



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE
SAN NICOLAS DE HIDALGO

INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS



**MODELOS COSMOLÓGICOS DE ENERGÍA OSCURA
INTERACTUANTE CON MATERIA OSCURA**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS EN EL ÁREA DE FÍSICA

PRESENTA:

PATROCINIO PÉREZ PÉREZ

Director:
DR. ULISES NUCAMENDI GÓMEZ

Morelia, Michoacán.

Julio de 2024.

A mi esposa por su invaluable apoyo, a mis padres, a mi hermano Marco A. Pérez quien sin querer me introdujo en el estudio de la física.

Primeramente estoy en deuda con mi asesor Dr. Ulises Nucamendi Gómez, por darme la oportunidad de realizar mis estudios bajo su supervisión, por su paciencia y disponibilidad de explicarme los temas necesarios, estoy profundamente agradecido. A los miembros del comité de seguimiento Dr. Francisco Astorga Saenz y Dr. Ricardo Becerril Bárcenas, muchas gracias por sus observaciones, comentarios y ayudas en temas relacionados al proyecto, además de ser excelentes profesores, son también excelentes personas.

Agradezco también a los profesores del Instituto de Física y Matemáticas con quienes tuve la oportunidad de interactuar, todos muy amables y entregados a sus trabajos, en especial al profesor Olivier Sarbach. Al Instituto de Física y Matemáticas de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, por sus instalaciones, por la oportunidad de poseer un cubículo para realizar mis estudios, también por los apoyos económicos recibidos de este instituto para asistir a escuelas y congresos. También estoy agradecido por el apoyo, las discusiones y las pláticas realizadas con la Dra. Gabriela García Arroyo y a los estudiantes con quienes tuve la oportunidad de platicar y discutir temas académicos. Este proyecto ha sido realizado gracias al apoyo de Conacyt del “Programa de Becas para Estudios de Posgrado”, CVU 603730.

Morelia, Michoacán, Julio de 2024.

Índice general

1. Introducción	1
2. Cosmología de Fondo	4
2.1. Las ecuaciones de campo de Einstein	4
2.2. Ecuaciones principales de Friedmann	6
2.3. Modelo cosmológico Λ CDM	11
2.4. Energía oscura	12
2.5. Energía oscura con una ecuación de estado variable	14
2.6. Campo escalar ϕ como energía oscura	15
2.7. Resumen	16
3. Materia oscura y energía oscura interactuantes	17
3.1. Análisis dinámico, puntos críticos y estabilidad del sistema	25
3.2. Escenario $\alpha = 0$	28
3.3. Escenario $\alpha = \beta$	32
3.4. Escenario $\alpha = -\beta$	37
3.5. Conclusiones	42
4. Teoría de perturbaciones cosmológicas	44
4.1. Formulación matemática	46
4.2. Transformada de Fourier	56
4.3. Selección de norma	58
4.4. Ecuaciones escalares en normas particulares	63
4.5. La ecuación de Boltzmann	64
4.5.1. La ecuación de Boltzmann para fotones	65
4.5.2. Ecuación de Boltzmann para bariones	67
4.5.3. La ecuación de Boltzmann para neutrinos	68
4.6. Resumen	69

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	5
5. Observaciones cosmológicas	70
5.1. Teorema de Bayes, método de Monte Carlo de las cadenas de Markov y selección de modelos	70
5.2. Supernovas de tipo Ia (SNe Ia)	77
5.3. Cronómetros cósmicos	78
5.4. Oscilación acústica bariónica	80
5.5. Radiación del fondo cósmico de microondas	82
5.6. Ajuste del modelo estándar Λ CDM con datos observacionales cosmológicos . .	85
5.7. Conclusión	86
6. Teoría de perturbaciones de modelos interactuantes	89
6.1. Ecuaciones perturbadas a orden lineal de modelos interactuantes entre sectores oscuros	89
6.2. Las ecuaciones a nivel del fondo cosmológico	90
6.3. Perturbaciones lineales de las ecuaciones de los modelos interactuantes	92
7. Conclusión	100
A. Regiones de existencia	103
B. Datos de Planck	106

Resumen

En esta tesis voy a presentar un panorama de la cosmología estándar del universo, tanto a nivel del fondo como a nivel de perturbaciones. También voy a explorar algunos modelos alternativos. En particular se estudian modelos en donde la materia oscura se modela como polvo interactuando con la energía oscura, la cual es modelado como un campo escalar con un potencial de autointeracción exponencial, se usan las herramientas de los sistemas dinámicos para estudiar el comportamiento del sistema de ecuaciones que surge de estos modelos y se analizan los comportamientos de los puntos críticos. También se describen algunas observaciones que son usadas como pruebas cosmológicas y las herramientas estadísticas necesarias para realizar las inferencias de los parámetros del modelo. Además, se realiza la inferencia de los parámetros del modelo estándar usando las observaciones.

Palabras clave– Cosmología, campo escalar, modelos interactuantes, sistemas dinámicos, estadística Bayesiana.

Abstract

In this thesis, I will present an overview of the standard cosmology of the Universe, both at the background and perturbation levels. I will also explore some alternative models. In particular, I study models where dark matter is modeled as dust interacting with dark energy, which is modeled as a scalar field with an exponential self-interaction potential, I use the tools of dynamical systems to study the behavior of the system of equations that arises from these models, and I analyze the behavior of the critical points. I also describe some observations that are used as cosmological tests and the statistical tools necessary to make inferences about the model parameters. In addition, I make inferences about the parameters of the standard model using the observations.

Palabras clave— Cosmology, scalar field, interacting models, dynamical systems, Bayesian statistics.

Capítulo 1

Introducción

El estudio del universo como un todo tiene una larga historia, sin embargo, fue hasta que se empezaron a obtener datos observacionales de precisión para realizar ajustes de los modelos teóricos, cuando empezó a considerarse realmente como una rama de las ciencias físicas. Esta área del conocimiento es conocida como **cosmología**. Actualmente, la cosmología se ha vuelto muy amplia y la mayoría de los subtemas involucrados se han vuelto muy especializados, ya que para plantear un modelo cosmológico es necesario tener conocimiento sobre teorías de gravedad, en particular, sobre la teoría de la relatividad general (RG) de Einstein, y por el lado de las observaciones también se han vuelto muy especializados debido a que los datos obtenidos cada día van aumentando su precisión e involucran varios tipos de experimentos. Una vez planteado el modelo, existen datos observacionales cosmológicos que nos permiten confrontarlo para poner a prueba su viabilidad física. Los datos provienen de distintos tipos de observaciones, entre ellos están las observaciones de la luminosidad aparente de las supernovas de tipo Ia, los cronómetros cósmicos, las oscilaciones acústicas bariónicas, entre otras, tal y como veremos a lo largo de este trabajo. Cabe también mencionar que el enlace entre el modelo y los datos, se realiza mediante las técnicas de la estadística Bayesiana. Con este breve resumen, obtenemos una noción de la complejidad del estudio de la cosmología.

Hoy en día, tenemos un modelo del universo que es el de mayor aceptación entre la comunidad científica; por supuesto, ha alcanzado este estatus debido a que es el que mejor describe nuestro universo dadas las observaciones, dicho en otras palabras: es el modelo que mejor ajusta a los datos cosmológicos observados. Este modelo es llamado en inglés "Lambda Cold Dark Matter (Λ CDM)". A lo largo del texto vamos a explicar de una manera más precisa las características de este modelo, en este momento, basta decir que está compuesto por los siguientes tipos de materia-energía: bariones, radiación, materia oscura y energía oscura como constante cosmológica Λ ; en la actualidad, cada una de estas componentes aporta aproximadamente el 4.9205 %, 0.0090 %, 26.1894 % y el 68.8900 % respectivamente de la composición total del universo [1]. Aunque es el modelo que mejor describe nuestro universo, no está exento de problemas, tal y como discutiremos a lo largo de esta tesis.

Aquí vamos a estudiar principalmente la energía oscura y, por tal razón, es importante entender cómo surge esta componente, recordemos del párrafo anterior que es la componente dominante en el modelo estándar del universo. Tempranamente, en el año de 1917, Einstein aplicó la RG para estudiar el universo como un todo y las ecuaciones que resultan de ésta predicen que el universo es dinámico y desacelerado. El detalle es que en aquella época se pensaba que la galaxia era todo el universo y, que además era estático. Por esta razón Einstein se vio obligado a introducir una constante (llamada la constante cosmológica) en sus ecuaciones de campo, al realizar esto ahora se puede obtener un universo estático. Sin embargo, esta constante después la eliminó por razones de inestabilidad de tal universo, y más tarde, debido a que las observaciones de esa época, realizadas por E. Hubble, sobre las velocidades de recesión de las galaxias implicaban un universo dinámico [2].

En el año de 1998, Adam Riess et. al. [3] y S. Perlmutter et. al. en el año de 1999 [4], de estudios independientes publicaron artículos en donde usaron a las supernovas de tipo Ia como candelas estándar. El resultado del ajuste Bayesiano de un modelo cosmológico FLRW¹ con datos de la luminosidad aparente de Supernovas tipo Ia da como resultado que, en la actualidad, el universo se encuentra en una etapa de expansión acelerada, y cuya componente responsable de tal fenómeno es una clase de energía con presión negativa que ha sido nombrada de manera convencional como energía oscura. La importancia de este resultado fue de tal grado que los descubridores de la expansión acelerada de nuestro universo fueron galardonados con el premio Nobel de física del año 2011.

Entonces, con el objetivo de encontrar la componente responsable de la aceleración del universo se han propuesto varios candidatos, el primero es la energía del vacío cuántico (las fluctuaciones de la energía del estado base de los campos cuánticos), el problema es que las estimaciones realizadas en el marco de la teoría cuántica de campos no concuerdan con el valor inferido de las observaciones cosmológicas, de hecho, la diferencia es de 120 órdenes de magnitud [5]. Se ha intentado resolver esta diferencia, pero no se ha llegado a una solución satisfactoria. También se ha explorado la posibilidad de que la densidad de la energía oscura no sea una constante, sino que varíe con el tiempo cósmico, por eso se han propuesto y estudiado distintas parametrizaciones de la ecuación de estado; también se ha propuesto un campo escalar ϕ llamado quintaesencia o sus generalizaciones llamadas k-esencia, taquiones, etc. Aunque hay muchos intentos de explicar el origen de la expansión acelerada, actualmente no hay ninguna respuesta satisfactoria a este fenómeno.

Cabe mencionar que al igual que la energía oscura, tampoco sabemos cual es la naturaleza de la materia oscura (en este trabajo vamos a modelarlo siempre como un fluido perfecto sin presión). El modelo Λ CDM tiene varios problemas físicos, uno de estos problemas es el llamado problema de la *coincidencia cósmica*, el cual consiste en la pregunta de por qué la densidad de la

¹Se le llama FLRW a la métrica de un universo espacialmente homogéneo e isotrópico.

materia oscura y la densidad de la energía oscura son del mismo orden en la actualidad, ya que en el pasado estas densidades diferían en muchos órdenes de magnitud. Con la idea inicial de resolver este problema, se ha propuesto que la energía oscura y la materia oscura intercambien energía-momento entre ellas, estos son los modelos que estudiaremos y discutiremos con mas detalle en este trabajo. Un aspecto muy importante de la cosmología, es que se divide principalmente en dos partes: la primera consiste en el estudio del universo espacialmente homogéneo e isotrópico en donde la métrica es la de *Friedmann-Robertson-Lemaitre-Walker* (FRLW) y las componentes del universo se modelan respetando las simetrías de homogeneidad e isotropía espacial. Por otra parte, para describir de una mejor manera nuestro universo se aplica la teoría de perturbaciones, con esto se pueden estudiar aspectos muy importantes tales como el crecimiento de las estructuras cósmicas a gran escala, entre otras propiedades. Estos dos aspectos los estudiaremos en esta tesis, y nuestro propósito es el de proponer algunos modelos cosmológicos nuevos con la finalidad de explorar su viabilidad para modelar nuestro universo.

La tesis esta organizada de la siguiente manera, en el capítulo 2 vamos a describir brevemente la teoría de la relatividad general y determinar las ecuaciones importantes a nivel del fondo cosmológico. En el capítulo 3, vamos a estudiar un modelo de energía oscura como un campo escalar interactuando con la materia oscura, allí estudiaremos la estabilidad de los puntos críticos de las ecuaciones dinámicas del sistema. En el capítulo 4 vamos a describir la teoría de perturbaciones cosmológicas, esto es con el propósito de derivar las ecuaciones importantes para nuestro estudio y también para entender el origen de las cantidades que luego vamos a estar manipulando. El capítulo 5, está dedicado a la descripción de las observaciones cosmológicas de nuestro interés y haremos una breve explicación de la estadística Bayesiana, la cual es usada para realizar inferencias dado los datos que provienen de las observaciones cosmológicas. En el capítulo 6, volveremos a revisar los modelos interactuantes pero ahora con el propósito de escribir completamente las ecuaciones importantes, tanto a nivel del fondo como a nivel de perturbaciones cosmológicas, con la idea de identificar cómo se modifican las ecuaciones involucradas cuando existe una interacción de la forma considerada en esta tesis. Finalmente, en el último capítulo están las conclusiones de este trabajo y los temas futuros a resolver.

Capítulo 2

Cosmología de Fondo

2.1. Las ecuaciones de campo de Einstein

Las ecuaciones que vamos a estudiar son las ecuaciones de campo de Einstein, estas son las ecuaciones principales de la teoría de la RG. Debido a que esta teoría es muy amplia para ser explicada en detalle en esta tesis y, además, no es nuestro objetivo estudiarla en sí misma, aquí solo vamos a describir brevemente las ecuaciones que vamos a necesitar para el estudio de la cosmología.

En el marco de la teoría de la relatividad general la fuerza gravitacional no existe, lo que existe es la curvatura del espacio-tiempo¹ y esta es la responsable de la atracción gravitacional que observamos entre dos cuerpos, ya sean partículas masivas o no masivas; en esta teoría la energía también es afectada por la curvatura del espacio-tiempo. La curvatura del espacio-tiempo surge debido a la presencia de la masa y la energía, y el movimiento de las partículas de prueba en el espacio-tiempo sigue una clase especial de trayectoria llamada geodésica². John Archibald Wheeler lo expresa de una manera muy bonita como: *El espacio-tiempo le dice a la materia como moverse, mientras la materia le dice al espacio-tiempo como curvarse*.

Podemos describir la teoría de una manera formal como sigue: *El espacio-tiempo es una variedad diferencial M de dimensión cuatro (4) dotada de una métrica Lorentziana $g_{\mu\nu}$* . En las siguientes referencias podemos encontrar un desarrollo completo de la teoría de la relatividad general [6], [7], [8]. Las ecuaciones de campo de Einstein se representan mediante un tensor de rango dos (2) que relaciona la geometría del espacio-tiempo con la distribución de energía-

¹En la teoría de la relatividad general se entiende al espacio y al tiempo como entidades ligadas, de allí el nombre *espacio-tiempo*.

²Esto es válido cuando no existen otras interacciones que afectan a las partículas de prueba, es decir, cuando solo esta presente la curvatura del espacio-tiempo.

momento, en componentes esta ecuación esta dada por la siguiente expresión³

$$\boxed{G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}}, \quad (2.1)$$

donde $G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$, es conocido como el tensor de Einstein, $R_{\mu\nu}$ es conocido como el tensor de Ricci, R es llamado el escalar de Ricci o de curvatura, $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento el cual indica cómo está distribuida la materia en el espacio-tiempo y $g_{\mu\nu}$ son las componentes del tensor métrico, el cual nos permite medir distancias (espaciales y temporales), áreas, volúmenes, entre otras cosas en el espacio-tiempo.

El lado derecho de la ecuación (2.1) involucra cantidades que describen la curvatura del espacio-tiempo, las cuales se obtienen a partir del llamado tensor de Riemann $R^\alpha_{\mu\beta\nu}$. Escrita en una carta de coordenadas, el tensor tiene la siguiente forma,

$$R^\alpha_{\mu\beta\nu} = \partial_\beta \Gamma^\alpha_{\nu\mu} - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\beta\mu} + \Gamma^\eta_{\nu\mu} \Gamma^\alpha_{\beta\eta} - \Gamma^\eta_{\beta\mu} \Gamma^\alpha_{\nu\eta}, \quad (2.2)$$

donde las funciones $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ son conocidas como los símbolos de Christoffel y se calculan en una carta de coordenadas de la siguiente manera,

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta} (\partial_\nu g_{\beta\mu} + \partial_\mu g_{\beta\nu} - \partial_\beta g_{\mu\nu}). \quad (2.3)$$

El tensor de Ricci se obtiene al contraer dos índices del tensor de Riemann de la siguiente manera $R_{\mu\nu} = R^\alpha_{\mu\alpha\nu} = R^\alpha_{\mu\beta\nu} g^{\alpha\beta}$, esto da la expresión

$$R_{\mu\nu} = \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{\nu\mu} - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\alpha\mu} + \Gamma^\eta_{\nu\mu} \Gamma^\alpha_{\alpha\eta} - \Gamma^\eta_{\alpha\mu} \Gamma^\alpha_{\nu\eta}. \quad (2.4)$$

La forma de los símbolos de Christoffel que hemos escrito surge al imponer dos condiciones sobre la variedad M con métrica $g_{\mu\nu}$, la primera es que la variedad sea libre de torsión, esto implica que $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\nu\mu}$ y la segunda condición es que la derivada covariante de la métrica es igual a cero, es decir:

$$\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = \partial_\alpha g_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\alpha\mu} g_{\lambda\nu} - \Gamma^\lambda_{\alpha\nu} g_{\mu\lambda} = 0. \quad (2.5)$$

Por otro lado, la ecuación $\nabla_{[\lambda} R_{\rho\sigma]\mu\nu} = 0$ es conocida como la identidad de Bianchi, donde los corchetes indican una antisimetrización total de los subíndices que encierra. Partiendo de la identidad de Bianchi se puede mostrar que $\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$, luego, mediante las ecuaciones de Einstein (2.1), obtenemos la siguiente ecuación tensorial llamada ley de conservación local del tensor de energía-momento,

$$\boxed{\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0}. \quad (2.6)$$

³Donde hemos usado la convención de que la velocidad de la luz es igual a la unidad ($c = 1$).

2.2. Ecuaciones principales de Friedmann

Para simplificar el estudio de la cosmología se asume el **principio cosmológico**, este principio establece que a grandes distancias de escalas cosmológicas el universo es **homogéneo** e **isotrópico**. *Homogéneo* significa que el universo se ve igual en cualquier lugar a un tiempo dado fijo (invariancia ante el grupo de traslaciones espaciales) e *isotropía* significa que el universo se ve igual en cualquier dirección (invariancia ante el grupo de rotaciones espaciales). En la actualidad, a través de las observaciones cosmológicas se ha demostrado que este principio es válido a partir de los 100 Mpc [10], [11]⁴. Dicho en otras palabras, el universo es espacialmente homogéneo e isotrópico a partir de los 100 Mpc. La métrica $g_{\mu\nu}$ que modela un universo espacialmente homogéneo e isotrópico, es la métrica de Friedmann-Robertson-Lemaitre-Walker (FRLW), escrita en coordenadas comóviles esféricas, el correspondiente elemento de línea ($ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$) está dado por

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1-kr} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right), \quad (2.7)$$

donde $a(t)$ es llamado factor de escala y describe la expansión o la contracción de la parte espacial de la métrica, t es el tiempo cosmológico y k es la curvatura espacial del universo; Si $k = 1$ el universo es espacialmente una tres-esfera, si $k = 0$ el universo es espacialmente un tres-plano y si $k = -1$ el universo es espacialmente una tres-hipérbola. Remarcamos que la ecuación (2.7) representa tres elementos de línea diferentes y, por tanto, tres métricas distintas, dependiendo del valor de k . Una derivación formal de la métrica (2.7) se puede consultar en la referencia [7]. Es común denotar a la métrica como $g_{\mu\nu}$ y al elemento de línea como ds^2 .

En la actualidad, sabemos que en nuestro universo existe radiación, materia bariónica⁵ y además otras componentes que vamos a discutir con detalle conforme avancemos en esta tesis. Cada componente se puede modelar como un fluido perfecto, este tipo de fluido es localmente homogéneo e isotrópico, por lo tanto, se acopla de manera natural con el principio cosmológico. La forma del tensor de energía-momento para el i -ésimo fluido perfecto está dado de la siguiente manera

$$T_{\mu\nu}^{(i)} = (\rho_{(i)} + P_{(i)})U_\mu^{(i)}U_\nu^{(i)} + P_{(i)}g_{\mu\nu}, \quad (2.8)$$

donde $\rho_{(i)}$ es la densidad, $P_{(i)}$ es la presión y $U_\mu^{(i)}$ es la cuadrivelocidad del i -ésimo fluido. Es conveniente describir los fluidos en el marco de un observador comóvil, es decir, un observador que se mueve junto con el fluido, eso se traduce a que su velocidad espacial es cero, y por lo tanto, su cuadrivelocidad solo tiene componente temporal $U_\mu^{(i)} = (U_0^{(i)}, 0, 0, 0)$. Como $U_\mu^{(i)}$ es tipo temporal⁶, al normalizarlo tenemos $g_{\mu\nu}U_\mu^{(i)}U_\nu^{(i)} = -1$, esto nos permite determinar la cuadrivelocidad como

$$U_{(i)}^\mu = (1, 0, 0, 0). \quad (2.9)$$

⁴1 Mpc = 10^6 parsecs $\approx 3.99 \times 10^{22}$ m.

⁵Aunque los electrones no son bariones, en el contexto cosmologico se incluyen en esta componente.

⁶Esto significa que la magnitud de la cuadrivelocidad es negativa.

Por homogeneidad e isotropía la cuadrivelocidad (2.9) es la misma para todos los fluidos⁷, por esa razón omitimos el subíndice i , a partir de ahora vamos a escribir solamente $U^\mu = (1, 0, 0, 0)$, además mediante la métrica podemos calcular que $U_\mu = (-1, 0, 0, 0)$.

Si tenemos n componentes, cada uno descrito como fluido perfecto, y si además estos fluidos solo interactúan gravitacionalmente entre ellos, el tensor de energía-momento total es la suma de cada tensor de energía-momento individual, es decir;

$$\begin{aligned}
 T_{\mu\nu} \equiv T_{\mu\nu}^{(Total)} &= T_{\mu\nu}^{(1)} + T_{\mu\nu}^{(2)} + \dots + T_{\mu\nu}^{(n)} \\
 &= (\rho_{(1)} + P_{(1)})U_\mu U_\nu + P_{(1)}g_{\mu\nu} + (\rho_{(2)} + P_{(2)})U_\mu U_\nu + P_{(2)}g_{\mu\nu} + \dots \\
 &\quad \dots + (\rho_{(n)} + P_{(n)})U_\mu U_\nu + P_{(n)}g_{\mu\nu} = \sum_{i=1}^n [(\rho_{(i)} + P_{(i)})U_\mu U_\nu + P_{(i)}g_{\mu\nu}]. \\
 &\Rightarrow \boxed{T_{\mu\nu} = (\rho + P)U_\mu U_\nu + P g_{\mu\nu}}, \tag{2.10}
 \end{aligned}$$

donde $\rho = \sum_i \rho_{(i)}$ y $P = \sum_i P_{(i)}$ son la densidad y la presión total. Usando la métrica FRLW (2.7) y el tensor de energía-momento (2.10) en las ecuaciones de campo de Einstein (2.1), obtenemos las siguientes ecuaciones

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}, \tag{2.11}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P), \tag{2.12}$$

donde $\dot{a}$ es la velocidad y $\ddot{a}$ es la aceleración de expansión del universo, la derivada respecto al tiempo cósmico se ha definido como un punto sobre la variable derivada ($\dot{a} \equiv da/dt$). Las ecuaciones (2.11) y (2.12) son conocidas como las ecuaciones de Friedmann. De la ecuación (2.12) podemos notar que cuando $\rho > 0$ y $P > 0 \Rightarrow \ddot{a} < 0$, lo que significa que el universo se encuentra en una expansión desacelerada. Por otro lado, para que el universo tenga una expansión acelerada es necesario que $P < -\frac{1}{3}\rho$.

Cuando tenemos varios fluidos, de la identidad de Bianchi se muestra que lo que se conserva localmente es el tensor de energía-momento total

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = \nabla_\mu (T_{(1)}^{\mu\nu} + T_{(2)}^{\mu\nu} + T_{(3)}^{\mu\nu} \dots) = 0, \tag{2.13}$$

por ahora supongamos que las componentes del universo interactúan solo gravitacionalmente entre ellas, eso implica que

$$\nabla_\mu T_{(i)}^{\mu\nu} = 0, \tag{2.14}$$

es decir, cada fluido tiene su propia ecuación de conservación local. Para resolver la ecuación (2.14) hace falta saber la ecuación de estado de cada fluido (una ecuación que relacione P , ρ y

⁷Dicho de otra forma, si algún fluido tiene una velocidad distinta a (2.9), entonces el universo no sería isotrópico en grandes escalas cosmológicas.

otras cantidades termodinámicas), esto se obtiene estudiando el comportamiento termodinámico de cada fluido. Sin embargo, en cosmología también es común suponer una ecuación de estado (para cada fluido) de la forma,

$$P_i = \omega_i \rho_i, \quad (2.15)$$

donde ω_i es el parámetro de la ecuación de estado, que bien puede ser una constante o también puede depender del factor de escala.

Usando la métrica FLRW y la ecuación de estado (2.15), se puede resolver la ecuación de conservación de energía-momento (2.14) para cada fluido. Cuando $v = t$ obtenemos la siguiente ecuación diferencial conocida como la ecuación de conservación local de la energía para el i -ésimo fluido

$$-\dot{\rho}_i - 3\frac{\dot{a}}{a}\rho_i(1 + \omega_i) = 0, \quad (2.16)$$

resolviendo la ecuación anterior con ω_i constante, obtenemos la siguiente densidad en función del factor de escala

$$\rho_i(t) = \rho_i^0 \left(\frac{1}{a(t)} \right)^{3(1+\omega_i)}, \quad (2.17)$$

aquí se han usado las siguientes definiciones $a(t_0) \equiv 1$ y $\rho_i(t_0) \equiv \rho_i^0$, donde t_0 es el tiempo cosmológico en la actualidad. Para los casos, cuando $v = r, \theta, \phi$, lo que resulta en la ecuación (2.14) es la identidad $0 = 0$.

En este momento vale la pena remarcar que las ecuaciones (2.11), (2.12) y (2.17) son las ecuaciones que modelan un universo homogéneo e isotrópico. Con estas ecuaciones podemos estudiar algunos modelos concretos, pero es común hacer algunas definiciones para que las ecuaciones puedan ser escritas de manera más sencilla. Para esto se define la siguiente cantidad llamada **el parámetro de Hubble** como

$$H(a) \equiv \frac{\dot{a}}{a}. \quad (2.18)$$

Por otro lado, haciendo $k = 0$ y usando la definición $H \equiv H(a)$ en la ecuación (2.11), obtenemos la llamada **densidad crítica**

$$\rho_{crit} \equiv \frac{3H^2}{\kappa^2}, \quad (2.19)$$

donde $\kappa^2 \equiv 8\pi G$. La siguiente definición es llamada **parámetro de densidad** para cada fluido (aunque a veces nos referiremos a ella simplemente como densidad),

$$\Omega_i \equiv \frac{\rho_i}{\rho_{crit}}. \quad (2.20)$$

La definición (2.20) nos permite reescribir la ecuación de Friedmann (2.11) de la siguiente manera

$$\Omega_{total} + \Omega_k = 1, \quad (2.21)$$

donde se ha usado la definición $\Omega_k \equiv -k/a^2 H^2$. La ecuación (2.21) es llamada la restricción de Friedmann. Las cantidades que son evaluadas al día de hoy reciben una notación especial, estas tienen un subíndice o superíndice cero, por ejemplo; t_0 , a_0 , H_0 , Ω_0 , ρ_c^0 , etc., significa que las cantidades están evaluadas al día de hoy. Notemos que la densidad crítica ρ_{crit}^0 tiene un superíndice en vez de un subíndice debido a que necesitamos un subíndice *crit* para indicar que es la densidad crítica, aplicamos lo mismo para otras cantidades que necesitan un subíndice para ser identificadas.

Ahora bien, usando las definiciones anteriores, la ecuación de Friedmann (2.11) se puede reescribir de la siguiente manera

$$H(a) = H_0 \sqrt{\sum_{i=1}^n \left[\Omega_i^0 \left(\frac{1}{a(t)} \right)^{3(1+\omega_i)} \right] + \frac{\Omega_k^0}{a^2(t)}}, \quad (2.22)$$

donde Ω_i^0 es el parámetro de densidad del i -ésimo fluido hoy y Ω_k^0 es el valor del parámetro de la densidad de curvatura hoy.

Por otro lado, debido a la expansión del universo, los fotones provenientes de una fuente lejana localizada en una coordenada comóvil sufren un corrimiento al rojo⁸. Es decir, la luz con frecuencia ω_e emitido desde una fuente luminosa, su frecuencia ω_o observada a una distancia lejana por un observador comóvil es menor que su frecuencia emitida. La relación entre el factor de escala y el corrimiento al rojo z usando la métrica *FRLW* está dada mediante la siguiente igualdad:

$$1 + z = \frac{1}{a}. \quad (2.23)$$

Entonces podemos escribir la ecuación (2.22) en función del corrimiento al rojo y queda expresada como

$$H(z) = H_0 \sqrt{\sum_{i=1}^n \left[\Omega_i^0 (1+z)^{3(1+\omega_i)} \right] + \Omega_k^0 (1+z)^2}. \quad (2.24)$$

Por otro lado, podemos calcular la edad del universo mediante la siguiente ecuación

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \int_0^{a_0} \frac{da}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left[\Omega_i^0 \left(\frac{1}{a(t)} \right)^{(1+3\omega_i)} \right] + \Omega_k^0}}, \quad (2.25)$$

observemos que debemos conocer el valor de las densidades del universo en el presente para obtener dicha edad.

⁸En realidad, si $a(t) > 0$ los fotones sufren un corrimiento al rojo y si $a(t) < 0$ ocurre un corrimiento al azul, pero en la actualidad sabemos que $a(t) > 0$.

La razón de escribir H en función de z , y no de a , se debe a que las observaciones se realizan a distintos corrimientos al rojo, por lo que los datos están medidos a diferentes valores de z . Vale la pena recapitular lo que se ha descrito hasta ahora, la ecuación (2.24) representa la dinámica de modelos cosmológicos con varios componentes que se comportan como fluidos perfectos, cada componente con su propia ecuación de estado en un universo con una métrica FRLW. Además, hemos supuesto que las componentes del universo solo interactúan gravitacionalmente entre ellas, de allí que cada componente tiene su propia ecuación de conservación local de energía-momento.

Finalmente, presentamos un modelo del universo muy sencillo, pero que sirve para ilustrar los aspectos que nos interesan. Nuestro ejemplo es un universo que consiste solamente de materia bariónica $\Omega_b^0 = 1$. Sabemos que los bariones no tienen presión $P_b \approx 0$, esto quiere decir que $\omega_b = 0$ y entonces de la ecuación (2.17) obtenemos la evolución de la densidad en función del factor de escala dada por

$$\rho_b = \rho_b^0 \left(\frac{1}{a(t)} \right)^3. \quad (2.26)$$

Además, suponiendo que el universo es plano $\Omega_k = 0$, de la ecuación (2.25) la edad del universo queda expresada como

$$t = \frac{1}{H_0} \int_0^a \frac{d\tilde{a}}{\sqrt{\Omega_b^0 \tilde{a}^{-1}}} = \frac{1}{H_0} \int_0^a \tilde{a}^{1/2} d\tilde{a} = \frac{2a^{3/2}}{3H_0}. \quad (2.27)$$

Entonces la edad actual t_0 de este modelo del universo, que está compuesto solamente de bariones y además es espacialmente plano, es la siguiente

$$t_0 = \frac{2}{3H_0}, \quad (2.28)$$

recordemos que por convención $a_0 = 1$ y H_0 es la constante de Hubble. Usando el valor de la constante de Hubble como $H_0 = 70 \cdot \text{km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$, $1 \text{Mpc} = 3.086 \times 10^{19} \text{km}$ y 1 año $= 3.154 \times 10^7$ segundos, obtenemos

$$t_0 = \frac{2}{3 \cdot 70 \cdot \text{km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}} = 9.31 \text{Gyr} (\text{Giga años}). \quad (2.29)$$

Vale la pena mencionar que este modelo no puede representar nuestro universo. Una de las razones es que nuestro universo contiene radiación. Otra razón muy interesante es que se han observado estrellas de formación temprana que se encuentra en los llamados cúmulos globulares, los cuales se estima que tienen una edad $t_{\text{cúmulos globulares}} \approx 11.5 \pm 1.3$ Giga años. Esto significa, en este modelo, que hay estrellas más antiguas que el propio universo, lo cual no tiene sentido.

2.3. Modelo cosmológico Λ CDM

El modelo que vamos a describir en esta sección, como hemos mencionado anteriormente, es el de mayor aceptación en la actualidad por la comunidad científica, ya que es el que mejor ajusta a los datos cosmológicos. En este modelo se asumen cuatro componentes del universo, los cuales son: materia bariónica, radiación, constante cosmológica y materia oscura fría⁹(en inglés Cold Dark Matter (CDM)). Debido a que en la actualidad las componentes que dominan son la constante cosmológica y la materia oscura fría, este modelo es llamado el modelo Lambda CDM. A continuación, vamos a describir brevemente cada uno de los componentes de este modelo.

- La materia bariónica es la materia que forma los núcleos de los átomos de la tabla periódica de elementos, por convención se incluyen en esta componente a los electrones (debido a que su masa es despreciable comparada con la masa de los núcleos atómicos) y demás partículas del modelo estándar de partículas elementales. Esta componente es muy bien conocida, ya que los planetas, las estrellas, las galaxias, etc., están compuestas por bariones. La densidad de esta componente la vamos a denotar como ρ_b . Lo que sabemos de las observaciones es que esta componente se comporta como polvo, es decir: $P_b \approx 0$, por lo que $\omega_b = 0$, donde P_b y ω_b son la presión y el parámetro de la ecuación de estado respectivamente.
- La radiación (fotones y neutrinos) también es una componente de este modelo, al igual que los demás componentes, es justificada por las observaciones cosmológicas hechas más recientemente por los experimentos WMAP-2013 [44] y Planck-2015 [45] sobre las anisotropías de la radiación cósmica del fondo cósmico de microondas. La ecuación de estado de la radiación es $P_r = \frac{1}{3}\rho_r$, entonces $\omega_r = \frac{1}{3}$. Otro resultado muy importante de las observaciones de la radiación cósmica del fondo es que la curvatura del universo es cercana a cero, por lo que el universo observable es prácticamente plano ($k = 0$). La densidad de la radiación ρ_r es la suma de la densidad de los fotones ρ_γ con la densidad de los neutrinos ρ_ν , es decir; $\rho_r = \rho_\gamma + \rho_\nu$ (se sabe que existen tres tipos de neutrinos).
- Energía oscura, esta componente es postulada en el modelo Lambda CDM como una constante cosmológica Λ . En la actualidad es la componente dominante y la evidencia de su existencia surge principalmente de los trabajos de Riess et al. [3] y Perlmutter et al. [4]. La ecuación de estado para esta componente es $P_\Lambda = -\rho_\Lambda$, esto significa que $\omega_\Lambda = -1$. Esta componente es la responsable de que en la actualidad nuestro universo se encuentre en una etapa de expansión acelerada.
- Materia oscura fría, esta componente la introdujo por primera vez Fritz Zwicky en el año 1933 [9], ya que los resultados de su estudio sobre las velocidades de las estrellas en galaxias elípticas lo llevó a concluir que existe más materia que la materia visible.

⁹Se le llama fría por la propiedad de que no es relativista.

Observaciones y estudios posteriores respaldan la conclusión de la hipotética existencia de esta por medio de su interacción gravitacional. La materia faltante normalmente se modela como polvo, esto quiere decir que su presión es despreciable $P_c \approx 0$, por lo que $\omega_c = 0$. La densidad de esta componente la vamos a denotar como ρ_c . Aunque existen otros modelos de materia oscura, aquí vamos a modelarla como polvo.

Entonces, las ecuaciones importantes para el modelo Λ CDM son las siguientes

$$H^2(a) = \frac{8\pi G}{3} \left(\rho_\Lambda^0 + \frac{\rho_c^0}{a^3} + \frac{\rho_b^0}{a^3} + \frac{\rho_r^0}{a^4} \right), \quad (2.30)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} [\rho_b + \rho_r + \rho_c + \rho_\Lambda + 3(P_b + P_r + P_c + P_\Lambda)], \quad (2.31)$$

(2.30) se reescribe como:

$$H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda^0 + \Omega_c^0(1+z)^3 + \Omega_b^0(1+z)^3 + \Omega_r^0(1+z)^4}. \quad (2.32)$$

Vale la pena remarcar que este modelo se ha establecido debido a que distintas observaciones cosmológicas lo favorecen, dicho de otra manera, este modelo es el que mejor ajusta a los datos observados. Los valores de los parámetros que se han obtenido al usar distintas pruebas cosmológicas son del orden:

$$\Omega_\Lambda^0 \approx 0.68, \quad \Omega_c^0 \approx 0.26, \quad \Omega_b^0 \approx 0.05, \quad \Omega_r^0 \approx 5 \times 10^{-5}, \quad H_0 \approx 67.27 \cdot \text{km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}. \quad (2.33)$$

A continuación, haremos dos comentarios sobre la constante de Hubble H_0 . El primero es que está parametrizada por otra constante sin dimensiones denotada por h , por la siguiente relación

$$H_0 = 100h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} = \frac{h}{0.98 \times 10^{10} \text{ años}}. \quad (2.34)$$

El segundo comentario es que los valores que se obtienen de dos estimaciones independientes son distintas. Por una parte, de las observaciones de la radiación cósmica del fondo cósmico de microondas se infiere el valor para la constante $H_0 = 67.66 \pm 1.4 \cdot \text{km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$ [1] y por el otro lado, de las observaciones locales hechas por Riess et al. en 2016, se determinó que $H_0 = 73.24 \pm 1.74 \cdot \text{km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$ [33]. Esta discrepancia en el valor que se obtiene de H_0 es conocida como **la tensión de la constante de Hubble H_0** .

2.4. Energía oscura

Como hemos mencionado, el modelo que hemos descrito en la sección anterior se ha establecido gracias a las observaciones cosmológicas. La radiación y la materia bariónica son componentes que se conocen bien, es decir, sabemos la naturaleza física de estas componentes.

Sobre la materia oscura nosotros nos limitamos a mencionar que se han propuesto varios candidatos, sin embargo, en la actualidad aún no se sabe la naturaleza exacta de esta componente, por esta razón aquí vamos a describirlo como polvo (fluido con presión cero).

Respecto a la energía oscura, es conveniente empezar a discutirlo revisando el siguiente modelo que fue estudiado por Einstein: suponiendo un universo compuesto solamente de radiación y de bariones, las ecuaciones (2.11) y (2.12) indican que este universo se encuentra siempre en una expansión desacelerada. Sin embargo, Einstein esperaba obtener un universo estático debido a que en esa época el modelo del universo más aceptado era este, y además se pensaba que nuestra galaxia era todo el universo. Entonces, para obtener una solución estática lo que hizo fue introducir la llamada constante cosmológica Λ en sus ecuaciones de campo, quedando entonces ahora la siguiente expresión

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (2.35)$$

Las equivalentes ecuaciones de Friedmann que se obtienen de (2.35), de un modelo compuesto de radiación y bariones, ahora puede dar una solución estática; sin embargo, esta solución no es estable, tal y como Lemaitre hizo notar a Einstein. Por otro lado, de las observaciones sobre la recesión de las galaxias, en el año de 1929 Edwin Hubble concluyó que nuestro universo se estaba expandiendo [2], esto finalmente llevó a Einstein a eliminar la constante cosmológica Λ en sus ecuaciones de campo. Pero mucho después, debido al descubrimiento de la expansión acelerada del universo en 1998, Λ volvió a la escena, esta vez visto como la energía oscura que causa la aceleración reciente de la expansión de nuestro universo observable. El problema con este candidato es que el valor de su densidad estimada por la teoría cuántica de campos es 120 órdenes de magnitud mayor que el valor inferido por observaciones cosmológicas [5].

Por esta razón, se han propuesto distintos candidatos para modelar la energía oscura. Por ejemplo, se ha explorado la posibilidad de que $\omega \neq -1$, también se ha estudiado la posibilidad de que ω dependa del factor de escala (en la actualidad se han propuesto distintas parametrizaciones de $\omega(a)$), además se ha explorado la posibilidad de un tipo de gas llamado el gas de Chaplygin. También se ha propuesto la energía oscura como campos escalares ϕ las cuales pueden clasificarse en diferentes clases dependiendo de su naturaleza: quintaesencia, K-esencia, taquiones, fantasmas, etc. En la referencia [12] se hace una revisión sobre estos candidatos.

Aunque existen varios candidatos a energía oscura, en la actualidad no se ha llegado a una conclusión definitiva, cada candidato tiene sus propios méritos y sus respectivas restricciones inferidas de observaciones cosmológicas. Entonces podemos concluir que:

Asumiendo la teoría de la relatividad general y usando las observaciones cosmológicas, se infiere que existe una componente del universo con presión negativa. A esta componente se le ha llamado energía oscura y es la responsable de que, en la actualidad, el universo se

encuentre en expansión acelerada.

Debido a que la energía oscura se ha detectado solamente a través de su efecto gravitacional, ahora nosotros hacemos la pregunta sobre su naturaleza, es decir: **¿Qué es realmente esa componente?**

Antes de estudiar algunos de los candidatos a energía oscura, vale la pena mencionar que existe otro enfoque para explicar la expansión acelerada reciente del universo. La otra forma de tratar de dar una explicación a este problema es, modificando la teoría de gravedad, es decir, suponer que la relatividad general debe ser modificada. Entre estas modificaciones están las teorías $f(R)$ [13], teoría Jordan-Brans-Dicke [14], teoría de Gauss-Bonnet [15], etc. De hecho, se han realizado investigaciones en estas direcciones que han dado resultados muy interesantes, entre ellas, algunos modelos de gravedad modificada logran reproducir una expansión acelerada del universo sin la necesidad de suponer una componente de energía oscura [16]. Sin embargo, en esta tesis vamos a suponer que la energía oscura existe, por lo que nuestro objetivo es determinar la naturaleza física de esta componente, pero esto es una tarea muy difícil, y por eso, lo que vamos a hacer es estudiar algunos modelos que tienen la posibilidad de representar la hipotética componente de energía oscura.

2.5. Energía oscura con una ecuación de estado variable

Como explicamos en la sección anterior, el parámetro de la ecuación de estado ω_Λ de la energía oscura cuando se representa como una constante cosmológica es -1 (en unidades donde la velocidad de la luz es igual a la unidad). Con el objetivo de determinar la naturaleza física de la energía oscura, también se ha explorado la posibilidad de que la ecuación de estado se desvie ligeramente del caso de la constante cosmológica $\omega_x \neq -1$, en particular que $\omega_x > -1$ y además que $\omega_x < -1/3$ para obtener una expansión aceleración del universo. Debido a que vamos a estudiar distintos modelos como posibles candidatos a la energía oscura, de manera general, vamos a etiquetar las correspondientes cantidades de esta componente con el subíndice x .

Como hemos mencionado, se ha realizado una extensa investigación suponiendo que el parámetro de la ecuación de estado de la energía oscura ω_x esté en función del factor de escala a (o del corrimiento al rojo z). Resolviendo la ecuación de conservación local de la energía para este caso, obtenemos la densidad en función de una integral dada por la siguiente expresión

$$\Omega_x = \Omega_x^0 \exp \left(3 \int_0^z \frac{1 + \omega_x(\tilde{z})}{1 + \tilde{z}} d\tilde{z} \right) \equiv \Omega_x^0 f(z), \quad (2.36)$$

donde hemos definido

$$f(z) \equiv \exp \left(3 \int_0^z \frac{1 + \omega_x(\tilde{z})}{1 + \tilde{z}} d\tilde{z} \right). \quad (2.37)$$

Para determinar la densidad de la energía oscura debemos conocer la forma funcional de ω_x , pero debido a que no sabemos obtenerlo de primeros principios, se han propuesto distintas formas de $\omega_x(z)$, estas propuestas son conocidas como parametrizaciones. Por ejemplo, una de las primeras parametrizaciones propuestas es llamada CPL en honor a los cosmólogos que la propusieron por primera vez: Chevallier, Polarski y Linder [17], [18]. Esta parametrización tiene la siguiente expresión

$$\omega_{CPL} = w_0 + w_a(1 - a) = w_0 + w_a \frac{z}{1+z}, \quad (2.38)$$

donde ω_0 y ω_a son parámetros libres (son constantes). Entonces, la densidad de la energía oscura de este modelo está dado por

$$\Omega_{CPL} = \Omega_{CPL}^0 a^{-3(1+\omega_0+\omega_a)} e^{-3\omega_a(1-a)}, \quad (2.39)$$

como se puede ver de (2.39), cuando $\omega_0 = -1$ y $\omega_a = 0$, la expresión (2.39) se reduce a la constante cosmológica. Notemos que esta parametrización ahora depende de dos parámetros, los cuales deben ser determinados por las observaciones y, por otro lado, cuando $z \ll 1$ la parametrización se reduce a una ecuación lineal en z .

2.6. Campo escalar ϕ como energía oscura

En esta sección vamos a estudiar otra forma de modelar la energía oscura, esta vez como un campo escalar ϕ . En la referencia [22] se introduce el campo escalar desde la acción y se define la respectiva lagrangiana, sin embargo, para nuestro propósito es suficiente partir de las siguientes definiciones

$$\rho_\phi \equiv \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (2.40)$$

$$P_\phi \equiv \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi), \quad (2.41)$$

donde ρ_ϕ es la densidad, P_ϕ es la presión. El término $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2$ es la parte cinética y $V(\phi)$ es el potencial de autointeracción del campo escalar. El potencial debe ser positivo para que sea físicamente aceptable (para que $\rho_\phi > 0$). También podemos definir el correspondiente parámetro de ecuación de estado ω_ϕ del campo escalar como

$$\omega_\phi \equiv \frac{P_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)}{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)}. \quad (2.42)$$

El campo escalar se clasifica en tres tipos, esta clasificación depende del valor de ω_ϕ . Cuando ω_ϕ toma valores en el intervalo $[-1, -\frac{1}{3}]$ se llama quintaesencia, cuando $\omega_\phi < -1$ el campo

escalar es llamado fantasma y cuando ω_ϕ puede tomar ambos rangos es llamado quintom.

Suponiendo un modelo del universo compuesto solamente del campo escalar, la ecuación de Friedmann tiene la siguiente expresión

$$H^2(t) = -\frac{8\pi G}{3}\rho_\phi = \frac{8\pi G}{3}\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)\right), \quad (2.43)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho_\phi + 3P_\phi) = -\frac{8\pi G}{3}(\dot{\phi}^2 - V(\phi)), \quad (2.44)$$

notemos que para una expansión acelerada es necesario que $\dot{\phi}^2 < V(\phi)$. Por otro lado, de la ecuación de conservación de la energía para el campo escalar obtenemos

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} = 0, \quad (2.45)$$

esta es la ecuación de evolución del campo escalar, una vez que tenemos la expresión para $V(\phi)$ podemos resolver para ϕ , aunque no siempre se puede resolver de manera exacta, en la mayoría de los casos se recurre a una determinación numérica. Para cerrar el sistema de ecuaciones (2.43), (2.44) y (2.45) hace falta expresar la forma funcional del potencial de autointeracción $V(\phi)$. Se han explorado distintos potenciales de interacción, una de ellas es el llamado potencial exponencial el cual está dado por la siguiente expresión

$$V(\phi) = V_0 \exp(-C\kappa\phi), \quad (2.46)$$

donde V_0 , C son constantes y $\kappa = \sqrt{8\pi G}$. En la referencia [24] se estudia un campo escalar con el potencial exponencial dado por la ecuación (2.46) desde el punto de vista de los sistemas dinámicos.

2.7. Resumen

En este capítulo hemos establecido la teoría gravitacional que vamos a usar en este trabajo: la relatividad general, la métrica que hemos estudiado es la de Friedmann-Robertson-Lemaître-Walker (FRLW) dada por la ecuación (2.7). Las componentes del universo se han modelado como fluidos perfectos, sin interacción entre ellas (salvo la gravitacional) y con ecuaciones de estado dada por la expresión (2.15). La ecuación (2.22) resume estas suposiciones. También, hemos descrito brevemente la energía oscura como un campo escalar ϕ con un potencial de autointeracción $V(\phi)$, la idea es estudiar en la siguiente sección con más detalle el campo escalar con el potencial dado por la ecuación (2.46) y además vamos a introducir una interacción distinta a la gravitacional entre la materia oscura y la energía oscura, nuestro estudio lo vamos a realizar desde el punto de vista de los sistemas dinámicos.

Capítulo 3

Materia oscura y energía oscura interactuantes

En el modelo Λ CDM, el cual hemos descrito en el capítulo anterior, las densidades evolucionan de manera diferente, ya que cada componente depende del factor de escala como

$$\rho_r \sim a^{-4}, \quad \rho_b \sim a^{-3}, \quad \rho_c \sim a^{-3} \quad \text{y} \quad \rho_\Lambda = \rho_\Lambda^0 = \text{constante}.$$

Observando la manera en como dependen las componentes con respecto al factor de escala a , vemos que primeramente (en el universo temprano) domina la radiación, pero cuando el factor de escala aumenta su valor, la densidad de esta componente decae. Luego empieza a dominar la materia oscura en conjunto con los bariones. Cuando finalmente decaen las densidades de la materia oscura y de los bariones, termina dominando la constante cosmológica hacia el futuro.

La densidad de la materia oscura evoluciona como $\rho_c \sim a^{-3}$, y entonces cuando $a \rightarrow 0$ esta densidad tiende a infinito, mientras que la densidad de la energía oscura permanece constante ($\rho_x = \text{constante}$), esto significa que las densidades de ambas componentes difieren por muchos órdenes de magnitud en el pasado y en el futuro, y solo en un breve periodo en la historia de la evolución del universo son del mismo orden. Lo curioso es que, en la época que estamos viviendo, las observaciones indican que las densidades de la materia oscura y de la energía oscura son del mismo orden. Por eso tiene sentido plantearnos la siguiente pregunta **¿Por qué en la actualidad la densidad de la materia oscura y la densidad de la energía oscura son del mismo orden?** Esta pregunta se conoce como *el problema de la coincidencia cosmológica*. La observación la hizo Steinhardt en el 250 aniversario de la universidad de Princeton [19].

El problema de la coincidencia cósmica en realidad es un problema de ajuste fino en las densidades de la materia oscura y la energía oscura en el pasado, para verlo de manera cuantitativa notemos que la razón entre densidad de la energía oscura y la materia oscura está dada por

la siguiente expresión

$$\frac{\rho_\Lambda}{\rho_c} = \left(\frac{\Omega_\Lambda^0}{\Omega_c^0} \right) a^3 = \left(\frac{\Omega_\Lambda^0}{\Omega_c^0} \right) \left(\frac{1}{1+z} \right)^3, \quad (3.1)$$

suponiendo los siguientes valores aproximados de los parámetros de la densidad de la energía oscura $\Omega_\Lambda^0 \approx 0.7$ y de la materia oscura $\Omega_c^0 \approx 0.3$ (época de la recombinación cuando $z \approx 1100$), la razón de las densidades era aproximadamente igual a

$$\left. \frac{\rho_\Lambda}{\rho_c} \right|_{z=1100} \approx 1.74 \times 10^{-9}, \quad (3.2)$$

por otro lado, en la actualidad ($z = 0$) tenemos que

$$\left. \frac{\rho_\Lambda}{\rho_c} \right|_{z=0} \approx 2.33, \quad (3.3)$$

esto significa que en el pasado la densidad de la energía oscura debió de ser despreciable comparada con la densidad de la materia oscura. Por eso se dice que es un problema de ajuste fino. Solo a tiempos tardíos (actualmente) las densidades son del mismo orden, en ese sentido se dice que estamos viviendo una época especial.

Inicialmente, con el objetivo de resolver el problema de la coincidencia cosmológica, se introdujo una interacción no-gravitacional entre la materia oscura y la energía oscura. Esto es debido a que cuando existe una interacción entre estas dos componentes es posible encontrar modelos cosmológicos en donde existen dos puntos críticos, un punto silla dominado por materia y un atractor futuro acelerado dominado por energía oscura y, además, la razón de sus densidades es una constante ($\rho_x/\rho_c = \text{cte}$). Entonces, dado un modelo cosmológico con esta característica, el problema de la coincidencia ya no existiría debido a que la razón entre las densidades, evaluados en los puntos críticos, es una constante. La discrepancia dada por las expresiones (3.2) y (3.3) se explica por el hecho de que el universo está obligado a pasar cerca del punto silla y evolucionar hacia el atractor futuro acelerante. Este tipo de puntos críticos se denomina soluciones escalantes (del término en inglés **scaling**). Además, un modelo cosmológico viable debe satisfacer un universo acelerado a tiempos tardíos independientemente de las densidades iniciales. Entonces, cuando estudiamos esta clase de modelos, lo que nos interesa determinar son las soluciones escalantes, que matemáticamente están expresadas como (en términos de los parámetros de las densidades de las componentes que son puntos críticos)

$$\frac{\Omega_x}{\Omega_c} = \text{constante}, \quad (3.4)$$

y que además a tiempos presentes debe satisfacer:

$$\frac{\Omega_x}{\Omega_c} = O(1) \quad \text{y} \quad \ddot{a} > 0. \quad (3.5)$$

En la actualidad existen varios trabajos en esta dirección y lo que se ha visto es que la interacción se puede implementar de dos maneras. La primera consiste en modificar la acción de Einstein-Hilbert, aquí debemos suponer una lagrangiana de interacción $\mathcal{L}_{int}$, la cual debe depender de las respectivas componentes en interacción, entonces la acción modificada puede ser escrita como

$$S = \int d^4x (\mathcal{L}_{grav} + \mathcal{L}_r + \mathcal{L}_b + \mathcal{L}_c + \mathcal{L}_x + \mathcal{L}_{int}), \quad (3.6)$$

donde $\mathcal{L}_{grav}$, $\mathcal{L}_r$, $\mathcal{L}_b$, $\mathcal{L}_c$ y $\mathcal{L}_x$ son las lagrangianas de la gravedad, de la radiación, de los bariones, de la materia oscura y de la energía oscura, respectivamente. Al llevar a cabo la variación de la acción (3.6) respecto a la métrica $g_{\mu\nu}$, obtenemos las ecuaciones de campo de Einstein modificadas

$$G_{\mu\nu} = \kappa^2 \left(T_{\mu\nu}^{(r)} + T_{\mu\nu}^{(b)} + T_{\mu\nu}^{(c)} + T_{\mu\nu}^{(x)} + T_{\mu\nu}^{(int)} \right), \quad (3.7)$$

la diferencia con la ecuación de Einstein usual es que ahora tenemos un tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}^{(int)}$ que tiene que ver con la interacción entre diferentes componentes. Para obtener una forma explícita de los tensores de energía momento hay que proponer las lagrangianas respectivas, por ejemplo en el trabajo de Brown [20] podemos ver la descripción de fluidos sin interacción desde una formulación lagrangiana y, el caso con interacción se realiza en el trabajo hecho en [21].

Por otro lado, en este trabajo vamos a estudiar modelos interactuantes entre la materia oscura y la energía oscura usando la segunda forma de implementar la interacción. Esta segunda forma se realiza modificando de la siguiente manera las ecuaciones de conservación local de las componentes oscuras

$$\nabla_\mu T_{(c)\nu}^\mu = Q_\nu, \quad (3.8)$$

$$\nabla_\mu T_{(x)\nu}^\mu = -Q_\nu, \quad (3.9)$$

donde Q_ν es el cuadvivector de interacción. Notemos que la conservación local del tensor de energía-momento total se sigue cumpliendo, ya que $\nabla_\mu T_{(total)\nu}^\mu = 0$. Observamos que en esta forma de implementar la interacción, las ecuaciones de campo de Einstein no se modifican en absoluto. La diferencia principal entre estas dos formas de implementar la interacción entre las componentes del universo, es que en la primera manera se realiza desde primeros principios, lo que significa que necesitamos tener la forma explícita de una lagrangiana de interacción, en cambio, en la segunda forma se realiza de manera efectiva en el sentido que debemos proponer algún cuadvivector de interacción y esta no necesariamente se obtiene de primeros principios, esto puede considerarse como una ventaja al momento de proponer algún modelo. Notemos también que no se puede pasar de una manera a la otra.

Para estudiar modelos interactuantes necesitamos la forma del cuadvivector Q_ν , sin embargo, como no sabemos obtenerlo a partir de primeros principios, lo que comúnmente se hace es proponer la forma de la interacción, algunas propuestas tienen una justificación física mientras

que otras se proponen por simplicidad matemática. Cada propuesta tiene sus propios méritos, en la referencia de revisión [22] se pueden ver los distintos modelos que se han estudiado.

Para nuestro propósito, en esta sección veamos que de las proyecciones de las ecuaciones (3.8) y (3.9) paralelas a la velocidad del fluido obtenemos las siguientes ecuaciones

$$U^\nu \nabla_\mu T_{(c)\nu}^\mu = U^\nu Q_\nu \equiv Q, \quad U^\nu \nabla_\mu T_{(x)\nu}^\mu = -U^\nu Q_\nu \equiv -Q, \quad (3.10)$$

donde hemos definido $U^\nu Q_\nu = Q$. Esta proyección es la ecuación de la conservación de la energía, eso significa que Q es la función que captura el intercambio de la energía entre la materia oscura y la energía oscura. Por otro lado, al llevar a cabo la proyección perpendicular a la velocidad del fluido mediante el proyector $h_{\alpha\beta} = U_\alpha U_\beta + g_{\alpha\beta}$, de las ecuaciones (3.8) y (3.9) obtenemos

$$h^{\alpha\nu} \nabla_\mu T_{(c)\nu}^\mu = h^{\alpha\nu} Q_\nu = 0, \quad h^{\alpha\nu} \nabla_\mu T_{(x)\nu}^\mu = -h^{\alpha\nu} Q_\nu = 0, \quad (3.11)$$

donde $h^{\alpha\nu} Q_\nu$ la ponemos igual a cero, ya que vamos a suponer que no existe intercambio de momento entre las componentes oscuras, respetando así la isotropía espacial.

En esta parte vamos a considerar un universo compuesto solamente de materia oscura y energía oscura, con una interacción no-gravitacional entre ellas y además vamos a considerar, por simplicidad, que el universo es espacialmente plano $k=0$. Recordemos que la materia oscura la vamos a modelar siempre como un fluido sin presión (polvo), mientras que ahora la energía oscura la vamos a modelar como un campo escalar con un potencial de autointeracción exponencial dado por la ecuación (2.46), entonces las ecuaciones de Friedmann quedan expresadas como

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} (\rho_c + \rho_\phi), \quad (3.12)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho_c + \rho_\phi + 3P_\phi). \quad (3.13)$$

La forma funcional de la interacción que vamos a estudiar, por simplicidad matemática, es la siguiente

$$Q = -(\alpha \dot{\rho}_c + \beta \dot{\rho}_\phi), \quad (3.14)$$

donde α y β son constantes sin dimensiones que en principio puede tener cualquier valor. Esta forma de interacción se estudió en los trabajos [28] y [29] pero las ecuaciones derivadas son incorrectas. El estudio de este modelo, y lo que vamos a describir aquí, lo reportamos en el artículo [30].

Como hemos explicado previamente, las modificaciones surgen en las ecuaciones (3.8) y (3.9) proyectadas paralelamente a la velocidad. Entonces, la ecuación de conservación local de la energía de la materia oscura ahora queda expresada de la siguiente forma

$$\dot{\rho}_c + 3H\rho_c = -Q, \quad (3.15)$$

en donde $\dot{} \equiv d/dt$. De la ecuación (3.15) podemos observar que cuando $Q > 0$ la materia oscura transfiere energía al campo escalar y si $Q < 0$ ocurre lo contrario. La correspondiente ecuación para la energía oscura queda expresada como

$$\dot{\rho}_\phi + 3H(\rho_\phi + P_\phi) = Q. \quad (3.16)$$

Usando la definición de la densidad (ecuación (2.40)) y la presión (ecuación (2.41)) del campo escalar en la ecuación (3.16) obtenemos

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV(\phi)}{d\phi} = \frac{Q}{\dot{\phi}}. \quad (3.17)$$

En este punto lo que debemos hacer, dada la forma de la interacción Q , es resolver las ecuaciones para determinar la manera en que evolucionan las densidades tal y como hicimos en las secciones anteriores. Sin embargo, lo que vamos a hacer aquí es estudiar las ecuaciones usando las herramientas de la teoría de los sistemas dinámicos. Para esto, procedemos a escribir las ecuaciones en términos de las siguientes variables (para el caso sin interacción este modelo fue estudiado en la referencia [24])

$$X^2 \equiv \frac{\kappa^2 \dot{\phi}^2}{6H^2}, \quad Y^2 \equiv \frac{\kappa^2 V(\phi)}{3H^2}, \quad \lambda \equiv -\frac{1}{\kappa V} \left(\frac{\partial V}{\partial \phi} \right), \quad (3.18)$$

Debido a que vamos a usar el potencial exponencial dado por la ecuación (2.46), de la tercera ecuación en (3.18) tenemos que λ también es una constante ($\lambda = C$).

Escribiendo una ecuación análoga a la (2.43) en términos de los parámetros de densidad de la materia oscura Ω_c y de la energía oscura Ω_ϕ obtenemos

$$1 = \Omega_c + \Omega_\phi = \Omega_c + X^2 + Y^2. \quad (3.19)$$

Un aspecto muy importante al estudiar sistemas dinámicos es determinar completamente el espacio fase de nuestro sistema de ecuaciones [25]. Los rangos físicamente aceptables de las variables que estamos usando son: $0 \leq \Omega_c \leq 1$; usando la restricción de Friedmann tenemos $\Omega_c = 1 - X^2 - Y^2 \geq 0$ y esto implica que $0 \leq X^2 + Y^2 \leq 1$. También, debido a que $0 \leq \Omega_\phi \leq 1$ tenemos $|X| \leq 1$. Además, como estamos interesados en estudiar modelos cosmológicos en expansión, tenemos que $H \geq 0$, esto implica que $Y \geq 0$ [24]. Entonces, el espacio fase Ψ de nuestro sistema está dado por

$$\Psi = \{(X, Y) : 0 \leq Y \leq 1, 0 \leq X^2 + Y^2 \leq 1\}. \quad (3.20)$$

Ahora vamos a proceder a derivar el sistema de ecuaciones en términos de las variables X, Y . Empezamos derivando respecto al tiempo cósmico t la definición para X^2 dada en (3.18), lo que obtenemos es el siguiente resultado

$$2X\dot{X} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\kappa^2 \dot{\phi}^2}{6H^2} \right) = 2X^2 \left(\frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}} - \frac{\dot{H}}{H^2} \right), \quad (3.21)$$

despejando $\ddot{\phi}$ de la ecuación (3.17), luego introduciéndola en la ecuación (3.21) y después multiplicando el resultado por $1/H$, obtenemos

$$\frac{\dot{X}}{H} = X \left(-3 - \frac{1}{H\dot{\phi}} \frac{\partial V}{\partial \phi} - \frac{Q}{H\dot{\phi}^2} - \frac{\dot{H}}{H^2} \right), \quad (3.22)$$

como

$$-\frac{1}{H\dot{\phi}} \frac{\partial V}{\partial \phi} = \frac{\kappa\lambda V}{H \left(\frac{\sqrt{6}HX}{\kappa} \right)} = \frac{\kappa^2 V \lambda}{H^2 \sqrt{6}X} = \left(\frac{\kappa^2 V}{3H^2} \right) \left(\frac{3}{\sqrt{6}} \right) \left(\frac{\lambda}{X} \right) = \frac{3\lambda}{\sqrt{6}} \frac{Y^2}{X}$$

y

$$\frac{Q}{H\dot{\phi}^2} = \frac{Q}{H} \frac{1}{\left(\frac{6H^2 X^2}{\kappa^2} \right)} = \frac{Q\kappa^2}{6H^3 X^2},$$

la ecuación (3.22) puede ser escrita como

$$\frac{\dot{X}}{H} = -3X + \sqrt{\frac{3}{2}} \lambda Y^2 + \left(\frac{\kappa^2}{6H^3} \right) \frac{Q}{X} - X \left(\frac{\dot{H}}{H^2} \right). \quad (3.23)$$

Igualmente, derivamos respecto al tiempo cosmológico la variable Y definida en las ecuaciones (3.18), entonces tenemos que

$$\begin{aligned} 2Y\dot{Y} &= \frac{\kappa^2}{3H^2} \dot{V} - \frac{2\kappa^2 V}{3} \frac{\dot{H}}{H^3} = \left(\frac{\kappa^2}{3H^2} \right) \left(\frac{dV}{d\phi} \right) \left(\frac{d\phi}{dt} \right) - \frac{2\kappa^2 V}{3} \frac{\dot{H}}{H^3} \\ &= \frac{\kappa^2}{3H^2} (-\lambda\kappa V) \frac{\sqrt{6}HX}{\kappa} - \frac{2\kappa^2 V}{3H^2} \frac{\dot{H}}{H} = Y^2 \left[-\sqrt{6}\lambda XH - 2\frac{\dot{H}}{H} \right] \end{aligned}$$

es decir

$$\dot{Y} = -Y \left[\sqrt{\frac{3}{2}} \lambda XH + \left(\frac{\dot{H}}{H} \right) \right]. \quad (3.24)$$

Vamos a expresar las derivadas con respecto a la variable $\ln a$ (aunque por el momento vamos a mantener los términos $\dot{H}/H^2$ y $\dot{H}/H$), entonces tenemos

$$\dot{X} = \frac{dX}{dt} = \left(\frac{dX}{d(\ln a)} \right) \frac{d \ln a}{dt} = \left(\frac{dX}{d \ln a} \right) \frac{(\dot{a})}{a} = \left(d \frac{dX}{d \ln a} \right) H \equiv H \cdot X', \quad (3.25)$$

donde hemos definido $\frac{dX}{d(\ln a)} \equiv X'$. Tenemos también la misma relación para la variable Y ($\dot{Y} = Y'H$). Reescribiendo las ecuaciones dinámicas (3.23) y (3.24) obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$X' = -3X + \sqrt{\frac{3}{2}} \lambda Y^2 + \left(\frac{\kappa^2}{6H^3} \right) \frac{Q}{X} - X \left(\frac{\dot{H}}{H^2} \right), \quad (3.26)$$

$$Y' = -Y \left[\sqrt{\frac{3}{2}} \lambda X + \left(\frac{\dot{H}}{H^2} \right) \right]. \quad (3.27)$$

Derivando H respecto al tiempo y usando las ecuaciones (3.12) y (3.13) obtenemos lo siguiente

$$\dot{H} = \frac{dH}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) = \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} = -\frac{3}{2} \left(\frac{\kappa^2}{3} \right) (\rho_c + \dot{\phi}^2), \quad (3.28)$$

ahora multiplicando la ecuación (3.28) por $1/H^2$, obtenemos

$$\frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{3}{2} \left(\frac{\kappa^2 \rho_c}{3H^2} + \frac{\kappa^2 \dot{\phi}^2}{3H^2} \right) = -\frac{3}{2} (\Omega_c + 2X^2), \quad (3.29)$$

donde hemos usado $\Omega_c \equiv \kappa^2 \rho_c / 3H^2$ y $X^2 \equiv \kappa^2 \dot{\phi}^2 / 3H^2$; además usando la restricción de Friedmann (ecuación (3.19)) en (3.29) finalmente obtenemos la siguiente expresión

$$\boxed{\frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{3}{2} (1 + X^2 - Y^2)}. \quad (3.30)$$

Por otro lado, el término de interacción Q puede ser escrito de una forma más conveniente, para ver esto necesitamos llevar a cabo las siguientes manipulaciones algebraicas

$$\dot{\rho}_c + 3H\rho_c = -Q = \alpha\dot{\rho}_c + \beta\dot{\rho}_\phi \Rightarrow \dot{\rho}_c(1 - \alpha) - \beta\dot{\rho}_\phi = -3H\rho_c, \quad (3.31)$$

$$\dot{\rho}_\phi + 3H\dot{\phi}^2 = Q = -\alpha\dot{\rho}_c - \beta\dot{\rho}_\phi \Rightarrow \dot{\rho}_\phi(1 + \beta) + \alpha\dot{\rho}_c = -3H\dot{\phi}^2, \quad (3.32)$$

multiplicando por α la ecuación (3.31) y multiplicando por $(1 - \alpha)$ la ecuación (3.32) obtenemos

$$\dot{\rho}_c \alpha(1 - \alpha) - \alpha\beta\dot{\rho}_\phi = -3H\alpha\rho_c, \quad (3.33)$$

$$\dot{\rho}_c \alpha(1 - \alpha) + (1 + \beta)(1 - \alpha)\dot{\rho}_\phi = -3H\dot{\phi}^2(1 - \alpha), \quad (3.34)$$

ahora restando (3.33) de la ecuación (3.34) y despejando $\dot{\rho}_\phi$ tenemos

$$\boxed{\dot{\rho}_\phi = 3H \left[\frac{\alpha\rho_c - (1 - \alpha)\dot{\phi}^2}{1 - \alpha + \beta} \right]}. \quad (3.35)$$

Ahora, multiplicando la ecuación (3.31) por $(1 + \beta)$ y la ecuación (3.32) por β , tenemos:

$$\dot{\rho}_c(1 - \alpha)(1 + \beta) - (1 + \beta)\beta\dot{\rho}_\phi = -3H(1 + \beta)\rho_c, \quad (3.36)$$

$$\dot{\rho}_c \alpha\beta + (1 + \beta)\beta\dot{\rho}_\phi = -3H\dot{\phi}^2\beta, \quad (3.37)$$

luego sumando las ecuaciones (3.36) y (3.37) y despejando $\dot{\rho}_m$ obtenemos

$$\boxed{\dot{\rho}_c = -3H \left[\frac{(1 + \beta)\rho_c + \beta\dot{\phi}^2}{1 - \alpha + \beta} \right]}. \quad (3.38)$$

Entonces podemos sustituir las ecuaciones (3.35) y (3.38) en la función de interacción que estamos estudiando, lo que nos da la siguiente expresión

$$Q = -\alpha\dot{\rho}_c - \beta\dot{\rho}_\phi = 3H \left[\frac{\alpha\rho_c + \beta\dot{\phi}^2}{1 - \alpha + \beta} \right]. \quad (3.39)$$

Lo interesante de esta manipulación algebraica es que se ha demostrado que una función de interacción que es proporcional a la derivada temporal de la densidad de las componentes, es equivalente a un término que es proporcional a la densidad de la materia más un término que es proporcional a la energía cinética del campo escalar. Vale la pena hacer notar que esto no se había mencionado en trabajos previos.

Por otro lado, observemos que en la ecuación (3.26) aparece un término proporcional a la interacción, el cual puede ser escrito de la siguiente forma

$$\frac{\kappa^2}{6H^3} \frac{Q}{X} = \frac{3}{2(1 - \alpha + \beta)} \frac{1 - X^2 - Y^2}{X} + \frac{3\beta}{1 - \alpha + \beta} X. \quad (3.40)$$

También, notemos que la ecuación para Y' (ec. (3.27)) es independiente de la interacción Q . Entonces, usando la ecuación (3.40) en (3.26), finalmente tenemos el par de ecuaciones de nuestro sistema dinámico

$$X' = -\frac{3(1 - \alpha)}{(1 - \alpha + \beta)} X + \sqrt{\frac{3}{2}} \lambda Y^2 + \left(\frac{3}{2}\right) X [1 + X^2 - Y^2] + \left(\frac{3}{2}\right) \frac{\alpha}{(1 - \alpha + \beta)} \frac{(1 - X^2 - Y^2)}{X}, \quad (3.41)$$

$$Y' = -Y \left[\sqrt{\frac{3}{2}} \lambda X - \left(\frac{3}{2}\right) (1 + X^2 - Y^2) \right], \quad (3.42)$$

recordemos que α , β y λ son constantes y además el espacio fase del sistema dinámico está dado por el semidisco dado por la restricción (3.20). Analizando nuestro modelo, notemos de las ecuaciones dinámicas que cuando $\alpha \neq 0$ y en el límite cuando $X \rightarrow 0$, $Y \rightarrow Y_0$ con $Y_0 \neq \pm 1$, el último término de la ecuación (3.41) diverge y, por lo tanto, la ecuación dinámica no satisface el teorema fundamental de la existencia y unicidad de soluciones para el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales, ya que la ecuación no es continuamente diferenciable en esos puntos, tal y como se explica en la página 74 de la referencia [26]. De hecho, cuando $Y \rightarrow Y_0$ con $Y_0 \neq \pm 1$, tenemos los siguientes límites

$$\lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{dY}{dX} = \begin{cases} 0^+ & \text{si } \frac{\alpha}{(1 - \alpha + \beta)} > 0, \\ 0^- & \text{si } \frac{\alpha}{(1 - \alpha + \beta)} < 0, \end{cases} \quad (3.43)$$

$$\lim_{X \rightarrow 0^-} \frac{dY}{dX} = \begin{cases} 0^- & \text{si } \frac{\alpha}{(1-\alpha+\beta)} > 0, \\ 0^+ & \text{si } \frac{\alpha}{(1-\alpha+\beta)} < 0, \end{cases} \quad (3.44)$$

esto muestra que la línea $X = 0$ es una separatriz en el espacio fase compacto (3.20), esto es, la región cuando $X > 0$ está completamente desconectada causalmente de la región $X < 0$. En la vecindad de $X = 0$ existen dos trayectorias diferentes con las mismas condiciones iniciales o condiciones finales: en el caso $\alpha/(1-\alpha+\beta) > 0$, el punto $X = 0, Y = Y_0$ (con $Y_0 \neq \pm 1$) es una condición inicial para dos trayectorias diferentes que empiezan en ese punto (como ejemplo, mostramos los paneles inferiores derechos de las Figuras 3.4 y 3.6); por el contrario, en el caso cuando $\alpha/(1-\alpha+\beta) < 0$, el punto $X = 0, Y = Y_0$ (con $Y_0 \neq \pm 1$) es el punto final de dos trayectorias distintas (como ejemplo, mostramos los paneles superiores derechos de las Figuras 3.4 y 3.6).

Como hemos mencionado anteriormente, el término de interacción (3.39) fue estudiado en las referencias [28] y [29] donde las ecuaciones que se obtuvieron son incorrectas, lo que significa que los puntos críticos encontrados no son los correctos y, por lo tanto, el subsecuente análisis de estabilidad de tales puntos es incorrecto. En las ecuaciones (9) de la referencia [28] y en la ecuación (18) de la referencia [29] no aparece el término que es inversamente proporcional a X . Por otro lado, el caso cuando $\beta = 0$, bajo la transformación $\frac{\alpha}{1-\alpha} \rightarrow \alpha$, reproduce el modelo II analizado en [31] y por ese motivo no será estudiado en esta tesis.

Una cantidad muy importante es el parámetro de desaceleración q , que en términos de las variables X e Y queda expresado como

$$q \equiv -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} = -\frac{\dot{H}}{H^2} - 1 = \frac{1}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)(X^2 - Y^2), \quad (3.45)$$

y también definimos un parámetro de la ecuación de estado efectiva como

$$\omega_{eff} \equiv \frac{P_{tot}}{\rho_{tot}} = \frac{P_m + P_\phi}{\rho_m + \rho_\phi} = X^2 - Y^2. \quad (3.46)$$

3.1. Análisis dinámico, puntos críticos y estabilidad del sistema

Lo que hemos hecho en la sección anterior es escribir las ecuaciones dinámicas (3.41) y (3.42) usando las variables definidas en (3.18), esto con el objetivo de hacer un análisis usando las herramientas de la teoría de sistemas dinámicos para ecuaciones diferenciales ordinarias. A grandes rasgos, **un sistema dinámico puede ser pensado como un sistema abstracto que**

consiste en un espacio fase y una regla matemática que describe la evolución de un punto en el espacio fase [27].

Denotando con la letra griega $\Sigma \subseteq \mathcal{R}^n$ el espacio fase del sistema (Σ es un subconjunto abierto), sea $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ un punto en el espacio fase Σ , entonces la forma general de un sistema dinámico es escrito como

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (3.47)$$

donde $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x}))$ es una función vectorial tal que $\mathbf{f} : \Sigma \rightarrow \mathcal{R}^n$ y el punto sobre $\mathbf{x}$ significa la derivada respecto de algún parámetro temporal adecuado para el sistema. Si $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$, $\mathbf{x}_0$ es llamado un punto crítico del sistema. Para determinar la estabilidad de los puntos críticos debemos desarrollar linealmente la función $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ alrededor de tales puntos críticos $\mathbf{x}_0$. Entonces, expandiendo la i -ésima componente del sistema de ecuaciones, el lado derecho de la ecuación (3.47) queda expresado como

$$f_i(\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{x}_0) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) \Big|_{\mathbf{x}_0} \delta x_j + \dots, \quad (3.48)$$

por lo que expandiendo a primer orden la i -ésima componente de la ecuación dinámica (3.47) obtenemos

$$\delta \dot{x}_i = \sum_{j=1}^n J_i^j \Big|_{\mathbf{x}_0} \cdot \delta x_j, \quad (3.49)$$

en donde hemos definido

$$J = (J_i^j) \equiv \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}. \quad (3.50)$$

Los eigenvalores de la matriz J nos permiten saber la estabilidad del sistema siempre y cuando la parte real sea distinta de cero. Para un sistema de dos dimensiones, el siguiente teorema (descrito en la referencia [26]) describe las propiedades de la estabilidad.

Teorema 3.1.1 Sea $\delta = \det J|_{\mathbf{x}_0}$ y $\tau = \text{traza de } J|_{\mathbf{x}_0}$ evaluados en el punto crítico $\mathbf{x}_0$ y considere el sistema linealizado dado por la ecuación

$$\delta \dot{\mathbf{x}} = J|_{\mathbf{x}_0} \cdot \delta \mathbf{x}. \quad (3.51)$$

- a) Si $\delta < 0$, entonces en el punto crítico $\mathbf{x}_0$ es un punto silla.
 - b) Si $\delta > 0$ y $\tau^2 - 4\delta \geq 0$ entonces el sistema dinámico linealizado es estable si $\tau < 0$ e inestable si $\tau > 0$ en el punto crítico $\mathbf{x}_0$.
 - c) Si $\delta > 0$, $\tau^2 - 4\delta < 0$ y $\tau \neq 0$ entonces es estable si $\tau < 0$ e inestable si $\tau > 0$.
 - d) Si $\delta > 0$ y $\tau = 0$ entonces el punto crítico es un centro.
- En el caso (b), $\tau^2 \geq 4|\delta| > 0$; es decir, $\tau \neq 0$.

Cuadro 3.1: Puntos críticos del sistema dinámico.

Punto	X	Y
A_+	$\sqrt{\left[\frac{(1-\beta)+\sqrt{\Delta(\alpha,\beta)}}{2(1+\beta-\alpha)}\right]}$	0
A_-	$-\sqrt{\left[\frac{(1-\beta)+\sqrt{\Delta(\alpha,\beta)}}{2(1+\beta-\alpha)}\right]}$	0
B_+	$\sqrt{\left[\frac{(1-\beta)-\sqrt{\Delta(\alpha,\beta)}}{2(1+\beta-\alpha)}\right]}$	0
B_-	$-\sqrt{\left[\frac{(1-\beta)-\sqrt{\Delta(\alpha,\beta)}}{2(1+\beta-\alpha)}\right]}$	0
C_+	$\frac{(3+(1+\beta-\alpha)\lambda^2)+\sqrt{\Gamma(\alpha,\beta,\lambda)}}{2\sqrt{6}\lambda(1+\beta-\alpha)}$	$\frac{1}{6}\sqrt{-3\lambda^2+\frac{9(3+\sqrt{\Gamma(\alpha,\beta,\lambda)})}{(1-\alpha+\beta)^2\lambda^2}+\frac{3(6-12\alpha+6\beta+\sqrt{\Gamma(\alpha,\beta,\lambda)})}{(1-\alpha+\beta)}}$
C_-	$\frac{(3+(1+\beta-\alpha)\lambda^2)-\sqrt{\Gamma(\alpha,\beta,\lambda)}}{2\sqrt{6}\lambda(1+\beta-\alpha)}$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{\frac{6-12\alpha+6\beta+\sqrt{\Gamma(\alpha,\beta,\lambda)}}{(1-\alpha+\beta)}-\frac{3(-3+\sqrt{\Gamma(\alpha,\beta,\lambda)})}{(1-\alpha+\beta)^2\lambda^2}}-\lambda^2$

Ahora que hemos descrito las herramientas de los sistemas dinámicos para un sistema de dos dimensiones, podemos empezar a estudiar el modelo de interacción dado por las ecuaciones (3.41) y (3.42). Con $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \equiv (X, Y)$ y $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ tenemos las siguientes ecuaciones,

$$f_1(X, Y) = -\frac{3(1-\alpha)}{(1-\alpha+\beta)}X + \sqrt{\frac{3}{2}}\lambda Y^2 + \left(\frac{3}{2}\right)X[1+X^2-Y^2] + \left(\frac{3}{2}\right)\frac{\alpha}{(1-\alpha+\beta)}\frac{(1-X^2-Y^2)}{X}, \quad (3.52)$$

$$f_2(X, Y) = -Y\left[\sqrt{\frac{3}{2}}\lambda X - \left(\frac{3}{2}\right)(1+X^2-Y^2)\right], \quad (3.53)$$

y además tenemos la siguiente matriz J

$$J = (J_i^j) \equiv \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}. \quad (3.54)$$

Para calcular los puntos críticos de nuestro sistema debemos resolver las ecuaciones $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = (f_1(X_0, Y_0), f_2(X_0, Y_0)) = 0$. Los puntos críticos obtenidos se muestran en el Cuadro 3.1, donde hemos definido las funciones

$$\Delta(\alpha, \beta) \equiv (1-\beta)^2 - 4\alpha(1-\alpha+\beta), \quad (3.55)$$

Cuadro 3.2: Puntos críticos del sistema dinámico para $\alpha = 0$.

Punto	X	Y	Ω_m	Ω_ϕ	$\frac{\Omega_m}{\Omega_\phi}$
O	0	0	1	0	no está definido
D_+	$\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$	0	$\frac{2\beta}{1+\beta}$	$\frac{1-\beta}{1+\beta}$	$\frac{2\beta}{1-\beta}$
D_-	$-\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$	0	$\frac{2\beta}{1+\beta}$	$\frac{1-\beta}{1+\beta}$	$\frac{2\beta}{1-\beta}$
E_+	$\frac{3+(1+\beta)\lambda^2+\sqrt{\Gamma_1}}{2\sqrt{6\lambda}(1+\beta)}$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{\frac{3(3+\sqrt{\Gamma_1})}{(1+\beta)^2\lambda^2} + \frac{(6+6\beta-\sqrt{\Gamma_1})}{(1+\beta)}} - \lambda^2$	$\frac{\lambda^2(1+\beta)(1+2\beta)-\sqrt{\Gamma_1}-3}{2\lambda^2(1+\beta)^2}$	$\frac{3+(1+\beta)\lambda^2+\sqrt{\Gamma_1}}{2\lambda^2(1+\beta)^2}$	$\frac{(1+\beta)\lambda^2-\sqrt{\Gamma_1}-3}{6}$
E_-	$\frac{3+(1+\beta)\lambda^2-\sqrt{\Gamma_1}}{2\sqrt{6\lambda}(1+\beta)}$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{\frac{3(3-\sqrt{\Gamma_1})}{(1+\beta)^2\lambda^2} + \frac{(6+6\beta+\sqrt{\Gamma_1})}{(1+\beta)}} - \lambda^2$	$\frac{\lambda^2(1+\beta)(1+2\beta)+\sqrt{\Gamma_1}-3}{2\lambda^2(1+\beta)^2}$	$\frac{3+(1+\beta)\lambda^2-\sqrt{\Gamma_1}}{2\lambda^2(1+\beta)^2}$	$\frac{(1+\beta)\lambda^2+\sqrt{\Gamma_1}-3}{6}$

$$\Gamma(\alpha, \beta, \lambda) \equiv (1 - \alpha + \beta)^2 \lambda^2 [\lambda^2 - 6(1 + 2\beta)] + 9. \quad (3.56)$$

Recordemos que nuestro objetivo es calcular la estabilidad de los puntos críticos del sistema, para eso vamos a proceder a determinar las regiones de existencia de los puntos críticos teniendo en cuenta el espacio fase dado por (3.20). Para cada uno de los puntos A_+ , A_- , B_+ y B_- es sencillo determinar sus respectivas regiones de existencia; sin embargo, para los puntos C_+ y C_- es complicado, ya que dependen de λ , pero notemos que la componente X de estos puntos críticos tiene la siguiente simetría $X(\alpha, \beta, -\lambda) = -X(\alpha, \beta, \lambda)$, aprovechando esta propiedad vamos a determinar la región de existencia solamente para $\lambda \geq 0$ (para los puntos críticos C_+ y C_-). Para simplificar un poco más la tarea vamos a estudiar solo los casos especiales que a continuación se describen.

3.2. Escenario $\alpha = 0$

Para este caso la interacción se reduce a

$$Q = -\beta \dot{\rho}_\phi = \frac{3H\beta}{1+\beta} \dot{\phi}^2, \quad (3.57)$$

mientras que las funciones Δ y Γ toman la forma

$$\Delta(0, \beta) \equiv (1 - \beta)^2, \quad (3.58)$$

$$\Gamma_1 \equiv \Gamma(0, \beta, \lambda) \equiv (1 + \beta)^2 \lambda^4 - 6\lambda^2(1 + \beta)(1 + 2\beta) + 9. \quad (3.59)$$

En este escenario encontramos los cinco puntos críticos que se muestran en el Cuadro 3.2. Los puntos A_+ , A_- , B_+ y B_- reportados en el Cuadro 3.1, se reducen a los puntos O , D_+ y D_- que se reportan en el Cuadro 3.2.

La condición de existencia, estabilidad, aceleración y ω_{eff} son reportados en el Cuadro 3.3. La región de existencia del punto crítico E_+ es la región 1 reportada en el apéndice A, la cual

se muestra en la Figura 3.1a. La región de existencia del punto crítico E_- es la región 2 que se reporta en el apéndice A, esta región no está acotada en λ por eso solo reportamos la región que se muestra en la Figura 3.1b. Notemos que salvo el punto crítico O , todos los puntos críticos son de tipo escala (scaling solutions).

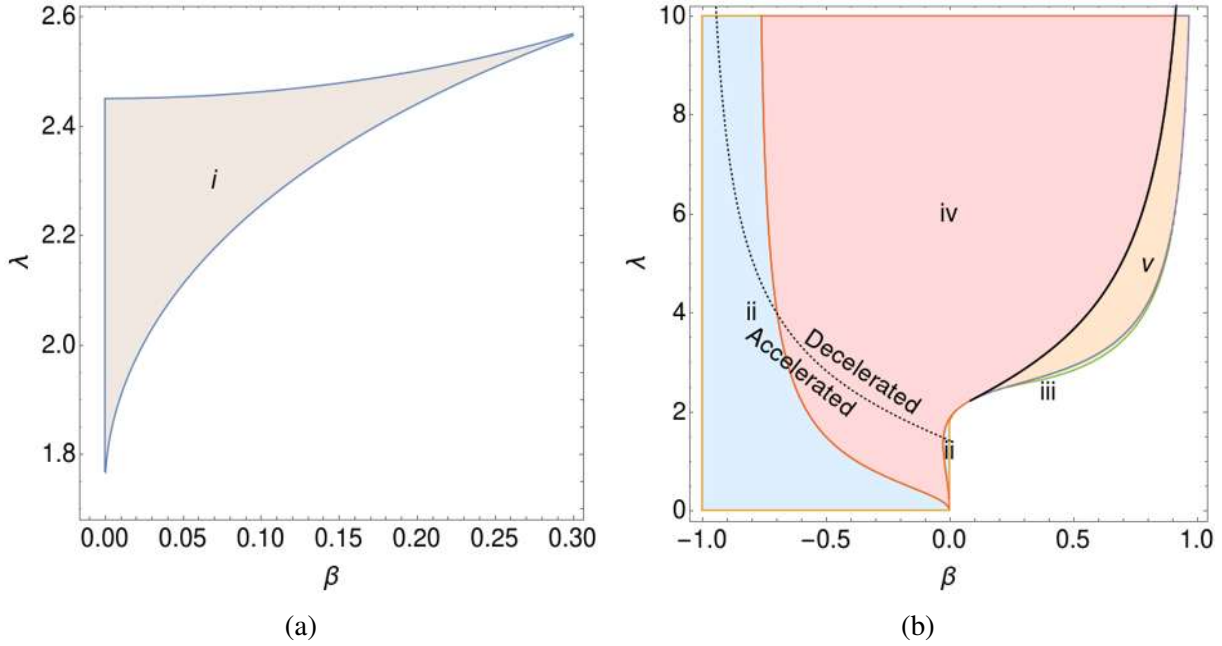


Figura 3.1: En la figura (a) se muestra la región de existencia del punto crítico E_+ , aquí en toda la región E_+ es punto silla no acelerado. La figura (b) muestra una parte de la región de existencia del punto crítico E_- , en ii contiene puntos estables, iii son puntos inestables, iv son espirales estables, v espirales inestables y puntos centro en la línea negra. La línea punteada en la figura (b) divide la región acelerada de la región no acelerada.

En el Cuadro 3.3, vemos que existe aceleración ($q < 0$) solo para el punto crítico E_- , en la Figura 3.1b se muestra cómo queda dividida la región acelerada y la desacelerada mediante la línea punteada. Con el propósito de ilustrar un par de casos concretos, mostramos la Figura 3.2. A continuación vamos a discutir brevemente la estabilidad y algunas propiedades de los puntos críticos.

(i) Punto O : En esta solución la materia oscura domina con la condición de que $\beta \neq -1$ y es independiente de la forma del potencial de autointeracción. Aquí la ecuación de estado efectiva es cero ($\omega_{eff} = 0$), por lo tanto, este punto es desacelerado, de hecho $q = 1/2$. Cuando $-1 < \beta < 1$ se comporta como punto silla y punto inestable en cualquier otro caso. Para el caso cuando no existe interacción, este punto se comporta siempre como punto silla.

(ii) Punto D_+ : Existe una solución escala para todos los valores del parámetro λ y para

Cuadro 3.3: Significado físico de los puntos críticos del sistema autónomo del caso $\alpha = 0$.

Punto	Existencia	Estabilidad	$q < 0$	ω_{eff}
O	Para todo λ y toda β con $\beta \neq -1$	Silla para todo λ y $-1 < \beta < 1$ Inestable para todo λ y ($\beta > 1$ o $\beta < -1$)	No $q = \frac{1}{2}$	0
D_+	Para todo λ y $0 \leq \beta < 1$	Silla para $\lambda > \sqrt{\frac{6}{1-\beta^2}}$ y $0 \leq \beta < 1$ Inestable para $\lambda < \sqrt{\frac{6}{1-\beta^2}}$ y $0 \leq \beta < 1$	No	$\frac{1-\beta}{1+\beta}$
D_-	Para todo λ y $0 \leq \beta < 1$	Silla para $\lambda < -\sqrt{\frac{6}{1-\beta^2}}$ y $0 \leq \beta < 1$ Inestable para $\lambda > -\sqrt{\frac{6}{1-\beta^2}}$ y $0 \leq \beta < 1$	No	$\frac{1-\beta}{1+\beta}$
E_+	Región 1 del apéndice A	Silla en toda la región i en la Figura 3.1a	No	$\frac{\lambda^2-3+(\lambda^2-6)\beta+\sqrt{\Gamma_1}}{6(1+\beta)}$
E_-	Región 2 del apéndice A	Estable: área ii de la Figura 3.1b Inestable: área iii en la Figura 3.1b Espiral estable: área iv en la Figura 3.1b Espiral inestable: área v en la Figura 3.1b Centro: Curva negra en la Figura 3.1b	$-1 < \beta \leq 0$ y $0 < \lambda < \sqrt{\frac{2-4\beta}{1+\beta}}$	$\frac{\lambda^2-3+\beta(\lambda^2-6)-\sqrt{\Gamma_1}}{6(1+\beta)}$

$0 \leq \beta < 1$. El caso especial $\beta = 0$ denota un universo dominado por la energía cinética del campo escalar ($\Omega_m = 0$, $X = 1$ e $Y = 0$). El límite cuando $\beta \rightarrow 1$ corresponde a un punto donde la materia domina ($\Omega_m \rightarrow 1$, $X \rightarrow 0$ e $Y = 0$). El parámetro de la ecuación de estado efectiva ω_{eff} nunca es negativo, de hecho está en el rango $(0, 1]$, por lo tanto, este punto en ningún momento es acelerado. Cuando $\lambda < \sqrt{\frac{6}{1-\beta^2}}$ la solución es un atractor en el pasado y para $\lambda > \sqrt{\frac{6}{1-\beta^2}}$ se comporta como punto silla y entonces en ningún momento se comporta como atractor en el futuro.

(iii) Punto D_- : La solución existe para todo λ , pero se requiere que $0 \leq \beta < 1$. En el límite cuando $\beta \rightarrow 1$, la materia oscura domina ($\Omega_m \rightarrow 1$, $X \rightarrow 0$ e $Y = 0$). El parámetro de la ecuación de estado efectiva es siempre positivo $\omega_{eff} = \frac{1-\beta}{1+\beta} \in (0, 1]$, y por lo tanto, la solución es desacelerada. Este punto se comporta como silla cuando $\lambda < -\sqrt{\frac{6}{1-\beta^2}}$ y es inestable cuando $\lambda > -\sqrt{\frac{6}{1-\beta^2}}$.

(iv) Punto E_+ : La solución existe en la región 1 reportada en el apéndice A y siempre se comporta como punto silla. Por lo tanto, no puede ser atractor a tiempos tardíos. Para $\beta = 0$ la densidad de materia es cero $\Omega_m = 0$ mientras $X = \frac{\lambda}{\sqrt{6}}$ e $Y = \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{6}}$, en este caso domina el campo escalar. Cuando $\beta = \frac{1}{3}$ y $\lambda = \sqrt{\frac{27}{4}}$ el universo tiene las siguientes componentes $\Omega_m = \frac{1}{2}$,

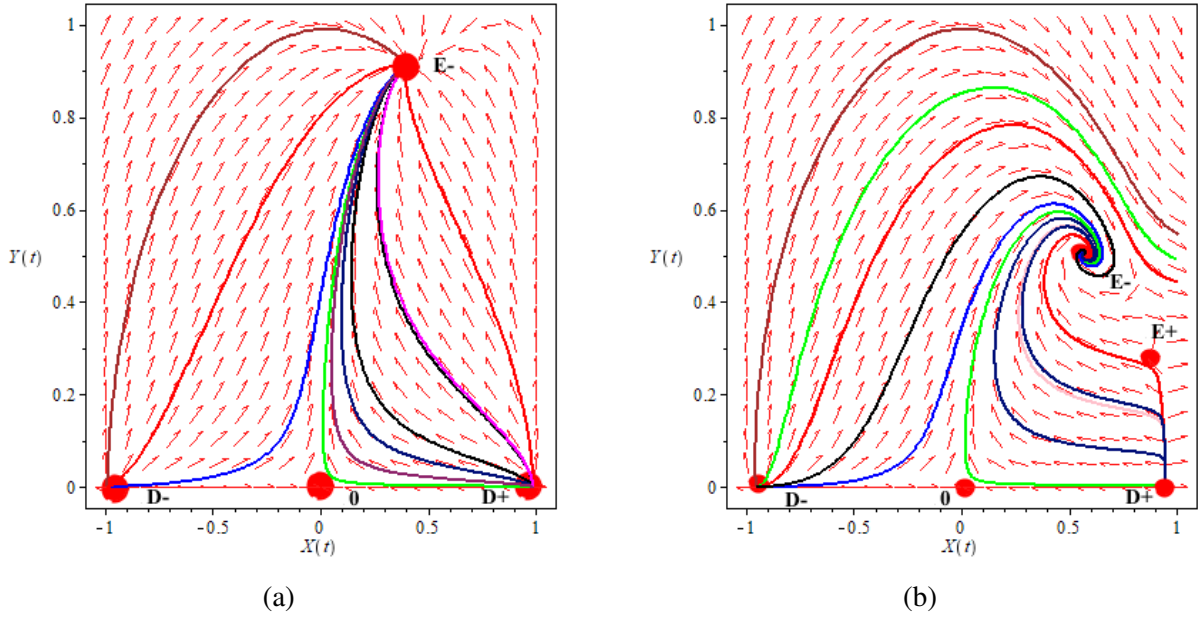


Figura 3.2: Espacio fase del sistema dinámico (3.41) y (3.42) para el caso $\alpha = 0$. En la Figura (a) se muestra el caso, cuando $\beta = 0.01$ y $\lambda = 1$, los puntos D_+ y D_- corresponden a puntos inestables, el punto O es silla y el punto E_- describe una solución estable acelerada, por lo tanto, puede ser de interés cosmológico. En la Figura (b) se muestra el caso cuando $\beta = 0.05$ y $\lambda = 2.3$, los puntos D_+ y D_- son puntos inestables, el punto O también es silla, el punto E_+ (ausente en el caso anterior) es silla y el punto E_- es una solución estable no acelerada y, por lo tanto, no es de interés, ya que las observaciones indican que debe existir una solución futura estable acelerada. Para ilustrar, también se muestran algunas trayectorias (líneas de distintos colores) en las Figuras (a) y (b).

$X = \frac{1}{2}$ e $Y = 0$. En general, Ω_m , X e Y nunca se desvanecen simultáneamente, y la energía cinética del campo escalar nunca llega a dominar.

(v) Punto E_- : La solución existe para la región 2 reportada en el apéndice A. Este punto puede ser estable, inestable, espiral inestable y punto centro. Esta solución es acelerada cuando $\lambda < \sqrt{\frac{2-4\beta}{(1+\beta)}}$ y $-1 < \beta \leq 0$ y, por lo tanto, podría ser el estado tardío de nuestro universo. Como un ejemplo, cuando $\beta = -\frac{1}{2}$ y $\lambda = 1$ tenemos las siguientes cantidades $X \approx 0.187$, $Y \approx 0.939$, $\Omega_m \approx 0.082$ y $q = -0.270$. En los modelos no interactuantes este punto es estable o espiral estable.

Cuadro 3.4: Puntos críticos del sistema dinámico del caso $\alpha = \beta \equiv \zeta$.

Punto	X	Y	Ω_m	Ω_ϕ	$\frac{\Omega_m}{\Omega_\phi}$
F_+	$\sqrt{\left[\frac{1-\zeta+\sqrt{\zeta^2-6\zeta+1}}{2}\right]}$	0	$\frac{1+\zeta-\sqrt{\zeta^2-6\zeta+1}}{2}$	$\frac{1-\zeta+\sqrt{\zeta^2-6\zeta+1}}{2}$	$\frac{1+\zeta-\sqrt{\zeta^2-6\zeta+1}}{1-\zeta+\sqrt{\zeta^2-6\zeta+1}}$
F_-	$-\sqrt{\left[\frac{1-\zeta+\sqrt{\zeta^2-6\zeta+1}}{2}\right]}$	0	$\frac{1+\zeta-\sqrt{\zeta^2-6\zeta+1}}{2}$	$\frac{1-\zeta+\sqrt{\zeta^2-6\zeta+1}}{2}$	$\frac{1+\zeta-\sqrt{\zeta^2-6\zeta+1}}{1-\zeta+\sqrt{\zeta^2-6\zeta+1}}$
G_+	$\sqrt{\left[\frac{1-\zeta-\sqrt{\zeta^2-6\zeta+1}}{2}\right]}$	0	$\frac{1+\zeta+\sqrt{\zeta^2-6\zeta+1}}{2}$	$\frac{1-\zeta-\sqrt{\zeta^2-6\zeta+1}}{2}$	$\frac{1+\zeta+\sqrt{\zeta^2-6\zeta+1}}{1-\zeta-\sqrt{\zeta^2-6\zeta+1}}$
G_-	$-\sqrt{\left[\frac{1-\zeta-\sqrt{\zeta^2-6\zeta+1}}{2}\right]}$	0	$\frac{1+\zeta+\sqrt{\zeta^2-6\zeta+1}}{2}$	$\frac{1-\zeta-\sqrt{\zeta^2-6\zeta+1}}{2}$	$\frac{1+\zeta+\sqrt{\zeta^2-6\zeta+1}}{1-\zeta-\sqrt{\zeta^2-6\zeta+1}}$
H_+	$\frac{(3+\lambda^2)+\sqrt{\Gamma_2}}{2\sqrt{6}\lambda}$	$\sqrt{\frac{6(1-\zeta)-\lambda^2-\sqrt{\Gamma_2}}{12} + \frac{3+\sqrt{\Gamma_2}}{4\lambda^2}}$	$\frac{(1+2\zeta)\lambda^2-3-\sqrt{\Gamma_2}}{2\lambda^2}$	$\frac{3+(1-2\zeta)\lambda^2+\sqrt{\Gamma_2}}{2\lambda^2}$	$\frac{(1-2\zeta)\lambda^2-3-\sqrt{\Gamma_2}}{6+2(\zeta-1)\zeta\lambda^2}$
H_-	$\frac{(3+\lambda^2)-\sqrt{\Gamma_2}}{2\sqrt{6}\lambda}$	$\sqrt{\frac{6(1-\zeta)-\lambda^2+\sqrt{\Gamma_2}}{12} + \frac{3-\sqrt{\Gamma_2}}{4\lambda^2}}$	$\frac{(1+2\zeta)\lambda^2-3+\sqrt{\Gamma_2}}{2\lambda^2}$	$\frac{3+(1-2\zeta)\lambda^2-\sqrt{\Gamma_2}}{2\lambda^2}$	$\frac{(1-2\zeta)\lambda^2-3+\sqrt{\Gamma_2}}{6+2(\zeta-1)\zeta\lambda^2}$

3.3. Escenario $\alpha = \beta$

Para este caso la interacción es

$$Q = -\zeta(\dot{\rho}_c + \dot{\rho}_\phi) = 3H\zeta(\rho_c + \dot{\phi}^2), \quad (3.60)$$

donde $\zeta \equiv \alpha = \beta$. Los puntos críticos son reportados en el Cuadro 3.4, las funciones Δ y Γ quedan expresadas como

$$\begin{aligned} \Delta(\zeta, \zeta) &= \zeta^2 - 6\zeta + 1, \\ \Gamma_2 \equiv \Gamma(\zeta, \zeta, \lambda) &= \lambda^4 - 6\lambda^2(1 + 2\zeta) + 9. \end{aligned}$$

La existencia, estabilidad, aceleración ($q < 0$) y ω_{eff} son reportados en el Cuadro 3.5. Las regiones de existencia de los puntos críticos H_+ y H_- son llamadas región 3 y región 4 respectivamente en el apéndice A. La región de existencia del punto crítico H_+ se muestra en la Figura 3.3a. La región de existencia para el punto crítico H_- no está acotada en λ , por esta razón solo mostramos la estabilidad en la región que se muestra en la Figura 3.3b. Para este caso todos los puntos críticos son de tipo escalante.

En el Cuadro 3.5 se han definido las funciones $w_1(\zeta)$ y $w_2(\zeta)$ como

$$\begin{aligned} w_1(\zeta) &= \sqrt{\frac{12\zeta + 3 - 3\zeta^2 - 3\sqrt{(-1+\zeta)^2(1-6\zeta+\zeta^2)}}{4\zeta}}, \\ w_2(\zeta) &= \sqrt{\frac{12\zeta + 3 - 3\zeta^2 + 3\sqrt{(-1+\zeta)^2(1-6\zeta+\zeta^2)}}{4\zeta}} \end{aligned}$$

Cuadro 3.5: Significado físico de los puntos críticos para el sistema autónomo del caso $\alpha = \beta \equiv \zeta$.

Punto	Existencia	Estabilidad	$q < 0$	ω_{eff}
F_+	$0 \leq \zeta < 3 - 2\sqrt{2}$	Silla para $\lambda > \sqrt{6}$ y $\zeta = 0$ Silla para $\lambda > w_1(\zeta)$ y $0 < \zeta < 3 - 2\sqrt{2}$ Inestable para $\lambda < \sqrt{6}$ y $\zeta = 0$ Inestable para $\lambda < w_1(\zeta)$ y $0 < \zeta < 3 - 2\sqrt{2}$	No	$\frac{(1-\zeta)+\sqrt{\zeta^2-6\zeta+1}}{2}$
F_-	$0 \leq \zeta < 3 - 2\sqrt{2}$	Silla $\lambda < -\sqrt{6}$ y $\zeta = 0$ Silla para $\lambda < -w_1(\zeta)$ y $0 < \zeta < 3 - 2\sqrt{2}$ Inestable para $\lambda > -\sqrt{6}$ y $\zeta = 0$ Inestable para $\lambda > -w_1(\zeta)$ y $0 < \zeta < 3 - 2\sqrt{2}$	No	$\frac{(1-\zeta)+\sqrt{(1-\zeta)^2-4\zeta}}{2}$
G_+	$0 \leq \zeta < 3 - 2\sqrt{2}$	Silla para todo λ y $\zeta = 0$ Silla para $\lambda < w_2(\zeta)$ y $0 < \zeta < 3 - 2\sqrt{2}$ Estable para $\lambda > w_2(\zeta)$ y $0 < \zeta < 3 - 2\sqrt{2}$	No	$\frac{(1-\zeta)-\sqrt{(1-\zeta)^2-4\zeta}}{2}$
G_-	$0 \leq \zeta < 3 - 2\sqrt{2}$	Silla para toda λ y $\zeta = 0$ Silla para $\zeta > -w_2(\zeta)$ y $0 < \zeta < 3 - 2\sqrt{2}$ Estable para $\lambda < -w_2(\zeta)$ y $0 < \zeta < 3 - 2\sqrt{2}$	No	$\frac{(1-\zeta)-\sqrt{(1-\zeta)^2-4\zeta}}{2}$
H_+	Región 3 del apéndice A	Silla para $\sqrt{3} < \lambda < \sqrt{6}$ y $\zeta = 0$ Silla en la región 3 con $\zeta \neq 0$	No	$\frac{\lambda^2-3+\sqrt{\Gamma_2}}{6}$
H_-	Región 4 del apéndice A	Estable: parte ii en la Figura 3.3a Inestable: parte iii en la Figura 3.3a Espiral Estable: parte iv en la Figura 3.3a Espiral inestable: parte v de la Figura 3.3a Centro: Curva negra en la Figura 3.3a	Región R_{H_-}	$\frac{\lambda^2-3-\sqrt{\Gamma_2}}{6}$

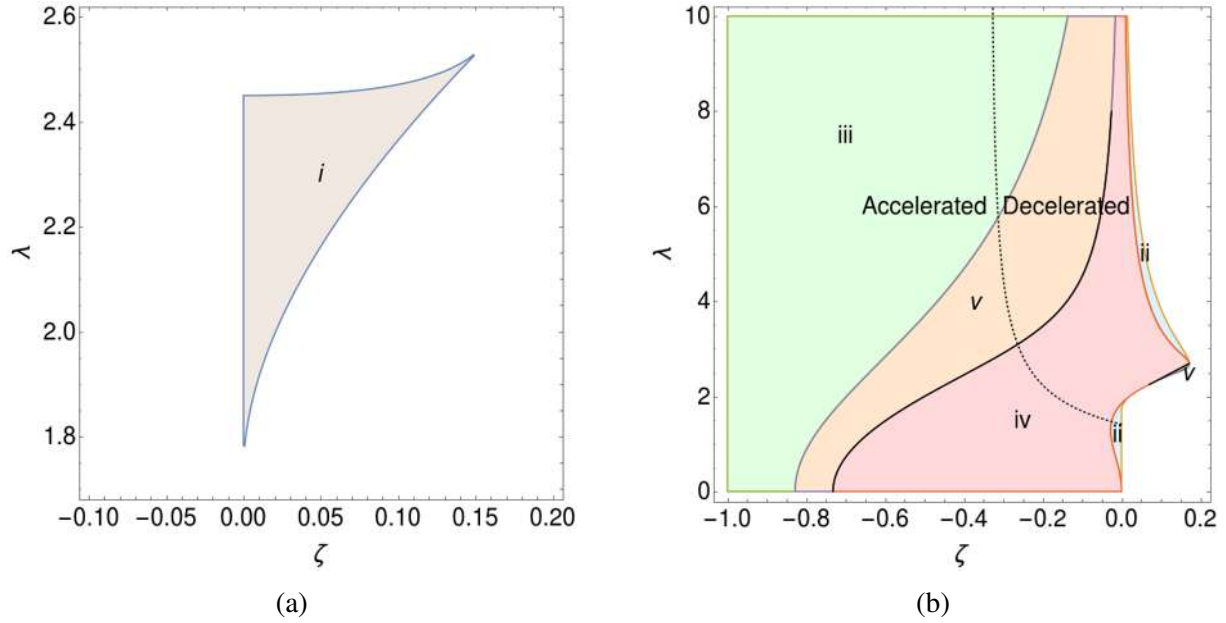


Figura 3.3: Figura (a) es la región de la existencia de solución de H_+ para el caso $\alpha = \beta \equiv \zeta$, en toda esta región se tienen puntos silla. La Figura (b) muestra una parte de la región de existencia del punto crítico H_- cuando $\alpha = \beta \equiv \zeta$. La región ii contiene puntos estables, iii puntos inestables, iv puntos espirales estables, v puntos espirales inestables y la línea negra contiene puntos centro. La curva negra discontinua divide el universo en una parte acelerada y en otra desacelerada.

y la región R_{H_-} como:

$$R_{H_-} = \left(\lambda < \sqrt{\frac{2}{1+3\zeta}} y - \frac{1}{3} < \zeta \leq 0 \right) \cup \left(\lambda > 0 \text{ y } -1 < \zeta \leq -\frac{1}{3} \right). \quad (3.61)$$

A continuación vamos a describir brevemente la estabilidad de los puntos críticos del sistema dinámico cuando $\alpha = \beta$ y además en la Figura 3.4 podemos ver un par de escenarios ilustrativos.

(i) Punto F_+ : Existe para toda λ y $0 \leq \zeta < 3 - 2\sqrt{2}$. Cuando $\zeta = 0$ (sin interacción) el universo es dominado por la energía cinética del campo escalar ($\Omega_m = 0$, $X = 1$ e $Y = 0$), por otro lado, cuando $\zeta \rightarrow 3 - 2\sqrt{2}$ tenemos las siguientes componentes $\Omega_m \rightarrow 0.58$, $X \rightarrow 0.64$ e $Y = 0$. Para todo λ y $\zeta = 0$ o para $\lambda > w_1(\zeta)$ y $0 < \zeta < 3 - 2\sqrt{2}$ este es un punto silla. Para $\lambda < \sqrt{6}$ y $\zeta = 0$ o para $\lambda < w_1(\zeta)$ y $0 < \zeta < 3 - 3\sqrt{2}$ este es un punto inestable. Podemos determinar que $\omega_{eff} \in (0.41, 1]$, de aquí que no existe aceleración.

(ii) Punto F_- : Esta solución corresponde a un universo desacelerado y existe solo para

$0 \leq \zeta < 3 - 2\sqrt{2}$. Para el escenario no acoplado ($\zeta = 0$), el universo es dominado por la energía cinética del campo escalar $\Omega_m = 0$, $X = -1$ e $Y = 0$. En el límite cuando $\zeta \rightarrow 3 - 2\sqrt{2}$ los parámetros cosmológicos tienden a los siguientes valores $\Omega_m \rightarrow 0.58$, $X \rightarrow -0.64$ e $Y = 0$.

(iii) Punto G_+ : Existe para toda λ y $0 \leq \zeta < 3 - 2\sqrt{2}$. Cuando no existe interacción $\zeta = 0$ tenemos $\Omega_m = 1$, $X = 0$, $Y = 0$, esto corresponde a un universo dominado por la materia. En el límite cuando $\zeta \rightarrow 3 - 2\sqrt{2}$ las componentes tienden a los valores $\Omega_m \rightarrow 0.58$, $X \rightarrow 0.64$ e $Y = 0$, vemos que para este punto crítico el campo escalar nunca domina completamente. Es posible determinar el rango del parámetro de la ecuación de estado efectiva y está dado por $\omega_{eff} \in [0, 0.41)$, también vemos que para este punto no existe aceleración. Este punto es silla para todo λ y $\zeta = 0$ o para $\lambda < w_2(\zeta)$ y $0 < \zeta < 3 - 2\sqrt{2}$. El punto crítico es estable para $\lambda > w_2(\zeta)$ y $0 < \zeta < 3 - 2\sqrt{2}$.

(iv) Punto G_- : Esta solución existe para todo λ y $0 \leq \zeta < 3 - 2\sqrt{2}$. El caso cuando $\zeta \neq 0$ corresponde a una solución de escala, mientras $\zeta = 0$ es una solución donde la materia domina ($\Omega_m = 1$, $X = 0$ e $Y = 0$). En el límite cuando $\zeta \rightarrow 3 - 2\sqrt{2}$ los parámetros cosmológicos tienden a los siguientes valores $\Omega_m \rightarrow 0.58$, $X \rightarrow -0.64$ e $Y = 0$, de aquí vemos que el campo escalar nunca llega a dominar completamente. El parámetro de la ecuación de estado efectivo ω_{eff} es localizado en el intervalo $[0, 0.41)$ y, por lo tanto, la solución nunca es acelerada.

(v) Punto H_+ : Existe para la región 3 reportada en el apéndice A y es mostrado en la Figura 3.3a. Este punto es silla en toda la región. El caso particular cuando $\lambda = \sqrt{6}$ y $\zeta = 0$ tiene las componentes $\Omega_m = 0$, $X = 1$ e $Y = 0$, por lo tanto es dominado por la energía cinética del campo escalar. Cuando $\lambda = \sqrt{3}$ y $\zeta = 0$ los valores de los componentes son $\Omega_m = 0$, $X = \frac{1}{2}$ e $Y = \frac{1}{2}$, entonces el campo escalar es el que domina, y cuando $\lambda = \sqrt{6}$ y $\zeta = 0.1$ los valores de los componentes son $\Omega_m \approx 0.23$, $X \approx 0.68$ e $Y \approx 0.01$. En toda la región no existe aceleración.

(vi) Punto H_- : Existe para la región 4 reportada en el apéndice A, esta región no está acotada en λ , por esa razón estudiamos solo la región que se muestra en la Figura 3.3b. Observamos que este punto puede ser silla, estable, inestable, espiral estable, espiral inestable y centro, dependiendo de los valores de λ y ζ . La curva negra punteada divide la región en una parte acelerada y otra desacelerada. Para $\lambda = 4$ y $\zeta = -0.4$ tenemos $\Omega_m \approx 0.49$, $X \approx 0.16$, $Y \approx 0.68$, $\omega_{eff} \approx -0.44$ y $q \approx -0.16$, este punto corresponde a una espiral inestable acelerada. Para $\lambda = 4$, $\zeta = -0.2$ tenemos $\Omega_m \approx 0.88$, $X = Y \approx 0.23$, $\Omega_{eff} = 0$ y $q = 0.5$, este punto es una espiral desacelerada.

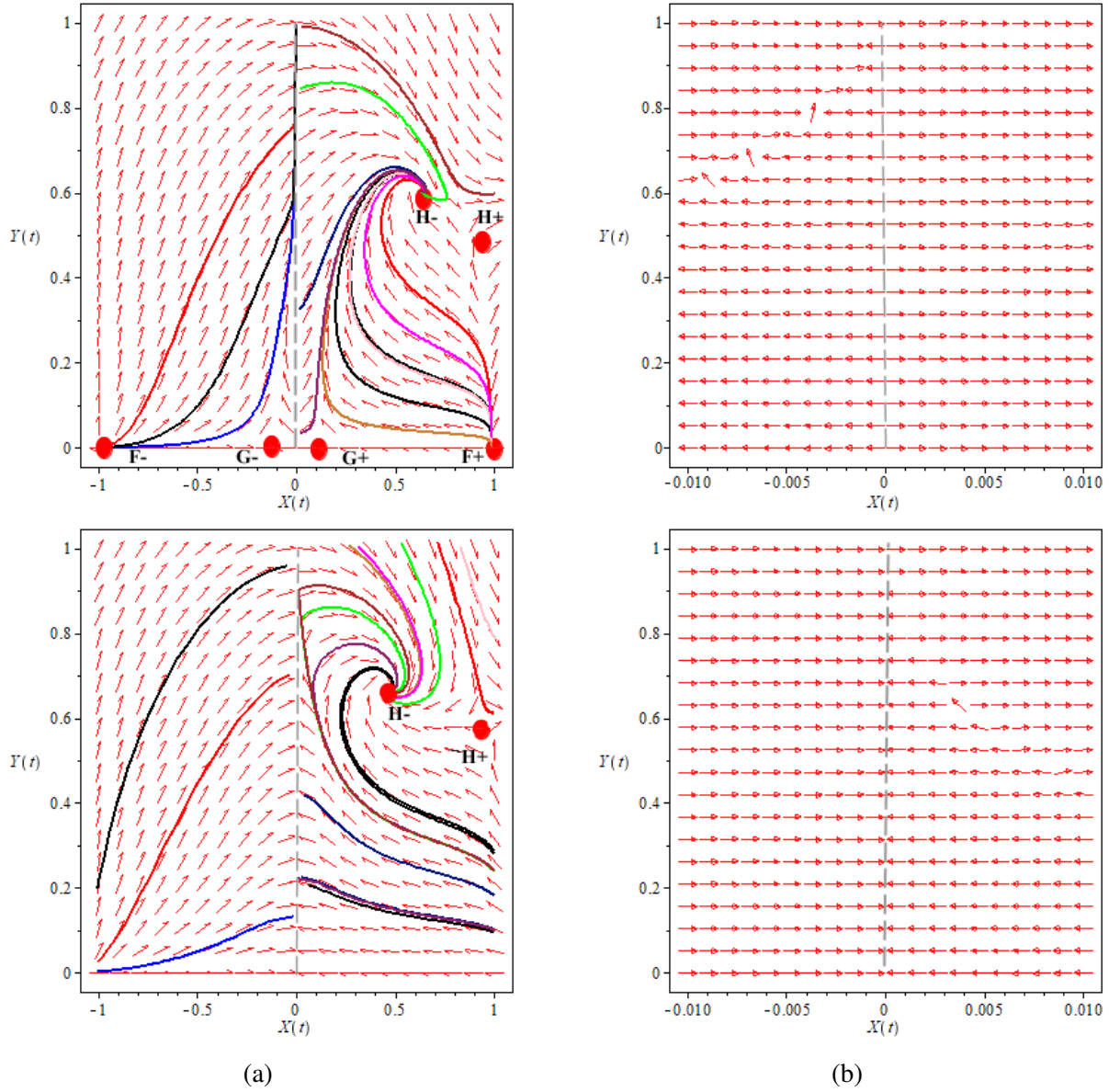


Figura 3.4: Espacio fase del sistema autónomo de ecuaciones diferenciales ordinarias (3.41) y (3.42) para el caso $\alpha = \beta \equiv \zeta$ y la elección específica ($\beta = -0.01, \lambda = 2$) (panel superior) y ($\beta = -0.5, \lambda = 2.5$) (panel inferior). La línea discontinua en $X = 0$ denota la separatriz que existe cuando $Y \neq 1$ y divide las regiones donde el término cinético del campo escalar es positivo o negativo. Cuando $\zeta < 0$ las trayectorias terminan en la separatriz y cuando $\zeta > 0$ salen de la separatriz. Debido a problemas numéricos al momento de crear la figura, uno puede observar que algunas trayectorias pueden cruzar la separatriz, pero esto no es cierto, ya que al hacer una figura más fina (Figuras (b)) podemos ver que las trayectorias terminan o comienzan en la separatriz. En el primer escenario, los puntos F_- y F_+ son inestables, G_+ y G_- corresponden a puntos silla, el punto H_+ describe una solución estable acelerada, el cual puede ser de interés cosmológico. Para el segundo escenario, los puntos F_+ , F_- , G_+ y G_- desaparecen, el punto H_+ describe un punto silla y H_- es una espiral estable. Este escenario es desacelerado.

Cuadro 3.6: Puntos críticos del sistema dinámico del caso $\alpha = -\beta \equiv \eta$.

Punto	X	Y	Ω_m	Ω_ϕ	$\frac{\Omega_m}{\Omega_\phi}$
I_+	$\sqrt{\left[\frac{1+\eta+\sqrt{9\eta^2-2\eta+1}}{2(1-2\eta)}\right]}$	0	$\frac{1-5\eta-\sqrt{9\eta^2-2\eta+1}}{2(1-2\eta)}$	$\frac{1+\eta+\sqrt{9\eta^2-2\eta+1}}{2(1-2\eta)}$	$\frac{1-\eta-\sqrt{9\eta^2-2\eta+1}}{2\eta}$
I_-	$-\sqrt{\left[\frac{1+\eta+\sqrt{9\eta^2-2\eta+1}}{2(1-2\eta)}\right]}$	0	$\frac{1-5\eta-\sqrt{9\eta^2-2\eta+1}}{2(1-2\eta)}$	$\frac{1+\eta+\sqrt{9\eta^2-2\eta+1}}{2(1-2\eta)}$	$\frac{1-\eta-\sqrt{9\eta^2-2\eta+1}}{2\eta}$
J_+	$\sqrt{\left[\frac{1+\eta-\sqrt{9\eta^2-2\eta+1}}{2(1-2\eta)}\right]}$	0	$\frac{1-5\eta+\sqrt{9\eta^2-2\eta+1}}{2(1-2\eta)}$	$\frac{1+\eta-\sqrt{9\eta^2-2\eta+1}}{2(1-2\eta)}$	$\frac{1-\eta+\sqrt{9\eta^2-2\eta+1}}{2\eta}$
J_-	$-\sqrt{\left[\frac{1+\eta-\sqrt{9\eta^2-2\eta+1}}{2(1-2\eta)}\right]}$	0	$\frac{1-5\eta+\sqrt{9\eta^2-2\eta+1}}{2(1-2\eta)}$	$\frac{1+\eta-\sqrt{9\eta^2-2\eta+1}}{2(1-2\eta)}$	$\frac{1-\eta+\sqrt{9\eta^2-2\eta+1}}{2\eta}$
K_+	$\frac{3+(1-2\eta)\lambda^2+\sqrt{\Gamma_3}}{2\sqrt{6\lambda}(1-2\eta)}$	$\sqrt{\frac{3(3+\sqrt{\Gamma_3})}{12\lambda^2(1-2\eta)^2} + \frac{6-18\eta-\sqrt{\Gamma_3}}{12(1-2\eta)} - \frac{\lambda^2}{12}}$	$\frac{(1-2\eta)^2\lambda^2-3-\sqrt{\Gamma_3}}{2(1-2\eta)^2\lambda^2}$	$\frac{3+(1-2\eta)^2\lambda^2+\sqrt{\Gamma_3}}{2(1-2\eta)^2\lambda^2}$	$\frac{(1+2(\eta-1)\eta)\lambda^2-3-\sqrt{\Gamma_3}}{6+2(\eta-1)\eta\lambda^2}$
K_-	$\frac{3+(1-2\eta)\lambda^2-\sqrt{\Gamma_3}}{2\sqrt{6\lambda}(1-2\eta)}$	$\sqrt{\frac{3(3-\sqrt{\Gamma_3})}{12\lambda^2(1-2\eta)^2} + \frac{6-18\eta+\sqrt{\Gamma_3}}{12(1-2\eta)} - \frac{\lambda^2}{12}}$	$\frac{(1-2\eta)^2\lambda^2-3+\sqrt{\Gamma_3}}{2(1-2\eta)^2\lambda^2}$	$\frac{(1-2\eta)^2\lambda^2+3-\sqrt{\Gamma_3}}{2(1-2\eta)^2\lambda^2}$	$\frac{(1+2(\eta-1)\eta)\lambda^2-3+\sqrt{\Gamma_3}}{6+2(\eta-1)\eta\lambda^2}$

3.4. Escenario $\alpha = -\beta$

Para este caso la interacción toma la siguiente forma

$$Q = \eta(-\dot{\rho}_c + \dot{\rho}_\phi) = \frac{3H\eta}{1-2\eta} (\rho_c - \dot{\phi}^2), \quad (3.62)$$

donde $\alpha = -\beta \equiv \eta$. Los puntos críticos para este escenario son reportados en el Cuadro 3.6, donde se han definido las funciones Δ y Γ como

$$\Delta(\eta, -\eta) = 9\eta^2 - 2\eta + 1, \quad (3.63)$$

$$\Gamma_3 \equiv \Gamma(\eta, -\eta, \lambda) = (1-2\eta)^2\lambda^2(\lambda^2 - 6) + 9. \quad (3.64)$$

La existencia, estabilidad, aceleración ($q < 0$) y el parámetro de la ecuación de estado efectiva ω_{eff} son reportados en el Cuadro 3.7. La región de existencia del punto crítico K_+ es reportado como la región 5 del apéndice A y la región de existencia del punto K_- es la región 6 del apéndice A. Todos los puntos críticos son de tipo escalante.

Hemos definido las funciones f_1 , f_2 y f_3 para el Cuadro 3.7, las cuales están dadas por las siguientes expresiones

$$f_1(\eta) = \sqrt{\frac{3+12\eta-27\eta^2+3\sqrt{\eta}}{4(\eta-2\eta^2)}}, \quad (3.65)$$

$$f_2(\eta) = \sqrt{\frac{3+12\eta-27\eta^2-3\sqrt{\delta}}{4(\eta-2\eta^2)}}, \quad (3.66)$$

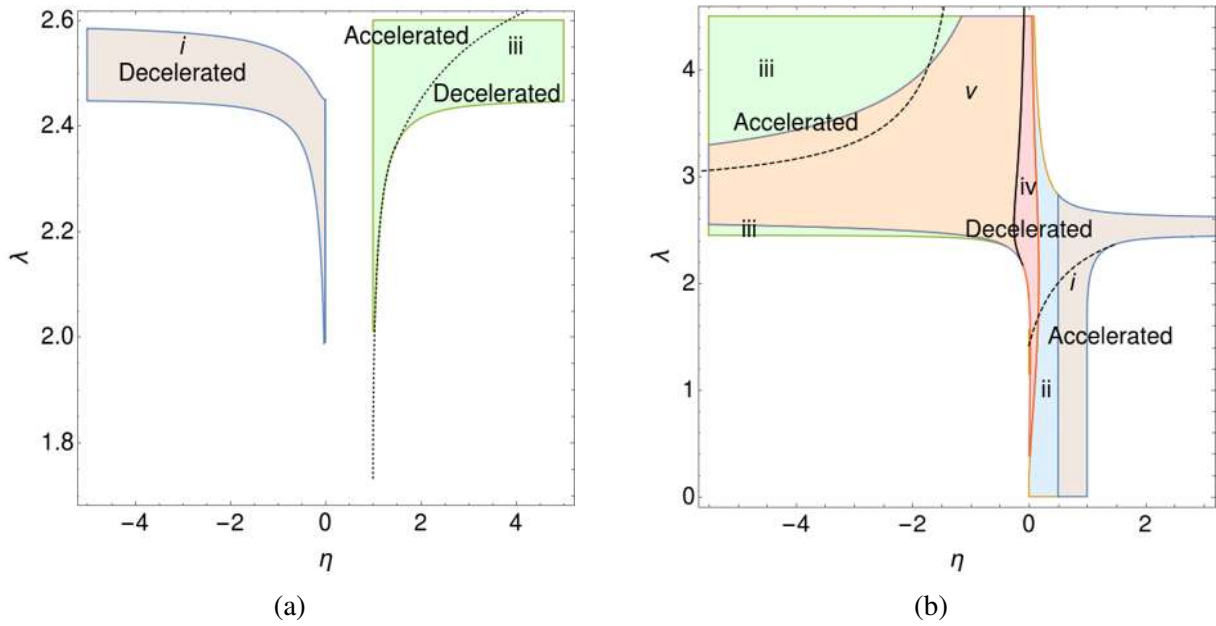


Figura 3.5: La Figura (a) muestra una parte de la región de existencia del punto crítico K_+ . En la región etiquetada por *i* el punto crítico es silla y en la región *iii* es inestable. La línea punteada negra divide la región acelerada y desacelerada, de allí observamos que K_+ puede ser acelerado, pero inestable. La Figura (b) es solo una parte de la región de existencia del punto crítico K_- . En la región etiquetada por *i* el punto crítico es silla, en *ii* es estable, en *iii* es inestable, en *iv* es espiral estable, en *v* es espiral inestable y en la línea negra es centro. Las dos línea negra punteadas divide la región en partes acelerada y desacelerada.

Cuadro 3.7: Significado físico de los puntos críticos del sistema autónomo del caso $\alpha = -\beta \equiv \eta$.

Punto	Existencia	Estabilidad	$q < 0$	ω_{eff}
I_+	$\eta \leq 0$	Silla para $\lambda > \sqrt{6}$ y $\eta = 0$ Silla para $\lambda > f_2(\eta)$ y $\eta < 0$ Inestable para $\lambda < \sqrt{6}$ y $\eta = 0$ Inestable para $\lambda < f_2(\eta)$ y $\eta < 0$	No	$\frac{1+\eta+\sqrt{9\eta^2-2\eta+1}}{2(1-2\eta)}$
I_-	$\eta \leq 0$	Silla para $\lambda < -\sqrt{6}$ y $\eta = 0$ Silla para $\lambda < -f_2(\eta)$ y $\eta < 0$ Inestable para $\lambda > -\sqrt{6}$ y $\eta = 0$ Inestable para $\lambda > -f_2(\eta)$ y $\eta < 0$	No	$\frac{1+\eta+\sqrt{9\eta^2-2\eta+1}}{2(1-2\eta)}$
J_+	$\eta \geq 0$ con $\eta \neq \frac{1}{2}$	Silla para todo λ y $\eta = 0$ Silla para $\lambda < f_1(\eta)$ y $0 < \eta \leq \frac{1}{3}$ Silla para $\lambda < f_2(\eta)$ y $\frac{1}{3} < \eta < \frac{1}{2}$ Silla para $\lambda > f_2(\eta)$ y $\eta > \frac{1}{2}$ Estable para $\lambda > f_1(\eta)$ y $0 < \eta \leq \frac{1}{3}$ Estable para $\lambda > f_2(\eta)$ y $\frac{1}{3} < \eta < \frac{1}{2}$ Inestable para $\lambda < f_2(\eta)$ y $\eta > \frac{1}{2}$	No	$\frac{1+\eta-\sqrt{9\eta^2-2\eta+1}}{2(1-2\eta)}$
J_-	$\eta \geq 0$ con $\eta \neq \frac{1}{2}$	Silla para todo λ y $\eta = 0$ Silla para $\lambda > -f_1(\eta)$ y $0 < \eta \leq \frac{1}{3}$ Silla para $\lambda > -f_2(\eta)$ y $\frac{1}{3} < \eta < \frac{1}{2}$ Silla para $\lambda < -f_2(\eta)$ y $\eta > \frac{1}{2}$ Estable para $\lambda < -f_1(\eta)$ y $0 < \eta \leq \frac{1}{3}$ Estable para $\lambda < -f_2(\eta)$ y $\frac{1}{3} < \eta < \frac{1}{2}$ Inestable para $\lambda > -f_2(\eta)$ y $\eta > \frac{1}{2}$	No	$\frac{1+\eta-\sqrt{9\eta^2-2\eta+1}}{2(1-2\eta)}$
K_+	Región 5 del apéndice A	Silla para $f_3(\eta) < \lambda < f_2(\eta)$ y $\eta \leq 0$, (región i en la Figura 3.5a) Inestable para $f_3(\eta) < \lambda$ y $\eta > 1$, (región iii en la Figura 3.5a)	Ver Figura 3.5a.	$\frac{\lambda^2-3-2\eta(\lambda^2-6)+\sqrt{\Gamma_3}}{6(1-2\eta)}$
K_-	Región 6 del apéndice A	Silla: región i en la Figura 3.5b Estable: región ii en la Figura 3.5b Inestable: región iii en la Figura 3.5b Espiral estable: región iv en la Figura 3.5b Espiral Inestable: región v en la Figura 3.5b Centro: curva negra en la Figura 3.5b	Ver Figura 3.5b	$\frac{\lambda^2-3-2\eta(\lambda^2-6)-\sqrt{\Gamma_3}}{6(1-2\eta)}$

$$f_3(\eta) = \sqrt{\frac{3 - 12\eta + 12\eta^2 + 6\sqrt{-\eta + 5\eta^2 - 8\eta^3 + 4\eta^4}}{1 - 4\eta + 4\eta^2}}, \quad (3.67)$$

y la función $\delta = 1 - 8\eta + 30\eta^2 - 72\eta^3 + 81\eta^4$, donde $(1 - 2\eta) \neq 0$.

Ahora los puntos críticos del sistema dinámico para el caso $\alpha = -\beta$ y su estabilidad son discutidos brevemente, además se muestra un par de escenarios ilustrativos en la Figura 3.6.

(i) Punto I_+ : Existe para $\eta \leq 0$, dependiendo del valor de λ este punto es silla o inestable. Para el caso especial $\eta = 0$ el universo es dominado por la energía cinética del campo escalar ($X = 1, \Omega_m = 0$ e $Y = 0$). Cuando η tiene un valor muy negativo tenemos que $X \rightarrow 0.70, Y = 0$ y $\Omega_m \rightarrow 0.5$. Este punto crítico en ningún momento es acelerado.

(ii) Punto I_- : Existe para $\eta \leq 0$, dependiendo del valor de λ este punto es silla o inestable. Para el caso especial $\eta = 0$ el universo es dominado por la energía cinética del campo escalar ($X = -1, \Omega_m = 0$ e $Y = 0$). Cuando η tiene un valor muy negativo tenemos que $X \rightarrow -0.70, Y = 0$ y $\Omega_m \rightarrow 0.5$. Este punto crítico en ningún momento es acelerado.

(iii) Punto J_+ : Existe para $\eta \geq 0$ ($\eta \neq \frac{1}{2}$) y para todo los valores de λ . Este punto puede ser silla, estable o inestable, dependiendo del valor de los parámetros η y λ . Para el caso sin interacción $\eta = 0$ la materia oscura domina ($X = 0, \Omega_m = 1$ e $Y = 0$). Cuando la η toma valores positivos grandes tenemos $X \rightarrow 0.70, Y = 0$ y $\Omega_m \rightarrow \frac{1}{2}$. No existe aceleración para este punto.

(iv) Punto J_- : Existe para $\eta \geq 0$ ($\eta \neq \frac{1}{2}$) y para todo los valores de λ . Este punto puede ser silla, estable o inestable, dependiendo del valor de los parámetros η y λ . Para el caso sin interacción $\eta = 0$ la materia domina ($X = 0, \Omega_m = 1$ y $Y = 0$). Cuando la η toma valores positivos grandes tenemos $X \rightarrow -0.70, Y = 0$ y $\Omega_m \rightarrow \frac{1}{2}$. No existe aceleración para este punto.

(v) Punto K_+ : Existe para la región 5 reportada en el apéndice A. Una parte de esta región se muestra en la Figura 3.5a. Para $f_3(\eta) < \lambda < f_2(\eta)$ y $\eta \leq 0$ este punto es silla. Para $\lambda > f(\eta)$ y $\eta > 1$ este punto es inestable, Notemos que existe una región donde este punto crítico es acelerada tal y como podemos ver en la Figura 3.5a.

(vi) Punto K_- : Existe para la región 6 reportada en el apéndice A y solo mostramos una región representativa en la Figura 3.5b. De la Figura 3.5b podemos observar el punto crítico puede ser silla, estable, inestable, espiral estable, espiral inestable y centro, dependiendo del valor de los parámetros η y λ . La línea punteada divide la región acelerada de la desacelerada.

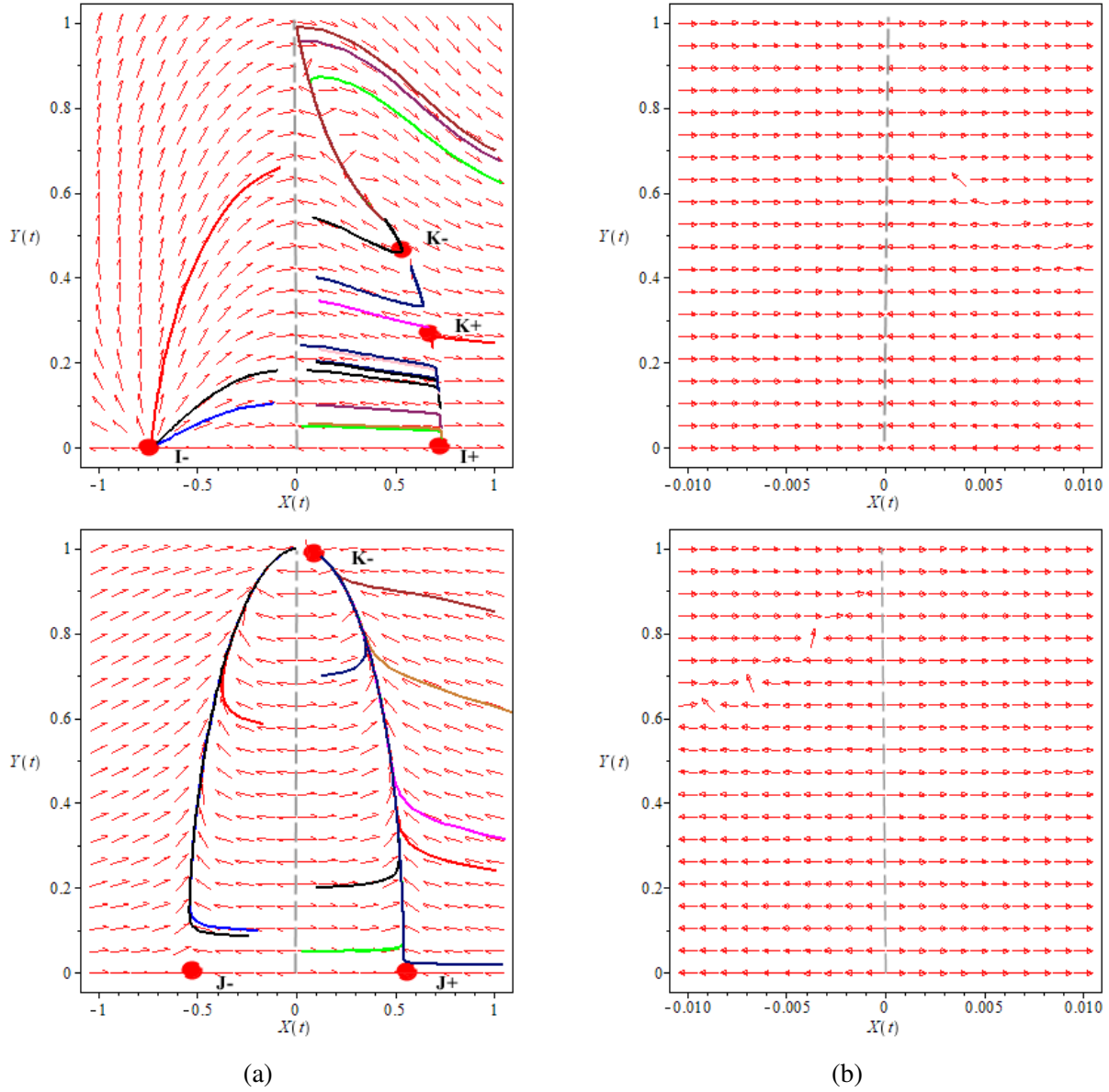


Figura 3.6: Espacio fase del sistema de las ecuaciones diferenciales ordinarias (3.41) y (3.42) para el caso cuando $\alpha = -\beta \equiv \eta$ y la selección particular $(\beta = 2, \lambda = 2.5)$ -panel superior- y $(\beta = 0.25, \lambda = 1.75)$ -panel inferior-. La línea vertical discontinua (de color gris) corresponde a la separatriz en $X = 0$ el cual existe para $Y \neq 1$. Notemos que las trayectorias terminan en la separatriz cuando $\eta/(1 - 2\eta) < 0$ o parten de aquí si $\eta/(1 - 2\eta) > 0$. El comportamiento de las trayectorias alrededor de la separatriz se muestra en el lado derecho. En el escenario de arriba, el punto I_+ y el punto I_- corresponde a nodos inestables y el punto K_- es un punto silla. Este punto crítico no es relevante para los modelos cosmológicos, ya que no existe una solución estable. En el caso que se muestra en la parte inferior de esta figura, el punto J_+ y el punto J_- se comporta como silla y el punto K_- corresponde a una solución estable acelerada el cual puede ser el estado tardío del universo.

3.5. Conclusiones

En este trabajo hemos realizado un análisis dinámico de un espacio-tiempo homogéneo e isótropo con curvatura cero ($k = 0$) para un modelo de interacción no gravitacional entre la materia oscura y un campo escalar quintaesencia con un potencial de autointeracción exponencial. Hemos estudiado una función de interacción que es de interés cosmológico, dado de la siguiente forma $Q = -(\alpha\dot{\rho}_m + \beta\dot{\rho}_\phi)$ y como casos particulares estudiamos los escenarios cuando $\alpha = 0$, $\alpha = \beta$ y $\alpha = -\beta$, separadamente, con el fin de simplificar el análisis. Encontramos que la interacción puede ser escrita como $Q = 3H \left[\frac{\alpha\rho_m + \beta\dot{\phi}^2}{1+\beta-\alpha} \right]$, esta observación es muy importante, ya que no se había hecho notar antes. Para describir la evolución cosmológica hemos calculado varias observables tal como el parámetro de la ecuación de estado efectiva, las densidades adimensionales de la materia oscura y de la energía oscura, así como el parámetro de aceleración. Para cada caso, hemos encontrado las regiones de existencia de los puntos críticos, los cuales pueden ser relevantes en las distintas épocas de expansión del universo, tal como la solución dominada por materia rígida (en inglés: stiff matter universe) y la solución dominada por el campo escalar. Por otro lado, es necesario mencionar que algunos aspectos relevantes han pasado por alto en los trabajos previos [28, 29, 31]: cuando α es distinta de cero, existe una separatriz en el espacio fase. Esto modifica completamente la estructura de espacio fase, ya que la divide en dos regiones, las cuales quedan causalmente desconectadas de acuerdo al signo del término de la energía cinética del campo escalar. De hecho, en el punto $X = 0$ e $Y_0 \neq \pm 1$ el sistema no es continuamente diferenciable y, por lo tanto, el sistema de ecuaciones cosmológicas no satisfacen el teorema fundamental de existencia y unicidad para las ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales. En consecuencia, existen dos trayectorias diferentes con las mismas condiciones iniciales o finales. Esto representa uno de los principales resultados del nuestro trabajo.

En el caso donde la interacción no gravitacional está ausente $\alpha = \beta = 0$, recuperamos los resultados correspondientes. Sin embargo, cuando la transferencia de energía entre las componentes oscuras está presente, encontramos que algunos puntos críticos pueden existir o pueden desaparecer por completo dependiendo del valor de los parámetros del modelo. Hemos encontrado que excepto para la solución donde la materia domina, el resto de los puntos críticos son soluciones de tipo escala (scaling solutions), existen situaciones en donde ni la energía oscura ni la materia oscura domina. Esto representa una modificación respecto a los modelos no interactuantes analizados en [32], en donde los autores describen el espacio fase del universo con cuatro puntos críticos: (i) la solución dominada por la materia (siempre un punto silla), (ii) el escenario dominado por la energía cinética descrito por una ecuación de estado dura del fluido puede ser silla o inestable, (iii) la solución dominada por la energía cinética del campo escalar representando un punto silla o un punto estable y (iv) la solución escalada que siempre es nodo estable o espiral estable. Los puntos críticos E_- , H_- y K_- pueden representar el estado del universo tardío ya existen regiones en donde el campo escalar es el dominante y además el universo es acelerado.

Finalizamos esta parte del trabajo mencionando que, la existencia de una interacción no gravitacional modifica enormemente la estabilidad de las soluciones a nivel del fondo cosmológico comparado con el caso sin interacción. También, podría darse el caso de que la interacción pudiera dejar algunas señales en observables relacionados con perturbaciones cosmológicas como las fluctuaciones de la densidad y el espectro de potencia. Por lo anterior, es interesante estudiar este modelo de interacción confrontándolo con las observaciones cosmológicas.

Capítulo 4

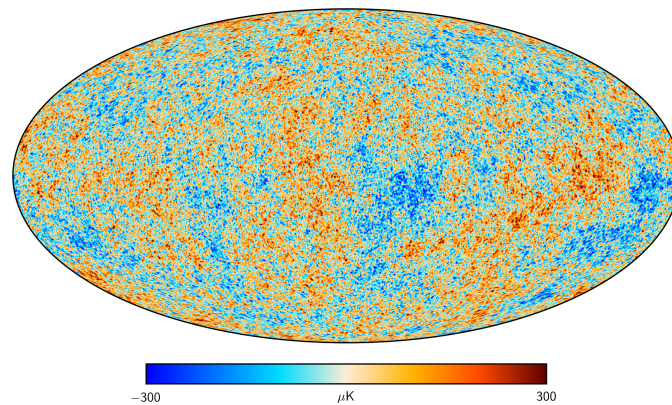
Teoría de perturbaciones cosmológicas

Asumiendo el principio cosmológico, en los capítulos anteriores hemos estudiado algunos modelos del universo homogéneo e isótropo. Para estos modelos la métrica está dada por la ecuación (2.7) y el tensor de energía-momento puede ser el de un fluido perfecto dado por la ecuación (2.8) o el correspondiente tensor de energía-momento para el campo escalar ϕ . Como hemos visto, al desarrollar las ecuaciones de campo de Einstein se obtienen las ecuaciones de Friedmann. Una vez especificada la forma funcional de la ecuación de estado, es posible encontrar, a partir de la ecuación de conservación local de la energía, la densidad en función del factor de escala o del corrimiento al rojo z para cada fluido. También, a partir de la definición del parámetro de Hubble, podemos determinar la edad del universo, entre otras cantidades de interés en el estudio de la cosmología.

Este breve resumen es para remarcar lo que hemos estudiado hasta este momento y recordar algunos resultados. Ahora bien, aunque a gran escala nuestro universo es espacialmente homogéneo e isótropo, a escalas pequeñas observamos que estas características no se cumplen, ya que existen supercúmulos de galaxias, cúmulos de galaxias, galaxias e incluso a más pequeñas escalas existen estrellas, planetas, asteroides, etc. Ante estos hechos es natural preguntarnos ¿cómo surgieron los supercúmulos, las galaxias, las estrellas, los planetas, etc.? En otras palabras, ¿cómo surgieron las estructuras que observamos actualmente en el universo? Lo que está claro, es que en un universo completamente homogéneo e isótropo no se pueden generar estas estructuras. En el marco de la teoría de la RG, la manera de resolver el problema de la formación de las estructuras, consiste en determinar la métrica y el tensor de energía-momento adecuados para describir nuestro universo con las características que observamos tanto a escalas grandes como a escalas pequeñas. No obstante, esta manera es muy complicada, ya que aún para casos sencillos (con muchas simetrías), debido a la naturaleza de las ecuaciones de Einstein, es muy difícil resolverlas. Sin embargo, existe una manera alternativa que nos permite estudiar y modelar de una forma exitosa nuestro universo, esta consiste en realizar pequeñas perturbaciones a la métrica FLRW, es decir, se introducen pequeñas inhomogeneidades en el universo. Esta forma de modelar nuestro universo está justificada por los datos que se obtienen de la radiación

del fondo cósmico de microondas (CMB por sus siglas en inglés)¹ obtenido de los experimentos llevados a cabo por distintos programas tales como COBE [43], WMAP [44] y Planck [1] los cuales han determinado que existen pequeñas inhomogeneidades en la temperatura de la radiación del fondo cósmico de microondas. Por ejemplo, la Figura 4.1 es el resultado del experimento Planck llevado a cabo por la Agencia Espacial Europea (ESA por sus siglas en inglés), aquí se muestra la temperatura proveniente en todas las direcciones del universo observado por satélites que están orbitando la Tierra. En la Figura 4.1, la diferencia de temperatura que existe realmente es muy pequeña, las regiones de color rojo se encuentran a una temperatura de $300 \mu\text{K}$ y las regiones de color azul tienen una temperatura de $-300 \mu\text{K}$ respecto al valor promedio observado de la temperatura, el cual está ubicado aproximadamente en el valor de 2.7 K .

Figura 4.1: Anisotropía de la temperatura de la radiación del fondo cósmico de microondas del experimento Planck 2015 (SMICA Feb 2015) [45].



A primera vista, de las pequeñas diferencias de la temperatura observadas por los experimentos antes mencionados, no queda claro cómo es que estas pueden usarse como justificación para aplicar teoría de perturbaciones al estudio del universo, sin embargo, como explicaremos en el capítulo 5, en la sección de observaciones, los electrones, los protones y la radiación formaron un plasma común en el pasado, pero luego los electrones y los protones se desacoplaron de la radiación para formar los primeros átomos en el universo. Después del desacoplamiento, la radiación no interactuó más con el resto de las componentes, esto significa que las observaciones actuales realizadas sobre la radiación del fondo cósmico de microondas son una manera de ver el estado que tenía esta componente (y el resto) al momento cuando ocurrió la formación de los átomos primordiales. Entonces, si los datos que se observan en la actualidad indican la existencia de pequeñas perturbaciones en la temperatura de la radiación, significa que al momento de la formación de los primeros átomos estaban presente esas pequeñas perturbaciones, pero como compartían un plasma común con el resto de las componentes, esto implica también que

¹Vamos a usar la abreviación Cosmic Microwave Background (CMB) ya que de esta manera es más fácil encontrar las referencias.

en el pasado el resto de componentes tenía pequeñas perturbaciones en sus densidades. Así es como justificamos la aplicación de la teoría de perturbaciones para estudiar cosmología. De hecho, realizar pequeñas perturbaciones a la métrica FLRW ha resultado ser muy útil y fructífero, por esta razón la mayor parte de los estudios en la actualidad se basa en esta técnica, la cual es conocida como **teoría de perturbaciones cosmológicas**. En este capítulo vamos a estudiar la teoría de perturbaciones cosmológicas, para esto vamos a perturbar las ecuaciones de campo de Einstein y las ecuaciones de la conservación local del tensor de energía-momento. Notemos que aunque los datos del CMB indican la existencia de pequeñas perturbaciones en la temperatura, no sabemos cuál es el origen de estas inhomogeneidades, de hecho los modelos inflacionarios son propuestas para explicar su origen [46].

4.1. Formulación matemática

El objetivo de esta sección es establecer las ecuaciones importantes para el desarrollo del trabajo, en la actualidad existen muchos libros que tratan la teoría de perturbaciones aplicadas a cosmología, en esta tesis vamos a seguir principalmente el libro Cosmology escrito por Steven Weinberg [47], aquí las ecuaciones de Einstein están escritas de la siguiente forma²

$$\boxed{R_{\mu\nu} = 8\pi G \ S_{\mu\nu}}, \quad (4.1)$$

donde se ha definido

$$S_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta}, \quad (4.2)$$

y $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci el cual está dado por la ecuación (2.4).

Para estudiar pequeñas perturbaciones lo que se hace es escribir la métrica $g_{\mu\nu}$ de la siguiente manera

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (4.3)$$

donde $\bar{g}_{\mu\nu}$ es la métrica que va a ser perturbada (en nuestro caso es la métrica *FLRW*), a la cual nos referiremos como la métrica de fondo (de aquí en adelante las cantidades que tengan una barra encima, representan cantidades que pertenecen al fondo, por ejemplo, $\bar{\rho}$ y $\bar{P}$ son la densidad y la presión en el fondo cosmológico) y $h_{\mu\nu}$ son las pequeñas perturbaciones ($|h_{\mu\nu}| \ll |\bar{g}_{\mu\nu}|$) de la métrica de fondo $\bar{g}_{\mu\nu}$, las cuales dependen de las coordenadas $x^\mu = (t, x^i)$. Debido a que estamos estudiando pequeñas perturbaciones, entonces basta mantener a primer orden las ecuaciones que son perturbadas. La métrica de fondo en coordenadas cartesianas y sin curvatura ($k = 0$) tiene las siguientes componentes

$$\bar{g}_{tt} = -1 \quad \text{y} \quad \bar{g}_{ij} = \delta_{ij}a^2(t). \quad (4.4)$$

²En realidad, la ecuación de Einstein que usa Weinberg [47] tiene un signo negativo del lado del tensor de energía-momento ($R_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu}$), sin embargo, el tensor de Riemann está definido con un signo negativo respecto a como lo manejamos en esta tesis.

Antes de empezar con la derivación de las ecuaciones que son de nuestro interés, vale la pena dar un breve resumen de lo que vamos a hacer. La técnica es que debemos introducir la expansión de la métrica (4.3) en los símbolos de Christoffel dado por la ecuación (2.3) manteniendo solamente los términos lineales en $h_{\mu\nu}$, lo que resulta es una ecuación de la forma $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha + \delta\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$; luego sustituimos $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha + \delta\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ en el tensor de Ricci dado por la ecuación (2.4), el resultado también tiene la siguiente forma $R_{\mu\nu} = \bar{R}_{\mu\nu} + \delta R_{\mu\nu}$, es decir; sustituyendo la métrica perturbada en los símbolos de Christoffel obtenemos las perturbaciones de estos símbolos, del tensor de Ricci, del tensor de Riemman, etc. Como hemos mencionado, $\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha$ y $\bar{R}_{\mu\nu}$ involucran solo cantidades del fondo cosmológico, a diferencia de $\delta\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ y $\delta R_{\mu\nu}$ que representan la perturbación a primer orden de los símbolos de Christoffel y del tensor de Ricci, respectivamente. Por otro lado, el tensor de energía-momento también puede ser expresado de la siguiente forma $T_{\mu\nu} = \bar{T}_{\mu\nu} + \delta T_{\mu\nu}$, lo cual implica que $S_{\mu\nu} = \bar{S}_{\mu\nu} + \delta S_{\mu\nu}$. Remarcamos que las cantidades $\delta\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$, $\delta R_{\mu\nu}$ son linealmente proporcionales a la perturbación $h_{\mu\nu}$ de la métrica y sus derivadas de primero y segundo orden, en cambio, $\delta S_{\mu\nu}$ como veremos más adelante, contiene términos lineales en $h_{\mu\nu}$, pero también contiene términos de la perturbación de cantidades de la materia tal como la presión (δp), densidad ($\delta \rho$), etc.

Las ecuaciones de Einstein perturbadas a primer orden quedan expresadas de la siguiente forma

$$\bar{R}_{\mu\nu} + \delta R_{\mu\nu} = 8\pi G(\bar{S}_{\mu\nu} + \delta S_{\mu\nu}), \quad (4.5)$$

donde $\bar{R}_{\mu\nu} = 8\pi G\bar{S}_{\mu\nu}$ son las ecuaciones de Einstein que corresponden al fondo (lo que hemos estado estudiando en capítulos anteriores), por lo que la parte perturbada a primer orden está dada por la siguiente expresión

$$\boxed{\delta R_{\mu\nu} = 8\pi G \delta S_{\mu\nu}}. \quad (4.6)$$

Ahora sí, después de este preliminar procedemos a realizar los cálculos para obtener las expresiones que contienen las perturbaciones. Empezamos sustituyendo la métrica de nuestro universo $g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ y su inversa $g^{\mu\nu} = \bar{g}^{\mu\nu} + h^{\mu\nu}$ en los símbolos de Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ definidos en la ecuación (2.3), y lo que obtenemos es lo siguiente

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^\alpha &= \frac{1}{2}(\bar{g}^{\alpha\beta} + h^{\alpha\beta}) [\partial_\nu(\bar{g}_{\beta\mu} + h_{\beta\nu}) + \partial_\mu(\bar{g}_{\nu\beta} + h_{\nu\beta}) - \partial_\beta(\bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})] \\ &= \frac{1}{2}\bar{g}^{\alpha\beta}(\partial_\nu\bar{g}_{\beta\mu} + \partial_\mu\bar{g}_{\nu\beta} - \partial_\beta\bar{g}_{\mu\nu}) + \frac{1}{2}\bar{g}^{\alpha\beta}(\partial_\nu h_{\beta\mu} + \partial_\mu h_{\nu\beta} - \partial_\beta h_{\mu\nu}) \\ &\quad + \frac{1}{2}h^{\alpha\beta}(\partial_\nu\bar{g}_{\beta\mu} + \partial_\mu\bar{g}_{\nu\beta} - \partial_\beta\bar{g}_{\mu\nu}) \equiv \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha + \delta\Gamma_{\mu\nu}^\alpha, \end{aligned}$$

donde hemos identificado los símbolos de Christoffel que corresponden al fondo, dado por

$$\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2}\bar{g}^{\alpha\beta}(\partial_\nu\bar{g}_{\beta\mu} + \partial_\mu\bar{g}_{\nu\beta} - \partial_\beta\bar{g}_{\mu\nu}), \quad (4.7)$$

y agrupando los términos que corresponden a las perturbación, se determina que la parte lineal de los símbolos tiene la siguiente expresión

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2}\bar{g}^{\alpha\beta}(\partial_{\nu}h_{\beta\mu} + \partial_{\mu}h_{\nu\beta} - \partial_{\beta}h_{\mu\nu}) + \frac{1}{2}h^{\alpha\beta}(\partial_{\nu}\bar{g}_{\beta\mu} + \partial_{\mu}\bar{g}_{\nu\beta} - \partial_{\beta}\bar{g}_{\mu\nu}). \quad (4.8)$$

Para ir desarrollando las ecuaciones de nuestro interés, determinamos que los símbolos de Christoffel de fondo distintos de cero (dada la métrica de fondo por la ecuación (4.4)) son los siguientes

$$\bar{\Gamma}_{jt}^i = \bar{\Gamma}_{tj}^i = \frac{\dot{a}}{a}\delta_{ij}, \quad \bar{\Gamma}_{ij}^t = a\dot{a}\delta_{ij}. \quad (4.9)$$

Además, la siguiente relación entre $h_{\mu\nu}$ y $h^{\mu\nu}$ resulta de mucha utilidad

$$h^{\mu\nu} = -\bar{g}^{\mu\alpha}\bar{g}^{\nu\beta}h_{\alpha\beta}, \quad (4.10)$$

esta relación se obtiene a partir de $\delta_{\alpha}^{\nu} = g_{\alpha\beta}g^{\beta\nu} = (\bar{g}_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta})(\bar{g}^{\beta\nu} + h^{\beta\nu})$. Usando la relación (4.10) en la ecuación (4.8) obtenemos

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2}\bar{g}^{\alpha\beta}(\partial_{\nu}h_{\beta\mu} + \partial_{\mu}h_{\nu\beta} - \partial_{\beta}h_{\mu\nu}) - \bar{g}^{\alpha\beta}h_{\beta\sigma}\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\sigma}. \quad (4.11)$$

Ahora, calculando las distintas componentes de $\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$, obtenemos

$$\delta\Gamma_{ij}^i = \frac{1}{2a^2}(-2a\dot{a}h_{it}\delta_{jk} + \partial_k h_{ij} + \partial_j h_{ik} - \partial_i h_{jk}), \quad (4.12)$$

$$\delta\Gamma_{jt}^i = \frac{1}{2a^2}\left(-2\frac{\dot{a}}{a}h_{ij} + \dot{h}_{ij} + \partial_i h_{it} - \partial_i h_{jt}\right), \quad (4.13)$$

$$\delta\Gamma_{ij}^t = \frac{1}{2}(2a\dot{a}\delta_{ij}h_{tt} - \partial_i h_{jt} - \partial_j h_{it} + \dot{h}_{ij}), \quad \delta\Gamma_{tt}^t = -\frac{1}{2}\dot{h}_{tt}, \quad (4.14)$$

$$\delta\Gamma_{tt}^i = \frac{1}{2a^2}(2\dot{h}_{it} - \partial_i h_{tt}), \quad \delta\Gamma_{it}^t = \frac{\dot{a}}{a}h_{it} - \frac{1}{2}\partial_i h_{tt}. \quad (4.15)$$

Notemos que dada la métrica de fondo $\bar{g}_{\mu\nu}$ y la perturbación $h_{\mu\nu}$ podemos calcular la parte perturbada de los símbolos de Christoffel.

Por otro lado, con el objetivo de encontrar la forma explícita de $\delta R_{\mu\nu}$ sustituimos $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\alpha} + \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$ en la ecuación (2.4), lo que nos da es la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= \partial_{\alpha}(\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\alpha} + \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}) - \partial_{\nu}(\bar{\Gamma}_{\alpha\mu}^{\alpha} + \delta\Gamma_{\alpha\mu}^{\alpha}) \\ &\quad + (\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\alpha} + \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha})(\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\beta} + \delta\Gamma_{\alpha\beta}^{\beta}) - (\bar{\Gamma}_{\mu\beta}^{\alpha} + \delta\Gamma_{\mu\beta}^{\alpha})(\bar{\Gamma}_{\nu\alpha}^{\beta} + \delta\Gamma_{\nu\alpha}^{\beta}) \\ &= \partial_{\alpha}\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\alpha} - \partial_{\nu}\bar{\Gamma}_{\alpha\mu}^{\alpha} + \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\alpha}\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\beta} - \bar{\Gamma}_{\mu\beta}^{\alpha}\bar{\Gamma}_{\nu\alpha}^{\beta} + \partial_{\alpha}(\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}) - \partial_{\nu}(\delta\Gamma_{\alpha\mu}^{\alpha}) + \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\alpha}\delta\Gamma_{\alpha\beta}^{\beta} \\ &\quad + \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\beta} - \bar{\Gamma}_{\mu\beta}^{\alpha}\delta\Gamma_{\nu\alpha}^{\beta} - \bar{\Gamma}_{\mu\beta}^{\alpha}\delta\Gamma_{\nu\alpha}^{\beta} \equiv \bar{R}_{\mu\nu} + \delta R_{\mu\nu}, \end{aligned}$$

donde hemos identificado el tensor de Ricci que corresponde al fondo

$$\bar{R}_{\mu\nu} = \partial_\alpha \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha - \partial_\nu \bar{\Gamma}_{\alpha\mu}^\alpha + \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\beta - \bar{\Gamma}_{\mu\beta}^\alpha \bar{\Gamma}_{\nu\alpha}^\beta, \quad (4.16)$$

luego los términos que son de orden lineal los identificamos como el orden lineal del tensor de Ricci, y podemos ver que tienen la siguiente expresión

$$\delta R_{\mu\nu} \equiv \partial_\alpha (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha) - \partial_\nu (\delta \Gamma_{\alpha\mu}^\alpha) + \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha \delta \Gamma_{\alpha\beta}^\beta + \delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\beta - \bar{\Gamma}_{\mu\beta}^\alpha \delta \Gamma_{\nu\alpha}^\beta - \bar{\Gamma}_{\mu\beta}^\alpha \delta \Gamma_{\nu\alpha}^\beta. \quad (4.17)$$

En coordenadas (t, x^i) las componentes δR_{tt} , δR_{it} y δR_{jk} del tensor de Ricci están dadas por las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} \delta R_{tt} = & -\frac{1}{2a^2} \nabla^2 h_{tt} - \frac{3\dot{a}}{2a} \dot{h}_{tt} + \frac{1}{a^2} \partial_i \dot{h}_{it} \\ & - \frac{1}{2a^2} \left[\ddot{h}_{ii} - \frac{2\dot{a}}{a} \dot{h}_{ii} + 2 \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{\ddot{a}}{a} \right) h_{ii} \right], \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} \delta R_{tj} = & -\frac{\dot{a}}{a} \partial_j h_{tt} - \frac{1}{2a^2} (\nabla^2 h_{jt} - \partial_j \partial_i h_{it}) \\ & + \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} \right) h_{jt} - \frac{1}{2} \partial_t \left[\frac{1}{a^2} (\partial_j h_{kk} - \partial_k h_{kj}) \right], \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} \delta R_{jk} = & \frac{1}{2} \partial_j \partial_k h_{tt} + (2\dot{a}^2 + a\ddot{a}) \delta_{jk} h_{tt} + \frac{1}{2} a \dot{a} \delta_{jk} \dot{h}_{tt} - \frac{1}{2a^2} (\nabla^2 h_{jk} \\ & - \partial_i \partial_j h_{ik} - \partial_i \partial_k h_{ij} + \partial_j \partial_k h_{ii}) + \frac{1}{2} \ddot{h}_{jk} - \frac{\dot{a}}{2a} (\dot{h}_{jk} - \delta_{jk} \dot{h}_{ii}) \\ & - \frac{\dot{a}^2}{a^2} (\delta_{jk} h_{ii} - 2h_{jk}) - \frac{\dot{a}}{a} \delta_{jk} \partial_i h_{it} - \frac{1}{2} (\partial_j \dot{h}_{kt} + \partial_k \dot{h}_{jt}) \\ & - \frac{\dot{a}}{2a} (\partial_j h_{kt} + \partial_k h_{jt}), \end{aligned} \quad (4.20)$$

donde $\delta R_{tj} = \delta R_{jt}$, $\dot{a} \equiv da/dt$ y ∇^2 es el laplaciano en coordenadas cartesianas.

Es de mucha ayuda notar la forma en cómo se transforman las perturbaciones de la métrica $h_{\mu\nu}$ ante una rotación espacial. Sea $x'^\alpha = x'^\alpha(x^\beta)$ una rotación espacial general, entonces $h_{\mu\nu}$ se transforma como

$$h'_{\mu\nu} = \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \right) \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \right) h_{\alpha\beta}, \quad (4.21)$$

debido a que estamos haciendo solamente una rotación espacial, tenemos que $t = t'$ y $x'^j = A^j_i x^i$, donde x^i y x'^i son coordenadas espaciales que no dependen de t o t' y A^j_i es la matriz de rotación.

La componente temporal-temporal de $h_{\mu\nu}$ se transforma de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 h'_{t't'} = h'_{x^0 x^0} &= \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^0} \right) \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^0} \right) h_{x^\alpha x^\beta} = \left(\frac{\partial x^0}{\partial x'^0} \right) \left(\frac{\partial x^0}{\partial x'^0} \right) h_{x^0 x^0} \\
 &\quad + 2 \left(\frac{\partial x^0}{\partial x'^0} \right) \left(\frac{\partial x^i}{\partial x'^0} \right) h_{x^0 x^i} + \left(\frac{\partial x^i}{\partial x'^0} \right) \left(\frac{\partial x^j}{\partial x'^0} \right) h_{x^i x^j} \\
 &= h_{x^0 x^0} = h_{tt},
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

esto significa que la componente h_{tt} se transforma como un escalar, siguiendo el libro de referencia [47] elegimos este escalar como

$$h_{tt} = -E(t, x^i). \tag{4.23}$$

Exactamente de la misma manera que la componente anterior, podemos mostrar que las componentes temporal-espacial $h_{x^0 x^i}$ y espacial-espacial $h_{x^i x^j}$ se transforman como

$$h'_{t'x^i} = \left(\frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \right) h_{tx^j}, \tag{4.24}$$

$$h'_{x^i x^j} = \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^i} \right) \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^j} \right) h_{x^\alpha x^\beta}. \tag{4.25}$$

Esto significa que h_{tx^i} se transforma como las componentes de un vector covariante y $h_{x^i x^j}$ se transforma como las componentes de un tensor covariante de orden dos. Ahora bien, con la ayuda del teorema de Helmholtz (los detalles de esta descomposición están en [47]) las perturbaciones pueden ser descompuestas en su parte escalar, vectorial y tensorial, así podemos expresar las perturbaciones de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 h_{tt} &= -E, \\
 h_{ti} &= a \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x^i} \right) + G_i \right], \\
 h_{ij} &= a^2 \left[A \delta_{ij} + \frac{\partial^2 B}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial C_i}{\partial x^j} + \frac{\partial C_j}{\partial x^i} + D_{ij} \right],
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

donde E, F, A, B son escalares, G_i, C_i son cantidades vectoriales y D_{ij} es un tensor de rango dos, con las siguientes restricciones

$$\partial_i C_i = \partial_i G_i = 0, \partial_i D_{ij} = 0 \text{ y } D_{ii} = 0. \tag{4.27}$$

La importancia de ver la forma en cómo se transforman las perturbaciones de la métrica $h_{\mu\nu}$ ante una rotación espacial, es que podemos descomponerlas en una parte escalar, en otra vectorial y en una parte tensorial. Como veremos más adelante, esto es una gran ventaja al momento

de resolver las ecuaciones que surgen al perturbar las ecuaciones de campo de Einstein y las ecuaciones de conservación local del tensor de energía-momento.

Ahora vamos a calcular los términos $\delta S_{\mu\nu}$, para esto sustituyendo las cantidades $T_{\mu\nu} = \bar{T}_{\mu\nu} + \delta T_{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ y $g^{\mu\nu} = \bar{g}^{\mu\nu} + h^{\mu\nu}$ en la ecuación (4.2), y recordando que solo vamos a mantener las ecuaciones a orden lineal, obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} S_{\mu\nu} &= \bar{T}_{\mu\nu} + \delta T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})(\bar{g}^{\alpha\beta} + h^{\alpha\beta})(\bar{T}_{\alpha\beta} + \delta T_{\alpha\beta}) \\ &= \bar{T}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{g}_{\mu\nu}\bar{g}^{\alpha\beta}\bar{T}_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$+ \delta T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \left[\bar{g}_{\mu\nu}\bar{g}^{\alpha\beta}\delta T_{\alpha\beta} + \bar{g}_{\mu\nu}h^{\alpha\beta}\bar{T}_{\alpha\beta} + h_{\mu\nu}\bar{g}^{\alpha\beta}\bar{T}_{\alpha\beta} \right] \quad (4.29)$$

$$= \bar{S}_{\mu\nu} + \delta S_{\mu\nu}, \quad (4.30)$$

donde hemos identificado la cantidad que corresponde al fondo cosmológico

$$\bar{S}_{\mu\nu} = \bar{T}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{g}_{\mu\nu}\bar{g}^{\alpha\beta}\bar{T}_{\alpha\beta}, \quad (4.31)$$

y las cantidades que involucran perturbaciones lineales están dadas por

$$\delta S_{\mu\nu} = \delta T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \left[\bar{g}_{\mu\nu}\bar{g}^{\alpha\beta}\delta T_{\alpha\beta} + \bar{g}_{\mu\nu}h^{\alpha\beta}\bar{T}_{\alpha\beta} + h_{\mu\nu}\bar{g}^{\alpha\beta}\bar{T}_{\alpha\beta} \right]. \quad (4.32)$$

Aquí vamos a suponer que las componentes del universo a nivel del fondo se pueden modelar como fluidos perfectos. Entonces, el tensor de energía-momento de fondo de un fluido perfecto, $\bar{T}_{\mu\nu}$, su traza está dada como $\bar{T} = \bar{g}^{\alpha\beta}\bar{T}_{\alpha\beta} = 3\bar{P} - \bar{\rho} = -\frac{3}{4\pi G} \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right)$, luego sustituyendo esta expresión en la ecuación (4.32), tenemos que

$$\delta S_{\mu\nu} = \delta T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{g}_{\mu\nu} \left(\bar{g}^{\alpha\beta}\delta T_{\alpha\beta} + h^{\alpha\beta}\bar{T}_{\alpha\beta} \right) + \frac{3}{8\pi G} \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) h_{\mu\nu}. \quad (4.33)$$

Observemos que si conocemos $\bar{T}_{\mu\nu}$, $\bar{g}_{\mu\nu}$, $h_{\mu\nu}$, necesitamos también conocer la cantidad $\delta T_{\mu\nu}$ para calcular $\delta S_{\mu\nu}$. Notemos que al igual que las cantidades $h_{\mu\nu}$, la componente δT_{00} se transforma como un escalar, δT_{0i} se transforma como un vector y δT_{ij} se transforma como un tensor ante una rotación espacial. Esto significa que el tensor de energía-momento también puede ser descompuesto en una parte escalar, una parte vectorial y una parte tensorial. Siguiendo la literatura [47] podemos escribir las siguientes descomposiciones de la perturbación del tensor de energía-momento en la forma,

$$\begin{aligned} \delta T_{tt} &= -\bar{\rho}h_{tt} + \delta\rho, \\ \delta T_{it} &= \bar{P}h_{it} - (\bar{\rho} + \bar{P})(\partial_i\delta u + \delta u_i^v), \\ \delta T_{ij} &= \bar{P}h_{ij} + a^2(\delta_{ij}\delta P + \partial_i\partial_j\pi^s + \partial_i\pi_j^v + \partial_j\pi_i^v + \pi_{ij}^T), \end{aligned} \quad (4.34)$$

donde $\delta U_i \equiv (\partial_i \delta u + \delta u_i^\nu)$ es la descomposición de la parte espacial de la perturbación de velocidad en un gradiente del escalar δu (llamado potencial escalar de la velocidad) y una parte vectorial δu_i^ν con divergencia igual a cero. La densidad de fondo $\bar{\rho}$, la presión de fondo $\bar{P}$ y la cantidad π^s llamada estrés anisotrópico son cantidades escalares (al igual que δu). En cambio, $\delta u_i^\nu, \pi_i^\nu$ son cantidades vectoriales y π_{ij} son las componentes de un tensor de rango dos. Las perturbaciones vectoriales y tensoriales deben satisfacer las siguientes restricciones

$$\partial_i \pi_i^\nu = \partial_i \delta u_i^\nu = 0, \quad \partial_i \pi_{ij}^T = 0 \quad \text{y} \quad \pi_{ii}^T = 0. \quad (4.35)$$

La descomposición de la parte perturbada del tensor de energía-momento está construida de tal forma que se reduce a la perturbación del tensor de energía-momento de un fluido perfecto cuando los términos disipativos π^s, π^ν y π^T son cero.

Con la idea de simplificar las ecuaciones (4.33), necesitamos calcular en componentes el tensor linealizado δT_ν^μ , para esto primero veamos que

$$\begin{aligned} T_\nu^\mu &= g^{\mu\alpha} T_{\alpha\nu} = (\bar{g}^{\mu\alpha} + h^{\mu\alpha})(\bar{T}_{\alpha\nu} + \delta T_{\alpha\nu}) \\ &= \bar{g}^{\mu\alpha} \bar{T}_{\alpha\nu} + (\bar{g}^{\mu\alpha} \delta T_{\alpha\nu} + h^{\mu\alpha} \bar{T}_{\alpha\nu}) = \bar{T}_\nu^\mu + \delta T_\nu^\mu, \end{aligned}$$

donde

$$\boxed{\bar{T}_\nu^\mu \equiv \bar{g}^{\mu\alpha} \bar{T}_{\alpha\nu}} \quad \text{y} \quad \boxed{\delta T_\nu^\mu \equiv (\bar{g}^{\mu\alpha} \delta T_{\alpha\nu} + h^{\mu\alpha} \bar{T}_{\alpha\nu})}. \quad (4.36)$$

Escrita en componentes, la parte perturbada del tensor de energía-momento, está dada por las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} \delta T_j^i &= \delta_{ij} \delta P + \partial_i \partial_j \pi^s + \partial_i \pi_j^\nu + \partial_j \pi_i^\nu + \pi_{ij}^T, \\ \delta T_t^i &= a^{-2} (\bar{\rho} + \bar{P}) (a \partial_i F + a G_i - \partial_i \delta u - \delta u_i^\nu), \\ \delta T_i^t &= (\bar{\rho} + \bar{P}) (\partial_i \delta u + \delta u_i^\nu), \\ \delta T_\lambda^\lambda &= 3\delta P - \delta \rho + \nabla^2 \pi^s, \\ \delta T_t^t &= -\delta \rho. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Usando las ecuaciones que aparecen en (4.37), podemos expresar las componentes de la ecuación (4.33) de la siguiente manera

$$\delta S_{tt} = \delta T_{tt} + \frac{1}{2} \delta T_\lambda^\lambda + \frac{3}{8\pi G} \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) h_{tt}, \quad (4.38)$$

$$\delta S_{jt} = \delta T_{jt} + \frac{3}{8\pi G} \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) h_{jt}, \quad (4.39)$$

$$\delta S_{jk} = \delta T_{jk} - \frac{a^2}{2} \delta_{jk} \delta T_\lambda^\lambda + \frac{3}{8\pi G} \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) h_{jk}. \quad (4.40)$$

En este momento tenemos todos los términos que necesitamos para escribir las componentes temporal-temporal ($8\pi G \delta S_{tt} = \delta R_{tt}$), temporal-espacial ($8\pi G \delta S_{tj} = \delta R_{tj}$) y espacial-espacial ($8\pi G \delta S_{jk} = \delta R_{jk}$) de las ecuaciones de Einstein linealizadas, lo que resulta son las siguientes expresiones

$$8\pi G \left(\delta T_{tt} + \frac{1}{2} \delta T^\lambda_\lambda \right) = -\frac{1}{2a^2} \nabla^2 h_{tt} - \frac{3\dot{a}}{2a} \dot{h}_{tt} + \frac{1}{a^2} \partial_i \dot{h}_{it} \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2a^2} \left[\ddot{h}_{ii} - \frac{2\dot{a}}{a} \dot{h}_{ii} + 2 \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{\ddot{a}}{a} \right) h_{ii} \right] - 3 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) h_{tt}, \\ 8\pi G \delta T_{jt} &= -\frac{\dot{a}}{a} \partial_j h_{tt} - \frac{1}{2a^2} (\nabla^2 h_{jt} - \partial_j \partial_i h_{it}) \\ & - \left(2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) h_{jt} - \frac{1}{2} \partial_t \left[\frac{1}{a^2} (\partial_j h_{kk} - \partial_k h_{kj}) \right], \end{aligned} \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned} 8\pi G \left(\delta T_{jk} - \frac{a^2}{2} \delta_{jk} \delta T^\lambda_\lambda \right) &= \frac{1}{2} \partial_j \partial_k h_{tt} + (2\dot{a}^2 + a\ddot{a}) \delta_{jk} h_{tt} + \frac{1}{2} a \dot{a} \delta_{jk} \dot{h}_{tt} - \frac{1}{2a^2} (\nabla^2 h_{jk} \\ & - \partial_i \partial_j h_{ik} - \partial_i \partial_k h_{ij} + \partial_j \partial_k h_{ii}) + \frac{1}{2} \ddot{h}_{jk} - \frac{\dot{a}}{2a} (\dot{h}_{jk} - \delta_{jk} \dot{h}_{ii}) \\ & - \frac{\dot{a}^2}{a^2} \delta_{jk} h_{ii} - \frac{\dot{a}}{a} \delta_{jk} \partial_i h_{it} - \frac{1}{2} (\partial_j \dot{h}_{kt} + \partial_k \dot{h}_{jt}) \\ & - \frac{\dot{a}}{2a} (\partial_j h_{kt} + \partial_k h_{jt}) - \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 3\frac{\ddot{a}}{a} \right) h_{jk}. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Introduciendo las descomposiciones de la métrica y el tensor de energía-momento (ecuaciones (4.26), (4.34) y (4.37)) en la ecuación (4.41), obtenemos

$$\begin{aligned} -4\pi G(\delta\rho + 3\delta P + \nabla^2 \pi^s) &= -\frac{1}{2a^2} \nabla^2 E - \frac{3\dot{a}}{2a} \dot{E} - \frac{1}{a} \nabla^2 \dot{F} - \frac{\dot{a}}{a^2} \nabla^2 F + \frac{3}{2} \ddot{A} \\ & + \frac{3\dot{a}}{a} \dot{A} - \frac{3\ddot{a}}{a} E + \frac{1}{2} \nabla^2 \ddot{B} + \frac{\dot{a}}{a} \nabla^2 \dot{B}, \end{aligned} \quad (4.44)$$

donde hemos usado la ecuación de Friedmann $3H^2 = 8\pi G \bar{\rho}$ y $h_{ii} = a^2(3A + \partial_i \partial_i B)$ el cual se obtiene de la definición de h_{ij} . En este momento es donde notamos que la descomposición ha dado una ventaja considerable, ya que esta ecuación involucra solamente cantidades escalares, y esta es una de las ecuaciones que necesitamos resolver.

Usando la descomposición de la métrica h_{jt} en la expresión para δT_{jt} , obtenemos

$$\begin{aligned} \delta T_{jt} &= \bar{P} a (\partial_j F + G_j) - (\bar{\rho} + \bar{P}) (\partial_j \delta u + \delta u_j^v) \\ &= -\frac{1}{8\pi G} \left(2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) a (\partial_j F + G_j) - (\bar{\rho} + \bar{P}) (\partial_j \delta u + \delta u_j^v), \end{aligned} \quad (4.45)$$

en donde hemos usado la ecuación $\bar{P} = -\frac{1}{8\pi G} \left(2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right)$ que se obtiene a partir de las ecuaciones de Friedmann (2.11) y (2.12). Sustituyendo la descomposición de la métrica (4.26) y la ecuación (4.45) en la componente tj de la ecuación de Einstein (4.42), obtenemos

$$8\pi G(\bar{\rho} + \bar{P})\partial_j \delta u + 8\pi G(\bar{\rho} + \bar{P})\delta u_j^v = -\frac{\dot{a}}{a}\partial_j E + \partial_j \dot{A} + \frac{1}{2a}\nabla^2 G_j - \frac{1}{2}\partial_k \partial_k \dot{C}_j, \quad (4.46)$$

esta ecuación (4.46) tiene la forma $\partial_j f + v_j = 0$, donde f es un escalar y v_j es un vector con divergencia igual a cero ($\partial_j v_j = 0$). Esto significa que tenemos dos ecuaciones, una parte escalar y otra parte vectorial. La parte escalar queda expresada como

$$8\pi G a(\bar{\rho} + \bar{P})\partial_j \delta u = -\dot{a}\partial_j E + a\partial_j \dot{A}, \quad (4.47)$$

y la parte vectorial está dada por la siguiente expresión

$$8\pi G(\bar{\rho} + \bar{P})a\delta u_j^v = \frac{1}{2}\nabla^2 G_j - \frac{a}{2}\nabla^2 \dot{C}_j. \quad (4.48)$$

De igual manera, al sustituir las correspondientes cantidades en la componente ij de la ecuación de Einstein $\delta R_{ij} = 8\pi G \delta S_{ij}$ obtenemos una ecuación que tiene la forma

$$L\delta_{ij} + \partial_i \partial_j M + \partial_i N_j + O_{ij} = 0, \quad (4.49)$$

donde L y M son escalares, N_j es una parte vectorial y O_{ij} la parte tensorial. El término que involucra δ_{ij} es una ecuación escalar y tiene la siguiente expresión

$$\begin{aligned} -4\pi G a^2 [\delta \rho - \delta P - \nabla^2 \pi^s] &= \frac{1}{2} a \dot{a} \dot{E} + (2\dot{a}^2 + a\ddot{a}) E + \frac{1}{2} \nabla^2 A - \frac{1}{2} a^2 \ddot{A} \\ &\quad - 3a\dot{a}\dot{A} - \frac{1}{2} a \dot{a} \nabla^2 \dot{B} + \dot{a} \nabla^2 F, \end{aligned} \quad (4.50)$$

el segundo término, que tiene la forma $\partial_i \partial_j M$, nos da otra ecuación escalar

$$\partial_i \partial_j [16\pi G a^2 \pi^s + E + A - a^2 \ddot{B} - 3a\dot{a}\dot{B} + 2a\dot{F} + 4\dot{a}F] = 0, \quad (4.51)$$

la parte vectorial ($\partial_i N_j$) de la componente ij de la ecuación de Einstein es la siguiente

$$\partial_k (16\pi G a^2 \pi_j^v - a^2 \ddot{C}_j - 3a\dot{a}\dot{C}_j + a\dot{G}_j + 2\dot{a}G_j) = 0, \quad (4.52)$$

finalmente la parte tensorial O_{ij} está dada por la siguiente expresión

$$-16\pi G a^2 \pi_{ij}^T = \nabla^2 D_{ij} - a^2 \ddot{D}_{ij} - 3a\dot{a}\dot{D}_{ij}. \quad (4.53)$$

Más adelante vamos a discutir los resultados y el significado de las ecuaciones que hemos obtenido, ya que primero vamos a perturbar la ecuación de conservación del tensor de energía-momento. Recordemos que esta ecuación está dada por la siguiente expresión

$$\nabla_\mu T_\nu^\mu = \partial_\mu T_\nu^\mu + \Gamma_{\mu\lambda}^\mu T_\nu^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda T_\lambda^\mu = 0,$$

realizando la perturbación (manteniendo los términos solo hasta el orden lineal) tenemos,

$$\begin{aligned} \partial_\mu(\bar{T}_\nu^\mu + \delta T_\nu^\mu) + (\bar{\Gamma}_{\mu\lambda}^\mu + \delta\Gamma_{\mu\lambda}^\mu)(\bar{T}_\nu^\lambda + \delta T_\nu^\lambda) - (\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda + \delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda)(\bar{T}_\lambda^\mu + \delta T_\lambda^\mu) = \\ \partial_\mu T_\nu^\mu + \partial_\mu(\delta T_\nu^\mu) + \bar{\Gamma}_{\mu\lambda}^\mu \bar{T}_\nu^\lambda + \bar{\Gamma}_{\mu\lambda}^\mu \delta T_\nu^\lambda + \delta\Gamma_{\mu\lambda}^\mu \bar{T}_\nu^\lambda - \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda \bar{T}_\lambda^\mu - \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda \delta T_\lambda^\mu - \delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \bar{T}_\lambda^\mu = 0, \end{aligned} \quad (4.54)$$

identificando la ecuación de conservación que corresponde al fondo cosmológico

$$\partial_\mu \bar{T}_\nu^\mu + \bar{\Gamma}_{\mu\lambda}^\mu \bar{T}_\nu^\lambda - \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda \bar{T}_\lambda^\mu = 0, \quad (4.55)$$

nos queda el término que involucra solo la parte de la perturbación lineal dada por la siguiente expresión

$$\partial_\mu(\delta T_\nu^\mu) + \bar{\Gamma}_{\mu\lambda}^\mu \delta T_\nu^\lambda + \delta\Gamma_{\mu\lambda}^\mu \bar{T}_\nu^\lambda - \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda \delta T_\lambda^\mu - \delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \bar{T}_\lambda^\mu = 0. \quad (4.56)$$

Como hemos mencionado en varias ocasiones, por las simetrías del fondo cosmológico, el tensor de energía-momento del fondo $\bar{T}_{\mu\nu}$ tiene la forma de un fluido perfecto dado por

$$\bar{T}_{\mu\nu} = (\bar{\rho} + \bar{P})\bar{U}_\mu\bar{U}_\nu + \bar{P}\bar{g}_{\mu\nu}. \quad (4.57)$$

De la ecuación de conservación de energía de fondo obtenemos la siguiente expresión

$$-\dot{\bar{\rho}} - 3\frac{\dot{a}}{a}(\bar{\rho} + \bar{P}) = 0. \quad (4.58)$$

Esta ecuación ya la habíamos calculado antes, pero esta vez estamos manteniendo los signos negativos para nuestros propósitos futuros.

Ahora volviendo a la ecuación (4.56), cuando $\nu = 0$ obtenemos la siguiente expresión (usando el tensor de energía-momento de un fluido perfecto en el fondo cosmológico)

$$\partial_t \delta T_t^t + \partial_i \delta T_t^i + 3\frac{\dot{a}}{a} \delta T_t^t - \frac{\dot{a}}{a} \delta T_i^i - \left(\frac{\bar{\rho} + \bar{P}}{2a^2} \right) \left(\dot{h}_{ii} - 2\frac{\dot{a}}{a} h_{ii} \right) = 0, \quad (4.59)$$

usando una vez mas las cantidades dadas por la ecuación (4.37) y h_{ii} , obtenemos la siguiente expresión

$$\delta\dot{\bar{\rho}} + \frac{3\dot{a}}{a}(\delta\bar{\rho} + \delta P) + \frac{1}{2}(\bar{\rho} + \bar{P})\partial_0(3A + \nabla^2 B) + \nabla^2 \left[\frac{\dot{a}}{a}\pi^s - \frac{F}{a}(\bar{\rho} + \bar{P}) + \frac{\delta u}{a^2}(\bar{\rho} + \bar{P}) \right] = 0. \quad (4.60)$$

Por otro lado, para la parte perturbada de la ecuación de conservación local del momento (cuando $\nu = j$ en (4.56)), usando las correspondientes expresiones para $\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha$ y $\delta\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$, obtenemos

$$\partial_t \delta T_j^t + \partial_i \delta T_j^i + 2\frac{\dot{a}}{a} \delta T_j^t - a\dot{a} \delta T_t^j - (\bar{\rho} + \bar{P}) \left(\frac{1}{2} \partial_j h_{tt} - \frac{\dot{a}}{a} h_{jt} \right) = 0, \quad (4.61)$$

y luego utilizando las ecuaciones que aparecen en (4.37), y las descomposiciones de h_{tt} y h_{jt} , obtenemos dos ecuaciones independientes, una que involucra solo cantidades escalares, dada por la siguiente expresión

$$\partial_j \left[\delta P + \nabla^2 \pi^s + \partial_0 ((\bar{\rho} + \bar{P})\delta u) + \frac{3\dot{a}}{a}(\bar{\rho} + \bar{P})\delta u + \frac{1}{2}(\bar{\rho} + \bar{P})E \right] = 0, \quad (4.62)$$

y otra que involucra solo cantidades vectoriales, la cual está dada por

$$\nabla^2 \pi_j^v + \partial_t [(\bar{\rho} + \bar{P})\delta u_j^v] + 3\frac{\dot{a}}{a}(\bar{\rho} + \bar{P})\delta u_j^v = 0. \quad (4.63)$$

Vale la pena el siguiente resumen para esta sección, aquí hemos obtenido en total seis ecuaciones escalares, las cuatro que se obtienen de las ecuaciones de campo de Einstein (4.44), (4.47), (4.50), (4.51) y las dos que se obtienen de la ecuación de conservación (4.60), (4.62). También hemos obtenido tres ecuaciones que involucran solamente cantidades vectoriales, las cuales están dadas por (4.48), (4.52) y (4.63). Finalmente, tenemos una sola expresión que involucra cantidades tensoriales, la ecuación (4.53). Las cantidades también son conocidas como modos, por eso a veces se hace referencia a modos escalares, modos vectoriales y modos tensoriales. En este trabajo vamos a discutir y estudiar con mayor detalle los modos escalares. Los modos vectoriales a nivel cosmológico no juegan un papel importante, ya que decaen rápidamente. Los modos tensoriales representan ondas gravitacionales cosmológicas que no han sido todavía detectadas hasta el día de hoy, por lo que las dejamos para futuros estudios.

4.2. Transformada de Fourier

A partir de este momento solo vamos a estudiar las ecuaciones que involucran cantidades escalares. Para estos modos es conveniente aplicar la transformada de Fourier espacial (TF), como veremos, esto nos da otra ventaja al momento de resolver las ecuaciones. Esto significa que vamos a expandir las cantidades escalares ($A, B, E, F, \delta\rho, \delta P$, etc) como una suma de ondas planas. Entonces, para ilustrar la técnica sea $s(t, \vec{x})$ cualquiera de las cantidades escalares de nuestro interés, su transformada de Fourier la escribimos de la siguiente manera

$$s(t, \vec{x}) = \int \tilde{s}(t, \vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} d^3k, \quad (4.64)$$

notemos que la tilde indica que la cantidad s está en función del tiempo cósmico y de $\vec{k}$, donde $\vec{k}$ es el vector de onda. En este momento conviene tomar una sola ecuación de las que hemos obtenido para ejemplificar la aplicación de la transformada de Fourier; consideremos la ecuación (4.44), que surge de la componente temporal-temporal de la ecuación de Einstein, la cual está

dada por la siguiente expresión

$$\begin{aligned} -4\pi G(\delta\rho + 3\delta P + \nabla^2\pi^s) &= -\frac{1}{2a^2}\nabla^2 E - \frac{3\dot{a}}{2a}\dot{E} - \frac{1}{a}\nabla^2\dot{F} - \frac{\dot{a}}{a^2}\nabla^2 F + \frac{3}{2}\ddot{A} \\ &\quad + \frac{3\dot{a}}{a}\dot{A} - \frac{3\ddot{a}}{a}E + \frac{1}{2}\nabla^2\ddot{B} + \frac{\dot{a}}{a}\nabla^2\dot{B}. \end{aligned}$$

Para aplicar la transformada primero calculemos el término $\nabla^2\pi^s$, lo que nos da

$$\begin{aligned} \nabla^2\pi^s(t, \vec{x}) &= \partial_i\partial_i\pi^s(t, \vec{x}) = \partial_i\partial_i \int \tilde{\pi}^s(t, \vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3k = \int (ik^i)(ik^i) \tilde{\pi}^s(t, \vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3k \\ &= - \int k^2 \tilde{\pi}^s(t, \vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3k, \end{aligned} \quad (4.65)$$

donde k es el número de onda (una cantidad comóvil). Entonces aplicando la TF en todas las cantidades que aparecen es nuestra ecuación de ejemplo, obtenemos

$$\begin{aligned} -4\pi G \int [(\delta\tilde{\rho} + 3\delta\tilde{P} - k^2\tilde{\pi}^s)] e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3k &= \int \left[\frac{k^2}{2a^2}\tilde{E} - \frac{3\dot{a}}{2a}\dot{\tilde{E}} + \frac{k^2}{a}\dot{\tilde{F}} + \frac{\dot{a}k^2}{a^2}\tilde{F} + \frac{3}{2}\ddot{\tilde{A}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{3\dot{a}}{a}\dot{\tilde{A}} - \frac{3\ddot{a}}{a}\tilde{E} - \frac{k^2}{2}\ddot{\tilde{B}} - \frac{\dot{a}k^2}{a}\dot{\tilde{B}} \right] \exp^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3k, \end{aligned}$$

lo que nos da una ecuación de la forma $\int [F] \exp^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3k = 0$, y esto significa que $F = 0$, por lo tanto tenemos la siguiente ecuación (ahora escrita en el espacio de Fourier)

$$\begin{aligned} -4\pi G(\delta\tilde{\rho} + 3\delta\tilde{P} - k^2\tilde{\pi}^s) &= \frac{k^2}{2a^2}\tilde{E} - \frac{3\dot{a}}{2a}\dot{\tilde{E}} + \frac{k^2}{a}\dot{\tilde{F}} + \frac{\dot{a}k^2}{a^2}\tilde{F} + \frac{3}{2}\ddot{\tilde{A}} \\ &\quad + \frac{3\dot{a}}{a}\dot{\tilde{A}} - \frac{3\ddot{a}}{a}\tilde{E} - \frac{k^2}{2}\ddot{\tilde{B}} - \frac{\dot{a}k^2}{a}\dot{\tilde{B}}, \end{aligned} \quad (4.66)$$

en este momento, sin perdida de generalidad, podemos quitar las tildes ($\tilde{s} \rightarrow s$), ya que estas sirven solo para etiquetar que las cantidades dependen de $\vec{x}$ o $\vec{k}$, entonces finalmente tenemos

$$\begin{aligned} -4\pi G(\delta\rho + 3\delta P - k^2\pi^s) &= \frac{k^2}{2a^2}E - \frac{3\dot{a}}{2a}\dot{E} + \frac{k^2}{a}\dot{F} + \frac{\dot{a}k^2}{a^2}F + \frac{3}{2}\ddot{A} \\ &\quad + \frac{3\dot{a}}{a}\dot{A} - \frac{3\ddot{a}}{a}E - \frac{k^2}{2}\ddot{B} - \frac{\dot{a}k^2}{a}\dot{B}. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Observemos que cuando aplicamos la transformada de Fourier en nuestras ecuaciones, en los términos donde aparece un Laplaciano ∇^2 basta con sustituirlo por $-k^2$ para pasar al espacio de Fourier. Entonces, aplicando la transformada de Fourier a todas las ecuaciones escalares,

obtenemos las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} -4\pi G(\delta\rho + 3\delta P - k^2\pi^s) = & \frac{1}{2a^2}k^2E - \frac{3\dot{a}}{2a}\dot{E} + \frac{1}{a}k^2\dot{F} + \frac{\dot{a}}{a^2}k^2F + \frac{3}{2}\ddot{A} \\ & + \frac{3\dot{a}}{a}\dot{A} - \frac{3\ddot{a}}{a}E - \frac{1}{2}k^2\ddot{B} - \frac{\dot{a}}{a}k^2\dot{B}. \end{aligned} \quad (4.68)$$

$$8\pi Ga(\bar{\rho} + \bar{P})\delta u = -\dot{a}E + a\dot{A}, \quad (4.69)$$

$$\begin{aligned} -4\pi Ga^2[\delta\rho - \delta P + k^2\pi^s] = & \frac{1}{2}a\dot{a}\dot{E} + (2\dot{a}^2 + a\ddot{a})E - \frac{1}{2}k^2A - \frac{1}{2}a^2\ddot{A} \\ & - 3a\dot{a}\dot{A} + \frac{1}{2}a\dot{a}k^2\dot{B} - \dot{a}k^2F, \end{aligned} \quad (4.70)$$

$$16\pi Ga^2\pi^s = a^2\ddot{B} + 3a\dot{a}\dot{B} - 2a\dot{F} - 4\dot{a}F - E - A, \quad (4.71)$$

$$\delta P - k^2\pi^s = -\partial_0[(\bar{\rho} + \bar{P})\delta u] - \frac{3\dot{a}}{a}(\bar{\rho} + \bar{P})\delta u - \frac{1}{2}(\bar{\rho} + \bar{P})E, \quad (4.72)$$

$$\begin{aligned} \delta\dot{\rho} + \frac{3\dot{a}}{a}(\delta\rho + \delta P) = & -\frac{1}{2}(\bar{\rho} + \bar{P})\partial_0(3A - k^2B) \\ & - k^2\left[\frac{\dot{a}}{a}\pi^s + \left(\frac{\delta u}{a^2} - \frac{F}{a}\right)(\bar{\rho} + \bar{P})\right]. \end{aligned} \quad (4.73)$$

En resumen, en esta sección solo hemos escrito en el espacio de Fourier las ecuaciones escalares. Notemos que nuestras ecuaciones evolucionan dependiendo del número de onda k , donde esta cantidad es inversamente proporcional a la distancia. Cuando k es grande, corresponde a escalas pequeñas y cuando k es pequeño corresponde a escalas grandes.

4.3. Selección de norma

Debido a que la teoría de la relatividad general es una teoría covariante, cuando aplicamos perturbaciones, la relación entre la métrica de fondo $\bar{g}_{\mu\nu}$ y la métrica $g_{\mu\nu}$ del sistema que estamos estudiando no es única. De hecho, existe otra métrica $\tilde{g}_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \tilde{h}_{\mu\nu}$ (estamos manteniendo fija la métrica de fondo) la cual está relacionada con la métrica $g_{\mu\nu}$ mediante la siguiente transformación de coordenadas

$$\tilde{x}^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu, \quad (4.74)$$

donde ε^μ es un vector del mismo orden que las perturbaciones de las cantidades que hemos estudiado. Dicho de otro modo, podemos tener otra métrica $\tilde{g}_{\mu\nu}$ que también se aleja ligeramente de la métrica de fondo $\bar{g}_{\mu\nu}$. La transformación de coordenadas (4.74) recibe el nombre de transformación de norma. Lo que nos interesa aquí es que este tipo de transformaciones nos permite elegir un sistema de referencia particular y luego mediante las transformaciones de norma podemos realizar un cambio a otras coordenadas (otra norma). Esto es de mucha ayuda, ya que podemos elegir alguna norma en donde las ecuaciones sean un poco más simples y luego pasar a otras normas si es necesario.

En esta sección vamos a determinar la manera en como se transforman las ecuaciones perturbadas ante una transformación de norma, para esto veamos las siguientes relaciones útiles. La expansión de $\epsilon^\mu(x)$ alrededor de las coordenadas $\tilde{x}$, está dada por

$$\epsilon^\mu(x) = \epsilon^\mu(\tilde{x}) + \frac{\partial \epsilon^\mu}{\partial x^\alpha} (x^\alpha - \tilde{x}^\alpha) = \epsilon^\mu(\tilde{x}) - \frac{\partial \epsilon^\mu(\tilde{x})}{\partial x^\alpha} \epsilon^\alpha = \epsilon^\mu(\tilde{x}), \quad (4.75)$$

esto significa que $\epsilon^\mu(x) = \epsilon^\mu(\tilde{x})$ cuando la expansión se mantiene a primer orden. La derivada en dos coordenadas distintas relacionadas mediante la transformación (4.74) se escribe de la siguiente manera

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\alpha} = \left[\frac{\partial}{\partial x^\mu} (x^\alpha + \epsilon^\alpha) \right] \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\alpha} = \left(\delta_\mu^\alpha + \frac{\partial \epsilon^\alpha}{\partial x^\mu} \right) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\alpha} = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\mu} + \left(\frac{\partial \epsilon^\alpha}{\partial x^\mu} \right) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\alpha}. \quad (4.76)$$

Ahora veamos cómo se transforma un escalar ante una transformación de norma, sabemos que $\tilde{s}(\tilde{x}) = s(x)$. Luego, expandiendo $s(x)$ alrededor de $\tilde{x}$ obtenemos la siguiente relación útil

$$\tilde{s}(\tilde{x}) = s(x) = s(\tilde{x} - \epsilon) = s(\tilde{x}) - \frac{\partial s(x)}{\partial x^\mu} \epsilon^\mu(x) = s(\tilde{x}) - \frac{\partial \tilde{s}(x)}{\partial x^\mu} \epsilon^\mu(x). \quad (4.77)$$

La última igualdad de la ecuación (4.77) se obtiene al mantener a orden lineal, donde hemos escrito el escalar como $s(x) = \tilde{s}(x) + \delta s(x)$. Por otro lado, sea $\tilde{s}$ el escalar s escrito en otra norma (otra coordenada), entonces la expansión a orden lineal queda expresado como $\tilde{s} = \bar{s} + \delta \tilde{s}$, luego usando las expresiones s y $\tilde{s}$ evaluadas en la coordenada $\tilde{x}$, podemos obtener las siguientes relaciones

$$\tilde{s}(\tilde{x}) = [s(\tilde{x}) - \delta s(\tilde{x})] + \delta \tilde{s}(\tilde{x}) \Rightarrow \delta \tilde{s}(\tilde{x}) = \tilde{s}(\tilde{x}) - s(\tilde{x}) + \delta s(\tilde{x}), \quad (4.78)$$

usando (4.77) en (4.78), obtenemos la siguiente ecuación que relaciona las perturbaciones de un campo escalar ante una transformación de norma

$$\boxed{\delta \tilde{s}(\tilde{x}) = \delta s(\tilde{x}) - \epsilon^\mu(\tilde{x}) \left(\frac{\partial \tilde{s}(\tilde{x})}{\partial x^\mu} \right)}. \quad (4.79)$$

Ahora veamos cómo se relacionan las perturbaciones de las componentes de un cuadrivector ante el cambio de norma (4.74), partiendo de la regla de transformación de un vector tenemos la siguiente relación

$$\begin{aligned} \tilde{s}_\mu(\tilde{x}) &= \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial \tilde{x}^\mu} \right) s_\nu(x) = \left[\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\mu} (\tilde{x}^\nu - \epsilon^\nu) \right] s_\nu(\tilde{x} - \epsilon) \\ &= \left(\delta_\mu^\nu - \frac{\partial \epsilon^\nu}{\partial \tilde{x}^\mu} \right) \left(s_\nu(\tilde{x}) - \frac{\partial s_\nu}{\partial x^\alpha} \epsilon^\alpha(\tilde{x}) \right) = s_\mu(\tilde{x}) - \frac{\partial s_\mu}{\partial x^\alpha} \epsilon^\alpha(\tilde{x}) - \frac{\partial \epsilon^\nu}{\partial \tilde{x}^\mu} s_\nu(\tilde{x}) \\ &= s_\mu(\tilde{x}) - \epsilon^\alpha(\tilde{x}) \frac{\partial \tilde{s}_\mu}{\partial x^\alpha} - \tilde{s}_\nu(\tilde{x}) \frac{\partial \epsilon^\nu}{\partial \tilde{x}^\mu}. \end{aligned} \quad (4.80)$$

Por otro lado, las componentes del vector escrito en dos normas están dadas por $s_\mu = \bar{s}_\mu + \delta s_\mu$ y $\tilde{s}_\mu = \bar{s}_\mu + \delta \tilde{s}_\mu$, evaluando en las coordenadas $\tilde{x}$ y manipulando algebraicamente tenemos

$$\tilde{s}_\mu(\tilde{x}) = \bar{s}_\mu(\tilde{x}) + \delta \tilde{s}_\mu(\tilde{x}) = [s_\mu(\tilde{x}) - \delta s_\mu(\tilde{x})] + \delta \tilde{s}_\mu(\tilde{x}) \Rightarrow \boxed{\delta \tilde{s}_\mu(\tilde{x}) = \tilde{s}_\mu(\tilde{x}) + \delta s_\mu(\tilde{x}) - s_\mu(\tilde{x})}. \quad (4.81)$$

Ahora, sustituyendo la ecuación (4.80) en (4.81) obtenemos la manera en como se relacionan las componentes de un vector ante una transformación de norma, la cual está dada por la siguiente expresión

$$\boxed{\delta \tilde{s}_\mu(\tilde{x}) = \delta s_\mu(\tilde{x}) - \frac{\partial \bar{s}_\mu}{\partial x^\alpha} \epsilon^\alpha(\tilde{x}) - \frac{\partial \epsilon^\nu}{\partial x^\mu} \bar{s}_\nu(\tilde{x})}. \quad (4.82)$$

Por último, veamos como se transforma un tensor de rango dos ante una transformación de norma, recordando que nuestro objetivo es determinar la manera en como se relaciona a las perturbaciones en distintas normas. Tal y como lo hemos hecho en los dos casos anteriores, ahora partiendo de la regla de transformación de un tensor de rango dos y, luego realizando la expansión hasta primer orden, obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \tilde{s}_{\mu\nu}(\tilde{x}) &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu} s_{\alpha\beta}(x) = \left[\delta_\mu^\alpha - \frac{\partial \epsilon^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu} \right] \left[\delta_\nu^\beta - \frac{\partial \epsilon^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu} \right] s_{\alpha\beta}(\tilde{x} - \epsilon) \\ &= \left(\delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta - \delta_\mu^\alpha \frac{\partial \epsilon^\beta}{\partial x^\nu} - \delta_\nu^\beta \frac{\partial \epsilon^\alpha}{\partial x^\mu} \right) \left(s_{\alpha\beta}(\tilde{x}) - \epsilon^\rho(\tilde{x}) \frac{\partial s_{\alpha\beta}}{\partial x^\rho} \right) \\ &= s_{\mu\nu}(\tilde{x}) - \epsilon^\rho(\tilde{x}) \frac{\partial \tilde{s}_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} - \bar{s}_{\mu\beta}(\tilde{x}) \frac{\partial \epsilon^\beta}{\partial x^\nu} - \bar{s}_{\alpha\nu}(\tilde{x}) \frac{\partial \epsilon^\alpha}{\partial x^\mu}. \end{aligned} \quad (4.83)$$

Ahora bien, este tensor escrito en dos normas distintas, tienen la siguiente expresión $s_{\mu\nu} = \bar{s}_{\mu\nu} + \delta s_{\mu\nu}$ y $\tilde{s}_{\mu\nu} = \bar{s}_{\mu\nu} + \delta \tilde{s}_{\mu\nu}$, una vez más evaluando en las coordenadas $\tilde{x}$ tenemos la siguiente relación

$$\begin{aligned} \tilde{s}_{\mu\nu}(\tilde{x}) &= \bar{s}_{\mu\nu}(\tilde{x}) + \delta \tilde{s}_{\mu\nu}(\tilde{x}) = [s_{\mu\nu}(\tilde{x}) - \delta s_{\mu\nu}(\tilde{x})] + \delta \tilde{s}_{\mu\nu}(\tilde{x}), \\ \Rightarrow \delta \tilde{s}_{\mu\nu}(\tilde{x}) &= \tilde{s}_{\mu\nu}(\tilde{x}) - s_{\mu\nu}(\tilde{x}) + \delta s_{\mu\nu}(\tilde{x}). \end{aligned} \quad (4.84)$$

Usando la ecuación (4.83) en la ecuación (4.84), obtenemos la expresión que relaciona en dos normas distintas, las perturbaciones de un tensor de rango dos, la cual está dada por la siguiente expresión

$$\boxed{\delta \tilde{s}_{\mu\nu}(\tilde{x}) = \delta s_{\mu\nu}(\tilde{x}) - \epsilon^\rho(\tilde{x}) \frac{\partial s_{\mu\nu}(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}^\rho} - s_{\mu\beta}(\tilde{x}) \frac{\partial \epsilon^\beta(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}^\nu} - s_{\alpha\nu}(\tilde{x}) \frac{\partial \epsilon^\alpha(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}^\mu}}. \quad (4.85)$$

En resumen, lo que hemos calculado son las ecuaciones que relacionan las perturbaciones en dos normas distintas tanto para escalares, vectores y tensores, las respectivas relaciones están

dados por las ecuaciones (4.79), (4.82) y (4.85).

Para poder realizar los cálculos que siguen recordemos que $x = (t, x^i)$ y $\varepsilon = (\varepsilon^\mu) = (\varepsilon^0, \varepsilon^i)$, con la ayuda de la métrica *FRLW* podemos determinar que $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_i) = (-\varepsilon^0, a^2 \varepsilon^i)$. Por otro lado, también necesitamos descomponer la parte espacial del vector ε_μ en una parte escalar y otra vectorial con el objetivo de extraer todas las cantidades escalares, entonces, realizamos la siguiente descomposición

$$\varepsilon_i = \partial_i \varepsilon^s + \varepsilon_i^v \text{ con la restricción } \partial_i \varepsilon_i = 0, \quad (4.86)$$

donde ε^s es la parte escalar y ε_i^v es la parte vectorial con divergencia cero del vector ε_i , tal y como lo hicimos con las perturbaciones $h_{\mu\nu}$ y $\delta T_{\mu\nu}$. Ahora veamos como queda la transformación de las cantidades escalares que son de nuestro interés; por ejemplo la densidad ρ es un escalar, por lo que las perturbaciones de la densidad en dos normas distintas se relacionan de acuerdo a la ecuación (4.79) (realizando también la transformación $\tilde{x} \rightarrow x$), entonces tenemos

$$\delta \tilde{\rho}(x) = \delta \rho(x) - \varepsilon^\mu \frac{\partial \rho(x)}{\partial x^\mu}, \quad (4.87)$$

la densidad de fondo solo depende del tiempo cósmico. Además, siguiendo la literatura principal [47] usamos la definición $\Delta \delta \rho \equiv \delta \tilde{\rho}(x) - \delta \rho(x)$ y como $\varepsilon^0 = -\varepsilon_0$, para obtener el siguiente resultado

$$\Delta \delta \rho(x) = \varepsilon_0 \dot{\rho}(t), \quad (4.88)$$

exactamente de la misma manera llegamos a una ecuación similar para la presión

$$\Delta \delta P(x) = \varepsilon_0 \dot{P}(t). \quad (4.89)$$

Ahora veamos la transformación de norma de la perturbación de la velocidad, debido a que es un vector, la regla de transformación está dada por la ecuación (4.82), usando también la definición $\Delta \delta U_\mu(x) = \delta \tilde{U}_\mu(x) - \delta U_\mu(x)$, tenemos el siguiente resultado

$$\Delta \delta U_\mu(x) = -\frac{\partial \tilde{U}_\mu(x)}{\partial x^\alpha} \varepsilon^\alpha(x) - \frac{\partial \varepsilon^\nu(x)}{\partial x^\mu} \tilde{U}_\nu(x) = -\frac{\partial \varepsilon^\nu(x)}{\partial x^\mu} \tilde{U}_\nu(x) = \frac{\partial \varepsilon^0(x)}{\partial x^\mu} = -\frac{\partial \varepsilon_0(x)}{\partial x^\mu}, \quad (4.90)$$

donde hemos empleado la velocidad de fondo $\tilde{U}_\nu = (U_0, 0, 0, 0) = (-1, 0, 0, 0)$ y $\varepsilon^0 = -\varepsilon_0$. Ahora, calculando la componente $\Delta \delta U_0$ y además usando $\delta U_0 = h_{00}/2$, entonces tenemos

$$\Delta \delta U_0 = \delta \tilde{U}_0(x) - \delta U_0(x) = \frac{\tilde{h}_{00}(x)}{2} - \frac{h_{00}}{2} = -\frac{\tilde{E}(x)}{2} + \frac{E(x)}{2} = -\frac{\partial \varepsilon_0(x)}{\partial x^0} = -\dot{\varepsilon}_0, \quad (4.91)$$

luego utilizando la siguiente definición $\Delta E(x) = \tilde{E}(x) - E(x)$, finalmente tenemos

$$\boxed{\Delta E(x) = 2\dot{\varepsilon}_0.} \quad (4.92)$$

Exactamente de la misma forma, la parte espacial de la perturbación de la velocidad $\Delta\delta U_i(x)$ implica la siguiente ecuación

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}[\delta\tilde{u}(x) - \delta u(x) + \epsilon_0(x)]\right) + \delta\tilde{u}_i^v(x) - \delta u_i^v(x) = 0, \quad (4.93)$$

donde hemos usado la descomposición de la parte espacial de la velocidad $\delta U_i = \partial_i \delta u + u_i^v$, entonces de (4.93) obtenemos las siguientes ecuaciones

$$\Delta\delta u(x) = -\epsilon_0(x) \quad \text{y} \quad \Delta\delta u_i^v = 0, \quad (4.94)$$

donde δu es un escalar. Observemos que $\Delta\delta u_i^v = 0$, esto indica que esta componente de la velocidad no sufre ningún cambio ante una transformación de norma, en este caso se dice que esta cantidad es invariante de norma. Aunque hemos realizado ejemplos sobre la transformación de norma para escalares y el vector δU_μ , para los casos del tensor métrico y el tensor de energía-momento (ecuación (4.82)) no vamos a mostrar los detalles de los cálculos, ya que son similares.

De la perturbación de la métrica obtenemos las siguientes ecuaciones ante una transformación de norma

$$\begin{aligned} \Delta A(x) &= \frac{2\dot{a}}{a}\epsilon_0(x), \\ \Delta B(x) &= -\frac{2}{a^2}\epsilon^s(x), \\ \Delta C_i(x) &= -\frac{1}{a^2}\epsilon_i^v(x), \\ \Delta E(x) &= 2\dot{\epsilon}_0(x), \\ \Delta D_{ij}(x) &= 0, \\ \Delta F(x) &= -\frac{1}{a}\left(\epsilon_0(x) + \dot{\epsilon}^s(x) - \frac{2\dot{a}}{a}\epsilon^s(x)\right), \\ \Delta G_i(x) &= \frac{1}{a}\left(-\dot{\epsilon}_i^v(x) + \frac{2\dot{a}}{a}\epsilon_i^v(x)\right). \end{aligned} \quad (4.95)$$

Notemos que la cantidad $\Delta E(x)$ ya la habíamos determinado antes, aquí hemos definido también la cantidad $\Delta A(x) = \tilde{A}(x) - A(x)$ (y de igual manera para las demás cantidades).

De las perturbaciones del tensor de energía-momento ante una transformación de norma de la componente $\Delta\delta T_{00}(x)$ y usando $\Delta\delta\rho(x) = \dot{\rho}\epsilon(x)$ se determina la relación $\Delta E(x) = 2\dot{\epsilon}_0(x)$, la cual ya habíamos obtenido. Partiendo de $\Delta\delta T_{i0}$, obtenemos las mismas ecuaciones que ya hemos encontrado para ΔF y ΔG_i que aparecen en las ecuaciones (4.95). Finalmente, de la correspondiente transformación de norma para la perturbación del tensor δT_{ij} obtenemos

$$\partial_i\partial_j\Delta\pi^s + \partial_i\Delta\pi_j^v + \partial_j\Delta\pi_i^v + \Delta\pi_{ij}^T = 0, \quad (4.96)$$

de aquí determinamos que

$$\Delta\pi^s = 0, \quad \Delta\pi_i^v = 0 \quad \text{y} \quad \Delta\pi_{ij}^T = 0, \quad (4.97)$$

esto significa que estas cantidades son invariantes ante una transformación de norma.

4.4. Ecuaciones escalares en normas particulares

La elección de norma depende del problema específico que estemos estudiando, básicamente escribir las ecuaciones en una norma dada se hace para poder simplificarlas o también se elige alguna norma en específico para que se puedan aplicar de manera eficiente los métodos numéricos necesarios para resolver el sistema de ecuaciones. En esta sección vamos a estudiar dos normas que son ampliamente usadas y cada una tiene sus propias ventajas.

Norma newtoniana

Recordando que la cantidad ε^s proviene de la ecuación (4.86), se elige la función ε^s de tal manera que $B = 0$ y también ε_0 de tal manera que $F = 0$, esta elección conjunta recibe el nombre de **norma newtoniana**. Entonces, siguiendo el libro de referencia [47] definimos $E \equiv 2\Phi$ y $A \equiv -2\Psi$. Por lo tanto, las componentes de la métrica quedan expresadas como

$$g_{tt} = -1 - 2\Phi, \quad g_{it} = 0, \quad g_{ij} = a^2\delta_{ij}(1 - 2\Psi), \quad (4.98)$$

entonces, las ecuaciones escalares están dadas de la siguiente manera

$$-4\pi Ga^2(\delta\rho - \delta P + k^2\pi^s) = a\dot{a}\dot{\Phi} + (4\dot{a}^2 + 2a\ddot{a})\Phi + k^2\Psi + a^2\ddot{\Psi} + 6a\dot{a}\dot{\Psi}, \quad (4.99)$$

$$-8\pi Ga^2\pi^s = \Phi - \Psi, \quad (4.100)$$

$$4\pi Ga(\bar{\rho} + \bar{P})\delta u = -\dot{a}\Phi - a\dot{\Psi}, \quad (4.101)$$

$$4\pi G(\delta\rho + 3\delta P - k^2\pi^s) = -\frac{1}{a^2}k^2\Phi + \frac{3\dot{a}}{a}\dot{\Phi} + 3\ddot{\Phi} + \frac{6\dot{a}}{a}\dot{\Psi} + \frac{6\ddot{a}}{a}\Phi, \quad (4.102)$$

$$\delta P - k^2\pi^s = -\partial_0[(\bar{\rho} + \bar{P})\delta u] - \frac{3\dot{a}}{a}(\bar{\rho} + \bar{P})\delta u - (\bar{\rho} + \bar{P})\Phi, \quad (4.103)$$

$$\delta\dot{\rho} + \frac{3\dot{a}}{a}(\delta\rho + \delta P) = k^2\left[\frac{\delta u}{a^2}(\bar{\rho} + \bar{P}) + \frac{\dot{a}}{a}\pi^s\right] + 3(\bar{\rho} + \bar{P})\dot{\Psi}, \quad (4.104)$$

recordando que las primeras cuatro ecuaciones provienen de las ecuaciones de campo de Einstein y las últimas dos surgen de las ecuaciones de conservación del tensor de energía-momento.

Norma síncrona

Para esta norma se elige ε_0 de tal forma que $E = 0$ y también ε^s para que $F = 0$. Con esta elección las componentes de la métrica quedan expresadas de la siguiente forma

$$g_{tt} = -1, \quad g_{it} = 0 \quad \text{y} \quad g_{ij} = a^2\left[(1 + A)\delta_{ij} + \frac{\partial^2 B}{\partial x^i \partial x^j}\right]. \quad (4.105)$$

Entonces, las ecuaciones que involucran solamente cantidades escalares escritas en esta norma quedan expresadas de la siguiente manera

$$-4\pi Ga^2 [\delta\rho - \delta P + k^2\pi^2] = -\frac{1}{2}k^2A - \frac{1}{2}a^2\ddot{A} - 3a\dot{a}\dot{A} + \frac{1}{2}a\dot{a}k^2\dot{B}, \quad (4.106)$$

$$-16\pi Ga^2\pi^s = A - a^2\ddot{B} - 3a\dot{a}\dot{B}, \quad (4.107)$$

$$8\pi Ga(\bar{\rho} + \bar{P})\delta u = a\dot{A}, \quad (4.108)$$

$$-4\pi G(\delta\rho + 3\delta P - k^2\pi^2) = \frac{3}{2}\ddot{A} + \frac{3}{2}\dot{a}\dot{A} - \frac{1}{2}k^2\ddot{B} - \frac{\dot{a}}{a}k^2\dot{B}, \quad (4.109)$$

$$\delta P - k^2\pi^s = -\partial_0[(\bar{\rho} + \bar{P})\delta u] - 3\frac{\dot{a}}{a}(\bar{\rho} + \bar{P})\delta u, \quad (4.110)$$

$$\delta\dot{\rho} + \frac{3\dot{a}}{a}(\delta\rho + \delta P) - \frac{\delta u}{a^2}k^2(\bar{\rho} + \bar{P}) - \frac{\dot{a}}{a}k^2\pi^s = \frac{1}{2}(\bar{\rho} + \bar{P})\partial_0[3A - k^2B]. \quad (4.111)$$

Como hemos mencionado, la elección de una norma depende del problema que se esté estudiando, existen casos en donde es preferible una norma en particular. Por ejemplo, computacionalmente conviene realizar cálculos numéricos en la norma síncrona, pero luego es mejor interpretar los resultados en la norma newtoniana, de allí la utilidad de cambiar de una norma a otra. El paso de una norma a otra se realiza mediante las ecuaciones (4.95). Por otro lado, vale la pena mencionar que existen otras normas además de las dos que hemos descrito aquí, incluso existe una formulación de las ecuaciones en términos de cantidades que son invariantes ante una transformación de norma, esta formulación fue realizada por J. Bardeen [60].

4.5. La ecuación de Boltzmann

Para la materia oscura y la energía oscura, lo que hemos realizado hasta este momento es suficiente en el sentido de que hemos usado un tensor de energía-momento el cual depende de cantidades macroscópicas como la presión P , la densidad ρ , la velocidad δu_i , el estrés anisotrópico π^s , etc. Sin embargo, los fotones, los bariones y los neutrinos se describen de una forma más completa desde la mecánica estadística. Es decir, es mejor estudiar las ecuaciones dinámicas desde la ecuación de Boltzmann. Para esto, es necesario describir estas tres componentes mencionadas desde un punto de vista microscópico.

Esta descripción se realiza mediante una función de distribución f la cual depende de la posición de cada partícula $\mathbf{x} = (x^0, x^i)$, del momento $\mathbf{p} = (p^0, p^i)$ y del tiempo t . Una vez especificada la función de distribución es posible calcular las cantidades macroscópicas como la densidad $\rho(\mathbf{x}, t)$, la presión $P(\mathbf{x}, t)$, etc. La evolución de la función de distribución en el espacio fase está dada por la ecuación de Boltzmann

$$\frac{df}{dt} = C[f], \quad (4.112)$$

donde $C[f]$ es el término de colisión. Aunque no vamos a modificar las componentes que vamos a describir en las siguientes subsecciones, es importante describirlos debido a que al realizar un estudio del universo con todos sus ingredientes, aparecen las respectivas cantidades que describen a cada una de las componentes. Por esta razón, es necesario entender de donde surgen y el significado físico de las cantidades involucradas. En las siguientes secciones vamos a seguir la referencia [50] para realizar las descripciones.

4.5.1. La ecuación de Boltzmann para fotones

Para derivar las ecuaciones de nuestro interés, vamos a usar solamente la norma newtoniana y las coordenadas de tiempo cósmico. Siguiendo [50], la métrica tiene la siguiente expresión

$$ds^2 = -(1 + 2\Psi)dt^2 + a^2\delta_{ij}(1 + 2\Phi)dx^i dx^j. \quad (4.113)$$

Expandiendo hasta primer orden el lado izquierdo de la ecuación de Boltzmann (4.112), para partículas relativistas (fotones y neutrinos) encontramos la siguiente igualdad

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\hat{p}^i}{a} - \left[H + \dot{\Phi} + \frac{1}{a} \hat{p}^i \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \right] p \frac{\partial f}{\partial p}, \quad (4.114)$$

donde $\hat{p}_i$ es el momento físico, p es la magnitud de la parte espacial del cuadrimomento y f es la función de distribución de las partículas relativistas. La función de distribución para los fotones en el fondo cosmológico es la función de distribución de Bose-Einstein, con la idea de estudiar pequeñas perturbaciones se modifica la función de distribución de los fotones de la siguiente manera

$$f(\mathbf{x}, p, \hat{\mathbf{p}}, t) = \left[\exp \left\{ \frac{p}{T(t)[1 + \Theta(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{p}}, t)]} \right\} - 1 \right]^{-1}, \quad (4.115)$$

donde $\Theta(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{p}}, t) = \delta T(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{p}}, t)/T(t)$ es la perturbación de la temperatura. Expandiendo la función de distribución (4.115) hasta primer orden, obtenemos la siguiente ecuación

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \simeq \bar{f}(p, t) - p \frac{\partial \bar{f}(p, t)}{\partial p} \Theta(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{p}}, t), \quad (4.116)$$

donde

$$\bar{f} = \left[\exp \left(\frac{p}{T} \right) - 1 \right]^{-1}, \quad (4.117)$$

es la función de distribución de Bose-Einstein en el fondo cosmológico. Entonces, la parte no perturbada de la ecuación de Boltzmann está dada por

$$\left. \frac{df}{dt} \right|_{fondo} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial t} - H p \frac{\partial \bar{f}}{\partial p} = 0, \quad (4.118)$$

como se puede revisar de los detalles en la referencia [50], de la ecuación de fondo obtenemos la relación $T \propto 1/a$. Por otra parte, la ecuación que corresponde a la perturbación a primer orden queda expresada como

$$\left. \frac{df}{dt} \right|_{\text{orden lineal}} = -p \frac{\partial \bar{f}}{\partial p} \left[\dot{\Theta} + \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial \Theta}{\partial x^i} + \dot{\Phi} + \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \right]. \quad (4.119)$$

La razón de igualar la ecuación (4.118) a cero, es debido a que a nivel del fondo cosmológico el término de interacción es cero, ya que los fotones están en equilibrio térmico. En cambio, en la parte que corresponde a la perturbación a primer orden, está presente un término de interacción debido a la dispersión Compton que existe entre los fotones y los electrones. Esta interacción está dada por la siguiente expresión (los detalles del cálculo están en el libro de referencia [50])

$$C[f(\mathbf{p})] = -p \frac{\partial \bar{p}}{\partial p} n_e \sigma_T [\Theta_0 - \Theta(\hat{p}) + \hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{u}_b], \quad (4.120)$$

donde $\mathbf{u}_b$ es la velocidad de los bariones, σ_T es la sección transversal de Thomson y $\Theta_0(\mathbf{x}, t)$ es llamado **monopolo** y está dado mediante la siguiente integral

$$\Theta_0(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{1}{4\pi} \int d\Omega' \Theta(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{x}, t), \quad (4.121)$$

Ω' es el ángulo sólido. Entonces, la ecuación de Boltzmann a orden lineal, con el término de interacción dado por la ecuación (4.120), queda expresada como

$$\dot{\Theta} + \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial \Theta}{\partial x^i} + \dot{\Phi} + \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} = n_e \sigma_T [\Theta_0 - \Theta + \hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{u}_b]. \quad (4.122)$$

En coordenadas del tiempo conforme η , el cual se relaciona con el tiempo cósmico como $a d\eta = dt$, la ecuación (4.122) se escribe del modo siguiente

$$\Theta' + \hat{p}^i \frac{\partial \Theta}{\partial x^i} + \Phi' + \hat{p}^i \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} = n_e \sigma_T a [\Theta_0 - \Theta + \hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{u}_b], \quad (4.123)$$

donde $d/d\eta \equiv '.$ Ahora usando las siguientes definiciones

$$\mu \equiv \frac{\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{p}}}{k} \text{ y } \tau \equiv \int_{\eta}^{\eta_0} d\eta' n_e \sigma_T a, \quad (4.124)$$

donde k es la magnitud del vector de onda, μ describe la componente del vector de onda de la dirección de propagación de los fotones y τ es el camino óptico. Finalmente tenemos la siguiente expresión

$$\Theta' + ik\mu\Theta + \Psi' + ik\mu\Psi = \tau' [\Theta_0 + \Theta + \mu u_b], \quad (4.125)$$

donde hemos usado la cantidad $\mathbf{u}_b = \frac{\mathbf{k}}{k} u_b(\mathbf{k}, \eta)$. En resumen, la ecuación (4.125) corresponde a la ecuación de Boltzmann a orden lineal para fotones escrita en la norma newtoniana utilizando el tiempo conforme η en el espacio de Fourier.

4.5.2. Ecuación de Boltzmann para bariones

El lado derecho de la ecuación de Boltzmann (4.112) para los bariones³ está dado por

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p}{E} \frac{\hat{p}_i}{a} \frac{\partial f}{\partial x^i} - \left[H + \dot{\Phi} + \frac{E}{ap} \hat{p}^i \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \right] p \frac{\partial f}{\partial p}, \quad (4.126)$$

donde E es la energía. Para este caso no hay necesidad de asumir una forma específica de la función de distribución (debido a que esta componente es no relativista), lo que se hace es una integración de la ecuación (4.126) para calcular los momentos. Para llevar a cabo las integraciones necesitamos el término de interacción. Aquí existen dos interacciones que afectan a los bariones, la primera es la dispersión de Coulomb $e^- + N \leftrightarrow e^- + N$ y la segunda es la dispersión Compton $e^- + \gamma \leftrightarrow e^- + \gamma$. Para estas dispersiones se preserva el número de electrones y protones. Para calcular el momento cero de la ecuación (4.126), vamos a multiplicar por $(d^3p/(2\pi)^3)p\hat{p}^j/E$ la ecuación, luego integrando e identificando la densidad y la velocidad de los bariones como

$$n_b \equiv \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f_b \quad \text{y} \quad u_b \equiv \frac{1}{u_b} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f_b \frac{p}{E} \frac{\hat{p}^i}{E(p)}, \quad (4.127)$$

se obtiene la siguiente ecuación

$$\frac{\partial n_b}{\partial t} + \frac{1}{a} \frac{\partial (n_b u_b^i)}{\partial x^i} + 3[H + \dot{\Phi}]n_b = 0, \quad (4.128)$$

luego haciendo la siguiente perturbación $n_b(\mathbf{x}, t) = \bar{n}_b(t)[1 + \delta_b(\mathbf{x}, t)]$, e identificando la ecuación que corresponde al fondo cosmológico, obtenemos

$$\frac{\partial n_b}{\partial t} + 3H\bar{n}_b = 0, \quad (4.129)$$

la cual implica que $\bar{n}_b \propto a^{-3}$. Por el otro lado, identificando la ecuación que corresponde a la parte perturbada obtenemos

$$\frac{\partial \delta_b}{\partial t} + \frac{1}{a} \frac{\partial u_b^i}{\partial x^i} + 3\dot{\Phi} = 0, \quad (4.130)$$

donde hemos usado el espectro de la densidad de los bariones $\delta_b \equiv \delta\rho_b/\bar{\rho}_b$.

Ahora necesitamos una ecuación para la velocidad de los bariones. Esto se puede obtener calculando el primer momento de la ecuación, entonces multiplicando (4.126) por $(d^3p/(2\pi)^3)p\hat{p}^j$, ecuación (4.126), integrando y además usando la aproximación $m_b = m_e + m_p \approx m_p$, obtenemos la siguiente ecuación

$$m_p \frac{\partial (n_b u_b^j)}{\partial t} + 4Hm_p n_b u_b^j + \frac{m_p n_p}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^j} = F_{e\gamma}^j(\mathbf{x}, t), \quad (4.131)$$

³Llamamos bariones a los protones y electrones.

donde $F_{e\gamma}^j$ es el término de colisión, el cual surge de la transferencia de momento debido a la dispersión Compton entre los electrones y los fotones. Como estamos interesados en la perturbación a orden lineal, debemos realizar $n_p \rightarrow \bar{n}_p$ para obtener la ecuación deseada ya que aquí la velocidad u_b^j es a primer orden. Usando la ecuación que corresponde al fondo cosmológico $\partial_t \bar{n}_p + 3H\bar{n}_p = 0$, obtenemos la siguiente expresión para la velocidad

$$\frac{\partial u_b^j}{\partial t} + H u_b^j + \frac{1}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^j} = \frac{1}{\bar{\rho}_b} F_{e\gamma}^j(\bar{x}, t). \quad (4.132)$$

El término de interacción, tal y como se muestran los detalles en la referencia [50], tiene la siguiente expresión

$$\frac{1}{\bar{\rho}_b} \hat{k}_i F_{e\gamma}^i(\mathbf{x}, t) = -n_e \sigma_T \frac{4\bar{\rho}_\gamma}{\bar{\rho}_b} \left(i\Theta_1 + \frac{1}{3} u_b \right), \quad (4.133)$$

entonces finalmente podemos escribir la ecuación para la velocidad de los bariones en el espacio de Fourier como

$$u_b' + \frac{a'}{a} u_b + ik\Psi = \tau' \frac{4\bar{\rho}_\gamma}{3\bar{\rho}_b} (3i\Theta_1 + u_b), \quad (4.134)$$

donde ahora hemos expresado la ecuación en coordenadas del tiempo conforme η . Aquí $\Theta_1(k, \eta)$ es el primer momento (llamado **dipolo**) de la perturbación Θ dado por la siguiente expresión

$$\Theta_1(k, \eta) \equiv i \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{2} \mu \Theta(\mu, k, \eta). \quad (4.135)$$

4.5.3. La ecuación de Boltzmann para neutrinos

Los neutrinos son partículas relativistas que tienen la siguiente función de distribución

$$f_v(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \left[\exp \left\{ \frac{p}{T_v(t) [1 + \mathcal{N}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{p}}, t)]} \right\} + 1 \right]^{-1}, \quad (4.136)$$

donde $\mathcal{N}$ es la perturbación de la temperatura para los neutrinos. Expandiendo la función de distribución y manteniendo hasta el orden lineal tenemos

$$f_v(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \left[1 - \mathcal{N}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{p}}, t) p \frac{d}{dp} \right] \bar{f}_v(p), \quad (4.137)$$

donde $\bar{f}_v(p) = [e^{p/T(a)} + 1]$ es la función de distribución del fondo llamado Fermi-Dirac. En la época de nuestro interés los neutrinos no interactúan con las demás componentes del universo (solamente a través de la interacción gravitacional), esto significa que el término de colisión es cero. Entonces la ecuación de Boltzmann queda expresado como

$$\frac{df_v}{dt} = \frac{\partial f_v}{\partial t} + \frac{p}{E_v(p)} \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial f_v}{\partial x^i} - \left[H + \dot{\Phi} + \frac{E_v(p)}{ap} \hat{p}^i \Psi_{,i} \right] p \frac{\partial f_v}{\partial p} = 0. \quad (4.138)$$

Usando la ecuación (4.137) en la ecuación (4.138), se obtiene la siguiente ecuación lineal

$$\mathcal{N}'(\mathbf{k}, p, \mu, \eta) + ik\mu \frac{p}{E(p)} \mathcal{N} - Hp \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial p} = -\Phi' - ik\mu \frac{E_v(p)}{p} \Psi, \quad (4.139)$$

donde hemos pasado al tiempo conforme y además hemos escrito la ecuación en el espacio de Fourier.

4.6. Resumen

En este capítulo hemos perturbado las ecuaciones de Einstein manteniendo los términos solamente hasta el orden lineal y lo hemos hecho en coordenadas del tiempo cósmico t y en las coordenadas cartesianas x^i . Se realizó una descomposición de las ecuaciones que corresponden a las perturbaciones a primer orden en su parte escalar, vectorial y tensorial, la ventaja de tal descomposición es que cada modo evoluciona de manera independiente, esto nos permite estudiar solamente las cantidades escalares (los modos de nuestro interés) sin afectar a los vectores y tensores. Luego hemos visto la libertad de norma que surge de la invarianza de las ecuaciones de la teoría de la relatividad general, como ejemplo, hemos escrito las ecuaciones en dos normas distintas en el espacio de Fourier. Finalmente, se ha descrito de manera breve la ecuación de Boltzmann, y la hemos aplicado a la radiación, a los bariones y a los neutrinos para obtener sus respectivas ecuaciones de evolución, las cuales deben ser resueltas de manera simultánea con las que hemos obtenido a partir de las ecuaciones de Einstein.

Capítulo 5

Observaciones cosmológicas

En general, los modelos cosmológicos se encuentran en función de ciertos parámetros que requieren ser determinados para ver su viabilidad física. Por ejemplo, para la ecuación (2.32) del modelo Λ CDM los parámetros, correspondientes a la cosmología de fondo, que deben ser determinados son las densidades de los bariones Ω_b^0 , la materia oscura Ω_c^0 , la radiación Ω_r^0 , la constante cosmológica Ω_Λ^0 y la constante de Hubble H_0 (recordemos que todos estos parámetros están evaluados al día de hoy). En este capítulo vamos a describir el método para determinar el valor de los parámetros de los modelos cosmológicos usando las distintas observaciones cosmológicas. Primero vamos a explicar las herramientas estadísticas que son necesarias para confrontar los modelos con los datos y luego vamos a describir las observaciones que son de nuestro interés.

5.1. Teorema de Bayes, método de Monte Carlo de las cadenas de Markov y selección de modelos

La técnica que se utiliza para determinar los parámetros libres de un modelo, una vez que tenemos datos observacionales, es mediante una inferencia Bayesiana. Esta técnica se basa principalmente en el teorema de Bayes el cual está dado por la siguiente ecuación

$$p(\theta|y, \mathcal{M}) = \frac{p(\theta, y|\mathcal{M})}{p(y|\mathcal{M})} = \frac{p(\theta|\mathcal{M}) \cdot p(y|\theta, \mathcal{M})}{p(y|\mathcal{M})}, \quad (5.1)$$

donde $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ son los datos observados, $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$ son los parámetros que necesitamos inferir y $\mathcal{M}$ es el modelo. Cada término de la ecuación (5.1) debe ser descrito individualmente debido a la importancia que tiene.

- $p(\theta|\mathcal{M})$ se llama **probabilidad previa** (prior), esta representa nuestro conocimiento de los parámetros (si es que lo tenemos) antes de usar los datos observados y .

- $p(y|\mathcal{M})$ es llamada **evidencia** y es la probabilidad de que los datos sean ciertos dado el modelo $\mathcal{M}$.
- $p(y|\theta, \mathcal{M})$ es conocida como la **función de probabilidad** (likelihood), este factor indica la probabilidad de que los datos sean ciertos asumiendo que los parámetros y el modelo $\mathcal{M}$ sean ciertos.
- A $p(\theta|y, \mathcal{M})$ se le llama **probabilidad posterior** y es lo que nos interesa determinar ya que este término indica la probabilidad de que los parámetros sean ciertos dado que los datos son verdaderos y también asumiendo que el modelo $\mathcal{M}$ es correcto.

Entonces, para realizar la inferencia Bayesiana debemos especificar las formas funcionales de la probabilidad previa, la función de probabilidad y la evidencia. Cuando el propósito es realizar una inferencia, el término llamado evidencia puede ser ignorado, ya que este solo depende de los datos y del modelo (no depende de los parámetros), por lo cual en este contexto su rol es el de un factor de normalización. Por otro lado, la probabilidad previa tiende a ser irrelevante conforme los datos aumentan. Ahora, es claro que el teorema de Bayes nos permite enlazar nuestros modelos con las observaciones. Como el objetivo es determinar los valores de los parámetros más probables (dados los datos y el modelo) entonces, lo que debemos realizar es maximizar la probabilidad posterior.

Esta probabilidad posterior generalmente depende de varios parámetros $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$, sin embargo, también nos interesa la probabilidad posterior solamente de algunos parámetros o de un solo parámetro. Por ejemplo, consideremos un modelo con dos parámetros libres (θ_1, θ_2) cuya probabilidad posterior es la siguiente función f

$$f = f(\theta_1, \theta_2|y, \mathcal{M}), \quad (5.2)$$

ahora, si queremos determinar la probabilidad posterior del parámetro θ_1 , entonces lo que debemos realizar es una integración sobre θ_2 , es decir

$$f(\theta_1) = \int f(\theta_1, \theta_2|y, \mathcal{M}) d\theta_2. \quad (5.3)$$

El proceso de integrar sobre algún parámetro se conoce como **marginalización** y se recurre a él básicamente por dos razones: la primera es lo que hemos explicado, **que queremos determinar la función de probabilidad del parámetro de nuestro interés**, y la segunda razón es que en ciertos modelos específicos surgen parámetros en los que, en principio, no estamos interesados debido a que no son relevantes para nuestro estudio. Estos parámetros son conocidos en inglés como parámetros “nuisance” y los llamaremos **parámetros no importantes o parámetros que no son de interés**.

Por otro lado, no solo estamos interesados en determinar los valores de los parámetros que implican el mayor valor de la probabilidad posterior, también necesitamos determinar la forma

o el comportamiento de la distribución posterior en la vecindad del máximo de probabilidad. Independientemente de la forma funcional de la probabilidad posterior, esta puede ser en algún sentido estrecha o extendida en el espacio de los parámetros. En el caso de una distribución estrecha, existe mayor confianza de los parámetros inferidos, ya que la probabilidad de que el parámetro inferido sea cierto en un intervalo dado (al rededor del parámetro inferido) será mayor respecto al caso de una distribución de probabilidad posterior extendida. En el caso de la cosmología comúnmente son usados los intervalos de confianza, los cuales están expresados en sigmas, por ejemplo, en el caso de una distribución de probabilidad posterior gaussiana, 1σ , 2σ y 3σ equivalen respectivamente al 68.27 %, 95.45 % y al 99.73 % de probabilidad de que los parámetros sean ciertos. Con la idea de explicar mejor los intervalos de confianza, supongamos que la función de probabilidad posterior está dada como

$$f(\theta_1, \theta_2 | y, M) = A \cdot \exp^{(1 - \theta_1^2 - \theta_2^2)}. \quad (5.4)$$

Realizando una malla en el espacio (θ_1, θ_2) y evaluando la función en cada punto encontramos la forma de la probabilidad posterior tal y como se muestra en la Figura 5.1a (hemos fijado $A = 1$). Los intervalos de confianza etiquetados como σ_1 , σ_2 y σ_3 , están dados por las circunferencias en el plano $\theta_1 - \theta_2$ tal y como podemos observar en la Figura 5.1b.

Ahora bien, en un modelo cosmológico normalmente tenemos más de dos parámetros libres; aunque en principio podemos realizar una malla de varias dimensiones en el espacio de los parámetros y evaluar la probabilidad posterior en todos sus puntos, en la práctica esta no es la mejor opción, ya que hacerlo de esta manera consume mucho tiempo de cómputo. Para tener una idea, basta analizar un modelo con 4 parámetros libres, haciendo una malla con 100 puntos para cada parámetro, obtenemos un total de 10^8 puntos. Eso quiere decir que debemos evaluar 10^8 veces las cantidades que determinan la probabilidad posterior, el detalle es que una malla debe ser muy finita para obtener resultados aceptables. Además, hay que tener en cuenta que al realizar una inferencia se usan distintos tipos de datos, aumentando así el tiempo de cómputo. Debido a esta complejidad, se recurre al método computacional de Monte Carlo, el cual consiste en un algoritmo que hace un muestreo aleatorio en el espacio de los parámetros. Una subclase de estos métodos son las Cadenas de Markov de Monte Carlo (MCMC), el cual consta de realizar un muestreo de manera aleatoria y tiene la principal característica de que el siguiente paso del muestreo (aleatorio) lo hace de forma tal que solo dependa del paso anterior. La secuencia de pasos que tiene como objetivo investigar la forma de la función de probabilidad es lo que se llama Cadenas de Markov.

Existe varios algoritmos MCMC, el más usado es el algoritmo Metropolis-Hasting y es el que vamos a describir a continuación. Siguiendo principalmente la referencia [40] (un trabajo reciente sobre este tema lo encontramos en [39]). Este algoritmo básicamente funciona de la siguiente manera:

- Para empezar se propone un punto en el espacio de los parámetros $\theta^{(i)} = (\theta_1^{(i)}, \dots, \theta_m^{(i)})$

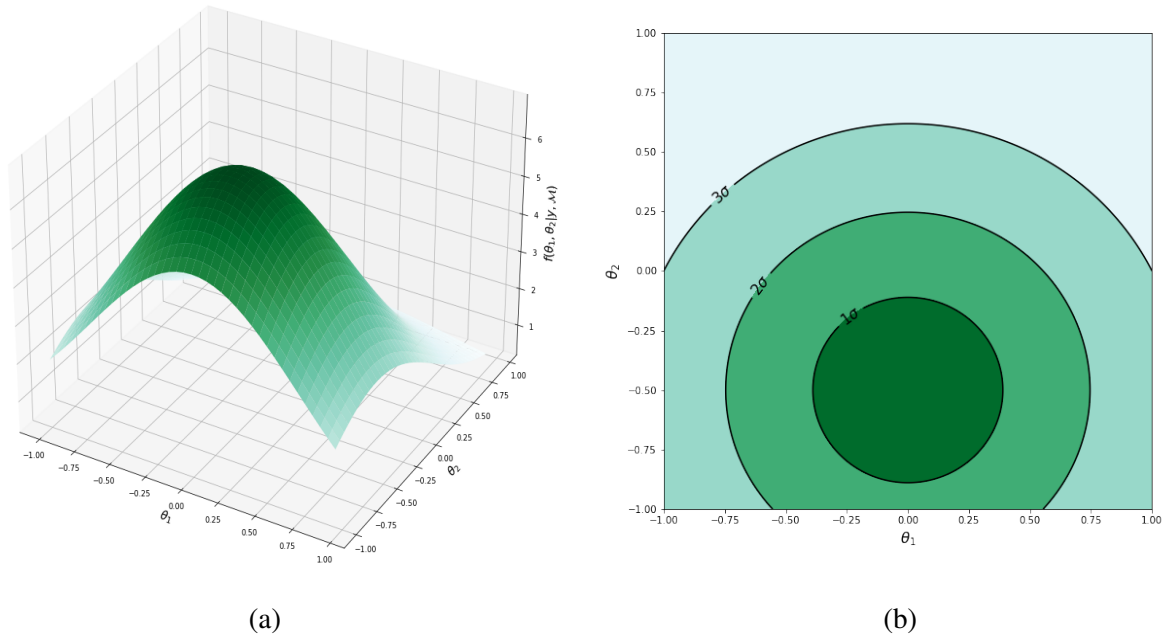


Figura 5.1: En la Figura (a) se muestra la gráfica de la probabilidad posterior con dos parámetros libres realizados a partir de una malla. En la Figura (b) se muestra los intervalos de confianza de la probabilidad posterior $f(\theta_1, \theta_2 | y, \mathcal{M}) = 2 \cdot \exp^{(1-\theta_1^2-\theta_2^2)}$ a 1σ , que corresponde a 68.27 % de probabilidad, 2σ que corresponde a 95.45 % de probabilidad y 3σ que corresponde a 99.73 % de probabilidad.

(estamos suponiendo que tenemos m parámetros), el cual es aceptado automáticamente siempre y cuando esté dentro del rango de la probabilidad previa.

- Luego se hace un salto a otro punto candidato $\theta^{(c)} = (\theta_1^{(c)}, \dots, \theta_m^{(c)})$, este salto se logra usando una distribución de probabilidad auxiliar $q(\theta^{(c)} | \theta^{(i)})$. Para satisfacer las propiedades de una Cadena de Markov, la probabilidad auxiliar solo debe depender del punto anterior y del punto candidato. La probabilidad auxiliar es la que se encarga de generar la dirección y longitud del salto.
- Una vez hecho el salto a $\theta^{(c)}$, se decide si se acepta para pertenecer a la Cadena de Markov o se rechaza, y esta es la parte principal del algoritmo Metropolis-Hastings. La manera en que se decide si se acepta o no el punto, es mediante la siguiente **probabilidad de aceptación**

$$\alpha(\theta^{(c)} | \theta^{(i)}) = \min \left\{ \frac{p(\theta^{(c)} | \mathcal{M})p(y | \theta^{(c)}, \mathcal{M})q(\theta^{(i)} | \theta^{(c)})}{p(\theta^{(i)} | \mathcal{M})p(y | \theta^{(i)}, \mathcal{M})q(\theta^{(c)} | \theta^{(i)})}, 1 \right\}. \quad (5.5)$$

Lo que significa la ecuación (5.5) es la probabilidad de que ocurra $\theta^{(c)}$ dado que ocurrió $\theta^{(i)}$. Ahora, si $\alpha = 1$ el candidato $\theta^{(c)}$ es aceptado con la mayor probabilidad (100%), notemos que con este criterio podemos obtener los parámetros de mayor probabilidad. Por otro lado, si $\alpha < 1$ también es aceptado, pero para este caso es necesario otro criterio (ya que en caso contrario se aceptaría cualquier valor de $\theta^{(c)}$). Como la idea es no aceptar todos los candidatos, lo que se realiza es generar un número aleatorio en el rango $0 \leq u \leq 1$ y entonces aceptar o rechazar el punto $\theta^{(c)}$ de acuerdo al siguiente criterio: se acepta si $\alpha \geq u$ y se rechaza si $\alpha < u$. Notemos que la importancia de la probabilidad de aceptación es el de explorar el espacio de parámetros alrededor del máximo; si solo se aceptaran los parámetros que implican mayor valor de la función de probabilidad, entonces una vez que se alcanza el máximo se terminaría el proceso y en ese caso no podríamos determinar los intervalos de confianza.

En la Figura 5.2 se muestra la manera en como funciona el algoritmo MCMC. Existen códigos que son libres en donde se encuentran implementados estos algoritmos, y en este trabajo vamos a usar el código Monte Python el cual describiremos más adelante.

Volviendo al teorema de Bayes, con la idea de ser más precisos respecto a los términos que en él aparecen, vamos a estudiar el caso cuando la probabilidad previa es constante en algún rango y la función de probabilidad es modelada mediante una gaussiana para cada dato. Supongamos que tenemos n datos independientes, entonces la probabilidad posterior es proporcional al producto de las funciones de probabilidad de cada dato, entonces, finalmente tenemos la

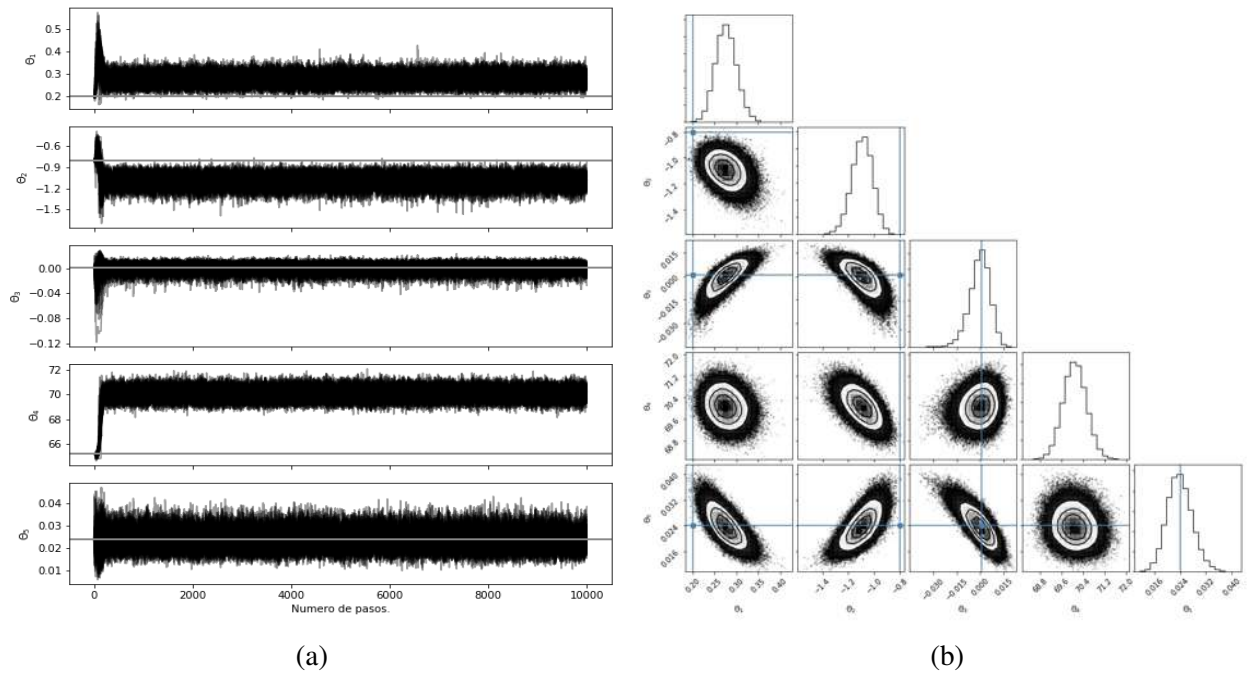


Figura 5.2: Ejemplo de un ajuste típico usando MCMC. En la figura (a) se muestra las Cadenas de Markov de cada parámetro en un ajuste con 5 parámetros libres y 10000 pasos. En la figura (b) se muestra los intervalos de confianza obtenidos de las Cadenas de Markov, mostrando los parámetros que mejor ajustan a los datos y la probabilidad posterior de cada parámetro.

siguiente expresión

$$p(\theta|y, M) \propto \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(y_i^t - y_i^o)^2}{2\sigma_i^2} \right] \quad (5.6)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i} \right) \exp \left[-\sum_{i=1}^n \frac{(y_i^t - y_i^o)^2}{2\sigma_i^2} \right], \quad (5.7)$$

donde $y_i^t = y_i^t(z, \theta)$ es el i -ésimo dato predicho teóricamente, y_i^o es el i -ésimo dato observado y σ_i^2 es la desviación estándar del dato observado. Luego, definiendo las siguientes cantidades

$$\chi^2 \equiv \sum_{i=1}^n \frac{(y_i^t - y_i^o)^2}{\sigma_i^2} \quad y \quad B \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i} \right), \quad (5.8)$$

tenemos que la probabilidad posterior adquiere la siguiente forma

$$p(\theta|y, M) \propto B \exp \left(-\frac{\chi^2}{2} \right). \quad (5.9)$$

Debido a que estamos interesados en encontrar la máxima probabilidad de que los parámetros θ sean ciertos dado los datos y y dada la teoría $\mathcal{M}$, eso significa que debemos de minimizar la función χ^2 .

Por otro lado, es común tener varios modelos confrontándolos de manera independiente a los mismos datos observados. Usando las herramientas de la estadística Bayesiana es posible determinar el modelo que mejor ajusta a los datos observados. Por ejemplo, si tenemos dos modelos $\mathcal{M}_i$ y $\mathcal{M}_j$, para compararlos se define la cantidad llamada factor de Bayes B_{ij} , la cual tiene la siguiente expresión

$$B_{ij} = \frac{p_i(y|\mathcal{M}_i)}{p_j(y|\mathcal{M}_j)}, \quad (5.10)$$

donde

$$p_i(y|\mathcal{M}_i) = \int p(y|\theta, \mathcal{M}_i) p(\theta|\mathcal{M}_i) d\theta. \quad (5.11)$$

Si $p_i > p_j \Rightarrow B_{ij} > 1$, debido a que estamos buscando el modelo con mayor probabilidad, concluimos que el modelo $\mathcal{M}_i$ es el que mejor ajusta a los datos observados. Bajo este criterio de selección de modelos estamos suponiendo que $\mathcal{M}_i$ y $\mathcal{M}_j$ tienen el mismo número de parámetros libres, mientras que cuando los modelos tienen diferente número de parámetros libres el criterio cambia. En esta sección nos limitamos a describir el teorema de Bayes; más adelante, después de describir los datos observados, vamos a volver a estudiar el teorema para realizar los ajustes.

Un estudio más completo sobre estadística Bayesiana se puede consultar de manera introductoria en el libro de S. Sivia [37], un libro más avanzado en la referencia [38] y en el trabajo [35] se describen de manera resumida los métodos estadísticos para determinar los parámetros y la selección de modelos en cosmología. En las siguientes secciones, vamos a proceder a describir las distintas observaciones cosmológicas que son de nuestro interés.

5.2. Supernovas de tipo Ia (SNe Ia)

Las supernovas de tipo Ia (SNe Ia) son explosiones muy energéticas que ocurren en el universo, tan energética que su luminosidad es comparable al de una galaxia entera. La fuente de estas explosiones se piensa que es la etapa final de una cierta clase de estrellas, y la utilidad en cosmología es su intensa luminosidad, ya que es posible observarlas (con la ayuda de telescopios muy potentes) a grandes distancias, distancias del orden de los megapársecs (Mpc). Otro aspecto interesante y crucial para que puedan ser usados como pruebas cosmológicas, es que, aunque sus luminosidades varían de una supernova a otra, estas pueden ser estandarizadas. Esto significa que, después de ser estandarizadas, se pueden considerar que tienen casi la misma luminosidad, por esto se dice que son candelas estándar. Por lo tanto, si conocemos la luminosidad absoluta de una SNe Ia y si luego observamos su luminosidad aparente a una cierta distancia, entonces, es posible determinar la distancia a la que se encuentra respecto al observador, de aquí su utilidad en cosmología. De hecho, fue mediante los datos de las SNe Ia realizados por dos experimentos independientes [3] y [4], que se evidenció por primera vez que la expansión del universo actualmente se encuentra en una etapa acelerada.

La cantidad importante correspondiente a estas observaciones es la llamada distancia modular μ , la cual es definida como la magnitud aparente m menos la magnitud absoluta M de la supernova, esta cantidad tiene la siguiente expresión

$$\mu_{teo} = 5 \log \left(\frac{d_L(z)}{1 \text{ Mpc}} \right) + 25, \quad (5.12)$$

donde d_L es la distancia de luminosidad de la Supernova Ia y 1 Mpc es un megapársec. Partiendo de la métrica de Friedmann, con $k = 0$ se encuentra que

$$d_L(z) = (1+z)H_0 \int_0^z \frac{d\tilde{z}}{H(\tilde{z})}, \quad (5.13)$$

observemos que la distancia modular depende del modelo debido a que en la distancia de luminosidad aparece el parámetro de Hubble $H(\tilde{z})$.

Del lado de las observaciones (siguiendo el trabajo de Betoule et. al. [34]) se asume que las SNe Ia con idéntico color, forma y galaxia en donde se hospedan tienen en promedio la misma luminosidad intrínseca para todos los corrimientos al rojo, tal y como se explica en el artículo de referencia [34]; esta hipótesis es cuantificada por un modelo lineal, dando la siguiente distancia modular estandarizada:

$$\mu_{obs} = m_B^* - (M_B - \alpha \times X_1 + \beta \times C), \quad (5.14)$$

donde m_B^* es el pico de la magnitud observada en la banda-B en el marco de referencia en reposo, X_1 es el tiempo del estiramiento de la curva de luz, C es el color del máximo brillo, M_B , α y β ,

son en nuestro caso, parámetros no importantes (nuisance parameters). La ecuación (5.14) es la manera en como se estandarizan las SNe Ia para que puedan ser usadas como candelas estándar, los parámetros X_1 y C capturan las variaciones que existen entre las SNe Ia. El parámetro M_B depende de las propiedades de la galaxia que hospeda a la SNe Ia de la siguiente manera

$$M_B = \begin{cases} M_B^1 & \text{si } M_{\text{estelar}} < 10^{10} M_{\odot}, \\ M_B^1 + \Delta_M & \text{si } M_{\text{estelar}} \geq 10^{10} M_{\odot}, \end{cases}$$

donde M_{estelar} es la masa estelar de la galaxia que hospeda a la SNe Ia, $M_{\odot}$ es la masa del Sol y Δ_M es un parámetro que no es de nuestro interés.

Ahora volviendo al tema de los ajustes, lo que se necesita minimizar es la siguiente función

$$\chi_{SNe}^2 = (\bar{\mu}_{obs} - \bar{\mu}_{teo}(z, \Omega_c, \Omega_x, \dots))^{\dagger} C_{SNe}^{-1} (\bar{\mu}_{obs} - \bar{\mu}_{teo}(z, \Omega_c, \Omega_x, \dots)), \quad (5.15)$$

donde C_{SNe}^{-1} es la inversa de la matriz de covarianza, la barra que aparece sobre los términos es para indicar que son vectores y $\dagger$ indica la transpuesta. Hemos escrito $\bar{\mu}_{teo} = \bar{\mu}_{teo}(z, \Omega_c, \Omega_x, \dots)$ para indicar que depende de los parámetros del modelo cosmológico.

5.3. Cronómetros cósmicos

En el trabajo de Raúl Jiménez y Abraham Loeb citado en la referencia [49], proponen por primera vez un método para determinar los parámetros cosmológicos a partir de la medición de la diferencia de edad Δt entre dos galaxias pasivas¹, las cuales se formaron al mismo tiempo pero están separadas por un corrimiento al rojo Δz . Tal como argumentan los autores, estas observaciones ofrecen un mejor método para estudiar la evolución de la energía oscura, ya que este tiene mayor sensibilidad ante las pequeñas variaciones del parámetro de la ecuación de estado de la energía oscura $\omega_x(z)$. La cantidad medida se relaciona de manera directa al parámetro de Hubble del modo siguiente

$$H(z) = -\frac{1}{(1+z)} \frac{dz}{dt}. \quad (5.16)$$

Otra ventaja de estas observaciones es que son independientes del modelo cosmológico. Los datos de los cronómetros cósmicos que vamos a usar en este trabajo se muestran en el Cuadro 5.1 (esta es la Tabla 1 del trabajo de Sunny Vagnozzi, Abraham Loeb y Michele Moresco [61]).

La correspondiente χ^2 para los cronómetros cósmicos está dada por la siguiente función

$$\chi_{cc}^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(H_{obs}(z_i) - H_{teo}(z_i, \Omega_c, \Omega_x, \dots))^2}{\sigma_{cc,i}^2}. \quad (5.17)$$

¹Las galaxias pasivas, son las que evolucionan muy lentamente comparadas con el tiempo de evolución del universo.

Cuadro 5.1: Datos de cronómetros cósmicos tomados del trabajo de Sunny Vagnozzi, Abraham Loeb y Michele Moresco [61].

z	$H(z)(km\ s^{-1}Mpc^{-1})$	Referencia.
0.09	69 ± 12	[62]
0.17	83 ± 8	
0.27	77 ± 14	
0.4	95 ± 17	
0.9	117 ± 23	[63]
1.3	168 ± 17	
1.43	177 ± 18	
1.53	140 ± 14	
1.75	202 ± 40	
0.48	97 ± 62	[64]
0.88	90 ± 40	
0.1791	75 ± 4	
0.1993	75 ± 5	
0.3519	83 ± 14	
0.5929	104 ± 13	[65]
0.6797	92 ± 8	
0.7812	105 ± 12	
0.8754	125 ± 17	
1.037	154 ± 20	
0.07	69 ± 19.6	
0.12	68.6 ± 26.2	[66]
0.2	72.9 ± 29.6	
0.28	88.8 ± 36.6	
1.363	160 ± 33.6	[67]
1.965	186.5 ± 50.4	
0.3802	83 ± 13.5	
0.4004	77 ± 10.2	
0.4247	87.1 ± 11.2	[68]
0.4497	92.8 ± 12.9	
0.4783	80.9 ± 9.0	
0.47	89.0 ± 23.0	[69]

5.4. Oscilación acústica bariónica

En el pasado, los electrones, protones² y fotones formaban un plasma común debido al efecto de la interacción Compton (la materia oscura y los neutrinos se supone que no interactúan en este plasma, salvo gravitacionalmente). Debido a que en el universo temprano habían pequeñas perturbaciones en la densidad y en la velocidad tanto de la materia oscura y de la materia bariónica, entonces estas implicaron la existencia de pequeños potenciales gravitacionales. El efecto de estos potenciales gravitacionales es aumentar la densidad de las componentes del universo, sin embargo, al aumentar la densidad de la radiación, también aumenta su presión, produciendo un efecto contrario a los potenciales gravitacionales. Es así que existió una competencia entre la gravedad y la presión de la radiación, la cual genera un frente de onda esférica que se propaga a la velocidad del sonido en el plasma fotón-barión, esto es lo que se conoce como oscilación acústica bariónica (por sus siglas en inglés BAO).

Por otro lado, mientras se expandía el universo, la energía de las componentes sufría una disminución. Luego llegó un momento en que la energía de las componentes ya no podía mantener el plasma y, así, los fotones dejaron de interactuar con los bariones, y es en ese instante cuando los bariones pudieron combinarse para formar los primeros átomos del universo, esta época en la historia de la evolución del universo es conocida como **recombinación**. En la época de la recombinación la presión de la radiación deja de afectar a los bariones, por lo que la onda deja de propagarse. A la distancia máxima que había viajado la onda al momento del desacoplamiento se le llama horizonte de sonido y es denotado como $r_s(z_{drag})$, esta es una distancia comóvil. Ahora bien, el efecto de la onda sobre los bariones es una sobredensidad en un cascarón esférico a una distancia $r_s(z_{drag})$. Entonces, podemos medir la densidad de los bariones a un corrimiento al rojo particular para buscar las sobredensidades con el fin de determinar el horizonte de sonido. Una vez que tenemos este valor entonces podemos observar cómo evoluciona, ya que es afectado por la expansión del universo y, como sabemos, la expansión del universo es afectada por sus componentes.

La medición del horizonte de sonido fue hecha por primera vez por Eisenstein en el año 2005 [51] mediante una técnica estadística llamada función de correlación de dos puntos en la distribución de galaxias rojas luminosas a gran escala, el resultado que encontró es un pico (una sobredensidad) a una distancia de $100h^{-1}\text{Mpc}$ en la actualidad ($z = 0$). Después, se realizaron otros experimentos para determinar el tamaño del horizonte de sonido, por ejemplo, los experimentos SDSS III [52] y BOSS-WiggleZ [53], obtuvieron casi los mismos resultados. Por otro lado, como hemos mencionado, la radiación y los bariones estaban acoplados antes de la época de la recombinación, así que el efecto de la onda acústica también afecta a los fotones. Este efecto se ha observado mediante los datos de la radiación del fondo cósmico de microondas tal y como muestran los resultados más recientes del experimento Planck 2018 [1], el valor obtenido del horizonte de sonido al final de la época de arrastre de los bariones, en este experimento

²Recordemos que aquí llamamos bariones a los electrones y los protones.

es $r_{drag} = 147.05$ Mpc.

La expresión matemática del horizonte de sonido r_s está dada por

$$r_s(z_{drag}) = \frac{c}{\sqrt{3}} \int_{z_{drag}}^{\infty} \frac{dz}{H(z) \sqrt{1 + (3\Omega_b^0/4\Omega_\gamma^0)(1+z)^{-1}}}, \quad (5.18)$$

donde z_{drag} es el corrimiento al rojo al momento del desacoplamiento de los fotones. Debido a que la oscilación acústica bariónica es un fenómeno tridimensional y, como hemos mencionado lo que uno espera es una mayor distribución de galaxias a la distancia $r_s(z)$. Entonces eso significa que podemos realizar observaciones a lo largo del eje de visión y también transversalmente (tangencial) a la línea de visión. Esperamos encontrar una escala preferencial en la distribución de las galaxias en la dirección radial con una diferencia de corrimientos al rojo Δz la cual lleva información del parámetro de Hubble $H(z)$ (efecto radial) y también de la distancia diametral angular debido al efecto tangencial. Entonces para esta prueba es necesario obtener la distancia del diámetro angular d_A , la cual está definida como

$$d_A \equiv \frac{\Delta x}{\Delta \theta}, \quad (5.19)$$

donde $\Delta \theta$ es el ángulo que subtiende un objeto de una longitud (a un tiempo dado) Δx ortogonal al ángulo de visión. Después de realizar los cálculos para un universo plano ($k = 0$), la distancia diametral angular está dada por

$$d_A = \frac{H_0}{(1+z)} \int_0^z \frac{d\tilde{z}}{H(\tilde{z})}. \quad (5.20)$$

Notemos que la distancia diametral angular está relacionada con la distancia de luminosidad de la siguiente manera

$$d_A = \frac{d_L}{(1+z)^2}. \quad (5.21)$$

En este trabajo vamos a usar los mismos datos que se usan en el artículo [54], los cuales se muestran en la Tabla 5.2, donde la cantidad $d_z(z)$ está definida como

$$d_z(z) \equiv \frac{r_s(z_{drag})}{D_V(z)}, \quad (5.22)$$

y D_V es conocida como *distancia de dilación*, cuya definición está dada por

$$D_V(z) \equiv \left(\frac{cz(1+z)^2 d_A^2(z)}{H(z)} \right)^{1/3} = \left[\frac{z}{H(z)} \left(\int_0^z \frac{d\tilde{z}}{H(\tilde{z})} \right)^2 \right]^{1/3}. \quad (5.23)$$

Los datos que provienen del experimento WiggleZ están correlacionados y por esa razón no aparecen los respectivos errores en la Tabla 5.2, en su lugar tenemos es una matriz de covarianza cuya inversa está dada por

Cuadro 5.2: Datos de BAO que vamos a usar, estos provienen de distintos experimentos los cuales estan citados en la tabla.

Experimento	z	$d_z(z)$	Referencia
6dFGS	0.106	0.3360 ± 0.0150	[55]
MGS	0.15	0.2239 ± 0.0084	[56]
BOSS LOWZ	0.32	0.1181 ± 0.0024	[57]
SDSS(R)	0.35	0.1126 ± 0.0024	[58]
BOSS CMASS	0.57	0.0726 ± 0.0007	[57]
WiggleZ	0.44	0.073	[59]
WiggleZ	0.6	0.0726	[59]
WiggleZ	0.73	0.0592	[59]

$$C_W^{-1} = \begin{pmatrix} 1040.3 & -805.5 & 336.8 \\ -807 & 3720.3 & -1551.9 \\ 336.8 & -1551.9 & 2914.9 \end{pmatrix}. \quad (5.24)$$

Para realizar el ajuste de algún modelo cosmológico usando los datos de la Tabla 5.2 realizamos lo siguiente: para el primer dato tenemos asociada la siguiente función que necesitamos minimizar $\chi_{BAO,1}^2$

$$\chi_{BAO,1}^2 \equiv \frac{(d_z(z) - 0.3360)^2}{0.0150^2}, \quad (5.25)$$

de igual manera para los siguientes 4 datos tenemos sus respectivas $\chi_{BAO,i}^2$, los cuales se suman para realizar el ajuste para todos los datos al mismo tiempo. Por otro lado, para el experimento WiggleZ la correspondiente $\chi_{BAO,W}^2$ está dada por:

$$\chi_{BAO,W}^2 = \bar{d}_z(z)^{-1} C_W^{-1} \bar{d}_z(z), \quad (5.26)$$

donde $\bar{d}_z(z) = (0.073, 0.0726, 0.0592)$. Entonces, la χ_{BAO}^2 total que corresponde a los datos de las oscilaciones acústicas bariónicas está dada por

$$\chi_{BAO}^2 = \sum_i^5 \chi_{BAO,i}^2 + \chi_{BAO,W}^2. \quad (5.27)$$

5.5. Radiación del fondo cósmico de microondas

En esta sección vamos a describir de manera muy breve lo que corresponde a los datos de la radiación del fondo cósmico de microondas (por sus siglas en inglés CMB). Primeramente

recordemos que la cantidad $\Theta(k, \eta, \mu)$ es la perturbación de la temperatura de los fotones escrita en el espacio de Fourier, notemos que esta función depende del número de onda k , del tiempo conforme η y también de la cantidad μ la cual describe la dirección de propagación de los fotones. Recordemos también del capítulo 4 que la ecuación para la perturbación de la temperatura está dada por

$$\Theta' + ik\mu\Theta + \Psi' + ik\mu\Psi = \tau' [\Theta_0 + \Theta + \mu u_b], \quad (5.28)$$

donde Ψ es el potencial gravitacional, u_b es la velocidad de los bariones y Θ_0 es el monopolo de temperatura. En general, los momentos multipolares de la perturbación de la temperatura $\Theta_l(k, \eta)$ están dados por la siguiente definición

$$\Theta_l(k, \eta) \equiv \frac{1}{(-1)^l} \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{2} \mathcal{P}_l \Theta_l(k, \eta, \mu). \quad (5.29)$$

Debido a que antes de la época de la recombinación la radiación formaba un plasma común con los electrones y los protones, el comportamiento de la radiación en esa época estaba determinado principalmente por el monopolo $\Theta_0(k, \eta)$ y el dipolo $\Theta_1(k, \eta)$. Las expresiones de las correspondientes ecuaciones de evolución para estos momentos se obtienen usando las ecuaciones (5.28) y (5.29). Después de la recombinación, los fotones dejaron de interactuar con los bariones y, por lo tanto, viajan libremente. Esto implica que, en la actualidad, el momento multipolar de los fotones, está en función del monopolo Θ_0 y del dipolo Θ_1 . Como se puede ver de los detalles y la aproximación (semianalítica) en el libro de referencia [50], la expresión para el momento multipolar en la actualidad está dado por

$$\begin{aligned} \Theta_l(k, \eta_0) \approx & [\Theta_0(k, \eta_*) + \Psi(k, \eta_*)] j_l[k(\eta_0 - \eta_*)] \\ & + 3\Theta_1(k, \eta_*) (j_{l-1}[k(\eta_0 - \eta_*)]) - (l+1) \frac{j_l[k(\eta_0 - \eta_*)]}{[k(\eta_0 - \eta_*)]} \\ & + \int_0^{\eta_0} d\eta e^{-\tau} [\Psi'(k, \eta) - \Phi'(k, \eta)] j_l[k(\eta_0 - \eta)], \end{aligned} \quad (5.30)$$

donde η_* es el instante en donde la función llamada de visibilidad $g(\eta) \equiv -\tau'(\eta)e^{-\tau(\eta)}$ tiene su pico, j_l son las funciones esféricas de Bessel, Ψ y Φ son las perturbaciones de la métrica llamadas potenciales gravitacionales. Lo que nos interesa en este momento es solamente tener una expresión de los momentos multipolares para relacionarlos con las observaciones, sin embargo, recordemos que los momentos multipolares Θ_l se calculan de manera numérica. La integral que aparece en la ecuación (5.30) es conocida como el **término Sachs-Wolfe integrado**.

Recordemos que nuestro objetivo es describir las observaciones que corresponden a la radiación del fondo cósmico de microondas, entonces el motivo de escribir la ecuación (5.30) es debido a que esta cantidad es la que se relaciona con las observaciones del CMB.

Continuando con nuestro objetivo, es necesario expandir la perturbación de la temperatura en función de los armónicos esféricos, es decir

$$\Theta(\mathbf{x}, \eta, \hat{\mathbf{n}}) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm}(\mathbf{x}, \eta) Y_{lm}(\hat{\mathbf{n}}), \quad (5.31)$$

donde $\hat{\mathbf{n}}$ es la dirección de la llegada de los fotones, los coeficientes a_{lm} contienen toda la información sobre el campo de temperatura, son variables aleatorias y se considera que son estadísticamente independientes. Esto quiere decir que sus valores promedios son cero ($\langle a_{lm} \rangle = 0$) y la varianza está dada por la siguiente expresión

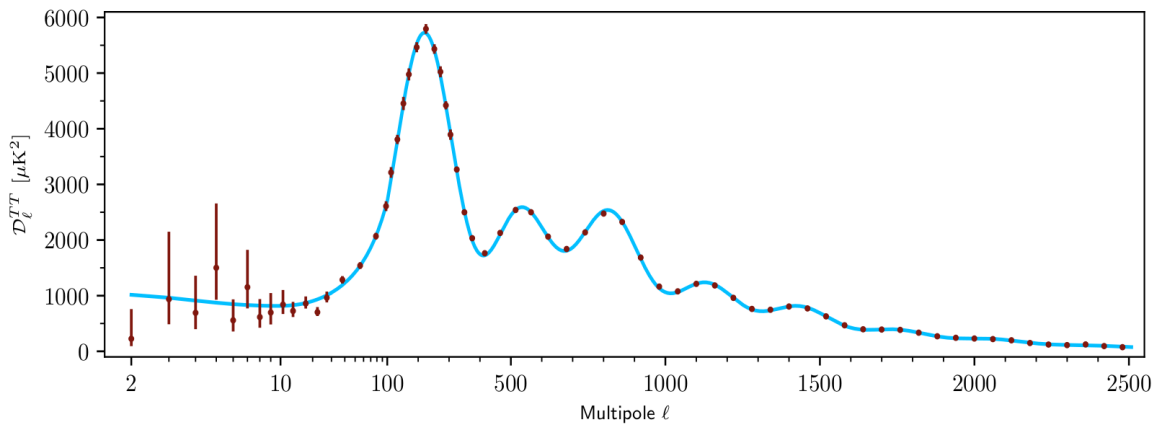
$$C_l^{TT} \equiv \langle |a_{lm}|^2 \rangle. \quad (5.32)$$

La varianza C_l^{TT} puede ser expresada en función de la perturbación de la temperatura de la radiación $\Theta_l(k, \eta)$ mediante la siguiente integral

$$C_l^{TT} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dk \, k^2 |\Theta_l(k, \eta)|^2, \quad (5.33)$$

donde $\Theta_l(k, \eta)$ son los momentos multipolares. Como podemos observar los armónicos esféricos son los que realmente se relacionan con la perturbación de la temperatura de los fotones. Los datos que relacionan la perturbación de la temperatura de la radiación son un poco más complejos que el resto de las observaciones, por esa razón solo estamos realizando una muy breve descripción acerca de esta prueba cosmológica. En la Figura 5.3 se muestran los datos que se usan para realizar los ajustes, estos son llamados espectro de potencias de la temperatura del CMB y la curva es la predicción teórica del modelo Λ CDM. Notemos que en la Figura 5.3 se ha definido la siguiente cantidad $D_{ll}^{TT} \equiv l(l+1)C_l^{TT}/2\pi$.

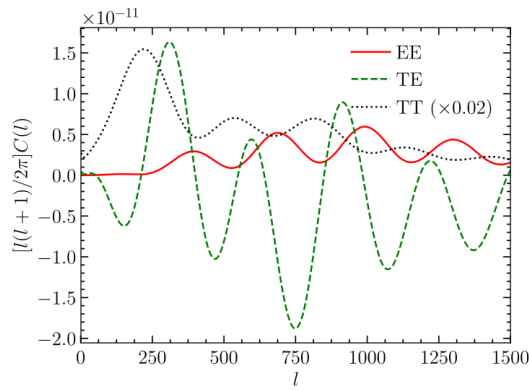
Figura 5.3: Esta figura es tomada de la colaboración Planck 2018 [1], los puntos son los datos observados del experimento con sus respectivos errores y la curva es la predicción del modelo cosmológico Λ CDM del espectro de potencia de la radiación cósmica de microondas.



Finalmente, para esta sección es necesario realizar el siguiente comentario, debido a que también existen perturbaciones a la polarización de los fotones (tema que hemos omitido), hay

que señalar que estos efectos son capturados por las observaciones, por lo que también tenemos datos de la varianza de la temperatura con la polarización C_l^{TE} y la varianza de la polarización C_l^{EE} ; estas varianzas están relacionadas con la polarización de los fotones del llamado modo E . En la Figura 5.4 se muestra la forma analítica de estas cantidades (Figura 10.9 de la referencia [50]).

Figura 5.4: En esta figura se muestra el espectro de potencia angular de la temperatura y de la polarización del modo E (esta es la Figura 10.9 de la referencia [50]).



5.6. Ajuste del modelo estándar Λ CDM con datos observacionales cosmológicos

En esta sección vamos a realizar una inferencia para el modelo Λ CDM, aunque para este modelo ya se ha realizado en varios trabajos por distintos experimentos tales como WMAP [44], Planck [1], etc. Aquí vamos a realizar este ajuste con la finalidad de comprobar que el código que estamos usando está funcionando de la manera correcta.

Para el modelo Λ CDM tenemos los siguientes parámetros libres: el parámetro de la densidad de los bariones (multiplicada por la constante h^2) $\Omega_b^0 h^2$, el parámetro de la densidad de la materia oscura $\Omega_c^0 h^2$, la escala acústica angular $100\theta_{MC}$, el camino óptico τ , la amplitud de la fluctuación $\ln(10^{10} A_s)$ y el índice espectral n_s . Entonces, en este modelo existen 6 parámetros que son de nuestro interés y, por lo tanto, esperamos obtener los valores de mayor probabilidad mediante la inferencia estadística Bayesiana. Tal y como hemos mencionado, dependiendo de los datos que estemos usando existen parámetros que no son de nuestro interés (nuisance parameters). Con la idea de reproducir los resultados del experimento Planck, vamos a realizar un ajuste usando los mismos datos que se mencionan en la Tabla 2, columna 6 del trabajo [1]. En

Cuadro 5.3: En esta tabla se muestran los valores mas probables de los 6 parámetros del modelo Λ CDM a un nivel de confianza de 1σ , en la primera fila están los resultados de la inferencia que hemos realizado y en la segunda fila están los resultados de Planck 2018.

$\Omega_b^0 h^2$	$\Omega_c^0 h^2$	$100\theta_{MC}$	τ	$\ln(10^{10} A_s)$	n_s
$0.0222^{+0.00017}_{-0.000205}$	$0.12^{+0.00202}_{-0.00198}$	$1.04^{+0.00042}_{-0.000462}$	$0.0526^{+0.00728}_{-0.0081}$	$3.04^{0.0143}_{0.0168}$	$0.965^{+0.0055}_{-0.00554}$
0.02237 ± 0.00015	0.1200 ± 0.0012	1.04092 ± 0.00031	0.0544 ± 0.0073	3.044 ± 0.014	0.9649 ± 0.0042

ese trabajo se usan de manera simultánea los datos llamados TT , TE , EE correspondientes a las cantidades C_l^{TT} , C_l^{TE} , C_l^{EE} respectivamente.

Para realizar la inferencia vamos a usar dos programas (códigos libres): el primero es llamado **class** que viene del nombre The Cosmic Linear Anisotropy Solving System³ [70], aquí es donde se encuentran implementadas todas las ecuaciones, tanto a nivel del fondo y a nivel de las perturbaciones. El segundo programa es llamado **montepython**⁴, en este programa están implementadas las herramientas estadísticas, aquí es donde se encuentran los datos de las observaciones, los “priors”, métodos MCMC, etc. Los resultados de la inferencia se muestran en la primera fila del Cuadro 5.3 mientras que en la segunda fila son los resultados del experimento Planck [1].

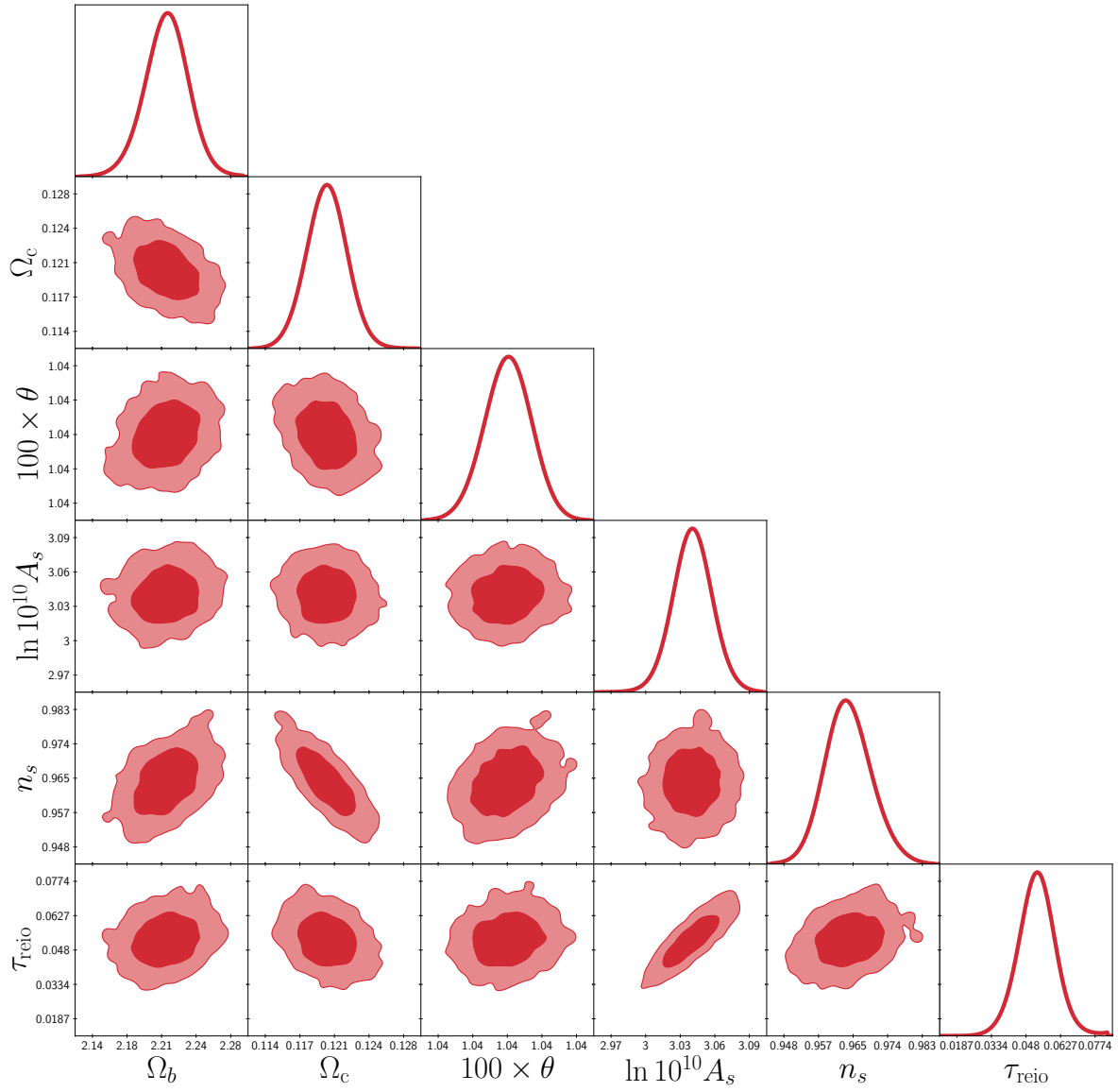
De los resultados que hemos obtenido del ajuste, encontramos que los valores de los parámetros son casi iguales a los inferidos por Planck 2018, las pequeñas diferencias están prácticamente en los errores. Entonces lo que debemos hacer para mejorar nuestro resultado, es incrementar los pasos de las cadenas para explorar mejor el espacio de los parámetros, pero debido a que para esto se necesita mucho tiempo de cómputo, preferimos realizar un ajuste de manera completa (con más pasos) para el modelo de nuestro interés. En la Figura 5.5 mostramos los intervalos de confianza que hemos obtenido de los parámetros que son de nuestro interés. Los parámetros que no son de nuestro interés los hemos omitido, esto es con la idea de apreciar mejor los contornos de los parámetros que nos interesan.

5.7. Conclusión

La inferencia es la determinación de los parámetros libres de algún modelo usando los datos observados. Hemos explicado que el teorema de Bayes es lo que nos permite realizar la inferencia, aunque debido a que normalmente el número de parámetros libres es mayor a dos y además

³Página para descargar el programa: https://lesgourg.github.io/class_public/class.html

⁴Página para descargar el programa: https://github.com/naudren/montepython_public

Figura 5.5: Intervalos de confianza del ajuste realizado del modelo Λ CDM.

debido a la complejidad del problema, para mayor eficiencia es necesario recurrir a técnicas computacionales sofisticadas, tales como las Cadenas de Markov de Monte Carlo (MCMC). Por otro lado, hemos descrito varios tipos de observaciones cosmológicas, y hemos dado cuenta de que cada tipo de observación es todo un campo de estudio, sin embargo, podemos usar los datos que reportan los distintos experimentos, los cuales ya están en su forma adecuada para realizar las inferencias de los parámetros libres de los modelos cosmológicos. El pequeño ejercicio que realizamos es para calibrar nuestras herramientas, con la finalidad de realizar el ajuste de modelos de interacción.

Capítulo 6

Teoría de perturbaciones de modelos interactuantes

6.1. Ecuaciones perturbadas a orden lineal de modelos interactuantes entre sectores oscuros

En el capítulo 3 discutimos un modelo del universo compuesto de materia oscura y energía oscura, en donde la materia oscura se modeló como polvo y la energía oscura como un campo escalar con potencial exponencial, las cuales intercambian energía entre ellas, es decir, existe una interacción distinta a la gravitacional entre estas dos componentes. Recordemos también que nuestro estudio se realizó solamente a nivel del fondo cosmológico, aplicando las herramientas de la teoría de los sistemas dinámicos para estudiar el comportamiento del modelo. En esta última parte del trabajo vamos a discutir con más detalle los modelos interactuantes tanto a nivel del fondo como a nivel de las perturbaciones cosmológicas. Tal y como se hizo en el capítulo 3, la interacción solo será entre la materia oscura y la energía oscura, esta interacción se implementa modificando las ecuaciones de la conservación local de la energía-momento de estas componentes. Para proceder con nuestro estudio, vamos a partir de las siguientes ecuaciones

$$\nabla_\mu T_{(A)\nu}^\mu = Q_\nu^{(A)}, \quad (6.1)$$

donde $A \equiv c$ para la materia oscura, $A \equiv x$ para la energía oscura y $Q_\nu^{(A)}$ es el término de interacción (cuadrivector de la transferencia de energía-momento). Para que se siga cumpliendo la ecuación de conservación local del tensor de energía-momento total¹ la siguiente igualdad debe ser impuesta

$$\nabla_\mu T_{(tot)\nu}^\mu = \nabla_\mu \left(T_{(c)\nu}^\mu + T_{(x)\nu}^\mu \right) - Q_\nu^{(c)} - Q_\nu^{(x)} = 0, \quad (6.2)$$

¹Por el momento vamos a ignorar los tensores de energía-momento de los bariones y la radiación.

observemos que tenemos la siguiente restricción

$$Q_v^{(c)} + Q_v^{(x)} = 0. \quad (6.3)$$

Ahora, realizando perturbaciones de la ecuación (6.1) (usando $Q_\mu = \bar{Q}_\mu + \delta Q_\mu$), podemos identificar la siguiente ecuación que corresponde al fondo cosmológico

$$\partial_\mu \bar{T}_{(A)v}^\mu + \bar{\Gamma}_{\mu\lambda}^\mu \bar{T}_{(A)v}^\lambda - \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda \bar{T}_{(A)\lambda}^\mu = \bar{Q}_v^{(A)}, \quad (6.4)$$

y para el orden lineal determinamos que tiene la siguiente expresión

$$\partial_\mu (\delta T_{(A)v}^\mu) + \bar{\Gamma}_{\mu\lambda}^\mu \delta T_{(A)v}^\lambda + \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\mu \bar{T}_{(A)v}^\lambda - \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda \delta T_{(A)\lambda}^\mu - \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \bar{T}_{(A)\lambda}^\mu = \delta Q_v^{(A)}. \quad (6.5)$$

Las dos ecuaciones anteriores son las que vamos a estudiar en este último capítulo, aunque vamos a cambiar a otra notación más adelante, vamos a empezar con las manipulaciones algebraicas usando las coordenadas del tiempo cosmológico t y coordenadas espaciales cartesianas. Las siguientes cantidades serán útiles en las siguientes secciones. Primeramente recordemos que la métrica está dada por

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (6.6)$$

donde $h_{\mu\nu}$ es la parte perturbada de la métrica definida en (4.26). Las componentes de la métrica y de los símbolos de Christoffel distintos de cero de la métrica de fondo son los siguientes

$$\bar{g}_{00} = -1, \quad \bar{g}_{0i} = 0, \quad g_{ij} = a^2 \delta_{ij}, \quad \bar{\Gamma}_{0j}^i = \bar{\Gamma}_{j0}^i = \frac{\dot{a}}{a} \delta_j^i, \quad \text{y} \quad \bar{\Gamma}_{ij}^0 = a\dot{a} \delta_{ij}. \quad (6.7)$$

6.2. Las ecuaciones a nivel del fondo cosmológico

A nivel del fondo vamos a modelar la materia oscura y la energía oscura como fluidos con sus respectivas ecuaciones de estado. De la ecuación (6.4) cuando $v = 0$ obtenemos la ecuación de conservación de la energía modificada (ahora no se conserva para cada componente) dada de la siguiente forma

$$-\partial_t \bar{\rho}_A - 3H(\bar{\rho}_A + \bar{P}_A) = \bar{Q}_t^{(A)} = \bar{Q}_A, \quad (6.8)$$

donde hemos definido $\bar{Q}_t^{(A)} \equiv \bar{Q}_A$. Usando la ecuación de estado dada por $\bar{P}_A = \omega_A \bar{\rho}_A$, la ecuación (6.8) puede ser escrita de la siguiente manera

$$-\partial_t \bar{\rho}_A - 3H\bar{\rho}_A \left(1 + \omega_A + \frac{\bar{Q}_A}{3H\bar{\rho}_A} \right) = -\partial_t \bar{\rho}_A - 3H\bar{\rho}_A (1 + \omega_{eff}^A) = 0, \quad (6.9)$$

donde

$$\omega_{eff}^A \equiv \omega_A + \frac{\bar{Q}_A}{3H\bar{\rho}_A}, \quad (6.10)$$

ω_{eff}^A es conocido como el parámetro de la ecuación de estado efectivo o también se le llama indistintamente, parámetro de la ecuación de estado. Aquí vamos a modelar la materia oscura como polvo $\bar{P}_c \approx 0$ y la energía oscura como un fluido con una ecuación de estado ω_x que depende del factor de escala, entonces las respectivas ecuaciones de cada componente están dadas por las siguientes expresiones

$$\partial_t \bar{\rho}_c + 3H\bar{\rho}_c (1 + \omega_{eff}^c) = 0, \text{ donde } \omega_{eff}^c = \frac{\bar{Q}}{3H\bar{\rho}_c}, \quad (6.11)$$

$$\partial_t \bar{\rho}_x + 3H\bar{\rho}_x (1 + \omega_{eff}^x) = 0, \text{ donde } \omega_{eff}^x = \omega_x - \frac{\bar{Q}}{3H\bar{\rho}_x}, \quad (6.12)$$

en las ecuaciones anteriores hemos usado las definiciones $Q^c = -Q^x \equiv \bar{Q}$. De (6.11) y (6.12) observamos que cuando $\bar{Q} > 0$ la densidad de la materia oscura decae en la densidad de la energía oscura, y la época de igualdad entre la materia oscura y la radiación ocurre a tiempos más tempranos que en el caso sin interacción. También la energía oscura afecta con mayor aceleración que en el caso sin interacción, de hecho, aunque ω_x es ligeramente mayor que -1 la interacción hace que se comporte como energía oscura tipo fantasma ($\omega_{eff}^x < -1$). Cuando $\bar{Q} < 0$ la densidad de la energía oscura decae en la densidad de la materia oscura, la época de la igualdad entre la energía oscura y la materia oscura ocurre después (comparado con el caso sin interacción), y la energía oscura tiene un efecto menos acelerante.

Como habíamos mencionado anteriormente, la forma funcional del término de interacción hay que proponerla, ya que no podemos obtenerla de primeros principios. A primera vista, cuando estudiamos modelos que corresponden solamente al fondo cosmológico, podemos proponer cualquier función siempre y cuando se satisfaga la ecuación de conservación de la energía total, y justamente eso se ha realizado en varios trabajos, se han propuesto distintas formas funcionales de interacción $\bar{Q}$. La Tabla 14 del trabajo de Sebastian et. al. [22] reúne algunas formas de la interacción $\bar{Q}$ (en función de las densidades de energía de la materia oscura y la energía oscura) para el caso que estamos describiendo, es decir, modelos de materia oscura y energía oscura como fluidos interactuantes.

Entonces, una vez que tenemos la forma funcional de la interacción $\bar{Q}$ las ecuaciones del fondo quedan determinadas, ya sea para realizar estudios usando las herramientas de los sistemas dinámicos o bien realizar los ajustes de los modelos para determinar los parámetros libres y mediante una técnica llamada selección de modelos se determina cuál de los modelos es el que mejor ajusta a las observaciones. Sin embargo, como mencionan en [71] a nivel de perturbaciones surgen dos aspectos importantes que deben ser estudiados con cuidado.

El primer aspecto es que debemos tener una forma covariante de la interacción Q_v , tal que se reduzca al intercambio de energía $\bar{Q}$ en el fondo y no exista intercambio de momento entre la materia oscura y la energía oscura. De aquí que un detalle sobre los trabajos previos realizados, es que dada la interacción $\bar{Q}$ de fondo no siempre es fácil determinar cuál es la correspondiente

forma covariante, y por esa razón no se pueden calcular las cantidades perturbadas [71]. El segundo aspecto es que se debe estudiar la estabilidad de las cantidades perturbadas, en nuestro caso debemos de estudiar la estabilidad de la densidad de la energía oscura. Por otro lado, para que el modelo sea estable, la velocidad del sonido debe ser mayor a cero ($c_{s,x}^2 > 0$). Esto significa que se pueden descartar algunas formas de interacción simplemente revisando si producen perturbaciones inestables.

6.3. Perturbaciones lineales de las ecuaciones de los modelos interactuantes

En esta parte vamos a estudiar las ecuaciones lineales que surgen de los modelos interactuantes que estamos estudiando, para esto, notemos que en el libro de texto [47] se escriben las ecuaciones en función del tiempo cósmico t , pero ahora vamos a usar el tiempo conforme τ . Antes, aclaramos que uno de los detalles o complejidades al momento de comparar ecuaciones cuando estamos estudiando teoría de perturbaciones en cosmología, es que algunos autores usan coordenadas de tiempo cósmico, otros usan coordenadas de tiempo conforme τ , otros expresan las ecuaciones usando la variable “temporal” $N \equiv \ln a$, y entonces hay que realizar las correspondientes transformaciones para poder comparar las ecuaciones de interés. También puede suceder que la descomposición de la métrica se realice de manera distinta y la definición de la descomposición del tensor de energía-momento sea diferente a como lo venimos manejando. Una vez dicho esto, ahora vamos a seguir la notación del artículo de Chung Pei Ma y Edmund Bertschinger [72], en concreto, vamos a estudiar las ecuaciones perturbadas a primer orden en la norma síncrona, y además vamos a usar el tiempo conforme τ el cual se relaciona con el tiempo cósmico mediante la siguiente ecuación

$$d\tau = \frac{1}{a} dt. \quad (6.13)$$

Recordemos que la manera en como estamos introduciendo la interacción no modifica las ecuaciones de Einstein. De la referencia [72], la métrica perturbada a primer orden en la norma síncrona está dada por la siguiente ecuación

$$ds^2 = a^2(\tau) \left[-d\tau^2 + (\delta_{ij} + h_{ij}) dx^i dx^j \right], \quad (6.14)$$

donde $h_{ij} = \frac{1}{3}\delta_{ij}h + h_{ij}^{\parallel} = \frac{1}{3}\delta_{ij}h + (\partial_i\partial_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\nabla^2)\mu$, μ es una función escalar y $\bar{k} = k\hat{k}$. En el espacio de Fourier la cantidad h_{ij} se escribe de la siguiente manera

$$h_{ij}(\bar{x}, t) = \int d^3k e^{i\bar{k}\cdot\bar{x}} \left[\hat{k}_i \hat{k}_j h(\bar{k}, t) + (\hat{k}_i \hat{k}_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}) 6\eta(\bar{k}, t) \right]. \quad (6.15)$$

Usando las siguientes definiciones

$$(\bar{\rho} + \bar{P})\theta \equiv ik^j \delta T_{(tot)j}^\tau, \quad (\bar{\rho} + \bar{P})\sigma \equiv -(\hat{k}_i \hat{k}_j - \frac{1}{3} \delta_{ij}) \Sigma_{(tot)j}^i \text{ y } \Sigma_{(tot)j}^i \equiv T_{(tot)j}^i - \frac{1}{3} \delta_{ij} T_{(tot)k}^k, \quad (6.16)$$

de las ecuaciones de Einstein perturbadas a primer orden en la norma síncrona y en el espacio de Fourier obtenemos las siguientes ecuaciones escalares

$$k^2 \eta - \frac{1}{2} \frac{a'}{a} h' = 4\pi G a^2 \delta T_\tau^\tau, \quad (6.17)$$

$$k^2 \eta' = 4\pi G a^2 (\bar{\rho} + \bar{P})\theta, \quad (6.18)$$

$$h'' + 2 \frac{a'}{a} h' - 2k^2 \eta = -8\pi G a^2 \delta T_i^i, \quad (6.19)$$

$$h'' + 6\eta'' + 2 \frac{a'}{a} (h' + 6\eta') - 2k^2 \eta = -24\pi G a^2 (\bar{\rho} + \bar{P})\sigma, \quad (6.20)$$

donde

$$\frac{d}{d\tau} \equiv ', \quad T_\nu^\mu = \sum_i T_{(i)\nu}^\mu, \quad (\bar{\rho} + \bar{P})\theta = \sum_i (\bar{\rho}_i + \bar{P}_i)\theta_i \text{ y } (\bar{\rho} + \bar{P})\sigma = \sum_i (\bar{\rho}_i + \bar{P}_i)\sigma_i. \quad (6.21)$$

Las ecuaciones de Friedmann para un universo plano escritas en coordenadas del tiempo conforme, tienen las siguientes expresiones

$$\mathcal{H}^2 = \frac{8\pi a^2 G}{3} \rho_{tot}, \quad (6.22)$$

$$\mathcal{H}' = -\frac{4\pi a^2 G}{3} (\rho_{tot} + P_{tot}), \quad (6.23)$$

donde $\mathcal{H} \equiv \frac{a'}{a}$.

Para deducir las ecuaciones de nuestro interés, vamos a matener la etiqueta A en ellas. Entonces las ecuaciones que corresponden al fondo cosmológico para el fluido A expresado en términos del tiempo conforme τ quedan expresads como

$$\bar{\rho}'_A + 3\mathcal{H}(1 + \omega_A^{eff})\bar{\rho}_A = 0 \quad \text{donde} \quad \omega_A^{eff} = \omega_A + \frac{\bar{Q}_\tau^{(A)}}{3\mathcal{H}\bar{\rho}_A}, \quad (6.24)$$

$$\text{y } \bar{Q}_\tau^{(A)} = \bar{Q}_\tau^{(c)} = -\bar{Q}_\tau^{(x)} \equiv \bar{Q}.$$

Ahora veamos las ecuaciones perturbadas a primer orden. Escribiendo en componentes la ecuación (6.5), primeramente veamos cuando $\nu = \tau$. Recordando que el lado izquierdo de esta ecuación ya lo habíamos calculado en el capítulo 4, de hecho este término está dado por

la ecuación (4.59); ahora la diferencia en nuestras ecuaciones es que tenemos un término de interacción en el lado derecho

$$\partial_t \delta T_{(A)t}^t + \partial_i \delta T_{(A)t}^i + 3 \frac{\dot{a}}{a} \delta T_{(A)t}^t - \frac{\dot{a}}{a} \delta T_{(A)i}^i - \left(\frac{\bar{\rho}_A + \bar{P}_A}{2a^2} \right) \left(\dot{h}_{ii} - 2 \frac{\dot{a}}{a} h_{ii} \right) = \delta Q_t^{(A)}. \quad (6.25)$$

Aquí tenemos que considerar el siguiente detalle, notemos que las componentes ij de la métrica dada por la ecuación (6.14) tiene la siguiente forma $\tilde{g}_{ij} = \bar{g}_{ij} + a^2 \tilde{h}_{ij}$ (por el momento vamos a diferenciar esta métrica con la $\sim$), pero la ecuación (6.25) proviene de la métrica dada en el capítulo 5, la cual está dada por $g_{ij} = \bar{g}_{ij} + h_{ij}$, al comparar ambas métricas observamos que $h_{ij} = a^2 \tilde{h}_{ij}$. Entonces el siguiente término se reduce a la relación

$$\dot{h}_{ii} - 2 \frac{\dot{a}}{a} h_{ii} = a^2 \dot{\tilde{h}}_{ij}, \quad (6.26)$$

por lo que la ecuación (6.25) en términos de la métrica dada por (6.14) queda expresada como

$$\partial_t \delta T_{(A)t}^t + \partial_i \delta T_{(A)t}^i + 3 \frac{\dot{a}}{a} \delta T_{(A)t}^t - \frac{\dot{a}}{a} \delta T_{(A)i}^i - \left(\frac{\bar{\rho}_A + \bar{P}_A}{2} \right) \dot{\tilde{h}}_{ii} = \delta Q_t^{(A)}. \quad (6.27)$$

La ecuación anterior está escrita en coordenadas del tiempo cósmico t ; debido a que ahora estamos usando el tiempo conforme τ , de las reglas de la transformación de tensores y vectores, tenemos las siguientes relaciones para realizar el cambio al tiempo conforme $\delta T_{(A)t}^t = \delta T_{(A)\tau}^\tau$, $\delta T_{(A)t}^i = a^{-1} \delta T_{(A)\tau}^i$ y $\delta Q_t^{(A)} = a^{-1} \delta Q_\tau^{(A)}$. Con esto la ecuación (6.27) escrita en coordenadas de tiempo conforme y quitando la tilde sobre h_{ij} queda expresada como

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\delta T_{(A)\tau}^\tau \right) + \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\delta T_{(A)\tau}^i \right) + 3 \frac{a'}{a} \delta T_{(A)\tau}^\tau - \frac{a'}{a} \delta T_{(A)i}^i - \frac{\bar{\rho}_A + \bar{P}_A}{2} h'_{ij} = \delta Q_\tau^{(A)}. \quad (6.28)$$

Ahora, escribiendo la ecuación (6.28) en el espacio de Fourier (usando las cantidades definidas en [72]) necesitamos realizar las siguientes transformaciones

$$h_{ii}(\bar{x}, \tau) \rightarrow h(\bar{k}, \tau), \quad \frac{\partial}{\partial x^i} \left[\delta T_{(A)\tau}^i(\bar{x}, \tau) \right] \rightarrow ik_i \delta T_{(A)\tau}^i(\bar{k}, \tau), \quad (6.29)$$

$$\delta T_{(A)\tau}^\tau = -\delta \rho_A, \quad \delta T_{(A)\tau}^i = -\bar{\rho}_A (1 + \omega_A) v_{(A)i}, \quad \delta T_{(A)i}^i = 3\delta P_A \quad \text{y} \quad ik^i v_{(A)i} \equiv \theta_A, \quad (6.30)$$

y lo que obtenemos es la siguiente ecuación

$$\frac{\delta \rho'_A}{\bar{\rho}_A} = -\frac{\delta Q_\tau^{(A)}}{\bar{\rho}_A} - (1 + \omega_A) \left(\theta_A + \frac{1}{2} h' \right) - 3\mathcal{H} \frac{\delta \rho_A}{\bar{\rho}_A} - 3\mathcal{H} \frac{\delta \rho_A}{\bar{\rho}_A} \left(\frac{\delta P_A}{\delta \rho_A} \right), \quad (6.31)$$

remarcamos que las cantidades que aparecen en (6.31) ahora están en función de las coordenadas $(\tau, \bar{k})$.

Continuando con la derivación de las ecuaciones que nos interesan, necesitamos escribirlas en términos de la función llamada **contraste de densidad** δ_A el cual está definido como

$$\delta_A \equiv \frac{\delta \rho_A}{\bar{\rho}_A}. \quad (6.32)$$

Notemos que la derivada del contraste de densidad está expresada por la siguiente relación

$$\delta'_A = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\delta \rho_A}{\bar{\rho}_A} \right) = \frac{\delta \rho'_A}{\bar{\rho}_A} - \delta_A \frac{\bar{\rho}'_A}{\bar{\rho}_A}, \quad (6.33)$$

luego, usando la siguiente ecuación que corresponde al fondo cosmológico

$$\frac{\bar{\rho}'_A}{\bar{\rho}_A} = -\frac{\bar{Q}_\tau^{(A)}}{\bar{\rho}_A} - 3\mathcal{H}(1 + \omega_A), \quad (6.34)$$

la derivada del contraste de densidad queda expresada como

$$\delta'_A = \frac{\delta \rho'_A}{\bar{\rho}_A} + \delta_A \frac{\bar{Q}_\tau^{(A)}}{\bar{\rho}_A} + 3\mathcal{H}\delta_A + 3\mathcal{H}\delta_A\omega_A. \quad (6.35)$$

Ahora sustituyendo la relación (6.31) en la igualdad (6.35) obtenemos la siguiente ecuación para el fluido A

$$\delta'_A = -\frac{\delta \bar{Q}_\tau^{(A)}}{\bar{\rho}_A} - (1 + \omega_A) \left(\theta_A + \frac{1}{2}h' \right) - 3\mathcal{H}\delta_A \left(\frac{\delta P_A}{\delta \rho_A} \right) + \delta_A \frac{\bar{Q}_\tau^{(A)}}{\bar{\rho}_A} + 3\mathcal{H}\delta_A\omega_A. \quad (6.36)$$

Aún necesitamos manipular un poco nuestra ecuación para expresarla en la forma deseada, veamos que la velocidad del sonido para el fluido A (con una ecuación de estado barotrópica) en el marco de referencia en reposo (rf) se define como

$$c_{sA}^2 = \left(\frac{\delta P_A}{\delta \rho_A} \right) \Big|_{rf}, \quad (6.37)$$

también se define la velocidad del sonido adiabática como

$$c_{aA}^2 = \frac{\bar{P}'_A}{\bar{\rho}'_A} = \omega_A + \frac{\omega'_A \rho_A}{\rho'_A}. \quad (6.38)$$

Es posible expresar la perturbación de la presión δP_A en términos de las velocidades c_{sA}^2 y c_{aA}^2 :

$$\delta P_A = c_{sA}^2 \delta \rho_A - (c_{sA}^2 - c_{aA}^2) \rho'_A \frac{\theta_A}{k^2}, \quad (6.39)$$

luego, usando la ecuación (6.24) en la ecuación (6.39), tenemos

$$\frac{\delta P_A}{\delta \rho_A} = c_{sA}^2 + (c_{sA}^2 - \omega_A) \frac{\bar{Q}_\tau^{(A)} \theta_A}{\bar{\rho}_A \cdot k^2} + 3 \frac{\mathcal{H} \theta_A \bar{\rho}_A}{\delta \rho_A k^2} (c_{sA}^2 - \omega_A) (1 + \omega_A) + \frac{\omega'_A \theta_A}{\delta_A k^2}, \quad (6.40)$$

además, introduciendo la ecuación (6.40) en (6.36) finalmente llegamos a la siguiente ecuación para el contraste de densidad del fluido A

$$\begin{aligned} \delta'_A = & -\frac{\bar{Q}_\tau^{(A)}}{\bar{\rho}_A} \left[\frac{\delta Q_\tau^{(A)}}{\bar{Q}_\tau^{(A)}} + 3 \frac{\mathcal{H} \theta_A}{k^2} (c_{sA}^2 - \omega_A) - \delta_A \right] - (1 + \omega_A) \left(\theta_A + \frac{1}{2} h' \right) \\ & - 3 \mathcal{H} (c_{sA}^2 - \omega_l) \left[\delta_l + 3 \mathcal{H} (1 + \omega_l) \frac{\theta_A}{k^2} \right] - 3 \mathcal{H} \omega'_A \frac{\theta_A}{k^2}. \end{aligned} \quad (6.41)$$

La ecuación (6.41) es una de las ecuaciones que aparecen en los trabajos previos en donde introducen una interacción tal y como lo estamos haciendo.

Ahora, para encontrar la ecuación para la velocidad debemos hacer $v = j$ en (6.5). Entonces partiendo de la ecuación (4.61) pero ahora con el término de interacción tenemos

$$\partial_t \delta T_{(A)j}^t + \partial_i \delta T_{(A)j}^i + 2 \frac{\dot{a}}{a} \delta T_{(A)j}^t - a \dot{a} \delta T_{(A)t}^j - (\bar{\rho}_A + \bar{P}_A) \left(\frac{1}{2} \partial_j h_{tt} - \frac{\dot{a}}{a} h_{jt} \right) = Q_j^{(A)}. \quad (6.42)$$

Escribiendo la relación (6.42) en coordenadas de tiempo conforme y además, debido a que en la norma síncrona las componentes de la métrica $h_{\tau\tau}$ y $h_{\tau j}$ son cero, la ecuación se reduce a la siguiente expresión

$$4 \frac{a'}{a} \delta T_{(A)j}^\tau + \partial_\tau \delta T_{(A)j}^\tau + \partial_i \delta T_{(A)j}^i = \delta Q_j^{(A)}; \quad (6.43)$$

luego, usando las cantidades $\delta T_{(A)j}^\tau = \bar{\rho}_A (1 + \omega_A) v_{(A)j}$ y $\partial_i (\delta T_{(A)j}^i) = ik_j \delta T_{(A)j}^i$ (en este momento estamos pasando al espacio de Fourier) lo que resulta es

$$4 \frac{a'}{a} (\bar{\rho}_A (1 + \omega_A) v_{(A)j}) + \partial_\tau (\bar{\rho}_A (1 + \omega_A) v_{(A)j}) + ik_j \delta T_{(A)j}^i = \delta Q_j^{(A)}; \quad (6.44)$$

siguiendo con nuestra manipulación, multiplicamos por ik^j la ecuación (6.44), y además usando las cantidades $k_i k^j \delta T_{(A)j}^i = k^2 \delta P_A - k^2 (\bar{\rho}_A + \bar{P}_A) \sigma_A$ y como $\theta_A = ik^j v_{(A)j}$ obtenemos

$$4 \frac{a'}{a} \theta_A + \frac{\bar{\rho}'_A}{\bar{\rho}_A} + \frac{\omega'_A}{1 + \omega_A} + \theta'_A - \frac{k^2 \delta P_A}{\bar{\rho}_A (1 + \omega_A)} + k^2 \sigma_A = \frac{ik^j \delta Q_j^{(A)}}{\bar{\rho}_A (1 + \omega_A)}; \quad (6.45)$$

por el momento vamos a mantener la expresión $ik^j \delta Q_j^{(A)}$ y mas adelante vamos a discutir este término. Usando $\frac{\delta P_A}{\bar{\rho}_A} = \left(\frac{\delta P_A}{\delta \rho_A} \right) \delta_A$ y $\mathcal{H} = \frac{a'}{a}$ en la ecuación (6.45), tenemos

$$\theta'_A = \frac{ik^j \delta Q_j^{(A)}}{\bar{\rho}_A (1 + \omega_A)} - 4 \mathcal{H} \theta_A - \frac{\bar{\rho}'_A}{\bar{\rho}_A} \theta_A - \frac{\omega'_A}{1 + \omega_A} \theta_A + \frac{k^2 \delta_A}{1 + \omega_A} \left(\frac{\delta P_A}{\delta \rho_A} \right) - k^2 \sigma_A, \quad (6.46)$$

luego usando (6.40) y (6.24) en la igualdad (6.46), finalmente obtenemos la ecuación deseada

$$\theta'_A = \frac{ik^j \delta Q_j^{(A)}}{\bar{\rho}_A(1+\omega_A)} - \mathcal{H}\theta_A(1-3c_{sA}^2) + \frac{\theta_A \bar{Q}_\tau^{(A)}}{\bar{\rho}_A} + \frac{k^2 \delta_l c_{sA}^2}{(1+\omega_A)} + \frac{(c_{sA}^2 - \omega_A) \bar{Q}_\tau^{(A)} \theta_A}{\bar{\rho}_A(1+\omega_A)} - k^2 \sigma_A. \quad (6.47)$$

Las ecuaciones que nos interesan son la (6.41) y la (6.47). Ambas ecuaciones vemos que están expresadas, entre otras cantidades, en función de $\bar{Q}_\tau^{(A)}$ y $\delta Q_\tau^{(A)}$; recordemos que estas cantidades corresponden al cuadrivector de interacción.

Por otro lado, recordemos también que las ecuaciones (6.4) y (6.5) se encontraron al escribir la interacción como $Q_{(A)}^\mu = \bar{Q}_{(A)}^\mu + \delta Q_{(A)}^\mu$. Sin embargo, siguiendo [71], un cuadrivector general Q^μ se puede escribir como una parte paralela y otra parte perpendicular a la velocidad total u^μ , quedando expresado como

$$Q_{(A)}^\mu = Q_A u^\mu + F_{(A)}^\mu, \quad (6.48)$$

donde $Q_A = \bar{Q}_A + \delta Q$, $u^\nu = a^{-1}(1, \partial^i v)$ (en la norma síncrona) y $u^\mu F_\mu = 0$. Observemos que Q_A es la transferencia de la energía y $F_{(A)}^\mu$ es la transferencia de momento. La parte de la transferencia del momento podemos expresarla como $F_{(A)}^\mu = a^{-1}(0, \partial^i f_A)$, donde f_A es llamado el potencial de transferencia del momento. Por lo tanto, la descomposición de la interacción queda expresada como

$$Q_{(A)}^\mu = (\bar{Q}_A + \delta Q_A) u^\mu + a^{-1}(0, \partial^i f_A), \quad (6.49)$$

en componentes tenemos las siguientes cantidades

$$Q_{(A)}^\tau = a^{-1} \bar{Q}_A + a^{-1} \delta Q_A, \quad (6.50)$$

$$Q_{(A)}^j = a^{-1} \partial^j (v \bar{Q}_A + f_A). \quad (6.51)$$

Podemos obtener las componentes covariantes de la interacción $Q_\mu^{(A)}$ a partir de la definición de $Q_{(A)}^\mu$ como

$$Q_\mu^{(A)} = g_{\mu\nu} Q_{(A)}^\nu = (\bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})(\bar{Q}_{(A)}^\nu + \delta Q_{(A)}^\nu) = \bar{g}_{\mu\nu} \bar{Q}_{(A)}^\nu + \bar{g}_{\mu\nu} \delta Q_{(A)}^\nu + h_{\mu\nu} \bar{Q}_{(A)}^\nu, \quad (6.52)$$

en componentes obtenemos las siguientes ecuaciones

$$Q_\tau^{(A)} = -a(\bar{Q}_A + \delta Q_{(A)}), \quad Q_j^{(A)} = a \partial_j (f_A + v \bar{Q}_A). \quad (6.53)$$

Notemos que de las ecuaciones (6.53) obtenemos las siguientes cantidades: $\bar{Q}_\tau^{(A)} = -a \bar{Q}_A$, $\delta Q_\tau^{(A)} = -a \delta Q_A$, $\bar{Q}_j = 0$ y $\delta Q_j^{(A)} = Q_j^{(A)} = a \partial_j (f_A + v \bar{Q}_A)$, las cuales están en función de las coordenadas (τ, x^i) , sin embargo necesitamos escribirlos en el espacio de Fourier. La componente con la que hay que tener cuidado es con la parte espacial de la interacción $Q_j^{(A)}$, ya que debemos notar que $\delta Q_j^{(A)}(\bar{k}, \tau) = ik_j (f_A + v \bar{Q}_A) a$, luego multiplicando por ik^j obtenemos

$$ik^j \delta Q_j^{(A)} = ik^j ik_j a (f_A + \bar{Q}_A v) = -ak^2 (f_A + \bar{Q}_A v) = -ak^2 f_A - ak^2 \bar{Q}_A v, \quad (6.54)$$

tal y como se realiza en [73]. Suponiendo que la transferencia del potencial del momento es cero en el marco en reposo de la materia oscura, tenemos la siguiente relación $k^2 f_A = \bar{Q}_A(\theta - \theta_c)$. Por otro lado, en la norma síncrona el volumen escalar de expansión del fluido total está dado por $\theta = -k^2 v$, entonces tenemos la ecuación

$$ik^j \delta Q_j^{(A)} = -a\bar{Q}_A(\theta - \theta_c) + a\bar{Q}_A\theta = a\bar{Q}_A\theta_c. \quad (6.55)$$

Introduciendo la descomposición de la interacción que estamos usando en las ecuaciones (6.41) y (6.47) finalmente obtenemos las siguientes ecuaciones que son de nuestro interés

$$\begin{aligned} \delta'_A = & -\frac{a\bar{Q}_A}{\bar{\rho}_A} \left[\frac{\delta Q_A}{\bar{Q}_A} + 3\frac{\mathcal{H}\theta_A}{k^2}(c_{s,A}^2 - \omega_A) - \delta_A \right] - (1 + \omega_A) \left(\theta_A + \frac{1}{2}h' \right) \\ & - 3\mathcal{H}(c_{s,A}^2 - \omega_A) \left[\delta_A + 3\mathcal{H}(1 + \omega_A)\frac{\theta_A}{k^2} \right] - 3\mathcal{H}\omega'_A\frac{\theta_A}{k^2}, \end{aligned} \quad (6.56)$$

y

$$\theta'_A = -\mathcal{H}\theta_A(1 - 3c_{s,A}^2) + \frac{c_{s,A}^2}{1 + \omega_A}k^2\delta_A + \frac{a\bar{Q}_A}{\bar{\rho}} \left[\frac{\theta_c - (c_{s,A}^2 + 1)\theta_A}{(1 + \omega_A)} \right] - k^2\sigma_A. \quad (6.57)$$

Como es de esperarse, cuando hacemos cero todos los términos de interacción recuperamos las correspondientes ecuaciones que aparecen en la referencia [72].

Por lo tanto, el conjunto de ecuaciones que describe el modelo que estamos estudiando está dado por las siguientes cuatro ecuaciones

$$\begin{aligned} \delta'_x = & -(1 + \omega_x) \left(\theta_x + \frac{h'}{2} \right) - 3\mathcal{H}(c_{sx}^2 - \omega_x) \left[\delta_x + 3\mathcal{H}(1 + \omega_x)\frac{\theta_x}{k^2} \right] - 3\mathcal{H}\omega'_x\frac{\theta_x}{k^2} \\ & + \frac{a\bar{Q}}{\bar{\rho}_x} \left[\frac{\delta Q}{\bar{Q}} - \delta_x + 3\mathcal{H}(c_{sx}^2 - \omega_x)\frac{\theta_x}{k^2} \right], \end{aligned} \quad (6.58)$$

$$\theta' = -\mathcal{H}(1 - 3c_{sx}^2)\theta_x + \frac{c_{sx}^2}{1 + \omega_x}k^2\delta_x + \frac{a\bar{Q}}{\bar{\rho}_x} \left[\frac{\theta_c - (1 + c_{sx}^2)\theta_x}{1 + \omega_x} \right], \quad (6.59)$$

$$\delta'_c = -\left(\theta_c + \frac{h'}{2} \right) + \frac{a\bar{Q}}{\bar{\rho}_c} \left(\delta_c - \frac{\delta Q}{\bar{Q}} \right), \quad (6.60)$$

$$\theta'_c = -\mathcal{H}\theta_c. \quad (6.61)$$

donde el subíndice c etiqueta las ecuaciones para la materia oscura y x para la energía oscura, este conjunto de ecuaciones son exactamente las mismas que aparecen en el trabajo realizado en la referencia [73].

Al igual que los modelos cosmológicos sin interacción, los modelos interactuantes pueden producir perturbaciones inestables. La cantidad d llamada ***factor doom*** es la que determina la estabilidad de los modelos interactuantes. Este factor está definido como

$$d = \frac{-a\bar{Q}}{3\mathcal{H}\bar{\rho}_x(1+\omega_x)}, \quad (6.62)$$

si $d \leq 0$ el modelo es estable [74].

Este es el último capítulo de la tesis, hemos descrito con más detalle las ecuaciones de los modelos interactuantes tanto a nivel del fondo como a nivel de perturbaciones a primer orden. A estas alturas, podemos proponer algún modelo de energía oscura (modelado como un fluido) y un término de interacción, el cual debe ser un cuadvivector, y estudiar las consecuencias físicas. Sin embargo, estos estudios lo vamos a realizar en trabajos posteriores.

Capítulo 7

Conclusión

Aunque hemos escrito las conclusiones al final de cada capítulo, todavía hace falta hacer algunos comentarios finales. La cosmología se encuentra en una época avanzada en el sentido de que ahora tenemos un modelo que concuerda muy bien con los datos observados. Los distintos experimentos que realizan las observaciones son todo un campo de estudio especializado. También, hemos visto que el modelo estándar llamado Λ CDM tiene varios problemas, entre ellos están la naturaleza de la materia oscura y la energía oscura, el problema de la coincidencia, el problema de la tensión de la constante de Hubble H_0 , etc. Estos problemas implican dos aspectos interesantes: el primero es que es desalentador no tener un modelo definitivo de nuestro universo, pero por el otro lado, estos problemas mantienen a la cosmología como un campo de estudio activo.

Esta rama de la física llamada cosmología se divide en dos categorías, la primera es el estudio del universo homogéneo e isotrópico descrito por la métrica (FRLW). Sus distintas componentes son modeladas por tensores de energía-momento que están de acuerdo con las simetrías de homogeneidad e isotropía espacial. A nivel del fondo cosmológico, las ecuaciones de Friedmann describen la evolución de las densidades del universo y a partir de estas se puede calcular la edad del universo. Como hemos visto en el capítulo 3, mediante la teoría de los sistemas dinámicos podemos obtener información muy valiosa de los modelos cosmológicos. El comportamiento de los puntos críticos permite descartar los modelos que no cumplen con las condiciones que deben satisfacer para ser viables para nuestro universo. En nuestro estudio del modelo propuesto, hemos introducido una interacción no gravitacional entre la materia oscura y un campo escalar quintaesencia con un potencial de autointeracción exponencial. La interacción que hemos estudiado está dada por la función $Q = -(\alpha\dot{\rho}_m + \beta\dot{\rho}_\phi)$, la cual hemos mostrado que es equivalente a la interacción $Q = 3H \left[\frac{\alpha\rho_m + \beta\dot{\phi}^2}{1 - \alpha + \beta} \right]$. Uno de los resultados que encontramos en nuestro estudio es que el modelo tiene una separatriz cuando $X = 0$ e $Y \neq 1$, esto desconecta causalmente al espacio de parámetros en dos regiones. Los puntos críticos que hemos obtenido se pueden comportar como puntos sillas, inestables, estables, espirales inestables, espirales estables y centros, esto depende del valor específico de los parámetros α y β . Un

aspecto muy importante es que la mayoría de los puntos críticos son de tipo escalantes (scaling critical points), ya que, como hemos explicado anteriormente, esta es una de las condiciones de la propuesta para resolver el problema de la coincidencia cosmológica mediante la introducción de una interacción distinta a la gravitacional entre el sector oscuro. También hemos encontrado que el modelo estudiado tiene los puntos críticos necesarios para ser considerado viable para nuestro universo, ya que tenemos puntos críticos en el pasado que se comportan como puntos silla dominados por materia y puntos críticos estables en el futuro dominados por energía oscura y, que además son acelerados. Aclaremos que con este método no podemos determinar el valor exacto de los parámetros del modelo, lo que tenemos es el comportamiento del sistema para un rango de valores de los parámetros, pero, podemos usar los datos del fondo cosmológico para realizar una inferencia Bayesiana y determinar los parámetros libres que tienen mayor probabilidad de ser ciertos.

El segundo aspecto en el estudio de la cosmología es la aplicación de la teoría de perturbaciones. Actualmente, se han llevado a cabo amplias investigaciones realizando pequeñas perturbaciones a la métrica de fondo, con lo cual se han podido entender muchos aspectos de nuestro universo, tales como el crecimiento de las estructuras, la radiación cósmica del fondo de microondas, etc. Una propiedad muy interesante cuando se estudia la teoría de perturbaciones es que, debido a la covarianza de las ecuaciones de Einstein, tenemos las llamadas transformaciones de norma, que como hemos mencionado, al principio es un poco confuso tratar estos aspectos, pero que al final simplifican las ecuaciones, ya que podemos escribirlas en alguna norma en donde sean más simples o más fáciles de manipular.

En el capítulo previo a esta conclusión general, hemos determinado las correspondientes ecuaciones tanto a nivel del fondo como a nivel de las perturbaciones lineales para modelos en donde existe una interacción, además de la gravitacional, entre la materia oscura y la energía oscura, ambas componentes consideradas como fluidos. Hemos mencionado que a nivel del fondo se han propuesto varias formas funcionales de la interacción $\bar{Q}$ sin ocuparse de la forma covariante, en donde han realizado estudios usando las herramientas de la teoría de sistemas dinámicos con el objetivo de conocer el comportamiento de los puntos críticos de los modelos [22] tal y como lo hicimos en el capítulo 3. Pero también existen trabajos en donde han realizado inferencias Bayesianas usando distintas observaciones cosmológicas para determinar los parámetros que mejor ajustan a los modelos cosmológicos estudiados [75], [76], [77], [78], etc. Por otro lado, hemos visto que cuando se estudian las ecuaciones perturbadas, allí aparece un detalle importante sobre la forma funcional de la interacción, ya que debe satisfacer la condición de que a nivel del fondo no debe existir intercambio de momento. Finalmente, con las herramientas de la inferencia Bayesiana (tema del capítulo 5) y las ecuaciones que hemos descrito en el capítulo 6, ahora podemos plantear una forma covariante de la interacción $Q_{\mu}^{(A)}$ y luego confrontarla con los datos observados, por supuesto, antes debemos de revisar que pase la prueba de estabilidad (calcular el factor "doom" para el modelo estudiado). Por lo tanto, este trabajo establece las bases para realizar trabajos posteriores sobre el estudio de nuevos modelos

y la realización de las correspondientes inferencias cosmológicas Bayesianas.

Apéndice A

Regiones de existencia

En este apéndice reportamos las regiones de existencia de los puntos críticos de distintos casos de nuestro estudio de modelos interactuantes en el capítulo 3, aquí el símbolo $\cup$ denota la unión y $\cap$ denota la intersección de conjuntos:

Región 1

$$\left(0 \leq \beta < \frac{1}{3} \cap s_1(\beta) < \lambda \leq \sqrt{\frac{6}{1-\beta^2}}\right) \cup \\ \left(0 \leq \beta \leq \frac{1}{3} \cap \lambda = s_1(\beta)\right).$$

Región 2

$$\left(-1 < \beta \leq 0 \cap \lambda > 0\right) \cup \\ \left(0 < \beta \leq \frac{1}{3} \cap \lambda \geq s_1(\beta)\right) \cup \\ \left(\frac{1}{3} < \beta < 1 \cap \lambda \geq \sqrt{\frac{6}{1-\beta^2}}\right),$$

donde

$$s_1 = \frac{\sqrt{3+9\beta+6\beta^2} + \sqrt{\beta(1+\beta)^3}}{(1+\beta)}. \quad (\text{A.1})$$

Región 3:

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt{3} < \lambda \leq \sqrt{6} \cap 0 \leq \zeta < \frac{9-6\lambda^2+\lambda^4}{12\lambda^2} \right) \cup \\ & \left(\sqrt{6} < \lambda < \sqrt{3+2\sqrt{3}} \cap \right. \\ & \left. \frac{6-\lambda^2}{3} + \frac{\sqrt{-54+45\lambda^2-12\lambda^4+\lambda^6}}{3\lambda} \leq \zeta < \frac{9-6\lambda^2+\lambda^4}{12\lambda^2} \right) \\ & \cup \left(\sqrt{3} \leq \lambda \leq \sqrt{3+2\sqrt{3}} \cap \zeta = \frac{9-6\lambda^2+\lambda^4}{12\lambda^2} \right). \end{aligned}$$

Región 4:

$$\begin{aligned} & (0 < \lambda < \sqrt{3} \cap -1 < \zeta \leq 0) \cup \\ & (\lambda = \sqrt{3} \cap -1 < \zeta < 0) \cup \\ & \left(\sqrt{3} < \lambda \leq \sqrt{3+2\sqrt{3}} \cap -1 < \zeta < \frac{9-6\lambda^2+\lambda^4}{12\lambda^2} \right) \\ & \cup \left(\lambda > \sqrt{3+2\sqrt{3}} \cap \right. \\ & \left. -1 < \zeta \leq \frac{6-\lambda^2}{3} + \frac{\sqrt{-54+45\lambda^2-12\lambda^4+\lambda^6}}{3\lambda} \right) \\ & \cup \left(\sqrt{3} \leq \lambda \leq \sqrt{3+2\sqrt{3}} \cap \zeta = \frac{9-6\lambda^2+\lambda^4}{12\lambda^2} \right). \end{aligned}$$

Región 5:

$$\begin{aligned} & (\eta \leq 0 \cap f_3(\eta) \leq \lambda \leq f_2(\eta)) \\ & \cup (\eta > 1 \cap \lambda \geq f_3(\eta)). \end{aligned}$$

donde

$$f_3(\eta) = \sqrt{\frac{3-12\eta+12\eta^2+6\sqrt{-\eta+5\eta^2-8\eta^3+4\eta^4}}{1-4\eta+4\eta^2}}, \quad (\text{A.2})$$

$$f_2(\eta) = \sqrt{\frac{3+12\eta-27\eta^2-3\sqrt{\delta}}{4(\eta-2\eta^2)}}, \quad (\text{A.3})$$

y $\delta = 1 - 8\eta + 30\eta^2 - 72\eta^3 + 81\eta^4$, además $(1 - 2\eta) \neq 0$.

Región 6:

$$\begin{aligned}
 & \left(\eta < 0 \cap \lambda > f_3(\eta) \right) \cup \left(\eta \leq 0 \cap \lambda = f_3(\eta) \right) \\
 & \cup \left[\eta = 0 \cap \left(0 < \lambda < \sqrt{3} \cup \lambda > \sqrt{3} \right) \right] \\
 & \cup \left(0 < \eta < \frac{1}{3} \cap 0 < \lambda \leq f_1(\eta) \right) \cup \\
 & \left(\frac{1}{3} \leq \eta < \frac{1}{2} \cap 0 < \lambda \leq f_2(\eta) \right) \cup \\
 & \left(\frac{1}{2} < \eta < 1 \cap 0 < \lambda \leq f_2(\eta) \right) \cup \\
 & \left(\eta = 1 \cap \sqrt{3} < \lambda < \sqrt{3(\sqrt{2}+1)} \right) \cup \\
 & \left(\eta > 1 \cap f_3(\eta) < \lambda \leq f_2(\eta) \right) \cup \\
 & \left(\eta > 1 \cap \lambda = f_3(\eta) \right).
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

Apéndice B

Datos de Planck

Básicamente, hemos descargado dos archivos del experimento Planck en el siguiente enlace <http://pla.esac.esa.int/pla/#cosmology>, estos archivos son *COM_likelihood_Data_baseline.R3.00.tar.gz* y *COM_Likelihood_Code – v3.0_R3.01.tar.gz*. El primer archivo son los "likelihoods" que vamos a usar y el segundo es el código de Planck el cual nos permite usar los "likelihood" debido a que están escritos en .clik

Al descomprimir los archivos obtenemos carpetas de nombre **code** y **baseline**, lo mejor es ponerlos ambos en una carpeta (en mi caso la carpeta se llama **planck**). Ahora bien, hay que instalar el código de planck. Para esto, desde la terminal nos dirigimos a **planck/code/plc_3.0/plc-3.01**¹, luego tecleamos **./waf configure** y a continuación nos va a indicar si tenemos instalados los programas necesarios, si es el caso podemos a la instalación tecleando **./waf install**², luego cargamos la fuente de los "likelihoods", desde donde estamos tecleando **source bin/clik_profile.sh** y listo! En caso contrario, hay que instalar los programas que no tenemos y repetir el proceso desde **./waf configure**

Luego debemos asegurarnos que tenemos el camino correcto:
path['clik'] = root+'/planck/code/plc_3.0/plc-3.01' en el archivo **default.conf** de montepython3, además poner al final de .bashrc la línea:

source /home/patro/MontePyClass/planck/code/plc_3.0/plc-3.01/bin/clik_profile.sh

Finalmente, para probar si todo está en orden, nos dirigimos a nuestro programa montepython3 y corremos **base2018TTTEEE.param** de la siguiente manera:

python montepython/MontePython.py -p input/base2018TTTEEE.param -o chains/PlanckPatro1 -N 100

¹En mi caso el camino completo es: **/home/patro/MontePyClass/planck/code/plc_3.0/plc-3.01**

²Hay que instalar waf descargando en <https://waf.io> y también debemos tener instalado cfitsio.

Bibliografía

- [1] PLANCK COLLABORATION: N. AGHANIM ET AL., *Astronomy and Astrophysics*, **641** (2020) 67.
- [2] EDWIN HUBBLE, *Proceeding of the National Academy of Science of the United State of America* **3**, (1929) 168-173.
- [3] RIESS ET AL., *The Astronomical Journal* **116**, (1998) 1009-1038.
- [4] S. PERLMUTTER ET AL., *The Astronomical Journal* **517**, (1999) 567-586.
- [5] SEAN M. CARROLL, *Living Reviews in Relativity* **4** (2001). <https://doi.org/10.12942>
- [6] SPACETIME AND GEOMETRY. AN INTRODUCTION TO GENERAL RELATIVITY, *Sean Carroll*, 2004 (ISBN 0-8053-8732-3).
- [7] GENERAL RELATIVITY, *Robert M. Wald*, The University of Chicago Press, Chicago 60637, 1984 (ISBN 0-226-87033-2).
- [8] GEOMETRY, TOPOLOGY AND PHYSICS, *M. Nakahara*, second edition, Japan, Department of Physics, Kinki University, 2003. ISBN 0 7503 0606 8.
- [9] FRITZ ZWICKY, <https://arxiv.org/abs/1711.01693>.
- [10] PHYSICAL FOUNDATION OF COSMOLOGY, *V. Mukhanov*, Cambridge University Press, USA, New York, 2005 (ISBN: 978-0-521-56398-7).
- [11] PRAKASH SARKAR ET. AL., *Monthly Notices of Royal Astronomical Society* **399**, (2009) 128-131.
- [12] E. J. COPELAND, M. SAMI AND S. TSUJIKAWA, *International Journal of Modern Physics D* **15** (2006) 1753-1935. <https://doi.org/10.1142/S021827180600942X>
- [13] A. DE FELICE AND S. TSUJIKAWA, *Living Review Relativity* **10** (2010) 161. <https://link.springer.com/article/10.12942/lrr-2010-3>

- [14] CARL H. BRANS, *Scolarpedia* **4** (2014). [http://www.scolarpedia.org/article/Jordan-Brans-Dicke Theory](http://www.scolarpedia.org/article/Jordan-Brans-Dicke%20Theory)
- [15] P. S. G. FERNANDES, P. CARRILHO, T. CLIFTON AND D. J. MULRYNE, *Classical and Quantum Gravity* **39** (2022) 063001.
- [16] S. NOJIRI AND S. D. ODINTSOV , <https://arxiv.org/abs/1306.4426>.
- [17] MICHEL CHEVALLIER AND DAVID POLARSKI, *International Journal of Modern Physics D* **10** (2001) 213-223.
- [18] ERIC V. LINDER, *Physical Review Letters* **90** (2003) 4.
- [19] H. E. S. VELTEN, R. F. VOM MARTTENS AND W. ZIMDAHL, *The European Physical Journal C* **74** (2014) 8.
- [20] J. DAVID BROWN, *Class Quantum Grav* **10** (1993) 1579-1606.
- [21] CHRISTIAN G. BROWN, NICOLA TAMANINI AND MATTHEW WRIGTH, *Physical Review D* **91** (2015) 22.
- [22] SEBASTIAN BAHAMONDE ET AL., *Physics Reports* **775-777**, (2018) 1-177.
- [23] P. NTELLIS, *Xiv:1607.03418v1*.
- [24] EDMUND J. COPELAND ET AL., *Physical Review D* **57**, (1998) 5.
- [25] RICARDO GARCÍA-SALCEDO ET AL., *European Journal of Physics* **36**, (1998) 025008.
- [26] DIFFERENTIAL EQUATIONS AND DYNAMICAL SYSTEMS, *L. Perko* (Springer-Verlag, USA 2001)
- [27] CHRISTIAN G. BOHMER AND NYEIN CHAN, *arXiv:1409.5585*, (2014).
- [28] M. SHAHALAM, S.D. PATHAK, M.M. VERMA, M.YU. KHLOPOV AND R. MYRZAKULOV, *Eur. Phys. J. C* **75** 395 (2015).
- [29] B.S. CHOUDHURY, H.S. MONDAL AND D. CHATTERJEE, *Pramana* **90** 55 (2018).
- [30] PATROCINIO PÉREZ, ULISES NUCAMENDI AND ROBERTO DE ARCIA, *The European Physical Journal C* **81** 1063 (2021).
- [31] C.G. BÖHMER, G. CALDERA-CABRAL, R. LAZKOZ AND R. MAARTENS, *Phys. Rev. D* **78** 023505 (2008).
- [32] E.J. COPELAND, A.R. LIDDLE AND D. WANDS, *Phys. Rev. D* **57** 4686 (1998).

- [33] RIESS ET AL., The Astronomical Journal **826**, 1(2016).
- [34] M. BETOULE ET AL., Astronomy and Astrophysics **568**, (2014) 32.
- [35] ANDREW R. LIDDLE, Annual Reviews **59**, (2009) 95-114.
- [36] INTRODUCTION TO COSMOLOGY, *Matts Roos*, third edition, 2003 (ISBN 0-470-84909-6).
- [37] DATA ANALYSIS, *D.S Sivia y J. Skilling* , segunda edición, Oxford University Press, USA, New York, 2006 (ISBN 0-19-856831-2).
- [38] BAYESIAN DATA ANALYSIS, *Gelman, Jhon B. Carlin, Hal S. Stern and Donald B. Rubin*, Bayesian Data Analysis, segunda edición, Chapman & Hall/crc, USA, New York, 2004 (ISBN 1-58488-388-X).
- [39] JOSHUA S. SPEAGLE, arXiv:1909.12313
- [40] STATISTICS AND ANALYSIS OF DATA SCIENTIFIC DATA, *Massimiliano Bonamente*, segunda edición, Springer Science+Business Media, USA, New York, 2017
- [41] SHINJI TSUJIKAWA , Class. Quantum Grav. **30** (2013) 214003.
- [42] C.L. BENNETT, D. LARSON Y J.L. WEILAND, The Astrophysical Journal, 794, (2014) 8.
- [43] G. F. SMOOT ET AL., The Astrophysical Journal, 396, (1992) 8.
- [44] G. HINSHAW ET AL., The Astrophysical Journal Supplement Series, 208, (2013) 25.
- [45] PLANCK COLLABORATION: P.A.R. ADE ET AL., Astronomy and Astrophysics, **594** (2016) 63.
- [46] ALAN H. GUTH, Physical Review D, **23** (1981) 2.
- [47] COSMOLOGY, *Steven Weinberg*, Oxford University Press, USA, New York, 2008 (ISBN 978-0-19-852682-7).
- [48] DARK ENERGY THEORY AND OBSERVATIONS, *Luca Amendola and Shinji Tsujikawa*, Cambridge University Press, USA, New York, 2010 (ISBN-13 978-0-521-51600-6).
- [49] RAÚL JIMÉNEZ Y ABRAHAM LOEB, The Astrophysical Journal, **593**, (2002) 6.
- [50] MODERN COSMOLOGY, *Scott Dodelson and Fabian Schmidt*, Second edition, Academic Press, Cambridge, MA 02139, United States (ISBN: 978-0-12-815948-4).
- [51] DANIEL J. EISENSTEIN ET AL., The Astrophysical Journal **633**, (2005) 560-574.

- [52] Kyle S. Dawson et al., *The Astrophysical Journal* **145**, (2013) 10.
- [53] FLORIAN BEUTLER ET AL., *Monthly Notices* **455**, (2015) 3230-3248.
- [54] B. SANTOS ET AL., *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **2017**, (2017) 047.
- [55] FLORIAN BEUTLER ET AL., *Monthly Notices of Royal Astronomical Society* **416**, (2011) 3017-3032.
- [56] ASHLEY J. ROSS ET AL., *Monthly Notices of Royal Astronomical Society* **449**, (2015) 835-847.
- [57] LAUREN ANDERSON ET AL., *Monthly Notices of Royal Astronomical Society* **441**, (2014) 24-62.
- [58] NIKHI PADMANABHAN ET AL., *Monthly Notices of Royal Astronomical Society* **427**, (2012) 2132-2146.
- [59] CHRIS BLAKE ET AL., *Monthly Notices of Royal Astronomical Society* **425**, (2012) 405-414.
- [60] JAMES M. BARDEEN, *Physical Review D* **22**, (1980) 24.
- [61] SUNNY VAGNOZZI, BRAHAM LOEB AND MICHELE MORESCO, *The Astrophysical Journal* **908**, (2021) 16.
- [62] RAÚL JIMENEZ ET AL., *The Astrophysical Journal* **593**, (2003) 622-629.
- [63] JOAN SIMON, LICIA VERDE AND RAUL JIMENEZ, *Physical Review D* **71**, (2005) 18.
- [64] DANIEL STERN ET AL., *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **2010**, (2010) 008.
- [65] MICHELE MORESCO ET AL., *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **2012**, (2012) 053.
- [66] ZHANG CONG ET AL., *Research in Astronomy and Astrophysics* **14**, (2014) 1221-1233.
- [67] MICHELE MORESCO , *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters* **450**, (2015) L16-L20.
- [68] MICHELE MORESCO ET AL., *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **2016**, (2016) 014.
- [69] A. L. RATZIMBAZAFY ET AL., *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **467**, (2017) 3239–3254.

- [70] JULIEN LESGOURGUES, <http://arxiv.org/abs/1104.2932v2>.
- [71] JUSSI VÄLIVIITA, ELISABETTA MAJEROTO AND ROY MAARTENS, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, **2008**, (2008) 22.
- [72] CHUNG-PEI MA AND EDMUND BERTSCHINGER, *Astrophysical Journal*, **455**, (1995) 45.
- [73] WEIQIANG YANG ET AL., *Physical Review D*, **98**, (2018) 15.
- [74] M. B. GAVELA ET AL., *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, **07**, (2009) 034.
- [75] MICHAEL S. BERGER AND HAMED SHOJAEI, *Physical Review D*, **74**, (2006) 043530.
- [76] LUCA AMENDOLA, GABRIELA CAMARGO CAMPOS AND ROGERIO ROSENFELD, *Physical Review D*, **75**, (2007) 083506.
- [77] ELISA G. M. FERREIRA ET AL., *Physical Review D*, **95**, (2017) 043520.
- [78] WEIQIANG YANG ET AL., *Physical Review D*, **100**, (2019) 083509.