



*UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO*

---

*INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS*

# **Representación integral de operadores autoadjuntos en espacios de Hilbert**

**TESIS**

que para obtener el grado académico de  
**MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS**

**PRESENTA**

**Liliana Paulina Trejo Valencia**

Asesores

**Dr. Rigoberto Vera Mendoza  
Dr. Fernando Garibay Bonales**

Marzo de 2006

---

# Contenido

---

<b>Introducción</b>	<b>iii</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1 Operadores lineales compactos en espacios de Hilbert . . . . .	1
1.1.1 Propiedades de los operadores lineales compactos . . . . .	1
1.1.2 Ejemplos de operadores lineales compactos . . . . .	2
1.2 Operadores lineales autoadjuntos en espacios de Hilbert . . . . .	5
1.2.1 Ejemplos de operadores lineales autoadjuntos acotados . . . . .	6
1.3 Proyecciones . . . . .	7
1.4 Nociones básicas de Teoría Espectral . . . . .	11
<b>2 Teorema espectral para operadores compactos autoadjuntos</b>	<b>13</b>
2.1 Propiedades espectrales de un operador compacto autoadjunto . . . . .	13
2.2 El Teorema Espectral . . . . .	14
2.3 Ejemplos del teorema espectral para un operador compacto autoadjunto . . . . .	21
<b>3 Teorema espectral para operadores autoadjuntos acotados</b>	<b>23</b>
3.1 Familia Espectral . . . . .	23
3.2 El teorema espectral para el operador de multiplicación . . . . .	33
<b>4 Teorema espectral para operadores no acotados con espectro puntual puro</b>	<b>35</b>
4.1 Operador adjunto de Hilbert . . . . .	35
4.2 Criterio de autoadjunticidad para operadores no acotados . . . . .	37
4.3 El Teorema Espectral . . . . .	40

Contenido	ii
-----------	----

---

4.4 El operador de diferenciación . . . . .	47
---	----

<b>Bibliografía</b>	<b>55</b>
---------------------	-----------

---

# Introducción

---

La teoría espectral permite un profundo análisis de la estructura de ciertos operadores definidos en espacios de Hilbert. Para dar una ilustración y motivación de esta teoría, recordemos que una función medible acotada y real  $f$  definida en un espacio  $X$  de medida finita, puede aproximarse uniformemente por funciones simples. Más precisamente, dado  $\epsilon > 0$  existe una familia disjunta de funciones características  $\{\chi_j\}$  y una familia finita de números reales tal que  $|f(t) - \sum_j \lambda_j \chi_j(t)| < \epsilon$ .

El análogo a este tipo de funciones en teoría de espacios de Hilbert, son operadores lineales autoadjuntos, y ya que las funciones simples son idempotentes, es intuitivamente claro que en este contexto, éstas se identifican con las proyecciones. La aproximabilidad de funciones reales por funciones simples, corresponde, en analogía, a la aproximabilidad de operadores autoadjuntos por una combinación lineal real de proyecciones; más explícitamente, sumas del tipo Riemann-Stieltjes en la norma de operadores, lo que da lugar a una representación integral del operador.

En esta tesis, abordamos dicha representación integral para el caso de operadores autoadjuntos. La tesis está organizada como sigue: En el capítulo 1 presentamos las definiciones y resultados fundamentales que servirán para el desarrollo de la teoría y las conclusiones que se obtendrán en los capítulos posteriores.

En el capítulo 2, trabajamos con operadores autoadjuntos compactos  $T$ , presentamos sus propiedades espectrales para finalmente, representar al operador como una suma a lo más numerable de proyecciones definidas en subespacios invariantes de  $T$ .

---

En el tercer capítulo, se considera el caso en el que  $T$  además de ser autoadjunto es acotado. Mostramos la existencia de una familia de proyecciones  $\mathcal{E}$  asociada a  $T$ , llamada familia espectral, lo que da lugar a la definición de la integral de  $T$  respecto a  $\mathcal{E}$ .

El último capítulo está dedicado al caso en el que  $T$  es autoadjunto no acotado con espectro puntual puro (definición 4.5). A partir de la teoría expuesta en el capítulo 3, establecemos la representación integral de  $T$  por medio de la familia espectral correspondiente, cuya obtención se bosqueja en [4] y nosotros desarrollamos en la sección 4.3. Concluimos con un breve análisis del operador de diferenciación al que aplicamos el teorema espectral obtenido.

# CAPÍTULO 1

---

## Preliminares

---

A lo largo de esta tesis  $\mathcal{H}$  denotará un espacio de Hilbert complejo y  $\mathcal{B}$  un espacio de Banach complejo, a menos que se especifique lo contrario.

En este capítulo presentaremos las definiciones y resultados básicos de la teoría de operadores lineales definidos en espacios de Hilbert.

### 1.1 Operadores lineales compactos en espacios de Hilbert

**Definición 1.1** Sean  $X$  y  $Y$  espacios normados. Un operador lineal  $T : X \rightarrow Y$  es compacto si para todo subconjunto acotado  $M$  de  $X$ , la imagen  $T(M)$  es relativamente compacta, esto es, la cerradura  $\overline{T(M)}$  es compacta.

Algunos de los operadores lineales que aparecen en análisis son compactos. Veremos algunos ejemplos más adelante. Mientras tanto enunciaremos algunas de sus propiedades.

#### 1.1.1 Propiedades de los operadores lineales compactos

A partir de la definición, es posible demostrar que todo operador compacto es acotado y si el operador identidad se aplica en un espacio normado de dimensión infinita, entonces no puede ser compacto. Véase [1] pág. 407.

De las propiedades conocidas para un conjunto compacto, se deriva inmediatamente la siguiente:

**Proposición 1.1** *Sean  $X$  y  $Y$  espacios normados y  $T : X \rightarrow Y$  un operador lineal. Entonces  $T$  es compacto si y sólo si toda sucesión acotada  $\{x_n\} \subset X$  es aplicada por  $T$  sobre una sucesión  $\{Tx_n\}$  en  $Y$  que tiene una subsucesión convergente.*

Para la prueba, véase [1] pág. 407. Es fácil ver que la suma de dos operadores compactos  $T, S$  es compacto, y si  $\alpha$  es un escalar,  $\alpha T$  es compacto también. Es decir, el conjunto de operadores compactos entre dos espacios normados  $X$  y  $Y$  forma un espacio vectorial. Respecto a la composición tenemos la siguiente:

**Proposición 1.2** *Suponga que  $S, T$  son dos operadores acotado y compacto, respectivamente, en un espacio normado  $X$ . Entonces las composiciones  $ST$  y  $TS$  son operadores compactos.*

En particular, como un operador compacto es acotado, se sigue que la composición de operadores compactos es un operador compacto. Tenemos también la siguiente proposición, cuya prueba puede verse en [1] pág. 407.

**Proposición 1.3** *Sean  $X$  y  $Y$  espacios normados y  $T : X \rightarrow Y$  un operador lineal. Si  $T$  es acotado y  $\dim T(X) < \infty$ , el operador es compacto.*

El siguiente teorema establece condiciones bajo las cuales el límite de una sucesión de operadores compactos es compacto. Este resultado será muy útil en los ejemplos que veremos después.

**Teorema 1.1** *Sea  $\{T_n\}$  una sucesión de operadores lineales compactos de un espacio normado  $X$  en un espacio de Banach  $\mathcal{B}$ . Si  $\{T_n\}$  es uniformemente convergente, digamos  $\|T_n - T\| \rightarrow 0$ , entonces el operador límite  $T$  es compacto.*

### 1.1.2 Ejemplos de operadores lineales compactos

Una sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in l^2$  donde se denotará por  $\mathbf{x}$ .

**Ejemplo 1.1** Considere al operador lineal  $T : l^2 \rightarrow l^2$  definido como  $T\mathbf{x} = \{\frac{x_n}{n}\}$ . Entonces  $T$  es compacto.

En efecto, definamos  $T_j : l^2 \rightarrow l^2$  como  $T_j \mathbf{x} = \{x_1, \frac{x_2}{2}, \dots, \frac{x_j}{j}, 0, 0, \dots\}$ . Es fácil ver que  $T_j$  es acotado:

$$\|T_j \mathbf{x}\|^2 = \left\| \left\{ x_1, \frac{x_2}{2}, \dots, \frac{x_j}{j}, 0, 0, \dots \right\} \right\|^2 = \sum_{k=1}^j \frac{|x_k|^2}{k^2} \leq \sum_{k=1}^j x_k^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2.$$

Es decir,  $\|T_j\| \leq 1$ , para todo  $j \in \mathbb{N}$ .

Finalmente,  $\dim T_j(X) = j < \infty$ . De acuerdo con la proposición 1.3,  $T_j$  es compacto para toda  $j \in \mathbb{N}$ . Además, es claro que:

$$\|(T - T_j)\mathbf{x}\|^2 = \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{|x_k|^2}{k^2} \leq \frac{1}{(j+1)^2} \sum_{k=j+1}^{\infty} |x_k|^2 \leq \frac{1}{(j+1)^2} \|\mathbf{x}\|^2.$$

Al tomar el supremo sobre todo  $\mathbf{x} \in l^2$  de norma 1 tenemos que

$$\|T - T_j\| \leq \sqrt{\frac{1}{j+1}}.$$

De este modo,  $T_j \rightarrow T$  y por el teorema 1.1,  $T$  es compacto.

**Ejemplo 1.2** Sea  $p(x)$  un polinomio con coeficientes reales. Sea  $T : l^2 \rightarrow l^2$  el operador del ejemplo anterior y considere entonces al operador  $p(T)$ . Para cada  $k \in \mathbb{N}$  tenemos que  $T^k : l^2 \rightarrow l^2$  definido como  $T^k \mathbf{x} = \mathbf{y}$  donde  $\mathbf{y} = \{x_1, \frac{x_2}{2^k}, \frac{x_3}{3^k}, \dots, \frac{x_n}{n^k}, \dots\}$  es compacto. Ahora, si  $p(x)$  es un polinomio sin término constante (consideración que se hace porque el operador identidad  $I : l^2 \rightarrow l^2$  no es compacto, por ser  $l^2$  un espacio de dimensión infinita), tenemos, en este caso, que  $p(T) : l^2 \rightarrow l^2$  también es compacto.

En general, si  $p(x)$  es un polinomio con coeficientes en  $\mathbb{C}$  sin término constante, y  $T$  es un operador compacto, entonces  $p(T) : X \rightarrow X$  es compacto.

**Ejemplo 1.3** Considere un espacio de Hilbert  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  arbitrario. Sea  $\{x_n\} \subset \mathcal{H}$  un conjunto ortonormal, y  $\{\lambda_n\}$  cualquier sucesión de números reales con  $\lambda_n \rightarrow 0$ . Sea  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  definido como

$$Tx = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle x, x_k \rangle x_k$$

Veamos en primer lugar que  $T$  está bien definido. Sea  $y_l = \sum_{k=1}^l \lambda_k \langle x, x_k \rangle x_k$ . Suponga  $n, m \in \mathbb{N}$  y que  $n \leq m$ . Entonces, usando la ortonormalidad de la colección  $\{x_k\}$  obtenemos

$$\begin{aligned} \|y_m - y_n\|^2 &= \left\| \sum_{k=n+1}^m \lambda_k \langle x, x_k \rangle x_k \right\|^2 \\ &= \left\langle \sum_{k=n+1}^m \lambda_k \langle x, x_k \rangle x_k, \sum_{k=n+1}^m \lambda_k \langle x, x_k \rangle x_k \right\rangle \quad (1.1) \\ &= \sum_{k=n+1}^m \lambda_k^2 |\langle x, x_k \rangle|^2 \end{aligned}$$

Luego, dado  $\epsilon > 0$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $k \geq N$  implica  $|\lambda_k| < \epsilon$ , de modo que tomando la suma en 1.1 para  $k \geq N$  y aplicando la desigualdad de Bessel, obtenemos

$$\begin{aligned} \|y_m - y_n\|^2 &\leq \sum_{k=N}^m \lambda_k^2 |\langle x, x_k \rangle|^2 \\ &\leq \epsilon^2 \sum_{k=N}^m |\langle x, x_k \rangle|^2 \leq \epsilon^2 \|x\|^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\{y_l\}$  es una sucesión de Cauchy en el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  y en consecuencia  $T$  está bien definido. Para ver que  $T$  es compacto, defínase  $T_n x = \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle x, x_k \rangle x_k$ . Entonces  $T_n$  es un operador acotado. En efecto, sea  $M \geq 0$  tal que  $|\lambda_n| \leq M$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ . Nuevamente, por la desigualdad de Bessel se obtiene

$$\begin{aligned} \|T_n x\|^2 &= \left\langle \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle x, x_k \rangle x_k, \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle x, x_k \rangle x_k \right\rangle \\ &\leq \sum_{k=1}^n |\lambda_k|^2 |\langle x, x_k \rangle|^2 \|x_k\|^2 \quad (1.2) \\ &\leq M^2 \|x\|^2; \end{aligned}$$

es decir,  $\|T_n\| \leq M$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Como  $\dim(T_n(X)) < \infty$ , tenemos que  $T_n$  es compacto.

Por un cálculo similar al hecho en la ecuación 1.1, existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que para  $n \geq N$  tenemos

$$\begin{aligned} \|(T - T_n)x\|^2 &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k^2 |\langle x, x_k \rangle|^2 \\ &\leq \epsilon^2 \|x\|^2 \end{aligned}$$

Al tomar el supremo sobre los  $x$  tales que  $\|x\| = 1$  se obtiene que la sucesión  $\{T_n\}$  converge a  $T$ . Por el teorema 1.1 se sigue que  $T$  es compacto.

## 1.2 Operadores lineales autoadjuntos en espacios de Hilbert

**Definición 1.2 (Operador adjunto de Hilbert  $T^*$ .)** Sea  $T : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$  un operador lineal acotado, donde  $\mathcal{H}_1$  y  $\mathcal{H}_2$  son espacios de Hilbert. El operador adjunto de Hilbert  $T^*$  de  $T$  es el operador

$$T^* : \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_1$$

tal que para todo  $x \in \mathcal{H}_1$  y  $y \in \mathcal{H}_2$ ,

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle.$$

Para que esta definición tenga sentido, se debe tener, desde luego, que dado  $T$  operador arbitrario,  $T^*$  existe y es único. La demostración de este hecho puede verse en [1], pág 197. Tomando en cuenta dicho resultado, tenemos la siguiente:

**Definición 1.3** Un operador lineal acotado  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  sobre un espacio de Hilbert es autoadjunto si  $T^* = T$ .

Es bien sabido que un operador lineal  $T$  definido en un espacio de Hilbert complejo  $\mathcal{H}$  es autoadjunto si y sólo si el número  $\langle Tx, x \rangle$  es real para todo  $x \in \mathcal{H}$  (véase [1], pág. 202). De este modo, podemos establecer una relación de orden en el conjunto de operadores lineales, diciendo primeramente que un operador autoadjunto  $T$  es positivo, lo cual denotaremos por  $T \geq 0$ , si

$\langle Tx, x \rangle \geq 0$  para toda  $x \in \mathcal{H}$  y dados  $T$  y  $S$  operadores lineales autoadjuntos, diremos que  $T \geq S$  (o bien  $S \leq T$ ) si  $T - S \geq 0$ .

Es fácil ver también que si  $T_1 \leq T_2$  y  $S$  es un operador acotado cualquiera,  $S + T_1 \leq S + T_2$  y si  $\alpha < 0$  es un número real entonces  $\alpha T_1 \geq \alpha T_2$ .

### 1.2.1 Ejemplos de operadores lineales autoadjuntos acotados

**Ejemplo 1.4** Considere el ejemplo 1.1. Si el espacio  $l^2$  se toma sobre los números reales resulta entonces que  $T$  es autoadjunto. En efecto, queremos probar que  $\langle T\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, T\mathbf{y} \rangle$ , para todo  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in l^2$ . Entonces

$$\langle T\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k} \bar{y}_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \frac{\bar{y}_k}{k} = \langle \mathbf{x}, T\mathbf{y} \rangle.$$

Como  $T$  es compacto, se sigue que  $T$  es autoadjunto acotado.

**Ejemplo 1.5** El operador definido en el ejemplo 1.2 resulta ser también autoadjunto, ya que dado cualquier  $k \in \mathbb{N}$  tenemos que  $(T^k)^* = (T^*)^k$  y como  $T$  es autoadjunto, se sigue que  $T^k$  también lo es. Además, si  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x$  es un polinomio con coeficientes reales resulta que:

$$(p(T))^* = (a_n T^n + \dots + a_1 T)^* = \bar{a}_n (T^n)^* + \dots + \bar{a}_1 T^* = a_n T^n + \dots + a_1 T = p(T).$$

de donde  $p(T)$  es autoadjunto y compacto.

**Ejemplo 1.6** Considere nuevamente el operador definido en el ejemplo 1.3. Sean  $x, y \in \mathcal{H}$ . Probaremos que  $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$ . Entonces, considerando la definición de  $Tx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle x, x_k \rangle x_k$  y usando la continuidad, y las propiedades del producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , además de la ortogonalidad del conjunto  $\{x_n\}$  obtenemos

$$\begin{aligned} \langle Tx, y \rangle &= \left\langle \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle x, x_k \rangle x_k, y \right\rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle x, x_k \rangle x_k, y \right\rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle x, x_k \rangle \langle x_k, y \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \lambda_k \overline{\langle y, x_k \rangle} \langle x, x_k \rangle \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \langle x, \lambda_k \langle y, x_k \rangle x_k \rangle \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle x, \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle y, x_k \rangle x_k \right\rangle \\
&= \left\langle x, \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle y, x_k \rangle x_k \right\rangle \\
&= \langle x, Ty \rangle.
\end{aligned}$$

Como  $x, y \in \mathcal{H}$  fueron arbitrarios tenemos que  $T$  es autoadjunto. Finalmente, de la expresión 1.2 se deduce que  $T$  es acotado.

**Ejemplo 1.7** Considere el operador de multiplicación  $T : L^2[0, 1] \rightarrow L^2[0, 1]$  definido por

$$y(t) = (Tx)(t) = tx(t),$$

donde  $\mathcal{D}(T) = L^2[0, 1]$ . Es fácil ver que  $T$  es acotado

$$\|Tx\|^2 = \int_0^1 |tx(t)|^2 dt \leq \|x\|^2.$$

Además,  $T$  es un operador autoadjunto. En efecto, por la definición del producto interno definido en  $L^2[0, 1]$  y el hecho de que  $t \in [0, 1] \subset \mathbb{R}$  tenemos para  $x_1(t), x_2(t) \in L^2[0, 1]$

$$\langle Tx_1, x_2 \rangle = \int_0^1 t x_1(t) \overline{x_2(t)} dt = \int_0^1 x_1(t) \overline{t x_2(t)} dt = \langle x_1, Tx_2 \rangle$$

### 1.3 Proyecciones

Esta sección está dedicada al estudio de algunas propiedades de las proyecciones, ya que desempeñan un papel fundamental en el desarrollo de los capítulos 3 y 4.

**Definición 1.4** *Un operador  $P$  definido en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  es una proyección si existe  $Y$  subespacio cerrado de  $\mathcal{H}$  tal que  $Y$  es el rango de  $P$ ,  $Y^\perp$  es el espacio nulo de  $P$  y  $P|_Y$  es la identidad.*

A continuación, tenemos la siguiente caracterización de una proyección. Los detalles se encuentran en [1], pág 481.

**Proposición 1.4** *Un operador lineal acotado  $P : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  es una proyección sobre un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  si y sólo si  $P$  es autoadjunto e idempotente, esto es,  $P^2 = P$ .*

A partir de este resultado, es claro que las proyecciones  $P$  son operadores positivos de norma menor o igual a uno. Probemos ahora el siguiente:

**Lema 1.1** *Si  $P : \mathcal{H} \rightarrow Y$  es una proyección sobre un subespacio  $Y$  y  $x \in \mathcal{H}$  es tal que  $\|Px\| = \|x\|$  entonces  $Px = x$ .*

**Demostración.**

Como  $x = Px + (x - Px)$  y ya que  $Px \in Y$  y  $x - Px \in Y^\perp$  se sigue por la identidad de Pitágoras que  $\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|x - Px\|^2$ . Por hipótesis  $\|Px\| = \|x\|$  de modo que  $\|x - Px\| = 0$ . ■

Considerando la relación de orden que mencionamos para los operadores lineales autoadjuntos, tenemos el siguiente teorema que será de gran importancia en el capítulo 3.

**Teorema 1.2** *Sean  $P, Q$  proyecciones definidas en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Sean  $Y = P(\mathcal{H})$  y  $Z = Q(\mathcal{H})$  los espacios sobre los cuales  $\mathcal{H}$  es proyectado por  $P$  y  $Q$  respectivamente. Sean  $\mathcal{N}(P)$  y  $\mathcal{N}(Q)$  los subespacios nulos correspondientes. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

i)  $P \leq Q$

ii)  $\|Px\| \leq \|Qx\|$  para todo  $x \in \mathcal{H}$

iii)  $Y \subset Z$

iv)  $\mathcal{N}(P) \supset \mathcal{N}(Q)$

v)  $PQ = QP = P$

**Demostración.**

$i) \Rightarrow ii)$  Si  $P \leq Q$  entonces  $\|Px\|^2 = \langle Px, x \rangle \leq \langle Qx, x \rangle = \|Qx\|^2$ .

$ii) \Rightarrow iii)$  Si  $\|Px\| \leq \|Qx\|$  para toda  $x \in \mathcal{H}$  y consideramos en particular  $x \in Y$  entonces  $\|x\| = \|Px\| \leq \|Qx\| \leq \|x\|$  (porque  $\|Q\| \leq 1$ ), por lo tanto, de acuerdo con el lema 1.1,  $Qx = x$  es decir,  $x \in Z$ .

$iii) \Rightarrow iv)$  Por definición,  $Y^\perp = \mathcal{N}(P)$  y  $Z^\perp = \mathcal{N}(Q)$ , de modo que la hipótesis  $Y \subset Z$  implica que  $Z^\perp \subset Y^\perp$ .

$iv) \Rightarrow iii)$  Como  $Z^\perp = \mathcal{N}(Q) \subset \mathcal{N}(P) = Y^\perp$  y  $Y, Z$  son subespacios cerrados de  $\mathcal{H}$ , se sigue que  $Y = \overline{Y} = (Y^\perp)^\perp \subset (Z^\perp)^\perp = \overline{Z} = Z$ .

$iii) \Rightarrow v)$  Si  $Y \subset Z$  entonces  $Px \in Z$  y por lo tanto  $QPx = Px$  para todo  $x \in \mathcal{H}$ . Como  $P$  y  $Q$  son autoadjuntos (proposición 1.4) al obtener el adjunto de la igualdad  $QP = P$  obtenemos  $P = P^* = (QP)^* = P^*Q^* = PQ$ .

$v) \Rightarrow i)$  Si  $PQ = P$  entonces

$$\langle Px, x \rangle = \|Px\|^2 = \|PQx\|^2 \leq \|Qx\|^2 = \langle Qx, x \rangle. \blacksquare$$

Para finalizar esta sección, enlistaremos una propiedad más para una sucesión decreciente de operadores. Para la prueba, véase [1], pág. 473.

**Proposición 1.5** Sea  $\{T_n\}$  una sucesión decreciente de operadores lineales autoadjuntos sobre un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Es decir,

$$T_1 \geq T_2 \geq T_3 \geq \dots \geq K$$

donde  $K$  es un operador lineal autoadjunto. Suponga que  $T_j$  conmuta con  $K$  y con  $T_m$  para cualesquier  $j, m \in \mathbb{N}$ . Entonces  $\{T_n\}$  es fuertemente convergente a un operador límite  $T$  que es lineal, autoadjunto y satisface  $T \geq K$ .

Tenemos por último, los siguientes resultados.

**Proposición 1.6** Sean  $P_1$  y  $P_2$  dos proyecciones en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Entonces  $P = P_1P_2$  es una proyección si y sólo si,  $P_1$  y  $P_2$  conmutan. Si  $P$  es una proyección entonces  $\text{Ran}(P) = \text{Ran}(P_1) \cap \text{Ran}(P_2)$ .

**Demostración.**

Como  $(P_1P_2)^* = P_2P_1$ , tenemos que las ecuaciones  $(P_1P_2)^* = P_1P_2$  y  $P_1P_2 = P_2P_1$  son equivalentes, es decir,  $P$  es autoadjunto si y sólo si  $P_1$  y  $P_2$  conmutan. Claramente  $P$  es idempotente si y sólo si  $P_1$  y  $P_2$  conmutan. Esto prueba el primer enunciado.

Suponga ahora que  $P = P_1P_2$  es una proyección. Es claro que el rango de un producto de dos operadores está contenido en el rango del primer factor, de modo que la conmutatividad de  $P_1$  y  $P_2$  implica que  $\text{Ran}(P) \subset \text{Ran}(P_1) \cap \text{Ran}(P_2)$ . Por otro lado, si  $x \in \text{Ran}(P_1) \cap \text{Ran}(P_2)$  entonces  $P_1x = x$  y  $P_2x = x$  y por tanto  $Px = x$ . En consecuencia  $\text{Ran}(P_1) \cap \text{Ran}(P_2) \subset \text{Ran}(P)$ . ■

**Proposición 1.7** Sean  $P_1$  y  $P_2$  proyecciones sobre un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ . La diferencia  $P = P_2 - P_1$  es una proyección si y sólo si  $P_2 \geq P_1$ . En ese caso,  $\text{Ran}(P_2 - P_1) = \text{Ran}(P_2) \cap (\text{Ran}(P_1))^\perp$

**Demostración.**

Si  $P$  es una proyección entonces, para cualquier  $x \in \mathcal{H}$ ,

$$\langle P_2x, x \rangle - \langle P_1x, x \rangle = \langle (P_2 - P_1)x, x \rangle = \langle Px, x \rangle = \|Px\|^2 \geq 0.$$

Recíprocamente, si  $P_2 \geq P_1$  entonces  $P_2P_1 = P_1P_2 = P_1$  y por tanto

$$(P_2 - P_1)^2 = P_2^2 - P_2P_1 - P_1P_2 + P_1^2 = P_2 - 2P_1 + P_1 = P_2 - P_1$$

de donde  $P$  es idempotente. Como  $P_1$  y  $P_2$  son autoadjuntos resulta que  $P = P_2 - P_1$  es también autoadjunto. Así,  $P$  es una proyección. Sea  $Q = I - P_1$ . Es claro que  $Q$  es una proyección con rango  $\text{Ran}Q = (\text{Ran}(P_1))^\perp$ . Luego, como  $P_2$  y  $Q$  conmutan, porque  $P_2 - P_1 = P_2(I - P_1)$ , tenemos por la proposición 1.6 que  $\text{Ran}(P_2 - P_1) = \text{Ran}(P_2) \cap (\text{Ran}(P_1))^\perp$ . ■

El interés por estudiar las propiedades de las proyecciones se verá en el capítulo 3, pues asociado a un operador lineal definido en un espacio de Hilbert, existe una familia de proyecciones con las cuales se obtiene una representación del operador más sencilla.

## 1.4 Nociones básicas de Teoría Espectral

La Teoría Espectral es una rama muy importante del análisis funcional, porque a partir de las propiedades espectrales del operador, permite una representación del operador, en términos de proyecciones, que resulta ser más sencilla y de la cual es posible deducir ciertas propiedades importantes e interesantes del operador original.

Suponga que  $\mathcal{H}$  es un espacio de Hilbert complejo. Si  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  es un operador con dominio  $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{H}$ , para cada  $\lambda \in \mathbb{C}$  a  $T$  le asociamos el operador  $T_\lambda$ , con  $T_\lambda = T - \lambda I$  donde  $I$  es el operador identidad en  $\mathcal{H}$ . Si el operador  $T_\lambda$  es invertible, denotaremos por  $R_\lambda(T)$  (o simplemente  $R_\lambda$ ) a su inversa  $(T_\lambda)^{-1}$ . A éste lo llamaremos operador resolvente de  $T$ . En la siguiente definición, se hacen algunas consideraciones en cuanto a la continuidad de  $R_\lambda$  (si es que existe), y a su dominio de definición.

**Definición 1.5** Sea  $X \neq \{0\}$  un espacio normado complejo y  $T : \mathcal{D}(T) \rightarrow X$  un operador lineal con  $\mathcal{D}(T) \subset X$ . Un **valor regular**  $\lambda$  de  $T$  es un número complejo tal que  $R_\lambda(T)$  existe, es acotado y está definido sobre un subconjunto denso de  $X$ .

El **conjunto resolvente**  $\rho(T)$  de  $T$  es el conjunto de todos los valores regulares de  $T$ . El **espectro** de  $T$  es el conjunto  $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ , y está particionado como sigue:

**Espectro puntual**  $\sigma_p(T)$ . Es el conjunto en el que  $R_\lambda(T)$  no existe.

**Espectro continuo**  $\sigma_c(T)$ . En este caso  $R_\lambda(T)$  existe, está definido en algún subconjunto denso de  $X$  pero no es acotado.

**Espectro residual**  $\sigma_r(T)$ . En este caso  $R_\lambda(T)$  existe (ya sea que esté acotado o no) pero su dominio no es denso en  $X$ .

Está claro a partir de la definición que los subconjuntos en los que se particiona  $\sigma(T)$  son ajenos entre sí y en el caso en el que la dimensión de  $X$  sea finita entonces  $\sigma_c(T) = \emptyset = \sigma_r(T)$ . Tenemos ahora la definición de radio espectral.

**Definición 1.6** El **radio espectral**  $r_\sigma(T)$  de un operador acotado  $T$  definido en un espacio de Banach  $\mathcal{B}$  es el radio

$$r_\sigma(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$$

---

*del disco cerrado centrado en el origen más pequeño que contiene a  $\sigma(T)$ .*

Los resultados clásicos en teoría espectral muestran que tanto el conjunto resolvente como el espectro, son subconjuntos no vacíos de  $\mathbb{C}$  y que el espectro es cerrado. Además se tiene que  $r_\sigma(T) \leq \|T\|$ .

## CAPÍTULO 2

---

### Teorema espectral para operadores compactos autoadjuntos

---

A lo largo de este capítulo, asumiremos que los operadores mencionados son compactos y autoadjuntos, a menos que se especifique lo contrario.

#### 2.1 Propiedades espectrales de un operador compacto autoadjunto

En esta sección, enlistaremos las propiedades fundamentales del espectro de un operador compacto. Las pruebas de los resultados pueden verse en [5], pág. 301.

**Teorema 2.1** *Si  $T : X \rightarrow X$  es un operador compacto en un espacio normado  $X$  entonces cada punto distinto de cero es un valor propio del operador. Dicho conjunto es numerable (quizás finito o vacío) y el único punto de acumulación posible es  $\lambda = 0$ .*

Veamos ahora, algunas propiedades del espectro de un operador autoadjunto acotado. Varias de estas propiedades serán de importancia fundamental en el desarrollo de éste y el siguiente capítulo. Las demostraciones se encuentran en [1], pág 465.

**Proposición 2.1** Sea  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  un operador lineal autoadjunto acotado sobre un espacio de Hilbert complejo  $\mathcal{H}$ . Entonces: i) todos los valores propios de  $T$  (si existen) son reales; ii) los vectores propios correspondientes a valores propios distintos son ortogonales.

Tenemos incluso el siguiente teorema.

**Teorema 2.2** El espectro  $\sigma(T)$  de un operador lineal autoadjunto acotado  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  sobre un espacio de Hilbert complejo  $\mathcal{H}$  es real. Aún más,  $\sigma(T)$  está contenido en el intervalo cerrado  $[m, M]$  donde

$$m = \inf_{\|x\|=1} \langle Tx, x \rangle \quad M = \sup_{\|x\|=1} \langle Tx, x \rangle.$$

Los números  $m$  y  $M$  están relacionados a  $T$  como sigue:

**Teorema 2.3** Si  $T$  es un operador lineal acotado autoadjunto definido en un espacio de Hilbert complejo  $\mathcal{H}$ , entonces

$$\|T\| = \max\{|m|, |M|\} = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x \rangle|.$$

## 2.2 El Teorema Espectral

En esta sección demostraremos el teorema espectral para operadores lineales autoadjuntos compactos. Antes de enunciar el teorema y su respectiva demostración, consideremos el siguiente:

**Lema 2.1** Sea  $T$  un operador autoadjunto sobre  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ . Entonces existen un valor propio  $\lambda$  de  $T$  tal que  $|\lambda| = \|T\|$  y un vector propio  $x \in \mathcal{H}$  correspondiente a  $\lambda$  tal que  $\|x\| = 1$  y  $|\langle Tx, x \rangle| = \|T\|$ .

### Demostración.

Es claro que si  $T = 0$  el teorema es trivialmente cierto. Podemos suponer entonces que  $T \neq 0$ .

De acuerdo con los teoremas 2.2 y 2.3 existe una sucesión  $\{x_n\} \subset \mathcal{H}$  tal que  $\|x_n\| = 1$  y  $\langle Tx_n, x_n \rangle \rightarrow \lambda$ , donde  $|\lambda| = \|T\|$ . Luego,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|Tx_n - \lambda x_n\|^2 = \|Tx_n\|^2 - 2\lambda \langle Tx_n, x_n \rangle + \lambda^2 \|x_n\|^2 \\ &\leq \|T\|^2 - 2\lambda \langle Tx_n, x_n \rangle + \lambda^2 \end{aligned}$$

Como  $\langle Tx_n, x_n \rangle \rightarrow \lambda$ , de la expresión anterior se deduce que  $\|Tx_n - \lambda x_n\| \rightarrow 0$  de donde  $Tx_n - \lambda x_n \rightarrow 0$ . Dado que  $T$  es compacto, por la proposición 1.1, existe una subsucesión de  $\{Tx_n\}$ , que denotaremos por  $\{Ty_k\}$ , que es convergente, digamos a  $z \in \mathcal{H}$  y  $\{y_k\}$  es una subsucesión de  $\{x_n\}$ . Como

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} (Ty_k - \lambda y_k) = z - \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda y_k,$$

se sigue que  $y_k \rightarrow \frac{1}{\lambda}z = x$  y como  $\|y_k\| = 1$  entonces  $\|x\| = 1$ . Por hipótesis,  $T$  es compacto, y por tanto, continuo de modo que

$$\lambda x = z = \lim_{k \rightarrow \infty} Ty_k = Tx.$$

Finalmente, es claro que  $|\langle Tx, x \rangle| = |\lambda| \|x\|^2 = \|T\|$ , lo cual debíamos demostrar. ■

Recuerde que si  $T$  es un operador compacto autoadjunto, su espectro consta de un conjunto finito o a lo más numerable de números reales cuyo único punto de acumulación es  $\lambda = 0$ . El teorema espectral que presentaremos, considera solamente este caso, pues si el conjunto de valores propios es finito, el teorema correspondiente se deduce fácilmente del teorema más general.

Suponiendo entonces que  $T$  tiene una cantidad numerable de valores propios, se sigue que  $T$  tiene un número infinito de subespacios propios. Como  $T$  es autoadjunto, los espacios propios  $M_j$  asociados a los valores propios del operador  $\lambda_j$  son ortogonales entre sí y tienen dimensión finita. A continuación, deseamos darle un sentido a la expresión  $\sum_{j=1}^{\infty} \oplus M_j$ . Para ello, considere la siguiente:

**Definición 2.1** *Suponga que  $\{x_\alpha\}$ , donde  $\alpha \in \Delta$ ,  $\Delta$  conjunto de índices arbitrario, es una colección de elementos de un espacio normado  $X$ . Entonces  $\{x_\alpha\}$  es sumable (o conmutativamente convergente) a  $x \in X$ , escrito como  $\sum_{\alpha \in \Delta} x_\alpha = x$  si para cada  $\epsilon > 0$  existe algún conjunto finito de índices  $N_\epsilon \subset \Delta$ , tal que para todo conjunto finito de índices  $J \supset N_\epsilon$ ,*

$$\left\| \sum_{\alpha \in J} x_\alpha - x \right\| < \epsilon.$$

**Observación:** Note que si en la definición anterior se tiene que  $\{x_\alpha\}$  es una colección de números reales no negativos, entonces, podemos definir a  $x$  como  $x = \sup\{\sum_{\alpha \in J} x_\alpha : J \subset \Delta \text{ es finito}\}$ .

**Lema 2.2** Sea  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert complejo y sea  $\{M_\alpha : \alpha \in \Delta\}$  una colección de subespacios cerrados de  $\mathcal{H}$ . Sea  $M = \sum_\alpha M_\alpha$  el conjunto de todas las sumas conmutativamente convergentes  $\sum_\alpha x_\alpha$  con  $x_\alpha \in M_\alpha$ . Sea  $\text{lin}(\cup M_\alpha)$  el espacio lineal generado por  $\cup M_\alpha$ . Entonces

$$\overline{\text{lin}(\cup_\alpha M_\alpha)} = \overline{M}.$$

**Demostración.**

Es claro que  $M$  es un subespacio vectorial conteniendo a  $\cup_\alpha M_\alpha$  y por tanto

$$\overline{M} \supset \overline{\text{lin}(\cup_\alpha M_\alpha)}.$$

Recíprocamente, sea

$$S = \left\{ \sum_\alpha x_\alpha : x_\alpha \in M_\alpha, \text{ y para casi toda } \alpha, x_\alpha = 0 \right\}.$$

Tenemos entonces que  $S \subset \text{lin}(\cup_\alpha M_\alpha)$  lo cual implica que

$$\overline{S} \subset \overline{\text{lin}(\cup_\alpha M_\alpha)}.$$

Ya que los términos en  $M$  son límite de miembros de  $S$ , se sigue que  $M \subset \overline{S}$  y por tanto  $\overline{M} \subset \overline{S}$  lo cual prueba el lema. ■

Una vez que tenemos el lema anterior, probaremos un resultado muy similar, añadiendo la hipótesis de que los subespacios cerrados  $M_\alpha$  son ortogonales entre sí. En ese caso,  $\sum_\alpha M_\alpha$  se denotará por  $\sum_\alpha \oplus M_\alpha$ . Previamente, consideremos el siguiente:

**Lema 2.3** Sean  $\mathcal{B}$  un espacio de Banach y  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \Delta} \subset \mathcal{B}$ . Entonces  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$  es sumable si y sólo si para todo  $\epsilon > 0$  existe un conjunto finito de índices  $K \subset \Delta$  tal que para cualquier subconjunto finito de índices  $J$ , satisfaciendo  $J \cap K = \emptyset$  se tiene  $\|\sum_{\alpha \in J} x_\alpha\| < \epsilon$ .

**Demostración.**

Suponga que  $\{x_\alpha\}$  es sumable a  $x$ . Sea  $\epsilon > 0$ . Por definición, existe  $K \subset \Delta$  finito tal que para todo  $I \supset K$  se tiene  $\|\sum_{\alpha \in I} x_\alpha - x\| < \epsilon$ . Sea  $J \subset \Delta$  finito y tal que  $J \cap K = \emptyset$ . Entonces

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{\alpha \in J} x_\alpha \right\| &= \left\| \sum_{\alpha \in J \cup K} x_\alpha - \sum_{\alpha \in K} x_\alpha \right\| \\ &\leq \left\| \sum_{\alpha \in J \cup K} x_\alpha - x \right\| + \left\| \sum_{\alpha \in K} x_\alpha - x \right\| < 2\epsilon. \end{aligned}$$

Recíprocamente, por hipótesis, para cada  $n \in \mathbb{N}$  existe  $J_n$  subconjunto finito de índices tal que si  $J$  es cualquier subconjunto de índices, con  $J \cap J_n = \emptyset$ , entonces  $\|\sum_{\alpha \in J} x_\alpha\| < 1/n$ . Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que la sucesión  $\{J_n\}$  es creciente, de lo contrario, para cada  $k \in \mathbb{N}$  sea  $I_k = J_1 \cup J_2 \cup \dots \cup J_k$ . Entonces para  $n < m$  se tiene que

$$\left\| \sum_{\alpha \in J_m} x_\alpha - \sum_{\alpha \in J_n} x_\alpha \right\| = \left\| \sum_{\alpha \in J_m \setminus J_n} x_\alpha \right\| < \frac{1}{n},$$

porque  $(J_m \setminus J_n) \cap J_n = \emptyset$ . De este modo, tenemos que la sucesión  $\{\sum_{\alpha \in J_n} x_\alpha\}$  es de Cauchy. Por la completitud de  $\mathcal{B}$ , existe  $x \in \mathcal{B}$  tal que  $\|\sum_{\alpha \in J_n} x_\alpha - x\| \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Sea  $\epsilon > 0$  y  $N_1 \in \mathbb{N}$  tal que  $1/N_1 < \epsilon/2$  y  $N_2 \in \mathbb{N}$  tal que para  $n \geq N_2$ ,  $\|\sum_{\alpha \in J_n} x_\alpha - x\| < \epsilon/2$ . Luego, si  $J$  es cualquier subconjunto finito de índices con  $J \supset J_N$  donde  $N = \max\{N_1, N_2\}$  entonces

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{\alpha \in J} x_\alpha - x \right\| &= \left\| \sum_{\alpha \in J \setminus J_N} x_\alpha - x + \sum_{\alpha \in J_N} x_\alpha \right\| \\ &\leq \left\| \sum_{\alpha \in J \setminus J_N} x_\alpha - x \right\| + \left\| \sum_{\alpha \in J_N} x_\alpha \right\| \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

Así,  $\{x_\alpha\}$  es sumable. ■

**Teorema 2.4** Con la notación del lema 2.2, si  $\{M_\alpha\}$  es una familia de subespacios cerrados ortogonales entre sí entonces

$$\overline{\text{lin}(\cup_\alpha M_\alpha)} = \sum_\alpha \oplus M_\alpha.$$

Es decir,  $x \in \overline{\text{lin}(\cup_{\alpha} M_{\alpha})}$  se puede escribir de manera única como  $x = \sum_{\alpha} x_{\alpha}$ , con  $x_{\alpha} \in M_{\alpha}$ .

**Demostración.**

En vista del lema 2.2

$$\overline{\text{lin}(\cup_{\alpha} M_{\alpha})} = \overline{\sum_{\alpha} \oplus M_{\alpha}} \supset \sum_{\alpha} \oplus M_{\alpha}.$$

Ahora, sea  $x \in \overline{\text{lin}(\cup_{\alpha} M_{\alpha})}$ . Como cada  $M_{\alpha}$  es cerrado,  $\mathcal{H} = M_{\alpha} \oplus M_{\alpha}^{\perp}$  y por tanto  $x = x_{\alpha} + y_{\alpha}$  donde  $x_{\alpha} \in M_{\alpha}$  y  $y_{\alpha} \in M_{\alpha}^{\perp}$  para cada  $\alpha \in \Delta$ . Así, tenemos una infinidad de formas de escribir  $x$ . Ahora, consideremos aquéllos índices  $\Delta'$  tales que  $x_{\alpha} \neq 0$ . Tenemos entonces que

$$\left\langle x, \frac{x_{\alpha}}{\|x_{\alpha}\|} \right\rangle = \left\langle x_{\alpha} + y_{\alpha}, \frac{x_{\alpha}}{\|x_{\alpha}\|} \right\rangle = \frac{\langle x_{\alpha}, x_{\alpha} \rangle}{\|x_{\alpha}\|} = \|x_{\alpha}\|.$$

Como el conjunto  $\{x_{\alpha}/\|x_{\alpha}\| : x_{\alpha} \neq 0\}$  es ortonormal, la desigualdad de Bessel implica

$$\sum_{\alpha} \|x_{\alpha}\|^2 = \sum_{\alpha} |\langle x, x_{\alpha}/\|x_{\alpha}\| \rangle|^2 \leq \|x\|^2,$$

y consecuentemente

$$\sum_{\alpha} \|x_{\alpha}\|^2 < \infty.$$

De acuerdo con el lema 2.3, dado  $\epsilon > 0$  existe un conjunto finito  $K \subset \Delta$  tal que para todo conjunto finito  $J \subset \Delta$ ,  $J \cap K = \emptyset$  se tiene  $\sum_{\alpha \in J} \|x_{\alpha}\|^2 < \epsilon$ . Por el teorema de Pitágoras resulta que

$$\left\| \sum_{\alpha \in J} x_{\alpha} \right\|^2 = \sum_{\alpha \in J} \|x_{\alpha}\|^2 < \epsilon$$

lo cual implica, según el lema 2.3 que  $\sum_{\alpha \in \Delta'} x_{\alpha} = \sum_{\alpha \in \Delta} x_{\alpha}$  converge a algún  $w \in \sum_{\alpha} \oplus M_{\alpha} \subset \overline{\text{lin}(\cup_{\alpha} M_{\alpha})}$ , y ya que  $x \in \overline{\text{lin}(\cup_{\alpha} M_{\alpha})}$  se tiene que

$$x - w \in \overline{\text{lin}(\cup_{\alpha} M_{\alpha})}.$$

Sea  $y \in M_{\beta}$ , donde  $\beta \in \Delta$  es arbitrario. Entonces

$$\begin{aligned}
\langle x - w, y \rangle &= \left\langle x_\beta + y_\beta - \sum_{\alpha \in \Delta} x_\alpha, y \right\rangle = \langle x_\beta, y \rangle - \left\langle \sum_{\alpha \in \Delta} x_\alpha, y \right\rangle \\
&= \langle x_\beta, y \rangle - \sum_{\alpha \in \Delta} \langle x_\alpha, y \rangle = \langle x_\beta, y \rangle - \langle x_\beta, y \rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

De ahí que  $x - w \in M_\alpha^\perp$  para toda  $\alpha \in \Delta$ , es decir,  $x - w \in \bigcap_{\alpha \in \Delta} (M_\alpha)^\perp = \{0\}$ . Resulta que  $x - w = 0$ , esto es,

$$x = w = \sum_{\alpha \in \Delta'} x_\alpha \in \sum_{\alpha} \oplus M_\alpha$$

y por lo tanto,  $\overline{\text{lin}(\cup_{\alpha} M_\alpha)} \subset \sum_{\alpha} \oplus M_\alpha$ . ■

Con los resultados dados anteriormente, enunciemos y demostremos el teorema espectral para operadores compactos autoadjuntos. En este caso, el conjunto  $\Delta$  de los resultados anteriores se puede suponer igual a  $\mathbb{N}$ .

**Teorema 2.5** *Sea  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  un operador compacto autoadjunto en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Si  $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_j| \geq \dots$  es una sucesión infinita de valores propios y para cada  $j \in \mathbb{N}$ ,  $M_j$  denota el espacio propio de  $\lambda_j$  y  $P_j : \mathcal{H} \rightarrow M_j$  es la proyección ortogonal, entonces*

i)

$$T = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j P_j,$$

donde la convergencia es en el sentido de la norma de operadores. Además

ii)

$$\left\| T - \sum_{j=1}^n \lambda_j P_j \right\| = |\lambda_{n+1}|$$

para toda  $n \in \mathbb{N}$ . Las proyecciones son de rango finito y ortogonales entre sí.

**Demostración.**

Sean  $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n| \geq \dots$  los valores propios de  $T$ . Considere la

variedad lineal  $M = \sum_{j=1}^{\infty} \oplus M_j$  y sea  $M_0 = M^\perp$  el cual existe porque  $\mathcal{H}$  es un espacio de Hilbert. Afirmamos que  $T|_{M_0} = 0$ . En efecto, como  $T|_{M_0}$  es autoadjunto compacto, el lema 2.1 implica que existe  $\lambda$  valor propio de  $T|_{M_0}$  tal que  $|\lambda| = \|T|_{M_0}\|$ . Ahora bien, los vectores propios correspondientes a dicho valor propio  $\lambda$  están en  $M_0$ , y ya que  $\lambda$  es valor propio de  $T|_{M_0}$ , también es un valor propio de  $T$  y por lo tanto, los vectores propios correspondientes están en algún  $M_n \subset \sum_{j=1}^{\infty} \oplus M_j$  lo cual es imposible pues  $M_0 \cap M = \{0\}$ . Se sigue que  $T|_{M_0}$  no tiene valores propios distintos de cero, y por lo tanto  $0 = \lambda = \|T|_{M_0}\|$ , es decir,  $T|_{M_0} = 0$ .

Luego, sea  $P_0$  la proyección de  $\mathcal{H}$  sobre  $M_0$ . Entonces cualquier  $x \in \mathcal{H}$  se escribe como

$$x = P_0x + y \quad y \in \sum_{j=1}^{\infty} \oplus M_j.$$

Si  $P_j$  denota la proyección de  $\mathcal{H}$  sobre  $M_j$  se sigue que  $Ix = \sum_{j=1}^{\infty} P_jx$  y por la linealidad de  $T$  obtenemos  $Tx = \sum_{j=0}^{\infty} T(P_jx) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j(P_jx)$  para toda  $x \in \mathcal{H}$ . Luego, para cualquier  $x \in \mathcal{H}$

$$\left( T - \sum_{j=1}^n \lambda_j P_j \right) x = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j(P_jx) - \sum_{j=1}^n \lambda_j(P_jx) = \sum_{j=n+1}^{\infty} \lambda_j(P_jx).$$

Usando la ortogonalidad de los subespacios  $M_j$  tenemos

$$\left\| \left( T - \sum_{j=1}^n \lambda_j P_j \right) x \right\|^2 = \sum_{j=n+1}^{\infty} \lambda_j^2 \|P_jx\|^2 \leq \lambda_{n+1}^2 \sum_{j=n+1}^{\infty} \|P_jx\|^2 \leq \lambda_{n+1} \|x\|^2$$

Consecuentemente,

$$\left\| T - \sum_{j=1}^n \lambda_j P_j \right\| \leq |\lambda_{n+1}|.$$

Dado que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$  obtenemos  $i$ ).

Finalmente, si se toma  $x \in M_{n+1}$  entonces  $\sum_{j=n+1}^{\infty} P_jx = \lambda_{n+1}x$  y por lo tanto,

$$\left\| T - \sum_{j=1}^n \lambda_j P_j \right\| = |\lambda_{n+1}|. \blacksquare$$

### 2.3 Ejemplos del teorema espectral para un operador compacto autoadjunto

**Ejemplo 2.1** Considere al operador lineal del ejemplo 1.1. Encontremos ahora la descomposición espectral de  $T$ . Tenemos en primer lugar que los valores propios del operador son  $\{\lambda_n = \frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\}$  con subespacios propios  $M_n = \text{lin}((0, 0, \dots, 1, 0, 0, \dots))$  y proyecciones  $P_n : l^2 \rightarrow M_n$  definida como  $P_n(\{x_k\}) = \{0, 0, \dots, x_n, 0, 0, \dots\}$ .

Luego, de acuerdo con el teorema espectral  $T$  se descompone como:

$$T = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k P_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} P_k,$$

donde la serie anterior converge en la norma del espacio de operadores.

**Ejemplo 2.2** Recuerde el operador autoadjunto compacto  $p(T)$  del ejemplo 1.2. No es difícil ver que el conjunto de valores propios de  $T^n$  corresponde a  $\{\frac{1}{k^n} | k \in \mathbb{N}\}$ . Luego, los subespacios propios invariantes son  $M_k = \text{lin}((0, 0, \dots, 1, 0, 0, \dots))$ , con proyecciones  $P_k : l^2 \rightarrow M_k$  definidas de manera obvia. Así, el teorema espectral para este operador compacto y autoadjunto corresponde a la suma infinita:

$$T^n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n} P_k$$

donde la convergencia es con respecto a la norma en el espacio de operadores.

Extendiendo el razonamiento anterior para toda  $n \in \mathbb{N}$ , observamos que un cálculo directo muestra que el conjunto de valores propios de  $p(T)$  corresponde a  $\{\lambda_k = \frac{a_n}{k^n} + \dots + \frac{a_1}{k} | k \in \mathbb{N}\}$  donde  $n$  corresponde al grado del polinomio  $p(x)$ , y los espacios propios son  $M_k = \text{lin}((0, 0, \dots, 1, 0, 0, \dots))$  con proyecciones  $P_k : l^2 \rightarrow M_k$  definida como  $P_k(\{x_n\}) = \{0, 0, \dots, x_k, 0, 0, \dots\}$ . Por lo tanto, la representación espectral para el operador compacto autoadjunto  $p(T)$  es

$$p(T) = \sum_{k=1}^{\infty} p\left(\frac{1}{k}\right) P_k.$$

**Ejemplo 2.3** Considere al operador autoadjunto compacto del ejemplo 1.3. Es decir, si  $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}$  es una sucesión convergiendo a 0 y  $\{x_k\}$  es un conjunto ortonormal de  $\mathcal{H}$  entonces  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  se define como

$$Tx = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle x, x_k \rangle x_k$$

Debido a que el conjunto  $\{x_k\}$  es ortogonal, es fácil ver que cada  $\lambda_k$  es un valor propio del operador con vector propio  $x_k$ . Veamos que  $T$  no tiene otros valores propios. Suponga que  $\alpha \neq 0$  es un valor propio del operador  $T$  con vector propio  $y$ . Entonces  $Ty = \alpha y = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle x_k, y \rangle x_k$ . Sea  $V = \overline{\text{lin}(\{x_k\})}$ . Se sigue que  $y \in V$ . Como  $\{x_k\}$  es una base completa para  $V$  tenemos  $y = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x_n, y \rangle x_n$  y por lo tanto,  $\alpha y = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha \langle x_n, y \rangle x_n$ . Como  $\alpha y = Ty$  se deduce que  $\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k - \alpha) \langle x_k, y \rangle x_k = 0$ . Dado que  $0 \in V$ , se escribe, respecto a la base  $\{x_k\}$  de  $V$  como  $0 = \sum 0x_k$ , se tiene que  $(\lambda_k - \alpha) \langle x_k, y \rangle = 0$  para toda  $k$  y como  $\{\lambda_k\}$  es una sucesión de valores reales distintos entre sí tenemos que  $\langle x_k, y \rangle = 0$  excepto para algún  $k$ , pues de otro modo,  $y$  sería igual a cero, lo cual es imposible. Luego,  $\alpha = \lambda_k$  para algún  $k$ .

Finalmente, es claro que la proyección  $P_k : \mathcal{H} \rightarrow \text{lin}(x_k)$  corresponde a  $P_k x = \langle x_k, x \rangle x_k$  de donde  $T$  tiene representación espectral

$$Tx = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle x, x_k \rangle x_k.$$

## CAPÍTULO 3

---

### Teorema espectral para operadores autoadjuntos acotados

---

En este capítulo trataremos únicamente con operadores autoadjuntos acotados definidos en espacios de Hilbert. En el capítulo anterior, las proyecciones desempeñaron un papel muy importante para la representación de un operador lineal compacto autoadjunto. Ahora, veremos que a cada operador autoadjunto continuo, le corresponde una familia de proyecciones, llamada familia espectral, que servirá para la representación integral del operador.

#### 3.1 Familia Espectral

Si  $T$  es un operador autoadjunto, entonces  $T^2$  es positivo. Dado un operador autoadjunto positivo acotado, existe  $S$  operador autoadjunto positivo acotado (único) tal que  $S^2 = T$ . Decimos que  $S$  es la raíz cuadrada positiva de  $T$  (véase [1] pág. 476). Considere los siguientes resultados que nos serán útiles para la teoría que se presentará a lo largo de este capítulo.

**Lema 3.1** *Si dos operadores lineales autoadjuntos acotados  $S$  y  $T$  sobre un espacio de Hilbert conmutan y son positivos, entonces su producto  $ST$  es positivo.*

Para los detalles de la prueba, véase [1] pág. 470.

**Definición 3.1** Sea  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  un operador autoadjunto acotado en un espacio de Hilbert complejo  $\mathcal{H}$ . Considere al operador autoadjunto acotado  $T^2$  y sea  $B = (T^2)^{\frac{1}{2}}$  su raíz cuadrada positiva. Sean

$$\begin{aligned} T^+ &= \frac{1}{2}(B + T) \\ T^- &= \frac{1}{2}(B - T) \end{aligned}$$

Entonces  $T^+$  y  $T^-$  son llamadas las partes positiva y negativa de  $T$  respectivamente. Finalmente, denotamos por  $E : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{N}(T^+)$  la proyección de  $\mathcal{H}$  sobre el espacio nulo de  $T^+$ .

Note que  $T = T^+ - T^-$  y  $B = T^+ + T^-$ . Recuerde que para  $\lambda \in \mathbb{R}$  denotamos  $T_\lambda = T - \lambda I$ , y análogamente, se definen los operadores  $B_\lambda, T_\lambda^+, T_\lambda^-, E_\lambda$ . Estos operadores tienen propiedades interesantes entre sí, como lo muestra el siguiente lema (para la prueba, véase [1] pág. 498).

**Lema 3.2** Sea  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  un operador lineal autoadjunto en un espacio de Hilbert complejo  $\mathcal{H}$ . Sea  $\lambda$  un número real arbitrario. Entonces

- i)  $B_\lambda, T_\lambda^+, T_\lambda^-$  son operadores acotados autoadjuntos.
- ii)  $B_\lambda, T_\lambda^+$  y  $T_\lambda^-$  conmutan con cualquier operador lineal acotado que conmute con  $T_\lambda$ ; en particular,  $B_\lambda T_\lambda = T_\lambda B_\lambda$ ,  $T_\lambda^+ T_\lambda = T_\lambda T_\lambda^+$ ,  $T_\lambda^- T_\lambda = T_\lambda T_\lambda^-$ ,  $T_\lambda^+ T_\lambda^- = T_\lambda^- T_\lambda^+$ .
- iii)  $E_\lambda$  conmuta con cualquier operador lineal acotado que conmute con  $T_\lambda$ ; en particular,  $E_\lambda T_\lambda = T_\lambda E_\lambda$ ,  $E_\lambda B_\lambda = B_\lambda E_\lambda$ .  
Además
- iv)  $T_\lambda^+ T_\lambda^- = 0 = T_\lambda^- T_\lambda^+$
- v)  $T_\lambda^+ E_\lambda = 0 = E_\lambda T_\lambda^+$ ;  $T_\lambda^- E_\lambda = E_\lambda T_\lambda^- = T_\lambda^-$
- vi)  $T_\lambda E_\lambda = -T_\lambda^-$ ;  $T_\lambda(I - E_\lambda) = T_\lambda^+$
- vii)  $T_\lambda^+ \geq 0$ ;  $T_\lambda^- \geq 0$

Finalmente, para cualesquiera números reales  $\kappa, \lambda, \mu, \nu, \tau$  los siguientes operadores conmutan:  $T_\kappa, B_\lambda, T_\mu^+, T_\nu^+, E_\tau$ .

Introducimos ahora la definición de familia espectral y con el lema anterior en mente, demostraremos el teorema 3.1.

**Definición 3.2** Una familia espectral (o resolución de la identidad) es un conjunto de proyecciones  $\mathcal{E} = \{E_\lambda\}$  donde el parámetro  $\lambda$  es un número real, que satisface las siguientes condiciones:

- i) Si  $\lambda < \mu$  entonces  $E_\lambda \leq E_\mu$
- ii) Si  $\{\mu_n\}$  es una sucesión convergiendo por la derecha a  $\mu$ , lo cual denotaremos  $\mu_{n+0} \rightarrow \mu$  entonces  $E_{\mu_{n+0}} \rightarrow E_\mu$  fuertemente.

Si además existen  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tales que

- iii)  $\mu < \alpha$  implica  $E_\mu = 0$  y
- iv)  $\mu \geq \beta$  implica  $E_\mu = I$

diremos entonces que la familia está acotada inferior y superiormente por  $\alpha$  y  $\beta$  respectivamente. Los números  $\alpha, \beta$  son conocidos como cotas espectrales.

**Teorema 3.1** Sea  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  un operador lineal autoadjunto sobre un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  complejo. Sea  $E_\lambda$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  la proyección de  $\mathcal{H}$  sobre el espacio nulo  $\mathcal{N}(T_\lambda^+)$  de la parte positiva  $T_\lambda^+$  de  $T_\lambda$ . Entonces  $\mathcal{E} = \{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$  es una familia espectral sobre el intervalo  $[m, M] \subset \mathbb{R}$  donde  $m$  y  $M$  son:

$$m = \inf_{\|x\|=1} |\langle Tx, x \rangle| \quad M = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x \rangle| \quad (3.1)$$

#### Demostración.

Probaremos que  $\mathcal{E} = \{E_\lambda\}$  definida por  $E_\lambda : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{N}(T_\lambda^+)$  la proyección de  $\mathcal{H}$  sobre el espacio nulo de  $T_\lambda^+$  satisface las 4 propiedades de la definición 3.2.

Sea  $\lambda < \mu$ . Entonces  $T_\lambda = T_\lambda^+ - T_\lambda^- \leq T_\lambda^+$  porque  $-T_\lambda^- \leq 0$  por el lema 3.2vii), y entonces  $T_\lambda^+ - T_\mu \geq T_\lambda - T_\mu = (\mu - \lambda)I \geq 0$ . Luego,  $T_\lambda^+ - T_\mu$  es autoadjunto y conmuta con  $T_\mu^+$  por el lema 3.2 y  $T_\mu^+ \geq 0$ . El lema 3.1 aplicado a  $T_\mu^+$  y  $T_\lambda^+ - T_\mu$  implica que

$$T_\mu^+(T_\lambda^+ - T_\mu) = T_\mu^+(T_\lambda^+ - T_\mu^+ + T_\mu^-) \geq 0.$$

Usando  $T_\mu^+T_\mu^- = 0$  (lema 3.2iv)) en la igualdad anterior, tenemos que  $T_\mu^+T_\lambda^+ \geq (T_\mu^+)^2$ , es decir, para todo  $x \in \mathcal{H}$

$$\langle T_\mu^+T_\lambda^+x, x \rangle \geq \langle (T_\mu^+)^2x, x \rangle = \|T_\mu^+x\|^2 \geq 0$$

Así que, de acuerdo a la desigualdad anterior, si  $T_\lambda^+ x = 0$  entonces  $T_\mu^+ x = 0$ , es decir,  $\mathcal{N}(T_\lambda^+) \subset \mathcal{N}(T_\mu^+)$ , y en virtud del teorema 1.2 esto equivale a tener  $E_\lambda \leq E_\mu$  para  $\lambda < \mu$ .

Por contradicción, asuma que  $\lambda < m$  y  $E_\lambda \neq 0$ . Entonces  $E_\lambda z \neq 0$  para algún  $z \in \mathcal{H}$ . Sea  $x = E_\lambda z$ . Se sigue que  $E_\lambda x = E_\lambda^2 z = E_\lambda z = x$ . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $\|x\| = 1$ . Resulta que

$$\langle T_\lambda E_\lambda x, x \rangle = \langle T_\lambda x, x \rangle = \langle Tx, x \rangle - \lambda \geq \inf_{\|x\|=1} \langle Tx, x \rangle - \lambda = m - \lambda > 0.$$

Por el lema 3.2vi) y vii),  $T_\lambda E_\lambda = -T_\lambda^- \leq 0$ , por lo tanto,  $E_\lambda \neq 0$  es imposible.

Análogamente, suponga que  $\lambda > M$  pero  $E_\lambda \neq I$ . Entonces, existe  $x \in \mathcal{H}$ ,  $\|x\| = 1$ , tal que  $(I - E_\lambda)x = x$ . Por tanto

$$\langle T_\lambda(I - E_\lambda)x, x \rangle = \langle T_\lambda x, x \rangle = \langle Tx, x \rangle - \lambda \leq \sup_{\|x\|=1} \langle Tx, x \rangle - \lambda = M - \lambda < 0.$$

Esto contradice la identidad  $T_\lambda(I - E_\lambda) = T_\lambda^+ \geq 0$  obtenida del lema 3.2 vi) y vii).

Sólo resta probar que la familia dada, es continua por la derecha, lo cual probará también que  $E_M = I$ . Considere el intervalo  $\Delta = (\lambda, \mu]$  y al operador  $E(\Delta) = E_\mu - E_\lambda$ . Como  $E_\lambda \leq E_\mu$  el teorema 1.2 implica que  $E_\lambda(\mathcal{H}) \subset E_\mu(\mathcal{H})$  y la proposición 1.7 que  $E(\Delta)$  es una proyección. Nuevamente, por el teorema 1.2 v) se sigue que

$$\begin{aligned} E_\mu E(\Delta) &= E_\mu^2 - E_\mu E_\lambda = E_\mu - E_\lambda = E(\Delta) \\ (I - E_\lambda)E(\Delta) &= E(\Delta) - E_\lambda(E_\mu - E_\lambda) = E(\Delta). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Dado que  $E(\Delta)$ ,  $T_\mu^-$  y  $T_\lambda^+$  son positivas y conmutan entre sí, (véase lema 3.2) los productos  $T_\mu^- E(\Delta)$  y  $T_\lambda^+ E(\Delta)$  son positivos por el lema 3.1. Luego, la ecuación 3.2 y el lema 3.2vi) implican

$$\begin{aligned} T_\mu E(\Delta) &= T_\mu(E_\mu E(\Delta)) = -T_\mu^- E(\Delta) \leq 0 \implies (T - \mu I)E(\Delta) \leq 0 \\ T_\lambda E(\Delta) &= T_\lambda[(I - E_\lambda)E(\Delta)] = T_\lambda^+ E(\Delta) \geq 0 \implies (T - \lambda I)E(\Delta) \geq 0 \end{aligned}$$

es decir,  $TE(\Delta) \leq \mu E(\Delta)$  y  $TE(\Delta) \geq \lambda E(\Delta)$ , esto es,

$$\lambda E(\Delta) \leq TE(\Delta) \leq \mu E(\Delta). \quad (3.3)$$

Fijemos ahora  $\lambda$  en la ecuación anterior y sea  $\{\mu_n\}$  una sucesión decreciente convergiendo por la derecha a  $\lambda$ . Obtenemos entonces una sucesión decreciente de operadores  $E(\Delta_n) = E_{\mu_n} - E_\lambda$  acotada inferiormente por  $E_\lambda$ . En efecto, por la primera propiedad de  $\mathcal{E}$  resulta que  $E(\Delta_n) - E(\Delta_{n+1}) = (E_{\mu_n} - E_\lambda) - (E_{\mu_{n+1}} - E_\lambda) = E_{\mu_n} - E_{\mu_{n+1}} \geq 0$  de donde  $E(\Delta_n) \geq E(\Delta_{n+1})$ . Tenemos entonces una sucesión de operadores autoadjuntos acotados  $\{E(\Delta_n)\}$  conmutando entre sí y conmutando con  $E_\lambda$ . Por la proposición 1.5, se sigue que  $E(\Delta_n)$  converge fuertemente a digamos,  $P(\lambda)$ . Aquí,  $P(\lambda)$  es autoadjunto y acotado y ya que  $E(\Delta_n)$  es idempotente, también lo es  $P(\lambda)$ . Por lo tanto,  $P(\lambda)$  es una proyección. Además,  $\lambda P(\lambda) = TP(\lambda)$  por (3.3) (escribiendo  $\Delta_n$  en lugar de  $E(\Delta)$ ), esto es,  $T_\lambda P(\lambda) = 0$ . De este hecho y el lema 3.2vi) obtenemos

$$T_\lambda^+ P(\lambda) = [T_\lambda(I - E_\lambda)]P(\lambda) = (I - E_\lambda)T_\lambda P(\lambda) = 0.$$

Por lo tanto,  $T_\lambda^+ P(\lambda)x = 0$  para todo  $x \in \mathcal{H}$ . Esto muestra que  $P(\lambda)x \in \mathcal{N}(T_\lambda^+)$ . Por definición, se sigue entonces que  $E_\lambda P(\lambda)x = P(\lambda)x$ , para toda  $x \in \mathcal{H}$ , es decir,  $E_\lambda P(\lambda) = P(\lambda)$ . Por otra parte, tomando la misma sucesión  $\{\mu_n\}$  convergiendo a  $\lambda$ , de la segunda identidad en (3.2) reescribiendo  $E(\Delta_n)$  por  $E(\Delta)$  tenemos que al hacer tender  $\mu_n$  a  $\lambda$  obtenemos  $(I - E_\lambda)P(\lambda) = P(\lambda)$ . Por lo tanto  $P(\lambda) = P(\lambda) - E_\lambda P(\lambda) = 0$ . Se sigue entonces que  $E(\Delta_n) \rightarrow P(\lambda) = 0$  lo cual prueba que  $\mathcal{E}$  es continua por la derecha. ■

Hasta ahora, sabemos que asociado a cada operador lineal autoadjunto acotado  $T$ , existe  $\mathcal{E} = \{E_\lambda\}$  familia espectral del operador, acotada. Dicha familia da lugar a una representación integral, del tipo de sumas de Riemann-Stieltjes, convergiendo en la norma de operadores a  $T$ .

**Definición 3.3** Sea  $\mathcal{E} = \{E_\lambda\}$  una familia espectral con cotas ínfima y superior  $A, B$  respectivamente. Una función  $f : [A, B] \rightarrow \mathbb{R}$  es  $\mathcal{E}$ -integrable si dado  $\epsilon > 0$  existen  $T$  operador lineal acotado y  $\delta > 0$  tales que para toda  $P = \{A = t_0, t_1, \dots, t_n = B\}$  partición de  $[A, B]$  satisfaciendo  $\eta(P) = \max_{0 \leq j \leq n-1} |t_{j+1} - t_j| < \delta$  ( $\eta(P)$  la norma de la partición) implica que

$$\left\| T - \sum_{j=0}^{n-1} f(t_j^*) [E_{t_j} - E_{t_{j-1}}] \right\| < \epsilon$$

donde  $t_j^* \in [t_{j-1}, t_j]$  es arbitrario. La convergencia anterior se denota como

$$T = \int_A^B f(\lambda) dE_\lambda.$$

Para dar la representación espectral de  $T$  será necesario considerar los siguientes resultados.

**Lema 3.3** *Si  $T$  es un operador lineal acotado autoadjunto definido en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  tal que  $T \geq I$  entonces  $T^{-1}$  existe y satisface  $\|T^{-1}\| \leq 1$ .*

**Demostración.**

Sea  $x \in \mathcal{H}$ . Usando la desigualdad de Schwarz y la hipótesis tenemos que

$$\|Tx\| \|x\| \geq \langle Tx, x \rangle \geq \langle x, x \rangle = \|x\|^2 \quad (3.4)$$

Así,  $Tx = 0$  implica  $x = 0$ , de donde  $T$  es inyectiva. Además,  $T(\mathcal{H})$  es denso en  $\mathcal{H}$ . En efecto, si  $y \in (T(\mathcal{H}))^\perp$ , para toda  $x \in \mathcal{H}$  tenemos  $0 = \langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$ . Por lo tanto,  $Ty = 0$  y entonces  $y = 0$ . Ahora, sea  $y \in \mathcal{H}$  y  $\{Tx_n\} \subset \mathcal{H}$  una sucesión convergiendo a  $y$ . Por la desigualdad anterior tenemos que

$$\|Tx_n - Tx_m\| = \|T(x_n - x_m)\| \geq \|x_n - x_m\|$$

de donde  $\{x_n\}$  es una sucesión de Cauchy en  $\mathcal{H}$ . Sea  $x \in \mathcal{H}$  su límite. Como  $T$  es un operador continuo tenemos que  $Tx_n \rightarrow Tx$  y ya que  $Tx_n \rightarrow y$  se sigue que  $Tx = y$ . Por lo tanto,  $T$  es una biyección y por tanto  $T^{-1}$  existe. Luego, la desigualdad 3.4 con  $y = Tx$  implica que  $\|T^{-1}\| \leq 1$ . ■

**Lema 3.4** *Si  $T$  es un operador lineal autoadjunto definido en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  y es positivo entonces el espectro de  $T$  está contenido en  $[0, \infty)$ .*

**Demostración.**

Sea  $\lambda > 0$ . De acuerdo con el lema anterior, para cualquier  $S$  operador lineal definido en  $\mathcal{H}$  satisfaciendo  $S \geq \lambda I$  se tiene que  $S^{-1}$  existe. Sea  $S = T + \lambda I$ . Como  $T$  es positivo entonces  $T + \lambda I \geq \lambda I$  y por la observación anterior  $(T + \lambda I)^{-1}$  existe, lo cual implica que  $-\lambda \in \rho(T)$  para todo  $\lambda > 0$ , es decir,  $(-\infty, 0) \subset \rho(T)$ . En consecuencia,  $\sigma(T) \subset [0, \infty)$ . ■

Con el lema anterior en mente, demostraremos el siguiente teorema que será de utilidad para el teorema espectral de un operador lineal acotado autoadjunto.

**Teorema 3.2** *Sea  $T$  un operador lineal autoadjunto definido en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Entonces  $\|T\| \leq 1$  si y sólo si  $-I \leq T \leq I$ .*

**Demostración.**

Suponga que  $\|T\| \leq 1$  y sea  $x \in \mathcal{H}$ . Entonces

$$\begin{aligned} \langle (I - T)x, x \rangle &= \langle x, x \rangle - \langle Tx, x \rangle \geq \|x\|^2 - \|Tx\| \|x\| \\ &\geq \|x\|^2 - \|T\| \|x\|^2 = \|x\|^2(1 - \|T\|) \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

de donde  $T \leq I$ . Análogamente se prueba que  $-I \leq T$ .

Recíprocamente, suponga que  $T \leq I$ . Entonces  $I - T \geq 0$  y por lema anterior el espectro de  $I - T$  está contenido en  $[0, \infty)$  y por lo tanto, el espectro de  $T$  está contenido en  $(-\infty, 1]$ . Un razonamiento similar para el caso  $-I \leq T$  nos lleva a que el espectro de  $T$  está contenido en  $[-1, \infty)$ . Resulta entonces que  $\sigma(T) \subset [-1, 1]$  y por lo tanto el radio espectral de  $T$ ,  $r_\sigma(T)$ , es tal que  $r_\sigma(T) \leq 1$ . Como  $T$  es autoadjunto,  $r_\sigma(T) = \|T\|$  y así obtenemos el resultado deseado. ■

De acuerdo con el teorema anterior, si  $\epsilon > 0$  y  $T$  es un operador lineal autoadjunto entonces las expresiones  $\|T\| \leq \epsilon$  y  $-\epsilon I \leq T \leq \epsilon I$  son equivalentes. Si  $S$  es un operador lineal acotado, es claro también que las expresiones  $\|T - S\| \leq \epsilon$  y  $-\epsilon I \leq T - S \leq \epsilon I$ , son equivalentes.

**Teorema 3.3 Representación espectral de  $T$ .** *Sea  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  un operador lineal autoadjunto en un espacio de Hilbert complejo  $\mathcal{H}$ . Sea  $\mathcal{E} = \{E_\lambda\}$  la familia espectral asociada a  $T$  dada en el teorema 3.1, con cotas espectrales  $m, M$ . Entonces:*

i)  $T$  tiene representación integral

$$T = \int_{m-0}^M \lambda dE_\lambda$$

ii) Para todo  $x, y \in \mathcal{H}$

$$\langle Tx, y \rangle = \int_{m-0}^M \lambda dg(\lambda), \quad g(\lambda) = \langle E_\lambda x, y \rangle$$

donde la anterior, es una integral en el sentido ordinario de Riemann-Stieltjes.

iii) Más generalmente, si  $p$  es un polinomio en  $\lambda$  con coeficientes reales, entonces el operador  $p(T)$  tiene la representación espectral

$$p(T) = \int_{m-0}^M p(\lambda) dE_\lambda \quad (3.5)$$

y para todo  $x, y \in \mathcal{H}$

$$\langle p(T)x, y \rangle = \int_{m-0}^M p(\lambda) dg(\lambda), \quad g(\lambda) = \langle E_\lambda x, y \rangle \quad (3.6)$$

**Observación.** Dado que la familia espectral  $\mathcal{E}$  es continua por la derecha, la notación  $m-0$  es usada porque debemos tener en cuenta una posible contribución en  $\lambda = m$ , la cual ocurre si  $E_m \neq 0$ .

#### Demostración.

Sea  $\{\mathcal{P}_n\}$  una sucesión de particiones del intervalo  $[a, b]$  donde  $a < m$  y  $b \geq M$ . Cada  $\mathcal{P}_n$  es una partición de  $(a, b]$  en intervalos de la forma  $\Delta_{nj} = (\lambda_{nj}, \mu_{nj}]$  con longitud  $l(\Delta_{nj}) = \mu_{nj} - \lambda_{nj}$ . Note además que  $\mu_{nj} = \lambda_{n,j+1}$  para  $j = 1, \dots, n-1$ . Asumimos ahora que la norma de cada partición es tal que  $\eta(\mathcal{P}_n) \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Usando la expresión (3.3) con  $\Delta = \Delta_{nj}$  tenemos que

$$\lambda_{nj}E(\Delta_{nj}) \leq TE(\Delta_{nj}) \leq \mu_{nj}E(\Delta_{nj}). \quad (3.7)$$

Ahora bien, por las propiedades de  $\mathcal{E}$  (definición 3.2) es claro que

$$T \sum_{j=1}^n E(\Delta_{nj}) = T \sum_{j=1}^n (E_{\mu_{nj}} - E_{\lambda_{nj}}) = T(E_{\mu_{nn}} - E_{\lambda_{n1}}) = T \quad (3.8)$$

La condición  $\eta(\mathcal{P}_n) \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$  implica que para cualquier  $\epsilon > 0$  existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que

$$\sum_{j=1}^n \mu_{nj}E(\Delta_{nj}) - \sum_{j=1}^n \lambda_{nj}E(\Delta_{nj}) = \sum_{j=1}^n (\mu_{nj} - \lambda_{nj})E(\Delta_{nj}) < \epsilon I. \quad (3.9)$$

Al hacer la suma sobre  $j$  desde 1 hasta  $n$  en la desigualdad (3.7), y considerando la igualdad (3.8), tenemos que

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{nj} E(\Delta_{nj}) \leq T \leq \sum_{j=1}^n \mu_{nj} E(\Delta_{nj})$$

de donde obtenemos

$$T - \sum_{j=1}^n \lambda_{nj} E(\Delta_{nj}) \leq \sum_{j=1}^n (\mu_{nj} - \lambda_{nj}) E(\Delta_{nj}).$$

Luego, por la ecuación (3.9), dado  $\epsilon > 0$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que para toda  $n > N$  y cualquier elección de  $\lambda_{nj}^* \in \Delta_{nj}$  tenemos

$$T - \sum_{j=1}^n \lambda_{nj}^* E(\Delta_{nj}) < \epsilon I.$$

Por las observaciones posteriores al teorema 3.2 se sigue que

$$\left\| T - \sum_{j=1}^n \lambda_{nj}^* E(\Delta_{nj}) \right\| < \epsilon, \quad (3.10)$$

lo cual prueba *i*). La elección de los puntos  $a, b$  no es trascendente (siempre que  $a < m$  y  $b \geq M$ ) porque  $E_\lambda$  es constante para  $\lambda < m$  y  $\lambda \geq M$ . Ahora, sea  $y \in \mathcal{H}$  fijo. Considere la función continua  $F_y : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$  definida como  $F_y(x) = \langle x, y \rangle$ . Sea  $T_n = \sum_{j=1}^n \lambda_{nj}^* E(\Delta_{nj})$ . Hemos demostrado entonces que  $\|T - T_n\| \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , lo cual implica que, en particular, para todo  $x \in \mathcal{H}$ , tenemos  $|F_y(Tx) - F_y(T_n x)| \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Es decir,

$$\begin{aligned} |\langle Tx, y \rangle - \langle T_n x, y \rangle| &= \left| \langle Tx, y \rangle - \left\langle \sum_{j=1}^n \lambda_{nj}^* E(\Delta_{nj}) x, y \right\rangle \right| \\ &= |\langle Tx, y \rangle - \sum_{j=1}^n \lambda_{nj}^* \langle E(\Delta_{nj}) x, y \rangle| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

cuando  $n \rightarrow \infty$ . En el contexto de la integral de Riemann-Stieltjes, esto quiere decir que la función  $f(\lambda) = \lambda$  es integrable con respecto a la función continua  $g(\lambda) = \langle E_\lambda x, y \rangle$  para  $x, y \in \mathcal{H}$  fijos, y de hecho, tiene el valor  $\langle Tx, y \rangle$ . Es decir,

$$\langle Tx, y \rangle = \int_{m-0}^M f(\lambda) dg(\lambda) = \int_{m-0}^M \lambda d(\langle E_\lambda x, y \rangle),$$

lo cual prueba *ii*).

Sea  $p(t) = t^r$ ,  $r \in \mathbb{N}$ . Con la notación anterior, sea  $\{\mathcal{P}_n\}$  una sucesión de particiones del intervalo  $[a, b]$ . Podemos asumir que para  $j < m$  se tiene  $\lambda_{nj} < \mu_{nj} \leq \lambda_{nm} < \mu_{nm}$ . Entonces

$$\begin{aligned} E(\Delta_{nj})E(\Delta_{nm}) &= (E_{\mu_{nj}} - E_{\lambda_{nj}})(E_{\mu_{nm}} - E_{\lambda_{nm}}) \\ &= E_{\mu_{nj}} - E_{\mu_{nj}} - E_{\lambda_{nj}} + E_{\lambda_{nj}} = 0, \end{aligned}$$

es decir,  $E(\Delta_{nj})E(\Delta_{nm}) = 0$  para  $j \neq m$  y dado que  $E(\Delta_{nj})$  es una proyección resulta que  $E(\Delta_{nj})^s = E(\Delta_{nj})$ . Por lo tanto,

$$\left[ \sum_{j=1}^n \lambda_{nj}^* E(\Delta_{nj}) \right]^r = \sum_{j=1}^n (\lambda_{nj}^*)^r E(\Delta_{nj}),$$

donde  $\lambda_{nj}^* \in \Delta_{nj}$  es arbitrario. Por la continuidad de la composición de operadores respecto a la norma de operadores, tenemos que si la expresión en (3.10) se satisface, entonces para todo  $n > N$  se tiene

$$\left\| T^r - \left[ \sum_{j=1}^n \lambda_{nj}^* E(\Delta_{nj}) \right]^r \right\| = \left\| T^r - \sum_{j=1}^n (\lambda_{nj}^*)^r E(\Delta_{nj}) \right\| < \epsilon.$$

Luego, el inciso *iii*) es una consecuencia de lo anterior con un argumento análogo al hecho en *ii*). ■

El teorema 3.1 provee una demostración constructiva de una familia espectral asociada a  $T$  que satisface las fórmulas (3.5) y (3.6), no así garantiza la unicidad de dicha familia. El siguiente teorema, cuya prueba puede verse en [3], pág 111, nos da la unicidad deseada.

**Teorema 3.4** *La integral de Stieltjes*

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x)$$

donde  $\alpha(x)$  es una función de variación acotada, define un funcional lineal en el espacio de funciones continuas  $f(x)$ , y recíprocamente todo funcional lineal  $T$  puede escribirse de esta forma. Además, el funcional  $T$  determina la función  $\alpha(x)$  en sus puntos de continuidad salvo una constante aditiva.

Note entonces que la igualdad (3.6) es válida para cualquier polinomio definido en  $[m, M]$  y el lado izquierdo de dicha igualdad está definida independientemente de  $\mathcal{E}$ . Entonces, el teorema anterior establece que para cualesquier  $x, y \in \mathcal{H}$  fijos, la expresión  $g(\lambda) = \langle E_\lambda x, y \rangle$  está determinada, salvo una constante aditiva, por (3.6) en sus puntos de continuidad y en  $m - 0$  y  $M$ . Dado que  $\langle E_M x, y \rangle = \langle x, y \rangle$  y  $\{E_\lambda\}$  es continua por la derecha, tenemos que  $g(\lambda)$  está determinada de manera única en todas partes.

### 3.2 El teorema espectral para el operador de multiplicación

Sea  $T : L^2[0, 1] \rightarrow L^2[0, 1]$  definido por  $Tx(t) = tx(t) = y(t)$  con dominio  $\mathcal{D}(T) = L^2[0, 1]$ . En el ejemplo 1.7, demostramos que el operador de multiplicación es autoadjunto y acotado. El objetivo de esta sección es ilustrar el teorema espectral en dicho operador encontrando la familia espectral asociada.

Afirmamos que  $\sigma(T) = [0, 1]$ . En efecto, es fácil ver que  $(R_\lambda x)(t) = (t - \lambda)^{-1}x(t)$  la cual está bien definida si  $\lambda \notin [0, 1]$ . Como  $T$  es autoadjunto, el espectro residual  $\sigma_r(T)$ , es vacío y el espectro puntual, en este caso, también, pues si  $\lambda_0 \in [0, 1]$  satisface  $(T - \lambda_0 I)x(t) = (t - \lambda_0)x(t) = 0$  entonces  $x(t) = 0$ , por lo que  $\lambda_0$  no puede ser un valor propio de  $T$ . Finalmente, si  $\lambda \in [0, 1]$  Nuestra afirmación entonces, queda demostrada.

Procedemos ahora a calcular la familia espectral de  $T$ . De acuerdo a los pasos dados en la demostración de nuestro teorema, calculemos en primer lugar  $B_\lambda = (T_\lambda^2)^{\frac{1}{2}}$ . No es difícil ver que  $(T_\lambda^2 x)(t) = (t - \lambda)^2 x(t)$ . Entonces  $(B_\lambda x)(t) = |t - \lambda|x(t)$  y consecuentemente  $(T_\lambda^+ x)(t) = \frac{1}{2}[|t - \lambda| + (t - \lambda)]x(t)$ .

Consideramos entonces los siguientes casos.

**Caso 1.** Si  $\lambda < 0$ , entonces  $0 \leq t < t - \lambda \leq 1 - \lambda$ . Por lo tanto,  $(T_\lambda^+ x)(t) = (t - \lambda)x(t)$  y entonces  $\mathcal{N}(T_\lambda^+) = \{0\}$  porque  $t - \lambda > 0$ . En este

caso entonces, la proyección buscada  $E_\lambda : L^2[0, 1] \rightarrow \mathcal{N}(T_\lambda^+)$  es  $E_\lambda = 0$ .

**Caso 2.** Si  $\lambda > 1$  entonces  $t - \lambda \leq 1 - \lambda < 0$ . Se tiene entonces que  $(T_\lambda^+ x)(t) = 0$  y así  $\mathcal{N}(T_\lambda^+) = L^2[0, 1]$  y la proyección  $E_\lambda : L^2[0, 1] \rightarrow L^2[0, 1]$  en este caso es  $E_\lambda = I$ .

**Caso 3.** Suponga ahora que  $0 \leq \lambda \leq 1$ . Como  $t \in [0, 1]$  también, consideraremos entonces las siguientes posibilidades:

*i)* Si  $0 \leq t \leq \lambda$  entonces  $t - \lambda \leq 0$  y por lo tanto, como en el caso 2,  $\mathcal{N}(T_\lambda^+) = L^2[0, 1]$  y  $E_\lambda = I$ .

*ii)* Si  $\lambda < t \leq 1$  entonces  $0 < t - \lambda$ . Se sigue que  $(T_\lambda^+ x)(t) = (t - \lambda)x(t)$  y como en el caso 1,  $\mathcal{N}(T_\lambda^+) = \{0\}$  y  $E_\lambda = 0$ .

Finalmente, sea

$$(S_\lambda x)(t) = \begin{cases} x(t) & \text{si } 0 \leq t \leq \lambda \\ 0 & \text{si } \lambda < t \leq 1 \end{cases}$$

Así, la familia espectral para el operador de multiplicación resulta ser

$$E_\lambda = \begin{cases} 0, & \text{si } \lambda < 0 \\ S_\lambda, & \text{si } 0 \leq \lambda \leq 1 \\ I, & \text{si } \lambda > 1 \end{cases}$$

De este modo, de acuerdo con el teorema espectral calcular  $\langle Tx, y \rangle = \int_0^1 tx(t)\overline{y(t)} dt$  para  $x, y \in \mathcal{D}(T)$  equivale a calcular

$$\int_0^1 \lambda dg(\lambda), \quad g(\lambda) = \langle E_\lambda x, y \rangle.$$

## CAPÍTULO 4

---

### Teorema espectral para operadores no acotados con espectro puntual puro

---

En este capítulo, nos ocuparemos del teorema espectral para operadores autoadjuntos no acotados  $T$  definidos en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ , con espectro puntual puro, esto es,  $\sigma_c(T) = \emptyset = \sigma_r(T)$ . La idea fundamental es establecer la existencia de un sistema ortogonal de variedades lineales cerradas que generen al espacio  $\mathcal{H}$  y tales que  $T$  se comporta como un operador autoadjunto acotado en cada variedad. Así, aplicamos el teorema espectral del capítulo anterior en las restricciones obtenidas y el comportamiento de  $T$  en  $\mathcal{H}$  se obtiene de su comportamiento en cada variedad. Esta idea se encuentra bosquejada en [4], y nosotros nos ocupamos de dar una demostración detallada en la sección 4.3.

#### 4.1 Operador adjunto de Hilbert

La existencia y unicidad del operador adjunto de Hilbert  $T^*$  para operadores lineales acotados  $T$ , está garantizada siempre que el operador sea acotado. De hecho, se dice que  $T$  es autoadjunto si para todo  $x, y \in \mathcal{H}$  se tiene  $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$ . Ahora bien, si  $T$  es un operador definido sobre un espacio de Hilbert (es decir,  $\mathcal{D}(T) = \mathcal{H}$ ) satisfaciendo la igualdad anterior, el operador necesariamente es acotado. Ese es el contenido del teorema de Hellinger- Toeplitz cuya prueba puede verse en [1]. En consecuencia, en el

caso de que  $T$  no sea acotado, el dominio de  $T$  no puede ser todo  $\mathcal{H}$ , de ahí que consideremos extensiones del operador.

**Definición 4.1** Sea  $T : \mathcal{D}(T) \rightarrow \mathcal{H}$  un operador lineal definido en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Un operador  $S : \mathcal{D}(S) \rightarrow \mathcal{H}$  es una extensión de  $T$ , lo cual se denotará por  $T \subset S$ , si  $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(S)$  y  $S|_{\mathcal{D}(T)} = T$ .

A continuación, veremos que el operador adjunto  $T^*$  de un operador  $T$  no acotado, se define de manera similar que en el caso de que el operador en cuestión sea acotado. El teorema de Hellinger-Toeplitz, sugiere que el dominio de  $T$  desempeña un papel importante para poder considerar extensiones del operador.

**Definición 4.2** Sea  $T : \mathcal{D}(T) \rightarrow \mathcal{H}$  un operador densamente definido en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ . El operador adjunto de Hilbert  $T^* : \mathcal{D}(T^*) \rightarrow \mathcal{H}$  de  $T$  se define como sigue: el dominio de  $T^*$  es  $\mathcal{D}(T^*) = \{y \in \mathcal{H} : \text{existe } y^* \in \mathcal{H} \text{ tal que } \langle Tx, y \rangle = \langle x, y^* \rangle \forall x \in \mathcal{D}(T)\}$ . Para tales  $y \in \mathcal{D}(T^*)$  el operador adjunto de Hilbert se define como  $T^*y = y^*$ .

**Proposición 4.1** Suponga que  $T$  es un operador no acotado. El operador  $T^*$  está bien definido (es una aplicación) si y sólo si  $\mathcal{D}(T)$  es denso en  $\mathcal{H}$ .

**Demostración.**

Suponga que  $\overline{\mathcal{D}(T)} \neq \mathcal{H}$ . Como  $\mathcal{H} = \overline{\mathcal{D}(T)} \oplus \overline{\mathcal{D}(T)}^\perp$  existe  $0 \neq y_1 \in \mathcal{H}$  tal que  $y_1 \perp \overline{\mathcal{D}(T)}$ , esto es,  $\langle x, y_1 \rangle = 0$  para todo  $x \in \mathcal{D}(T)$ . Luego,

$$\langle x, y^* \rangle = \langle x, y^* \rangle + \langle x, y_1 \rangle = \langle x, y^* + y_1 \rangle \quad \forall x \in \mathcal{D}(T).$$

Por lo tanto,  $y^* + y_1 \neq y^*$  satisface la definición de  $T^*$  por lo que  $T^*$  no está bien definida.

Recíprocamente, si  $\langle x, y^* \rangle = \langle x, \tilde{y} \rangle$  para todo  $x \in \mathcal{D}(T)$  entonces  $\langle x, y^* - \tilde{y} \rangle = 0$  para todo  $x \in \mathcal{D}(T)$ . Como  $\mathcal{D}(T)$  es denso en  $\mathcal{H}$ , se sigue que  $\mathcal{D}(T)^\perp = \{0\}$  y así,  $y^* - \tilde{y} = 0$  lo cual prueba unicidad. ■

A partir de la proposición anterior, supondremos a menos que se especifique lo contrario, que los operadores no acotados con los que trabajaremos, son de dominio denso en  $\mathcal{H}$ . Por la linealidad de  $T$ , es fácil ver que  $T^*$  es lineal. Veamos que es cerrado. Sea  $\{x_n\} \subset \mathcal{D}(T^*)$  una sucesión convergiendo a  $x \in \mathcal{H}$  y supongamos que  $T^*x_n \rightarrow y$ . Entonces, para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $z \in \mathcal{D}(T)$  se tiene que  $\langle Tz, x_n \rangle = \langle z, T^*x_n \rangle$ . Por la continuidad del producto interno

al hacer  $n \rightarrow \infty$ , obtenemos  $\langle Tz, x \rangle = \langle z, y \rangle$  para toda  $z \in \mathcal{D}(T)$ . Por la definición de  $T^*$ , se sigue que  $x \in \mathcal{D}(T^*)$  y  $T^*x = y$ , de donde  $T^*$  es cerrado.

Ahora bien, como estamos trabajando con operadores no acotados, será necesario introducir la siguiente:

**Definición 4.3** Sea  $T : \mathcal{D}(T) \rightarrow \mathcal{H}$  un operador lineal densamente definido. Entonces  $T$  es un operador simétrico si para todo  $x, y \in \mathcal{D}(T)$  se tiene  $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$ . El operador  $T$  es autoadjunto si  $T = T^*$ .

Con base en la definición, el siguiente lema es inmediato.

**Lema 4.1** Un operador densamente definido  $T$  en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  es simétrico si y sólo si  $T \subset T^*$ .

En el contexto de este capítulo, es fácil ver que si  $T$  es autoadjunto, entonces es simétrico, mientras que el recíproco es falso, pues si  $T^*$  es una extensión propia de  $T$ , (es decir  $\mathcal{D}(T) \subsetneq \mathcal{D}(T^*)$ ) es obvio que  $T \neq T^*$ .

Las propiedades espectrales en el caso no acotado se siguen preservando, es decir,  $\sigma(T)$  es real y cerrado aunque no necesariamente acotado (véase [1]).

## 4.2 Criterio de autoadjunticidad para operadores no acotados

Dado un operador lineal no acotado  $T$ , determinar el operador adjunto correspondiente  $T^*$ , depende del dominio en el que  $T$  esté definido, como ya hemos visto. En esta sección, enunciaremos un resultado que no requiere conocer necesariamente, el dominio de  $T$ , y en algunos casos, resulta más útil que tratar de determinar  $T^*$  directamente.

**Teorema 4.1** Sea  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  un operador lineal simétrico definido en un espacio de Hilbert complejo  $\mathcal{H}$ . Entonces  $T$  es autoadjunto si y sólo si  $T$  es cerrado y  $\text{Ker}(T^* \pm iI) = \{0\}$ .

### Demostración.

Suponga que  $T$  es autoadjunto, es decir,  $T = T^*$ . Entonces  $T$  es cerrado porque  $T^*$  lo es. Ahora,  $x \in \text{Ker}(T^* + iI)$  implica que  $(T^* + iI)x = 0$ . Como  $T$  es simétrico obtenemos

$$0 = \|(T + iI)x\|^2 = \|Tx\|^2 + \|x\|^2$$

de donde  $\|x\| = 0$  y por tanto  $x = 0$ . Similarmente se prueba que  $\text{Ker}(T - iI) = \{0\}$ .

Recíprocamente, suponga que  $T$  es un operador simétrico, cerrado y que  $\text{Ker}(T^* \pm iI) = \{0\}$ . Sobre el subespacio  $\mathcal{D}(T^*)$  considere

$$\langle x, y \rangle_* = \langle T^*x, T^*y \rangle + \langle x, y \rangle,$$

donde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota el producto interno en  $\mathcal{H}$ . Es fácil ver entonces, usando la linealidad de  $T^*$ , que  $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$  define un producto interno en  $\mathcal{D}(T^*)$ . Aún más,  $(\mathcal{D}(T^*), \langle \cdot, \cdot \rangle_*)$  es un espacio de Hilbert. Para verlo, sea  $\{x_n\} \subset \mathcal{D}(T^*)$  una sucesión de Cauchy respecto a la norma  $\|\cdot\|_*$  inducida por  $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$ , que por brevedad, denotaremos sucesión  $*$ -Cauchy, y análogamente tendremos sucesiones de  $\mathcal{H}$ -Cauchy.

Entonces dado  $\epsilon > 0$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $n, m \geq N$  implica

$$\|x_n - x_m\|_*^2 = \|T^*(x_n - x_m)\|^2 + \|x_n - x_m\|^2 < \epsilon, \quad (4.1)$$

Como los sumandos en la expresión anterior son no negativos, se sigue que  $\{T^*x_n\}$  y  $\{x_n\}$  son sucesiones de  $\mathcal{H}$ -Cauchy. Suponga entonces que  $T^*x_n \xrightarrow{\mathcal{H}} y$  y  $x_n \xrightarrow{\mathcal{H}} x$ . Dado que  $T^*$  es cerrado, se sigue que  $x \in \mathcal{D}(T^*)$  y  $T^*x = y$ . Por la definición de  $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$  vemos que  $x_n \xrightarrow{\mathcal{H}} x$  implica que  $x_n \xrightarrow{*} x$ . De este modo  $\mathcal{D}(T^*)$  es completo respecto a la norma  $\|\cdot\|_*$  inducida por  $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$ .

Ahora, ya que  $T$  es simétrico, tenemos que  $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(T^*)$  y además, es cerrado en  $\mathcal{D}(T^*)$ . En efecto, sean  $x \in \mathcal{D}(T^*)$  y  $\{x_n\} \subset \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(T^*)$  una sucesión convergiendo a  $x$  con la norma  $\|\cdot\|_*$ . Similarmente a la desigualdad (4.1), se deduce que  $T^*x_n \xrightarrow{\mathcal{H}} T^*x$  y  $x_n \xrightarrow{\mathcal{H}} x$ . Como  $T \subset T^*$  tenemos que  $Tx_n \xrightarrow{\mathcal{H}} T^*x$  y  $x_n \xrightarrow{\mathcal{H}} x$ . Dado que  $T$  es cerrado, se sigue que  $x \in \mathcal{D}(T)$  y  $Tx = T^*x$ , lo cual prueba nuestra afirmación.

En consecuencia  $\mathcal{D}(T^*) = \mathcal{D}(T) \oplus \mathcal{D}(T)^\perp$  donde  $\mathcal{D}(T)^\perp$  es el ortogonal de  $\mathcal{D}(T)$  respecto al producto  $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$ . Así,  $z \in \mathcal{D}(T^*)$  se escribe como  $z = x + y$ , donde  $x \in \mathcal{D}(T)$  y por tanto  $y = z - x \in \mathcal{D}(T^*)$ . Luego, para toda  $\tilde{x} \in \mathcal{D}(T)$  se tiene

$$0 = \langle \tilde{x}, y \rangle_* = \langle T^*\tilde{x}, T^*y \rangle + \langle \tilde{x}, y \rangle.$$

Usando el hecho de que  $T \subset T^*$ , lo anterior es equivalente a  $\langle T\tilde{x}, T^*y \rangle = \langle \tilde{x}, -y \rangle$ , para toda  $\tilde{x} \in \mathcal{D}(T)$ , es decir,  $T^*y \in \mathcal{D}(T)$  y  $T^*(T^*y) = -y$ . Factorizando la igualdad anterior como  $(T^* + iI)(T^* - iI)y = 0$ , la hipótesis  $\text{Ker}(T \pm iI) = \{0\}$  implica  $y = 0$ . Por lo tanto,  $T = T^*$ , es decir,  $T$  es autoadjunto. ■

Note que el teorema anterior requiere de la definición precisa de  $T^*$ , lo cual deseábamos evitar. Para resolver este inconveniente, tenemos el siguiente teorema que evita el cálculo de  $T^*$  y nos dice que, bajo las hipótesis dadas, demostrar que  $\text{Ker}(T^* \pm iI) = \{0\}$  es equivalente a tener  $\text{Ran}(T \mp iI) = \mathcal{H}$ .

**Teorema 4.2** *Sea  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  un operador lineal simétrico y cerrado. Entonces*

$$\mathcal{H} = \text{Ran}(T \pm iI) \oplus \text{Ker}(T^* \mp iI)$$

**Demostración.**

Afirmamos que  $\text{Ran}(T + iI)^\perp = \text{Ker}(T^* - iI)$ . En efecto,

$$\begin{aligned} y \in [\text{Ran}(T + iI)]^\perp &\iff \langle (T + iI)x, y \rangle = 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}(T) \\ &\iff \langle Tx, y \rangle - \langle x, iy \rangle = 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}(T) \\ &\iff \langle Tx, y \rangle = \langle x, iy \rangle \quad \forall x \in \mathcal{D}(T) \\ &\iff y \in \mathcal{D}(T^*) \quad \text{y} \quad T^*y = iy \\ &\iff (T^* - iI)y = 0 \\ &\iff y \in \text{Ker}(T^* - iI) \end{aligned}$$

Ahora, sea  $x \in \mathcal{D}(T)$ . Usando la hipótesis de que  $T$  es simétrico resulta

$$\|(T + iI)x\|^2 = \langle (T + iI)x, (T + iI)x \rangle = \|Tx\|^2 + \|x\|^2,$$

y entonces  $\|(T + iI)x\| \geq \|x\|$  lo cual muestra que  $T + iI$  tiene inversa continua. Además, como  $T$  es cerrado,  $T + iI$  es cerrado y por tanto  $(T + iI)^{-1}$  es cerrado. Queremos ver que  $\text{Ran}(T + iI)$  es cerrado. En efecto, suponga que  $y \in \overline{[\mathcal{D}(T + iI)^{-1}]} = \overline{\text{Ran}(T + iI)}$ . Entonces existe una sucesión  $\{y_n\}$  en  $\mathcal{D}(T + iI)^{-1}$  convergiendo a  $y$ . Luego,  $\|T_{-i}^{-1}y_n - T_{-i}^{-1}y_m\| \leq C\|y_n - y_m\|$  donde  $C = \|T_{-i}^{-1}\|$ , por lo que  $\{T_{-i}^{-1}y_n\}$  es de Cauchy. Por la completitud de  $\mathcal{H}$  resulta que  $\{T_{-i}^{-1}y_n\}$  converge a algún  $z \in \mathcal{H}$ . Ya que  $T_{-i}^{-1}$  es cerrado, se sigue que  $y \in [\mathcal{D}(T + iI)^{-1}]$  y  $T_{-i}^{-1}y = z$ . En consecuencia

$\text{Ran}(T + iI)$  es cerrado.

Por lo tanto  $\mathcal{H} = \text{Ran}(T + iI) \oplus [\text{Ran}(T + iI)]^\perp = \text{Ran}(T + iI) \oplus \text{Ker}(T^* - iI)$ . Intercambiando los signos en el argumento anterior se obtiene también  $\mathcal{H} = \text{Ran}(T - iI) \oplus \text{Ker}(T^* + iI)$ . ■

### 4.3 El Teorema Espectral

**Definición 4.4** *Suponga que  $T$  es un operador autoadjunto en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Si  $\sigma_c(T) = \emptyset$  y el conjunto de vectores propios asociados a  $\sigma_p(T)$  forma una base de Hilbert de  $\mathcal{H}$ , se dice entonces que  $T$  tiene espectro puntual puro.*

En el caso de que  $T$  tenga espectro puntual puro, existe una manera genérica de obtener la familia espectral asociada al operador  $T$ .

**Teorema 4.3** *Sea  $T$  un operador autoadjunto con espectro puntual puro. Sean  $\lambda \in \sigma_p(T)$  y  $\mathcal{N}_\lambda = \text{Ker}(T_\lambda)$ . Para cada  $\alpha \in \mathbb{R}$  considere  $M_\alpha$  la variedad lineal cerrada más pequeña que contiene a  $\mathcal{N}_\lambda$  para toda  $\lambda \leq \alpha$ . Defínase  $E_\alpha$  como la proyección de  $\mathcal{H}$  sobre la variedad  $M_\alpha$ . Entonces  $\mathcal{E} = \{E_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{R}}$  es la familia espectral de  $T$ .*

#### Demostración.

Es claro que  $M_\alpha = \overline{\text{lin} \left( \bigcup_{\lambda \leq \alpha} \mathcal{N}_\lambda \right)}$  es la variedad lineal requerida. Como  $T$  es cerrado, es fácil ver que  $\text{Ker}(T_\lambda)$  es cerrado. En efecto, suponga que  $x \in \overline{\text{Ker}(T_\lambda)}$  y sea  $\{x_n\} \subset \text{Ker}(T_\lambda)$  una sucesión que converja a  $x$ . Entonces,  $T_\lambda(x_n) = 0$  para toda  $n$ , de donde  $Tx_n = \lambda x_n$ . Dado que  $\lambda x_n \rightarrow \lambda x$  y  $T$  es cerrado se tiene que  $Tx = \lambda x$ , lo cual implica que  $x \in \text{Ker}(T_\lambda)$ . Recuerde ahora que si  $\lambda \neq \mu$ , entonces los subespacios  $\mathcal{N}_\lambda$  y  $\mathcal{N}_\mu$  son ortogonales

(proposición 2.1). Por el teorema 2.4, tenemos que  $\overline{\text{lin} \left( \bigcup_{\lambda \leq \alpha} \mathcal{N}_\lambda \right)} = \sum_{\lambda \leq \alpha} \oplus \mathcal{N}_\lambda$ .

En adelante entonces, escribiremos  $M_\alpha = \sum_{\lambda \leq \alpha} \oplus \mathcal{N}_\lambda$ .

Ahora, para cada  $\lambda \in \sigma_p(T)$ , sea  $\{q_{\lambda i}\}_{i \in J_\lambda}$  una base ortonormal completa de  $\mathcal{N}_\lambda$ . Si  $\lambda \neq \mu$ , tenemos que  $\{q_{\lambda i}\}_{i \in J_\lambda} \cup \{q_{\mu j}\}_{j \in J_\mu}$  es una base ortonormal completa de  $\mathcal{N}_\lambda \oplus \mathcal{N}_\mu$ . Continuando de este modo tenemos que

$\sigma_p(T) = \sigma(T)$  equivale a tener que  $\bigcup_{\substack{\lambda \in \sigma_p(T) \\ i \in J_\lambda}} \{q_{\lambda i}\}$  es una base ortonormal completa de  $\mathcal{H}$ . Entonces cada  $x \in \mathcal{H}$  se escribe como  $x = \sum_{\substack{\lambda \in \sigma_p(T) \\ i \in J_\lambda}} \langle x, q_{\lambda i} \rangle q_{\lambda i}$ . Por brevedad, omitiremos  $i \in J_\lambda$  en la suma anterior, y se sobreentenderá que el índice  $i$  corre en un conjunto  $J_\lambda$  que depende únicamente del subespacio  $\mathcal{N}_\lambda$ , para cada  $\lambda \in \sigma(T)$ , simplificando así con la notación  $x = \sum_{\lambda \in \sigma(T)} \langle x, q_{\lambda i} \rangle q_{\lambda i}$ .

La misma notación se extiende para sumas similares.

Luego, para  $\alpha < \mu$  claramente tenemos que  $M_\alpha \subset M_\mu$  lo cual equivale a tener  $E_\alpha \leq E_\mu$ .

Veamos ahora que  $E_\alpha \rightarrow 0$  fuertemente cuando  $\alpha \rightarrow -\infty$ . Sea  $\epsilon > 0$ . Tenemos la identidad de Parseval  $\sum_{\lambda \in \sigma_p(T)} |\langle x, q_{\lambda i} \rangle|^2 = \|x\|^2$ . Entonces, para el  $\epsilon$  dado, por el lema 2.3 existe  $F_0 \subset \sigma_p(T)$  finito tal que para todo  $J \subset \sigma_p(T)$  finito, con  $J \cap F_0 = \emptyset$  se tiene

$$-\epsilon < \sum_{\lambda \in J} |\langle x, q_{\lambda i} \rangle|^2 < \epsilon.$$

Tomando el supremo sobre conjuntos finitos  $J \subset \sigma_p(T)$  con  $J \cap F_0$  tenemos, de acuerdo a la observación hecha después de la definición 2.1, que

$$-\epsilon \leq \sup_{\substack{J \subset \sigma_p(T) \text{ finito} \\ J \cap F_0 = \emptyset}} \left\{ \sum_{\lambda \in J} |\langle x, q_{\lambda i} \rangle|^2 \right\} = \sum_{\lambda \in \sigma_p(T) \setminus F_0} |\langle x, q_{\lambda i} \rangle|^2 \leq \epsilon. \quad (4.2)$$

Luego, como  $M_\alpha = \sum_{\lambda \leq \alpha} \oplus \mathcal{N}_\lambda$ , es fácil ver que  $E_\alpha x = \sum_{\lambda \leq \alpha} \langle x, q_{\lambda i} \rangle q_{\lambda i}$ . Sea  $\alpha_0 < \min\{f : f \in F_0\}$ . Entonces, para toda  $\alpha < \alpha_0$ , se tiene, usando la ortonormalidad de la base y la desigualdad (4.2) que

$$\begin{aligned} \|E_\alpha x\|^2 = \langle E_\alpha x, x \rangle &= \left\langle \left( \sum_{\lambda \leq \alpha} \langle x, q_{\lambda i} \rangle q_{\lambda i} \right), \left( \sum_{\lambda \in \sigma_p(T)} \langle x, q_{\lambda j} \rangle q_{\lambda j} \right) \right\rangle \\ &= \sum_{\lambda \leq \alpha} \langle x, q_{\lambda i} \rangle \left\langle q_{\lambda i}, \sum_{\lambda \in \sigma_p(T)} \langle x, q_{\lambda j} \rangle q_{\lambda j} \right\rangle \\ &= \sum_{\lambda \leq \alpha} \langle x, q_{\lambda i} \rangle \overline{\langle x, q_{\lambda i} \rangle} \langle q_{\lambda i}, q_{\lambda i} \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\lambda \leq \alpha} |\langle x, q_{\lambda i} \rangle|^2 \\
&\leq \sum_{\lambda \in \sigma_p(T) \setminus F_0} |\langle x, q_{\lambda i} \rangle|^2 \leq \epsilon.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,  $E_\alpha \rightarrow 0$  fuertemente cuando  $\alpha \rightarrow -\infty$ .

Análogamente probamos que  $E_\alpha \rightarrow I$  cuando  $\alpha \rightarrow \infty$ . En efecto, sea  $x \in \mathcal{H}$ ,  $\epsilon > 0$ . Entonces existe  $F_0 \subset \sigma(T)$  finito tal que para todo  $J \subset \sigma(T)$  finito con  $J \cap F_0 = \emptyset$  se tiene

$$-\epsilon < \sum_{\lambda \in J} |\langle x, q_{\lambda i} \rangle|^2 < \epsilon.$$

Se deduce nuevamente la desigualdad (4.2). Usando la ortonormalidad de la base y tomando entonces  $\alpha_0 > \max\{f : f \in F_0\}$ , se tiene que para todo  $\alpha > \alpha_0$ ,

$$\begin{aligned}
\|(I - E_\alpha)x\|^2 &= \langle (I - E_\alpha)x, x \rangle \\
&= \left\langle \sum_{\lambda \in \sigma_p(T)} \langle x, q_{\lambda i} \rangle q_{\lambda i} - \sum_{\lambda \leq \alpha} \langle x, q_{\lambda i} \rangle q_{\lambda i}, \sum_{\lambda \in \sigma_p(T)} \langle x, q_{\lambda j} \rangle q_{\lambda j} \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{\lambda > \alpha} \langle x, q_{\lambda i} \rangle q_{\lambda i}, \sum_{\lambda \in \sigma_p(T)} \langle x, q_{\lambda j} \rangle q_{\lambda j} \right\rangle \\
&= \sum_{\lambda > \alpha} \langle x, q_{\lambda i} \rangle \left\langle q_{\lambda i}, \sum_{\lambda \in \sigma_p(T)} \langle x, q_{\lambda j} \rangle q_{\lambda j} \right\rangle \\
&= \sum_{\lambda > \alpha} \langle x, q_{\lambda i} \rangle \overline{\langle x, q_{\lambda i} \rangle} \langle q_{\lambda i}, q_{\lambda i} \rangle \\
&= \sum_{\lambda > \alpha} |\langle x, q_{\lambda i} \rangle|^2 \leq \sum_{\lambda \in \sigma_p(T) \setminus F_0} |\langle x, q_{\lambda i} \rangle|^2 \leq \epsilon
\end{aligned}$$

Finalmente, veamos que la familia dada  $\mathcal{E} = \{E_\alpha\}$  es continua por la derecha. Sean  $\alpha_0 \in \mathbb{R}$  fijo y  $\{\alpha_n\}$  una sucesión convergiendo por la derecha a  $\alpha_0$ , es decir,  $\{\alpha_n\}$  es una sucesión monótona decreciente. Entonces para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $E_{\alpha_n} - E_{\alpha_0}$  es una proyección. Sea  $\epsilon > 0$ . Por el lema 2.3 existe  $F_0 \subset \sigma(T)$  finito tal que para todo  $F \subset \sigma(T)$  finito, con  $F \cap F_0 = \emptyset$ , se tiene  $\sum_{\lambda \in F} |\langle x, q_{\lambda i} \rangle| < \epsilon$ . Sea  $\delta > 0$  tal que la vecindad  $[\alpha_0, \alpha_0 + \delta)$  no interese a  $F_0$ . Entonces existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq N$  tenemos

$\alpha_n \in [\alpha_0, \alpha_0 + \delta)$ . Usando la ortonormalidad de la base, resulta que para todo  $n \geq N$

$$\begin{aligned}
\|(E_{\alpha_n} - E_{\alpha_0})x\|^2 &= \langle (E_{\alpha_n} - E_{\alpha_0})x, x \rangle \\
&= \left\langle (E_{\alpha_n} - E_{\alpha_0}) \sum_{\lambda \in \sigma_p(T)} \langle x, q_{\lambda i} \rangle q_{\lambda i}, \sum_{\lambda \in \sigma_p(T)} \langle x, q_{\lambda j} \rangle q_{\lambda j} \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{\lambda \leq \alpha_n} \langle x, q_{\lambda i} \rangle q_{\lambda i} - \sum_{\lambda \leq \alpha_0} \langle x, q_{\lambda i} \rangle q_{\lambda i}, \sum_{\lambda \in \sigma_p(T)} \langle x, q_{\lambda j} \rangle q_{\lambda j} \right\rangle \\
&= \sum_{\lambda \leq \alpha_n} \langle x, q_{\lambda i} \rangle \overline{\langle x, q_{\lambda i} \rangle} - \sum_{\lambda \leq \alpha_0} \langle x, q_{\lambda i} \rangle \overline{\langle x, q_{\lambda i} \rangle} \\
&= \sum_{\alpha_0 < \lambda \leq \alpha_n} |\langle x, q_{\lambda i} \rangle|^2 \leq \sup_{\substack{F \subset \sigma_p(T) \text{ finito} \\ F \cap F_0 = \emptyset}} \left\{ \sum_{\lambda \in F} |\langle x, q_{\lambda i} \rangle|^2 \right\} \\
&\leq \epsilon.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,  $E_{\alpha_n}$  converge fuertemente a  $E_{\alpha_0}$  y así, la colección de proyecciones  $\mathcal{E} = \{E_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{R}}$  es la familia espectral de  $T$ . ■

Hasta este momento, hemos dado una demostración constructiva de la existencia de una familia espectral asociada al operador  $T$ , la cual dará lugar a su representación integral. Sólo nos resta probar la unicidad de dicha familia, lo cual haremos al final de esta sección, pues antes serán necesarias algunas observaciones. Mientras tanto, asumiremos tal unicidad de  $T$  sin que esto derive contradicciones en lo sucesivo.

Como última observación, no es difícil ver que de acuerdo al modo en que definimos la familia de proyecciones  $\mathcal{E} = \{E_\alpha\}$ , sus elementos conmutan con el operador  $T$  para cada  $\alpha \in \mathbb{R}$ , es decir,  $TE_\alpha = E_\alpha T$ .

A continuación, aplicaremos el teorema espectral del capítulo anterior en ciertos subespacios cerrados en los que  $T$  es autoadjunto y acotado.

**Teorema 4.4** Sean  $\alpha_1 < \alpha_2$  números reales arbitrarios. Considere la variedad lineal más pequeña que contiene a  $\mathcal{N}_\lambda$  para todo  $\lambda \in (\alpha_1, \alpha_2]$ . Sobre esta variedad  $T$  es un operador autoadjunto acotado.

**Demostración.**

Primeramente, es claro que la variedad lineal requerida es  $\overline{\text{lin}(\cup_{\alpha_1 < \lambda \leq \alpha_2} \mathcal{N}_\lambda)}$ .

Luego,  $E_{\alpha_2} - E_{\alpha_1}$  es una proyección con rango  $M_{\alpha_2} \cap M_{\alpha_1}^\perp$  (proposición 1.7). Es fácil ver entonces que  $M_{\alpha_2} \cap M_{\alpha_1}^\perp = \sum_{\alpha_1 < \lambda \leq \alpha_2} \oplus \mathcal{N}_\lambda$ . Por el teorema 2.4 se sigue que  $\overline{\text{lin}(\cup_{\alpha_1 < \lambda \leq \alpha_2} \mathcal{N}_\lambda)} = \sum_{\alpha_1 < \lambda \leq \alpha_2} \oplus \mathcal{N}_\lambda = \text{Ran}(E_{\alpha_2} - E_{\alpha_1})$ . Como  $T$  es autoadjunto tenemos que es cerrado, y por tanto,  $\text{Ran}(E_{\alpha_2} - E_{\alpha_1})$  es invariante bajo  $T$ .

Sea  $x \in \text{Ran}(E_{\alpha_2} - E_{\alpha_1})$ . Entonces  $x = \sum_{\alpha_1 < \lambda \leq \alpha_2} \langle x, q_{\lambda i} \rangle q_{\lambda i}$ . Luego, usando el hecho de que  $\lambda$  es un valor propio de  $T$  y  $\{q_{\lambda i}\}$  es una base completa de  $\mathcal{N}_\lambda$ , tenemos

$$\begin{aligned}
\|Tx\|^2 &= \langle Tx, Tx \rangle = \langle x, T^*Tx \rangle \\
&= \left\langle \sum_{\alpha_1 < \lambda \leq \alpha_2} \langle x, q_{\lambda i} \rangle q_{\lambda i}, T^*Tx \right\rangle \\
&= \sum_{\alpha_1 < \lambda \leq \alpha_2} \langle x, q_{\lambda i} \rangle \langle q_{\lambda i}, T^*Tx \rangle \\
&= \sum_{\alpha_1 < \lambda \leq \alpha_2} \langle x, q_{\lambda i} \rangle \left\langle T^*Tq_{\lambda i}, \sum_{\alpha_1 < \lambda \leq \alpha_2} \langle x, q_{\lambda j} \rangle q_{\lambda j} \right\rangle \\
&= \sum_{\alpha_1 < \lambda \leq \alpha_2} \langle x, q_{\lambda i} \rangle \sum_{\alpha_1 < \lambda \leq \alpha_2} \overline{\langle x, q_{\lambda j} \rangle} \langle Tq_{\lambda i}, Tq_{\lambda j} \rangle \\
&= \sum_{\alpha_1 < \lambda \leq \alpha_2} \lambda^2 \langle x, q_{\lambda i} \rangle \overline{\langle x, q_{\lambda i} \rangle} \\
&\leq \alpha_2^2 \|x\|^2
\end{aligned}$$

En consecuencia,  $T$  es acotado en  $\text{Ran}(E_{\alpha_2} - E_{\alpha_1})$ . Veamos ahora que  $T$  es simétrico en dicho subespacio. Sean  $x, y \in \text{Ran}(E_{\alpha_2} - E_{\alpha_1})$ . Entonces

$$\begin{aligned}
\langle Tx, y \rangle - \langle x, Ty \rangle &= \langle x, T^*y \rangle - \langle x, Ty \rangle \\
&= \sum_{\alpha_1 < \lambda \leq \alpha_2} \langle x, q_{\lambda i} \rangle \langle q_{\lambda i}, T^*y - Ty \rangle \\
&= \sum_{\alpha_1 < \lambda \leq \alpha_2} \langle x, q_{\lambda i} \rangle \langle Tq_{\lambda i}, y \rangle - \sum_{\alpha_1 < \lambda \leq \alpha_2} \langle x, q_{\lambda i} \rangle \langle T^*q_{\lambda i}, y \rangle \\
&= \sum_{\alpha_1 < \lambda \leq \alpha_2} \lambda \langle x, q_{\lambda i} \rangle \left\langle q_{\lambda i}, \sum_{\alpha_1 < \lambda \leq \alpha_2} \langle y, q_{\lambda j} \rangle q_{\lambda j} \right\rangle \\
&\quad - \sum_{\alpha_1 < \lambda \leq \alpha_2} \langle x, q_{\lambda i} \rangle \sum_{\alpha_1 < \lambda \leq \alpha_2} \overline{\langle y, q_{\lambda j} \rangle} \langle T^*q_{\lambda i}, q_{\lambda j} \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\alpha_1 < \lambda \leq \alpha_2} \lambda \langle x, q_{\lambda i} \rangle \overline{\langle y, q_{\lambda i} \rangle} \\
&\quad - \sum_{\alpha_1 < \lambda \leq \alpha_2} \lambda \langle x, q_{\lambda i} \rangle \sum_{\alpha_1 < \lambda \leq \alpha_2} \overline{\langle y, q_{\lambda j} \rangle} \langle q_{\lambda i}, q_{\lambda j} \rangle \\
&= \sum_{\alpha_1 < \lambda \leq \alpha_2} \lambda \langle x, q_{\lambda i} \rangle \overline{\langle y, q_{\lambda j} \rangle} - \sum_{\alpha_1 < \lambda \leq \alpha_2} \lambda \langle x, q_{\lambda i} \rangle \overline{\langle y, q_{\lambda j} \rangle} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Finalmente, al considerar a la variedad lineal  $\text{Ran}(E_{\alpha_2} - E_{\alpha_1})$  como un espacio de Hilbert (porque es cerrada), tenemos que  $T|_{\text{Ran}(E_{\alpha_2} - E_{\alpha_1})}$  es autoadjunto. ■

Una vez que contamos con la familia espectral  $\mathcal{E} = \{E_\alpha\}$  asociada a  $T$ , vamos a establecer la representación integral de  $T$ . De hecho, tendremos que  $T = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha dE_\alpha$ . Para hacer más preciso el significado de una integral de este tipo, será necesario el siguiente:

**Lema 4.2** *Sea  $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \dots, \mathcal{L}_n, \dots$  una sucesión ortogonal de variedades lineales cerradas tal que  $\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{L}_n = \mathcal{H}$ . Si  $x \in \mathcal{H}$ , denote la proyección de  $x$  en  $\mathcal{L}_n$  por  $x_n$ . Sean  $T_n$  operadores que son autoadjuntos acotados en  $\mathcal{L}_n$ . Entonces existe un único operador lineal autoadjunto  $S$  (que en general no es acotado) tal que  $S$  coincide con  $T_n$  en  $\mathcal{L}_n$ . El dominio de  $S$ ,  $\mathcal{D}(S)$  consiste de todos los  $x \in \mathcal{H}$  tal que  $\sum_{n=1}^{\infty} \|T_n x_n\|^2$  converge. Si  $x \in \mathcal{D}(S)$ , entonces  $Sx = \sum_{n=1}^{\infty} T_n x_n$ .*

Para la demostración de este lema, véase [4].

Considere la familia espectral  $\mathcal{E} = \{E_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{R}}$  de  $T$  obtenida en el teorema 4.3. Para cada  $n \in \mathbb{Z}$ , sea  $\mathcal{L}_n = \text{Ran}(E_n - E_{n-1})$ . Por la definición de  $E_n$  y los subespacios  $M_n = \sum_{\lambda \leq n} \mathcal{N}_\lambda$  en los que se proyecta, es claro que la sucesión de subespacios cerrados  $\mathcal{L}_n$  satisface las hipótesis del lema 4.2.

Para  $n \in \mathbb{Z}$ , sea  $T_n = T|_{\mathcal{L}_n}$ . Por el teorema 4.4 tenemos que la sucesión  $\{T_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  satisface las hipótesis del lema 4.2. Por lo tanto, existe un operador lineal único  $S$  con dominio  $\mathcal{D}(S) = \{x \in \mathcal{H} : \sum_{n=-\infty}^{\infty} \|T_n x_n\|^2 \text{ converge}\}$ . Por la unicidad de  $S$  y la definición de  $T_n$  obtenemos  $T = S$ . Veamos que  $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(S)$ . Sea  $x \in \mathcal{D}(T)$  y denote por  $y = Tx$ . Como la familia de proyecciones  $\mathcal{E} = \{E_\alpha\}$  conmuta con  $T$  para cada  $\alpha \in \mathbb{R}$  tenemos que si  $Q_n$  denota la proyección de  $\mathcal{H}$  en  $\mathcal{L}_n$ , entonces  $Q_n$  también conmuta con  $T$  para

toda  $n$ . Consecuentemente,  $y_n = (Tx)_n = Q_n(Tx) = TQ_nx = Tx_n$ . Dado que los subespacios  $\mathcal{L}_n$  son ortogonales entre sí, tenemos que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \|Tx_n\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \|y_n\|^2 = \|y\|^2 < \infty,$$

lo cual implica que  $x \in \mathcal{D}(S)$ . Según el lema, para  $x \in \mathcal{D}(T)$ ,  $Tx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_n x_n$ . Veamos que, definido de acuerdo con el lema, tenemos la representación integral de  $T$  deseada.

Es fácil ver que  $\sigma(T_n) \subset (n-1, n]$ . En efecto, si  $\lambda_0 \in \sigma(T_n)$ , entonces  $\lambda_0$  es un valor propio de  $T_n$ , porque el espectro de  $T$  consta sólo de valores propios del operador. Sea  $x$  un vector propio asociado a  $\lambda_0$ . Entonces  $x = \sum_{\substack{\lambda_0 \\ i \in J_{\lambda_0}}} \langle x, q_{\lambda_i} \rangle q_{\lambda_i}$  y satisface  $T_n x = \lambda_0 x$ . Se deduce entonces que  $\lambda_0 \in (n-1, n]$ .

Como  $T_n$  es un operador autoadjunto acotado, existe  $\mathcal{F} = \{F_{\alpha, n}\}$  familia espectral de  $T_n$  definida sobre el intervalo  $[n-1, n]$ . Entonces  $F_{\alpha, n} : \mathcal{L}_n \rightarrow \mathcal{L}_n$  es una proyección (y por tanto es autoadjunto) y es acotada para cada  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Por el lema 4.2, existe un operador lineal autoadjunto  $F_\alpha$  tal que  $F_\alpha|_{\mathcal{L}_n} = F_{\alpha, n}$ . Respecto a la colección  $\{F_\alpha\}$  tenemos el siguiente resultado.

**Lema 4.3** *Sea  $\mathcal{E} = \{E_\alpha\}$  la familia espectral dada en el teorema 4.3. Entonces  $\{F_\alpha\}$  es una familia espectral de  $T$  y en consecuencia si  $\alpha \in (n-1, n]$  entonces  $E_\alpha = F_{\alpha, n}$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ .*

#### Demostración.

La demostración de este lema se sigue de que  $\mathcal{H} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \oplus \mathcal{L}_n$ ,  $F_\alpha|_{\mathcal{L}_n} = F_{\alpha, n}$  y que  $\{F_{\alpha, n}\}$  es una familia espectral de  $T_n$  definida en  $\mathcal{L}_n$ . La unicidad de la familia  $\mathcal{E}$  prueba la segunda afirmación. ■

En este momento, estamos en posición de dar la representación integral de  $T$ , esto es, establecer la fórmula  $T = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha dE_\alpha$ .

Suponga que  $x \in \mathcal{D}(T)$ . Sea  $Q_n x = x_n$  la proyección de  $x$  en  $\mathcal{L}_n$ . Por la definición del operador  $T_n = T|_{\mathcal{L}_n}$  tenemos que  $T_n x_n = T_n x$ . Sea  $\int_{n-1}^n \alpha dF_{\alpha, n}$  la representación espectral del operador autoadjunto  $T_n$ . De acuerdo con el lema anterior, si restringimos el parámetro  $\alpha$  al intervalo  $(n-1, n]$  entonces  $E_\alpha = F_{\alpha, n}$ , de modo que la integral anterior se puede escribir como  $\int_{n-1}^n \alpha dE_\alpha$ . Considerando estas observaciones resulta que

$$\begin{aligned}
Tx &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_n x_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_n x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \int_{n-1}^n \alpha dF_{\alpha,n} \right) x \\
&= \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{n-1}^n \alpha dE_{\alpha} \right) x = \left( \int_{-\infty}^{\infty} \alpha dE_{\alpha} \right) x
\end{aligned}$$

Probaremos ahora la unicidad de la familia espectral  $\mathcal{E} = \{E_{\alpha}\}$  de  $T$ . Suponga que  $\mathcal{E}' = \{E'_{\alpha}\}$  es una familia espectral arbitraria tal que la integral  $\int_{-\infty}^{\infty} \alpha dE'_{\alpha}$  es también igual a  $T$ . Consideradas como transformaciones del subespacio  $\mathcal{L}_n = \text{Ran}(E_n - E_{n-1})$  en sí mismo, las proyecciones  $E_{\alpha}$  y  $E'_{\alpha}$  conforman dos familias espectrales tales que la integral de  $\alpha$  con respecto a cada una de ellas, es igual al mismo operador simétrico  $T|_{\mathcal{L}_n} = T_n$ . Por tanto, estas familias coinciden en los subespacios  $\mathcal{L}_n$  y ya que éstos son ortogonales entre sí y generan a  $\mathcal{H}$ , resulta del lema que 4.2 que conciden en todo  $\mathcal{H}$ .

Para finalizar con esta sección, hagamos unas observaciones. Si para  $x \in \mathcal{D}(T)$  fijamos  $x_n = (E_n - E_{n-1})x$ , entonces la serie

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \|T_n x_n\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle T_n^2 x_n, x_n \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{n-1}^n \alpha^2 d\langle E_{\alpha} x_n, x_n \rangle$$

converge, o lo que es lo mismo, dado que  $E_{\alpha} x_n = E_{\alpha} x - E_{n-1} x$  en el intervalo  $n-1 \leq \alpha \leq n$ , el dominio de  $T$  consta de aquéllos  $x \in \mathcal{H}$  para los cuales la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2 \langle E_{\alpha} x, x \rangle$$

converge.

#### 4.4 El operador de diferenciación

En esta sección, mostraremos un operador lineal autoadjunto no acotado con espectro puntual puro. El objetivo es ilustrar la teoría expuesta anteriormente, y en nuestro ejemplo particular, obtener la serie de Fourier de la derivada de una función definida en el espacio de Hilbert  $L^2[0, 2\pi]$  usando teoría espectral.

Considere al operador  $T : L^2[0, 2\pi] \rightarrow L^2[0, 2\pi]$  definido por  $(Tx)(t) = -i \frac{d}{dt}x(t) = -ix'(t)$  cuyo dominio corresponde al subespacio  $\mathcal{D}(T) = \{x \in AC[0, 2\pi] : x'(t) \in L^2[0, 2\pi], x(0) = x(2\pi)\}$ , donde  $AC[0, 2\pi]$  corresponde al espacio de funciones definidas en  $[0, 2\pi]$  absolutamente continuas, es decir, aquellas funciones  $x(t)$  expresables en la forma  $x(t) = c + \int_0^t y(s)ds$  donde  $c$  es una constante arbitraria y  $y \in L^2[0, 2\pi]$ . La condición en la frontera  $x(0) = x(2\pi)$  nos dice además, que  $y$  es ortogonal a la función  $g(t) = 1$ , esto es,  $\int_0^{2\pi} y(s)ds = 0$ .

En primer lugar, veamos que el dominio de  $T$ ,  $\mathcal{D}(T)$ , es denso en  $L^2[0, 2\pi]$ .

**Proposición 4.2** *Sea  $S : L^2[0, 2\pi] \rightarrow L^2[0, 2\pi]$  el operador de diferenciación con dominio  $\mathcal{D}(S) = \{x \in AC[0, 2\pi] : x'(t) \in L^2[0, 2\pi], x(0) = 0 = x(2\pi)\}$ . Entonces  $\mathcal{D}(S)$  es denso en  $L^2[0, 2\pi]$ .*

**Demostración.**

El resultado de nuestra proposición equivale a demostrar que  $\mathcal{D}(S)^\perp = \{0\}$ . Sea  $f \in \mathcal{D}(S)^\perp$ . Entonces, para todo  $x \in \mathcal{D}(S)$  tenemos

$$\langle f, x \rangle = \int_0^{2\pi} f(t)\overline{x(t)}dt = 0.$$

Sea  $F(t) = \int_0^t f(s)ds$ . Integrando por partes resulta que

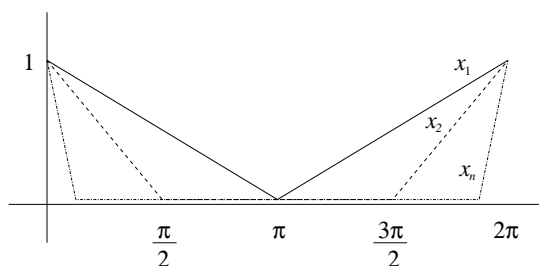
$$0 = \langle f, x \rangle = \overline{x(t)F(t)}\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} F(t)\overline{x'(t)}dt = - \int_0^{2\pi} F(t)\overline{x'(t)}dt. \quad (4.3)$$

Ahora, note que para toda  $x \in \mathcal{D}(T)$ ,  $x' \in L^2[0, 2\pi]$  es una función arbitraria ortogonal a  $g(t) = 1$

$$\langle x', g \rangle = \int_0^{2\pi} x'(t)dt = 0.$$

De acuerdo a (4.3) y a la caracterización del espacio  $AC[0, 2\pi]$ , tenemos que  $F \in (\text{lin}(\{g\})^\perp)^\perp = \overline{\text{lin}(\{g\})} = \text{lin}(\{g\})$  (porque  $\text{lin}(\{g\})$  es unidimensional) de modo que  $F = \lambda g$  para algún  $\lambda \in \mathbb{C}$ , esto es  $F(t) = \int_0^t f(s)ds = \lambda$ . Luego,  $F'(t) = f(t) = 0$  casi en todas partes, es decir,  $f = 0$  c.t.p. lo cual debíamos demostrar. Así  $\mathcal{D}(S)^\perp = \{0\}$  y por tanto  $\mathcal{D}(S)$  es denso en  $L^2[0, 2\pi]$ . ■

Evidentemente  $\mathcal{D}(S) \subset \mathcal{D}(T)$ , de modo que la proposición anterior implica que  $\mathcal{D}(T)$  es denso en  $L^2[0, 2\pi]$ .

Figure 4.1: Sucesión de funciones  $x_n(t)$ 

El operador de diferenciación no es acotado. Para verlo, considere la sucesión de funciones definidas por

$$x_n(t) = \begin{cases} -\frac{2^n}{\pi}t + 1, & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2^n} \\ 0, & \text{si } \frac{\pi}{2^n} \leq t \leq 2\pi - \frac{1}{2^n}\pi \\ \frac{2^n}{\pi}t - 2^{n+1} + 1, & \text{si } 2\pi - \frac{1}{2^n}\pi \leq t \leq 2\pi \end{cases} .$$

Esta sucesión se bosqueja en la figura 4.1.

Hasta ahora, hemos probado que  $T$  es un operador lineal no acotado con dominio denso en  $L^2[0, 2\pi]$ . Queremos ver que además es autoadjunto. Para ello, mostraremos que  $T$  satisface las hipótesis del teorema 4.1.

**Proposición 4.3** *El operador de diferenciación  $T$  es simétrico, cerrado y  $\text{Ran}(T \pm iI) = L^2[0, 2\pi]$ .*

**Demostración.**

Sean  $x, y \in \mathcal{D}(T)$ . Usando integración por partes tenemos

$$\langle x, Ty \rangle - \langle Tx, y \rangle = \int_0^{2\pi} x(t) \overline{(-iy'(t))} dt + \int_0^{2\pi} ix'(t) \overline{y(t)} dt = ix(t)y(t)|_0^{2\pi} = 0.$$

Entonces  $T$  es simétrico. Veamos ahora que  $T$  es cerrado. Sea  $\{x_n\} \subset \mathcal{D}(T)$  una sucesión convergiendo a  $x \in L^2[0, 2\pi]$  y  $Tx_n$  convergiendo a una función  $y \in L^2[0, 2\pi]$ . Supongamos que para toda  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_n(0) = x_n(2\pi)$ . Resulta que

$$\begin{aligned}
\left| -ix_n(s) - \int_0^s y(t)dt \right| &= \left| -i \int_0^s (x'_n(t) - y(t))dt \right| \\
&\leq \int_0^{2\pi} | -ix'_n(t) - y(t) |^2 dt \quad (4.4) \\
&= \|Tx_n - y\|^2 < \epsilon,
\end{aligned}$$

para todo  $\epsilon > 0$  y  $n$  suficientemente grande. Ahora, como  $x_n \in \mathcal{D}(T)$  tenemos

$$x_n(0) - x_m(0) = x_n(s) - x_m(s) - \int_0^s [x'_n(t) - x'_m(t)] ds,$$

y entonces

$$\begin{aligned}
|x_n(0) - x_m(0)| &= \left( \int_0^{2\pi} |x_n(0) - x_m(0)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left( \int_0^{2\pi} |x_n(s) - x_m(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + \left\{ \int_0^{2\pi} \left| \int_0^s [x'_n(t) - x'_m(t)] dt \right|^2 ds \right\}^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

de donde  $\{x_n(0)\}$  (y similarmente  $\{x_n(2\pi)\}$ ) es una sucesión de Cauchy con algún límite  $\alpha$ . Dado que  $x_n(0) = x_n(2\pi)$  para toda  $n$ , tenemos que  $x_n(2\pi) \rightarrow \alpha$ , es decir,  $x(0) = x(2\pi)$ . Como  $x_n$  converge a  $x$  en la norma de  $L^2[0, 2\pi]$ , existe una subsucesión que converge puntualmente para casi toda  $s \in [0, 2\pi]$ . Denotemos por  $\{x_k\}$  a dicha subsucesión. De acuerdo con (4.4) tenemos  $x(s) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k(s) = \alpha - i \int_0^s y(t)dt$  para casi toda  $s \in [0, 2\pi]$ . Ya que funciones que difieren en conjuntos de medida nula definen el mismo elemento en  $L^2[0, 2\pi]$  se sigue que  $x(s) = \alpha - i \int_0^s y(t)dt$ . Así,  $x \in \mathcal{D}(T)$  y  $Tx(s) = -i \frac{d}{ds} (i\alpha + \int_0^s y(t)dt) = y(s)$ . Por lo tanto,  $T$  es cerrado.

Por último, veamos que  $\text{Ker}(T^* - iI) = \{0\}$  o equivalentemente,  $\text{Ran}(T + iI) = L^2[0, 2\pi]$ . Sea  $y(t) \in L^2[0, 2\pi]$ . Demostraremos que existe  $x \in \mathcal{D}(T)$  tal que  $(T + iI)x(t) = y(t)$ , es decir, queremos resolver la ecuación diferencial:  $-ix'(t) + ix(t) = y(t)$ . La solución es  $x(t) = e^t [i \int_0^t e^{-s} y(s) ds + c]$  donde  $c$  es una constante que determinaremos a continuación.

Es claro que  $x \in AC[0, 2\pi]$ . Ahora,  $x$  debe satisfacer la condición de frontera  $x(0) = x(2\pi)$ , donde  $x(0) = c$  y por tanto

$$x(0) = c = x(2\pi) = e^{2\pi} \left[ i \int_0^{2\pi} e^{-t} y(t) dt + c \right].$$

Se deduce entonces que

$$c = \frac{i}{1 - e^{2\pi}} \int_0^{2\pi} e^{-t} y(t) dt \quad (4.5)$$

donde la integral anterior es finita porque  $y \in L^2[0, 2\pi] \subset L[0, 2\pi]$ . De este modo, tenemos que  $x(0) = x(2\pi)$ .

Ahora, como  $y \in L^2[0, 2\pi]$ ,  $x \in L^2[0, 2\pi]$  por ser una función continua, resulta que  $x'(t) = x(t) + iy(t) \in L^2[0, 2\pi]$ .

Análogamente se demuestra que  $\text{Ran}(T - iI) = L^2[0, 2\pi]$ . En consecuencia, por el teorema 4.1 tenemos que  $T$  es un operador no acotado autoadjunto. ■

Recuerde que  $\sigma_r(T)$  corresponde al conjunto de valores  $\lambda \in \mathbb{C}$ , tales que la resolvente  $R_\lambda(T)$  existe, pero su dominio no es denso en  $\mathcal{H}$ . En el caso de que  $T$  sea autoadjunto (ya sea que esté acotado o no), dicho conjunto es vacío. Véase [1] En nuestro ejemplo, resulta que el espectro continuo,  $\sigma_c(T)$ , es vacío también. Para demostrar esta afirmación, considere el siguiente:

**Teorema 4.5** *Sea  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo de medida finita. Si  $T : L(I) \rightarrow L(I)$  es un operador integral cuyo kernel  $k(t, s)$  es de tipo Hilbert-Schmidt, es decir,  $\int_{I \times I} |k(t, s)|^2 dt ds < \infty$ , entonces  $T$  es acotado.*

#### Demostración.

Por hipótesis,  $|k|^2$  es integrable sobre  $I \times I$ . Por el teorema de Fubini,  $\int_I |k(t, s)|^2 ds$  existe para casi todo  $t \in I$  y de nuevo, por el mismo teorema,  $\int_I (\int_I |k(t, s)|^2 ds) dt$  existe. Por lo tanto, si  $y(s)$  es cualquier función en  $L(I)$  la integral  $\int_I k(t, s)y(s) ds$  existe para casi todo  $t \in I$ . Defínase  $x(t) = \int_I k(t, s)y(s) ds$ . Entonces, por la desigualdad de Hölder tenemos que

$$\begin{aligned} |x(t)|^2 &= \left| \int_I k(t, s)y(s) ds \right|^2 \leq \left[ \int_I |k(t, s)||y(s)| ds \right]^2 \\ &\leq \left[ \int_I |k(t, s)|^2 ds \right] \left[ \int_I |y(s)|^2 ds \right] \end{aligned}$$

y entonces

$$\int_I |x(t)|^2 dt \leq \int_I \int_I |k(t, s)|^2 ds dt \int_I |y(s)|^2 ds$$

Haciendo  $c^2 = \int_I \int_I |k(t, s)|^2 ds dt$  y escribiendo la igualdad anterior en términos de  $T$  obtenemos

$$\|Ty\|^2 \leq c^2 \|y\|^2,$$

es decir,  $T$  es un operador acotado. ■

Estamos ahora en posición de calcular el espectro  $\sigma(T)$  del operador de diferenciación  $T$ .

**Teorema 4.6** *El espectro del operador de diferenciación  $T : \mathcal{D}(T) \rightarrow L^2[0, 2\pi]$  con dominio  $\mathcal{D}(T) = \{x \in AC[0, 2\pi] : x' \in L^2[0, 2\pi], x(0) = x(2\pi)\}$  corresponde a  $\sigma(T) = \sigma_p(T) = \mathbb{Z}$  y asociado a cada valor propio  $\lambda_n = n$ , el vector correspondiente es  $y_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int}$ .*

#### Demostración.

Es fácil ver que  $\sigma_p(T) = \mathbb{Z}$ . En efecto, suponga que  $\lambda$  es un valor propio de  $T$  con vector propio  $y \in \mathcal{D}(T)$ . Entonces  $Ty = \lambda y$  es decir, tenemos la ecuación diferencial  $-iy'(t) - \lambda y(t) = 0$ , cuya solución es  $y(t) = e^{\lambda it + c}$  donde  $c$  es una constante que determinaremos de modo que los vectores resultantes estén normalizados. Como  $y \in \mathcal{D}(T)$  debe satisfacer la condición en la frontera  $y(0) = y(2\pi)$ , esto es,  $y(0) = e^c = e^{2\pi i \lambda + c} = y(2\pi)$ , lo cual se satisface si y sólo si  $\lambda \in \mathbb{Z}$ . Al normalizar los vectores correspondientes, tenemos que  $y_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int}$ .

Ahora para ver que  $\sigma_c(T) = \emptyset$ , suponga que  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ . Mostraremos que  $\lambda \in \rho(T)$ . Como  $\mathcal{D}(R_\lambda) = \text{Ran}(T_\lambda)$ , y  $T$  es cerrado, mostrar que  $\overline{\mathcal{D}(R_\lambda)} = L^2[0, 2\pi]$  es equivalente a demostrar que  $\text{Ran}(T_\lambda) = L^2[0, 2\pi]$ .

Sea  $y \in L^2[0, 2\pi]$ . Buscamos  $x \in \mathcal{D}(T_\lambda) = \mathcal{D}(T)$  tal que  $(T - \lambda I)x = y$ , lo cual implica resolver la ecuación diferencial  $x'(t) - \lambda i x(t) = iy(t)$  con condición en la frontera  $x(0) = x(2\pi)$ . Resulta entonces que

$$x(t) = e^{\lambda it} \left[ \int_0^t i e^{-\lambda is} y(s) ds + c \right]$$

donde

$$c = \frac{ie^{2\pi i\lambda}}{1 - e^{2\pi i\lambda}} \int_0^{2\pi} e^{-\lambda is} y(s) ds$$

es una constante que está bien definida por la elección de  $\lambda$  y porque  $y \in L^2[0, 2\pi] \subset L[0, 2\pi]$ . Es claro entonces que  $x \in \text{AC}[0, 2\pi]$ , y por la definición de  $c$  tenemos que  $x(0) = x(2\pi)$ . Luego, dado que  $x'(t) = iy(t) + \lambda ix(t)$ ,  $y(t), x(t) \in L^2[0, 2\pi]$ , tenemos que  $x'(t) \in L^2[0, 2\pi]$ .

Hemos probado también que  $R_\lambda : \text{Ran}(T_\lambda) \rightarrow L^2[0, 2\pi]$  está definida como

$$(R_\lambda y)(t) = e^{\lambda it} \left[ \int_0^t ie^{-\lambda is} y(s) ds + c \right]$$

donde  $c$  está definida en (4.5). Veamos entonces que  $R_\lambda$  es un operador acotado. Note primeramente que

$$\begin{aligned} (R_\lambda y)(t) &= \int_0^t ie^{\lambda i(t-s)} y(s) ds + \int_0^{2\pi} \frac{ie^{2\pi i\lambda}}{1 - e^{2\pi i\lambda}} e^{\lambda i(t-s)} y(s) ds \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{ie^{\lambda i(t-s)}}{1 - e^{2\pi i\lambda}} \left[ \chi_{[0,t]}(s)(1 - e^{2\pi i\lambda}) + e^{2\pi i\lambda} \right] y(s) ds \\ &= \int_0^{2\pi} F(t, s) y(s) ds \end{aligned}$$

con

$$F(t, s) = \begin{cases} \frac{ie^{\lambda i(t-s)}}{1 - e^{2\pi i\lambda}}, & \text{si } 0 \leq s \leq t \leq 2\pi \\ \frac{ie^{2\pi i\lambda}}{1 - e^{2\pi i\lambda}} e^{\lambda i(t-s)}, & \text{si } 0 \leq t < s \leq 2\pi \end{cases}$$

que es claramente el kernel de tipo Hilbert-Schmidt del operador integral  $S : L^2[0, 2\pi] \rightarrow L^2[0, 2\pi]$  definido por  $(Sy)(t) = \int_0^{2\pi} F(t, s) y(s) ds$ . Por el teorema 4.5 se sigue que  $S$  es acotado, es decir,  $R_\lambda$  es acotado, y está densamente definido para  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ . Así,  $\sigma_c(T) = \emptyset$ . ■

Los vectores propios asociados al operador  $T$  conforman una base de Hilbert del espacio  $L^2[0, 2\pi]$ . Los subespacios  $M_\alpha$  definidos en el teorema 4.3 resultan ser  $M_\alpha = \sum_{n=-\infty}^{[\alpha]} \oplus \text{lin} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int} \right)$ . Así la familia espectral de  $T$  está definida como  $(E_n - E_{n-0})x = \langle x, y_n(t) \rangle y_n(t)$  para cada  $n \in \mathbb{Z}$ . De modo que si  $x \in \mathcal{D}(T)$  entonces  $\langle Tx, y_n \rangle y_n = \langle x, Ty_n \rangle y_n = \langle x, ny_n \rangle y_n$  y por tanto

$$Tx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle Tx, y_n \rangle y_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n \langle x, y_n \rangle y_n.$$

De acuerdo con el teorema espectral para  $T$  lo anterior es igual a la fórmula

$$Tx = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_{\lambda}x.$$

En vista de las observaciones hechas al final de la sección 4.3, tenemos que  $x \in \mathcal{D}(T)$  equivale a la convergencia de

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 |\langle x, y_n \rangle|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d(E_{\lambda}x, x).$$

Este ejemplo particular ilustra sólo una parte de la importancia y relevancia que tiene la teoría espectral en el análisis funcional.

---

## Bibliografía

---

- [1] E. Kreyszig “Introductory Functional Analysis with Applications”, John Wiley and sons (1978).
- [2] E. Lorch “Spectral Theory”, Oxford University Press (1962).
- [3] F. Riesz, B.S. Nagy “Functional Analysis”, Dover Publications Inc. (1955).
- [4] F. Riesz. E. Lorch “The integral representation of unbounded self-adjoint transformations in Hilbert Space”, Transactions Amer. Math. Soc., **39** (1936), 331-340.
- [5] A. Taylor, D. Lay “Introduction to Functional Analysis”, Second Edition Krieger Publishing Company (1986).