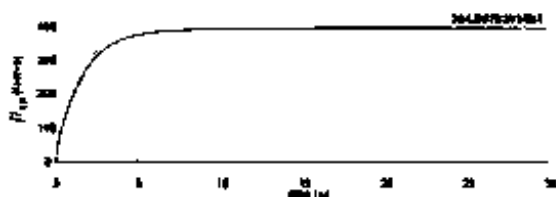


Figure 9: Angular momentum  $p_{12}$  (in J) and steady-state.

Raphson method, the relative errors are

$$\begin{bmatrix} \text{relative error of } p_{11} \\ \text{relative error of } p_{12} \\ \text{relative error of } p_{13} \\ \text{relative error of } p_{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.00000005\% \\ -0.00000000\% \\ 0.0000079\% \\ -0.0000079\% \end{bmatrix} \quad (92)$$

We can see that the relative errors are relatively small.

### 5 Conclusions

A class of nonlinear system modelled by bond graph is presented. The state variables product is the class of nonlinear systems described in this paper. In order to obtain the steady state of the nonlinear systems, a bond graph in a derivative causality assignment is proposed. The proposed methodology to determine the steady state to a synchronous machine is applied. The Newton-Raphson method is applied to solve the nonlinear equations system. The bond graph models to analyze nonlinear systems can be used.

### References

[1] P. Gawthrop, I. Smith, *Mathematical Models for Bond Graphs and Dynamic Systems*, Prentice Hall, UK, 1996.

[2] Gonzalez-A Giliberto, René Galindo, *Steady-State Values for a Physical System with Bond Graph Approach*, 9th IEEE International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics, pp. 25-28, Miedzyzdroje, Poland 2003.

[3] P. Kundur, *Power System Stability and Control*, McGraw-Hill, USA 1994.

[4] H. Hoshlyar, M. Savaghebi, and A. Vahedi, *Synchronous Generators: Past, Present and Future*, IEEE conference AFRICON, Windhoek, Republic of Namibia 2007.

[5] Bredfeld P.C. (1981), A Bond Graph Algorithm to Determine the Equilibrium State of a System,

*Journal of the Franklin Institute*, vol. 318, No. 2, pp.71-75, 1981.

[6] A. Isidori and C.I. Byrnes, Output Regulation of Nonlinear Systems, *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 35, no. 2, pp. 131-135, 1990.

[7] Xia X. and Jiangfeng Zhang, *Steady States of Nonlinear Systems*, Proceedings of IEEE International Conference on Control and Automation, pp. 1525-1530, Guangzhou, China, 2007.

[8] S. M. Aljwainem, Steady-State analysis of an isolated self-excited induction generator driven by regulated and unregulated turbine, *IEEE Transactions on Energy Conversion*, Vol. 11, No. 3, pp. 718-723, 1999.

[9] E. Gdud, R. Kluzszko, M. S. Nakhla and H. Grifflich, A Circuit Reduction Technique for finding the steady-state solution of Nonlinear Circuits, *IEEE Transactions on microwave theory and techniques*, vol. 48, No. 12, pp. 2389-2399, 2000.

[10] S. Skelboe, Time-Domain Steady-State Analysis of Nonlinear Electrical Systems, *Proceedings of the IEEE*, Vol. 70, No. 10, pp. 1210-1228, 1982.

[11] D. D'Amore and M. Santamaria, Steady state analysis of non-linear circuits using SPICE, *International Symposium on Circuits and Systems*, pp. 2733-2736, 1991.

[12] P. M. Anderson, *Power System Control and Stability*, The IOWA State University Press, 1977.

[13] I. Katowa, R. Wankene, X. Dai-Du, General Approaches to Efficient (a) Simulation and Model Translation for Synchronous Machines: a Recap, *Electric Power Systems Research*, Vol. 42, pp. 173-190, 1997.

[14] M. Saïdy and F. M. Hughes, An Extended Block Diagram Transfer Function Model of a Synchronous Machine, *Electric Power & Energy Systems*, vol 18, No. 2 pp. 135-142, 1996.

[15] Dietrich Sahn, A Two-Axis Bond Graph Model of the Dynamics of Synchronous Electrical Machine, *Journal of the Franklin Institute*, vol. 308, No. 3, pp.205-218, 1979.

[16] Ephraïm J. Brown, *Engineering System Dynamics: A Unified Graph-Centered Approach*, Second edition, Taylor and Francis Group, USA 2007.

[17] Antar K. Kaw, Egun E. Kalu and Due Ngyuen, *Numerical Methods with Applications*, Second Edition, Abridged, 2011.