

---

UNIVERSIDAD MICHOACANA DE  
SAN NICOLÁS DE HIDALGO

INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

*PROBLEMA DE NEUMANN PARA LA  
ECUACIÓN DE HELMHOLTZ  
EN ÁNGULO PLANO*

TESIS PARA OBTENER EL GRADO DE

*MAESTRA EN CS. MATEMÁTICAS*

PRESENTA

*TANYA JANNETTE VILLALBA VEGA*

ASESOR

*DR. ANATOLI MERZON*

AGOSTO DE 2008

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>3</b>
<b>1. Representación de la solución del problema de Neumann</b>	<b>5</b>
1.1. Reducción del problema de Neumann en ángulo al problema en un cuadrante . . . . .	5
1.2. Reducción del problema de Neumann en el cuadrante al problema de Neumann en el plano . . . . .	7
1.2.1. Transformada de Fourier-Laplace en conos . . . . .	9
1.2.2. Representación de la solución del Problema de Neumann .	10
<b>2. La ecuación en diferencias</b>	<b>13</b>
2.1. Reducción a la ecuación en diferencias . . . . .	13
2.2. Levantamiento del dato de Neumann . . . . .	17
2.2.1. Definición de levantamiento . . . . .	17
2.2.2. Propiedades del levantamiento . . . . .	17
2.3. La función $T(w)$ . . . . .	20
2.4. Continuación analítica de $T(w)$ y la ecuación en diferencias . . . . .	25
2.5. Solución de la ecuación en diferencias . . . . .	31
<b>3. Sumabilidad Cuadrada de la solución</b>	<b>33</b>
3.1. Propiedades de las funciones $\tilde{u}_1(z_1)$ y $\tilde{u}_2(z_2)$ . . . . .	33
3.2. Estimación de la norma de la solución $u(x)$ en $L_2$ . . . . .	35
<b>4. Conclusiones</b>	<b>39</b>
<b>A.</b>	<b>40</b>
A.1. Lemas auxiliares . . . . .	40
A.2. Estimaciones auxiliares . . . . .	44
A.3. Transformación del problema de Neumann en ángulo al primer cuadrante . . . . .	47
A.4. Los espacios de Schwartz . . . . .	49
<b>Bibliografía</b>	<b>52</b>

# Introducción

La meta de este trabajo es obtener la solución explícita del problema de Neumann en un ángulo plano de magnitud menor que  $\pi$ , y demostrar que esta solución pertenece a la clase  $L_2$ , si los datos sobre la frontera pertenecen a cierto espacio. Sea  $\Omega$  un ángulo plano de magnitud  $0 < \beta < \pi$ , con vértice en el origen y lados

$$\Gamma_1 := \{(x, 0) : x > 0\}, \quad \Gamma_2 := \{(s \cos \beta, s \operatorname{sen} \beta) : s > 0\}.$$

Consideramos el problema de Neumann en este ángulo

$$\begin{cases} (\Delta - 1)u(x, y) = 0, & (x, y) \in \Omega, \\ \partial_n u|_{\Gamma_1} = g(x), \\ \partial_n u|_{\Gamma_2} = 0. \end{cases} \quad (0.0.1)$$

Aquí, la primera ecuación se llama **Ecuación de Helmholtz**,  $\partial_n$  denota las derivadas normales exteriores a la frontera de  $\Omega$ , la función  $g(x)$  pertenece al espacio  $H_+^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}$  (el cual va a ser descrito a continuación) y  $\varepsilon \in (0, 1)$ . Al problema (0.0.1) se reduce el problema más general cuando  $\partial_n u|_{\Gamma_1} = g_1(x)$  y  $\partial_n u|_{\Gamma_2} = g_2(x)$ , donde  $(g_1(x), g_2(x)) \in H^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$  (véase [22]). El espacio de Sobolev  $H^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$ , es el espacio sobre una curva que no es suave. La teoría de tales espacios, fue creada en [4] y es bastante complicada, en este trabajo, no vamos a introducir este espacio, mencionamos solamente que la reducción fue hecha en [22].

Sea  $H^s(\mathbb{R}^n)$  el espacio de Sobolev sobre  $\mathbb{R}^n$ , con norma  $\|\cdot\|_s$ . Recordemos que este espacio se define como el espacio de las funciones generalizadas  $u \in S'(\mathbb{R}^n)$  (véase el Apéndice A.4), cuya Transformada de Fourier  $\tilde{u}(\xi)$  es localmente integrable en el sentido de Lebesgue y tal que

$$\|u\|_s^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{u}(\xi)|^2 (1 + |\xi|)^{2s} d\xi < \infty.$$

Sea  $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$  un dominio. Denotamos por  $H^s(\mathcal{V})$  el espacio de restricciones de las funciones de  $H^s(\mathbb{R}^n)$  a  $\mathcal{V}$  con la norma estándar, la cual también denotamos por  $\|\cdot\|_s$ . Definimos  $H_{\mathcal{V}}^s := \{f \in H^s(\mathbb{R}^n) : \operatorname{supp} f \subset \overline{\mathcal{V}}\}$  con la norma  $\|\cdot\|_s$ , como el subespacio de  $H^s(\mathbb{R}^n)$  que consiste de las funciones de  $H^s(\mathbb{R}^n)$  con soporte sobre

$\bar{\mathcal{V}}$ . En el caso  $\mathcal{V} = \mathbb{R}^+$ , denotamos este espacio por  $H_+^s$ . La solución  $u$  del problema (0.0.1) se busca en el espacio  $H^{1+\varepsilon}(\Omega)$ .

En el artículo [22], se demostró que si  $g \in H_+^{-\frac{1}{2}}$  entonces existe una única solución del problema de Neumann (0.0.1) que pertenece al espacio  $H^1(\Omega)$ . Para  $0 < \varepsilon < 1$  el problema sigue abierto. Sin embargo, como  $H_+^{-\frac{1}{2}+\varepsilon} \subset H_+^{-\frac{1}{2}}$  y  $H^{1+\varepsilon}(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ , entonces la unicidad del Problema de Neumann (0.0.1) cuando  $g \in H_+^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}$  se sigue del resultado de [22]. Para demostrar la existencia de la solución en el espacio  $H^{1+\varepsilon}$ , es suficiente probar que la solución que se obtuvo en [22] pertenece a  $H^{1+\varepsilon}$ . Esto se hace en dos etapas:

1.  $u \in L_2(\Omega)$ . (0.0.2)

2.  $\partial_{x_l} u \in H^\varepsilon(\Omega)$ ,  $l = 1, 2$ . (0.0.3)

En este trabajo nos limitamos a la demostración de (0.0.2). La prueba de (0.0.3), es técnicamente mucho más complicada y queda como problema pendiente; sin embargo, las principales ideas para su demostración estarán implícitas durante el desarrollo del trabajo. El plan de trabajo es el siguiente:

En el Capítulo 1, damos la representación de la solución usando el método de las características complejas [6].

En el Capítulo 2, reducimos el problema de Neumann (0.0.1) a la ecuación en diferencias y resolvemos esta ecuación.

En el Capítulo 3, demostramos que dicha solución pertenece al espacio  $L_2$ .

Finalmente, en el Apéndice, damos algunos resultados auxiliares que son necesarios para el trabajo.

# Capítulo 1

## Representación de la solución del problema de Neumann

### 1.1. Reducción del problema de Neumann en ángulo al problema en un cuadrante

En esta sección transformamos el problema de Neumann (0.0.1) en ángulo arbitrario, al problema de Neumann en el primer cuadrante. Para este propósito, realizamos el siguiente cambio de variable. Consideremos la transformación lineal del ángulo  $\Omega$  al primer cuadrante  $K_+ := \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1, x_2 > 0\}$ , con lados  $\gamma_1 := \{(x_1, 0) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0\}$  y  $\gamma_2 := \{(0, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\}$  dada por

$$(x_1, x_2) = \mathcal{L}(x, y) := \left( x - y \cot \beta, \frac{y}{\sin \beta} \right), \quad 0 < \beta < \pi. \quad (1.1.1)$$

Bajo esta función, el operador de Helmholtz se transforma en el operador (véase el Apéndice A.3):

$$\mathcal{A} \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right) := \frac{1}{\sin^2 \beta} \left( \Delta - 2 \cos \beta \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} - \sin^2 \beta \right). \quad (1.1.2)$$

Luego, si  $v(x, y)$  satisface la primera ecuación de Helmholtz en (0.0.1), entonces

$$u(x_1, x_2) := v(\mathcal{L}^{-1}(x_1, x_2))$$

satisface la ecuación de Helmholtz transformada, i.e.

$$\mathcal{A} \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right) u(x_1, x_2) = 0.$$

Similarmente a  $H^{1+\varepsilon}(\Omega)$ , definimos el espacio  $H^{1+\varepsilon}(K_+)$ , con  $\Omega = K_+$ . Obviamente,  $u(x_1, x_2) \in H^{1+\varepsilon}(K_+)$ , sii  $v(x, y) \in H^{1+\varepsilon}(K_+)$ .

El problema de Neumann (0.0.1) después de la transformación (1.1.1), pasa al siguiente problema en el cuadrante  $K_+$  (véase el Apéndice A.3):

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A} \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right) u(x_1, x_2) = 0, \quad (x_1, x_2) \in K_+, \\ \frac{1}{\text{sen}\beta} \left( \cos\beta \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2} \right) u(x_1, 0) = g(x_1), \quad x_1 > 0, \\ \left( -\frac{\partial}{\partial x_1} + \cos\beta \frac{\partial}{\partial x_2} \right) u(0, x_2) = 0. \quad x_2 > 0. \end{array} \right. \quad (1.1.3)$$

Precisamente, este sistema constituye el objeto principal de la tesis. El siguiente paso consiste en tomar la Transformada de Fourier de este sistema.

## 1.2. Reducción del problema de Neumann en el cuadrante al problema de Neumann en el plano

**Definición 2.1.** Sea  $u \in C^\infty(\overline{K_+})$ , es decir;  $u$  tiene derivadas continuas de todos los ordenes en la cerradura de  $K_+$ . Entonces,

$$u_0(x) := \begin{cases} u(x), & x \in \overline{K_+} \\ 0, & x \notin \overline{K_+} \end{cases}$$

es una extensión por cero de  $u \in C^\infty(\overline{K_+})$  a  $\mathbb{R}^2$ .

**Definición 2.2.** Para  $u \in C^\infty(\overline{K_+})$  definimos:

$$u_1^0(x_1) = u_0(x_1, 0), \quad u_2^1(x_2) = \left[ \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right]_0 \Big|_{x_1=0} \quad (1.2.1)$$

$$u_2^0(x_2) = u_0(0, x_2), \quad u_1^1(x_1) = \left[ \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right]_0 \Big|_{x_2=0};$$

donde  $[\cdot]_0$  denota la extensión por cero de la función. Las funciones  $u_l^\beta$ , para  $l = 1, 2$ , y  $\beta = 0, 1$ , se llaman los **datos de Cauchy**.

En el siguiente Teorema representamos el resultado de la aplicación del operador  $\mathcal{A}$  a la función  $u_0$ , a través de los datos de Cauchy, bajo la hipótesis de que  $u$  es una solución del problema de Neumann.

**Teorema 2.3.** Sea  $u_0$  una extensión por cero de la función  $u(x_1, x_2) \in C^\infty(\overline{K_+})$  tal que se cumple (1.1.3), y  $\mathcal{A}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right)$  el operador Helmholtz transformado (1.1.2), entonces

$$\mathcal{A}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right) u_0(x_1, x_2) = f_0(x_1, x_2), \quad (1.2.2)$$

donde

$$f_0(x_1, x_2) = \frac{1}{\text{sen}^2 \beta} \left\{ -\delta(x_1) \cos \beta \frac{\partial}{\partial x_2} u_2^0(x_2) - \delta(x_2) \cos \beta \frac{\partial}{\partial x_1} u_1^0(x_1) \right. \\ \left. + \delta'(x_1) u_2^0(x_2) + \delta'(x_2) u_1^0(x_1) - \delta(x_2) \text{sen} \beta g(x_1) \right\}; \quad (1.2.3)$$

aquí,  $\delta$  es un funcional lineal continuo que pertenece a  $S'(\mathbb{R}^2)$  y  $\delta'$  denota su derivada.

**Demostración.** Ya que  $u_0(x_1, x_2)$  es discontinua sobre  $\partial K_+$ , entonces utilizando la Definición 2.2, tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial x_1} u_0(x_1, x_2) = \left[ \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right]_0 + \delta(x_1) u_2^0(x_2). \quad (1.2.4)$$

De aquí,

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} u_0(x_1, x_2) = \left[ \frac{\partial^2 u(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} \right]_0 + \delta(x_1) u_2^1(x_2) + \delta'(x_1) u_2^0(x_2). \quad (1.2.5)$$

Análogamente,

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} u_0(x_1, x_2) = \left[ \frac{\partial^2 u(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} \right]_0 + \delta(x_2) u_1^1(x_1) + \delta'(x_2) u_1^0(x_1).$$

Un procedimiento similar para las derivadas parciales iteradas, implica que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} u_0(x_1, x_2) &= \left[ \frac{\partial^2 u(x_1, x_2)}{\partial x_2 \partial x_1} \right]_0 + \delta(x_2) \frac{\partial}{\partial x_1} u_1^0(x_1) + \delta(x_1) \frac{\partial}{\partial x_2} u_2^0(x_2) - \\ &\delta(x_1) \delta(x_2) u_0(0, 0). \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

Sustituyendo (1.2.5)-(1.2.6) en el lado izquierdo de la igualdad (1.2.2), y utilizando que  $u(x_1, x_2)$  satisface la primera ecuación de (1.1.3), obtenemos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right) u_0(x_1, x_2) &= \frac{1}{\text{sen}^2 \beta} \left\{ \delta(x_1) u_2^1(x_2) + \delta'(x_1) u_2^0(x_2) + \delta(x_2) u_1^1(x_1) + \right. \\ &\left. \delta'(x_2) u_1^0(x_1) - 2 \cos \beta \left( \delta(x_2) \frac{\partial}{\partial x_1} u_1^0(x_1) + \delta(x_1) \frac{\partial}{\partial x_2} u_2^0(x_2) - \delta(x_1, x_2) u_0 \right) \right\}, \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

donde  $\delta(x_1, x_2) \equiv \delta(x_1) \delta(x_2)$  y  $u_0 \equiv u_0(0, 0)$ . Por otro lado, la segunda ecuación de (1.1.3) implica que

$$\cos \beta \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} u(x_1, x_2) \right]_{0|_{x_2=0}} - \left[ \frac{\partial}{\partial x_2} u(x_1, x_2) \right]_{0|_{x_2=0}} = \text{sen} \beta g(x_1), \quad x_1 \in \mathbb{R}.$$

Utilizando (1.2.4) y la definición 2.2, la igualdad anterior es equivalente a la expresión

$$\cos \beta \left( \frac{\partial}{\partial x_1} u_1^0(x_1) - \delta(x_1) u \right) - u_1^1(x_1) = \text{sen} \beta g(x_1), \quad x_1 \in \mathbb{R}.$$

De aquí,

$$u_1^1(x_1) = \cos \beta \frac{\partial}{\partial x_1} u_1^0(x_1) - \cos \beta \delta(x_1) u - \text{sen} \beta g(x_1). \quad (1.2.8)$$

Además, de la tercera ecuación de (1.1.3) se sigue que

$$-\left[\frac{\partial}{\partial x_1}u(x_1, x_2)\right]_0\Big|_{x_1=0} + \cos\beta \left[\frac{\partial}{\partial x_2}u(x_1, x_2)\right]_0\Big|_{x_1=0} = 0, \quad x_2 \in \mathbb{R}.$$

Utilizando un procedimiento similar al mencionado arriba, por (1.2.1), la expresión anterior implica que

$$u_2^1(x_2) = \cos\beta \frac{\partial}{\partial x_2}u_2^0(x_2) - \cos\beta\delta(x_2)u. \quad (1.2.9)$$

Luego, sustituyendo en (1.2.7), en lugar de  $u_l^1(x_l)$ , para  $l = 1, 2$ , sus expresiones (1.2.8) y (1.2.9), obtenemos (1.2.2) con  $f_0(x_1, x_2)$  dada por (1.2.3). ■

**Observación 2.4.** *El Teorema 2.3 se demuestra bajo la hipótesis de que la función  $u$  es suave. Sin embargo; resulta que cuando  $u \in S'(K_+)$  existe  $u_0$ , una continuación por cero de  $u$ , tal que  $u_0 \in S'(\overline{K_+})$  y  $f_0$  tiene la misma representación (1.2.3). Esta afirmación está demostrada en [6]. Además, de los resultados de [6] se sigue que (1.2.2) y (1.2.3) implican (1.1.3) con  $u = u_0|_{K_+}$ .*

### 1.2.1. Transformada de Fourier-Laplace en conos

Recordemos algunos hechos básicos acerca de la Transformada de Fourier compleja (la cual, de aquí en adelante será llamada simplemente Transformada de Fourier). Sea  $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}^n$  un dominio, denotamos por  $H(\mathcal{O})$  el conjunto de todas las funciones holomorfas en  $\mathcal{O}$ . Sean  $\overline{K} \subset \mathbb{R}^n$  un cono convexo con vértice en el origen, que no contiene líneas rectas;  $K^* \equiv \{\tau \in \mathbb{R}^n : \tau \cdot x \geq 0 \forall x \in K\}$ , y  $\mathbb{C}K^* := \mathbb{R}^n + iK^*$ . Para una función prueba  $f(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ , su Transformada de Fourier esta definida por

$$\tilde{f}(z) \equiv F_{x \rightarrow z}[f] = \int e^{izx} f(x) dx, \quad z \in \mathbb{R}^n.$$

Si  $f(x_1, x_2)$  y  $f(x)$  son distribuciones temperadas con soportes en  $\overline{K_+}$  y  $\overline{\mathbb{R}^+}$  respectivamente, entonces el Teorema de Paley-Wiener [8] establece que las funciones  $\tilde{f}(z_1, z_2)$  y  $\tilde{f}(z)$  son densidades locales de funcionales analíticos sobre los conjuntos  $\mathbb{C}K_+^* := \{z \in \mathbb{C}^2, \text{Im}z_{1,2} > 0\}$  y  $\mathbb{C}^+ := \{z \in \mathbb{C}, \text{Im}z > 0\}$  (de aquí en adelante, diremos simplemente “funcionales analíticos sobre los correspondientes conjuntos”) dadas por

$$\tilde{f}(z) = \langle f(x), e^{izx} \rangle, \quad z \in \mathbb{C}K_+^* \quad \text{o} \quad z \in \mathbb{C}^+.$$

Por otro lado,  $f \in S'(\overline{K})$  sii (véase [18])

$$|\tilde{f}(z)| \leq C(1 + |z|)^\mu \rho^{-\nu}(z), \quad z \in \mathbb{C}K_+^* \quad \text{o} \quad z \in \mathbb{C}^+, \quad (1.2.10)$$

donde  $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ ,  $\rho(z)$  es la distancia de  $z$  a la frontera de  $\mathbb{C}K^*$  o de  $\mathbb{C}^+$ . Además, también es válida la siguiente afirmación (véase [18]): la Transformada de Fourier real  $\tilde{f}(\sigma)$  con  $\sigma \in \mathbb{R}^n$ , es el valor de frontera de la función analítica  $\tilde{f}(z)$  con  $z = \sigma + i\tau$  cuando  $\tau \rightarrow 0+$ ,  $\tau \in K^*$ ; en el siguiente sentido:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0+, \tau \in K^*} \tilde{f}(\sigma + i\tau) = \tilde{f}(\sigma) \quad \text{en } S'(\mathbb{R}_\sigma^n).$$

La Transformada de Fourier del espacio de las funciones de  $S'(\overline{K})$  se denotará por  $\tilde{S}'(\overline{K})$ . Otra propiedad importante de la Transformada de Fourier-Laplace compleja es la siguiente: sea  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ , entonces

$$\begin{aligned} F_{x \rightarrow z}[f'(x)] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{izx} f'(x) dx = f(x) e^{izx} \Big|_{-\infty}^{\infty} - iz \int_{-\infty}^{\infty} e^{izx} f(x) dx \\ &= -iz \tilde{f}(z). \end{aligned}$$

Por lo tanto, el "símbolo de operador derivada" bajo la Transformada de Fourier es  $-iz$ , i.e.

$$\frac{d}{dx} \sim (-iz). \quad (1.2.11)$$

Análogamente,

$$\frac{d^2}{dx^2} \sim (-z^2). \quad (1.2.12)$$

Por lo tanto, el símbolo del operador de Helmholtz bajo la Transformada de Fourier esta dado por

$$\widetilde{\Delta} = \frac{\widetilde{\partial^2}}{\partial x_1^2} + \frac{\widetilde{\partial^2}}{\partial x_2^2} = (-z_1^2 - z_2^2). \quad (1.2.13)$$

Luego, el símbolo del operador de Helmholtz transformado (1.1.2), bajo la Transformada de Fourier es:

$$\mathcal{A}(z_1, z_2) \equiv \tilde{\mathcal{A}}(z_1, z_2) := \frac{1}{\text{sen}^2 \beta} [-z_1^2 - z_2^2 + 2z_1 z_2 \cos \beta - \text{sen}^2 \beta] \quad (1.2.14)$$

## 1.2.2. Representación de la solución del Problema de Neumann

En esta sección damos la representación de la solución del problema (0.0.1). Aplicando la Transformada de Fourier-Laplace compleja a la igualdad (1.2.2) y usando las propiedades (1.2.11)-(1.2.13), obtenemos:

$$\mathcal{A}(z_1, z_2) \tilde{u}_0(z_1, z_2) = \tilde{f}_0(z_1, z_2), \quad z \in \mathbb{C}K_+^*, \quad (1.2.15)$$

donde  $\mathcal{A}(z_1, z_2)$  esta dado por (1.2.14). Para encontrar  $\tilde{f}_0(z_1, z_2)$ , aplicamos la Transformada de Fourier-Laplace compleja a la función  $f_0$  definida por (1.2.3), y usando las propiedades (1.2.11)-(1.2.13) obtenemos:

$$\tilde{f}_0(z) = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \beta} [-\operatorname{sen} \beta \tilde{g}(z_1) + (iz_1 \cos \beta - iz_2) \tilde{u}_1(z_1) + (iz_2 \cos \beta - iz_1) \tilde{u}_2(z_2)], \quad (1.2.16)$$

donde

$$\tilde{g}(z_1) := F_{x_1 \rightarrow z_1}[g(x_1)], \quad z_1 \in \mathbb{C}^+. \quad (1.2.17)$$

Ahora vamos a dar la condición necesaria y suficiente para que se cumpla la igualdad (1.2.15). Para esto, necesitamos la siguiente:

**Definición 2.5.** *Las características complejas del operador  $\mathcal{A}$  se definen como*

$$V := \{z \in \mathbb{C}^2 : \mathcal{A}(z) = 0\}. \quad (1.2.18)$$

Además, consideramos el dominio:

$$V^* := V \cap \mathbb{C}K^*. \quad (1.2.19)$$

Luego, la condición necesaria para que (1.2.15) se satisfaga, es:

$$\tilde{f}_0(z) = 0 \quad \text{para } z \in V^*, \quad (1.2.20)$$

por que la parte izquierda de (1.2.15) se anula sobre  $V^*$ . La ecuación anterior juega un gran papel en el Método de las Características complejas (véase [6]), y se llama la **ecuación de conexión**.

Supongamos que (1.2.20) se cumple, entonces la función

$$\tilde{u}_0(z) := \frac{\tilde{f}_0(z)}{\mathcal{A}(z)}, \quad z \in \mathbb{C}K^* \setminus V. \quad (1.2.21)$$

pertenece al espacio  $H(\mathbb{C}K^*)$  ( ya que  $\tilde{u}_0(z)$  se puede definir en  $V$  de manera que la función obtenida pertenezca al espacio  $H(\mathbb{C}K^*)$ ). Además, se puede demostrar que la función  $\tilde{u}_0(z)$  admite una cota del tipo (1.2.10). De aquí, por el Teorema de Paley-Wiener, existe

$$u_0(x) := F_{z \rightarrow x}^{-1}[\tilde{u}_0(z)], \quad x \in \mathbb{R}^2 \quad (1.2.22)$$

y

$$\operatorname{supp} u_0(x) \subset \overline{K_+}. \quad (1.2.23)$$

Sea

$$u(x) := u_0(x)|_{K_+}. \quad (1.2.24)$$

Usaremos el siguiente resultado.

**Teorema 2.6.** (véase [22], Teorema 5.1) Sean  $\tilde{u}_{1,2}(z_{1,2}) \in \tilde{S}'(\mathbb{R}^+)$  tales que (1.2.20) se cumple para  $\tilde{f}_0$  definido por (1.2.16). Si  $u(x)$  definido por (1.2.24) pertenece a  $H^{1+\varepsilon}(K_+)$ , entonces  $u(x)$  es solución del problema de Neumann (0.0.1).

De esta manera, la solución del problema de Neumann (0.0.1) se reduce al siguiente problema:

- A.** Encontrar dos funciones  $\tilde{u}_{1,2}(z_{1,2}) \in \tilde{S}'(\overline{\mathbb{R}^+})$  tales que  $u(x)$  definida por (1.2.24), con  $\tilde{f}_0$  definida por (1.2.16) pertenezca a  $H^{1+\varepsilon}(K_+)$ .

# Capítulo 2

## La ecuación en diferencias

### 2.1. Reducción a la ecuación en diferencias

En esta sección reduciremos el problema **A** a una ecuación en diferencias, usando el Método de las Características complejas, expuesto en [6], [7], [12], [14]. A continuación describiremos brevemente, pero completamente el algoritmo correspondiente.

Parametrizamos la superficie de Riemann  $V \subset \mathbb{C}^2$  de ceros del símbolo del operador  $\mathcal{A}(z)$  mediante el parámetro  $w \in \mathbb{C}$ , por las siguientes fórmulas

$$z = z(w) := (z_1(w), z_2(w)) := (\sinh w, \sinh(w + i\beta)). \quad (2.1.1)$$

Para  $a < b$ , denotamos por  $\Pi_a^b$  la franja horizontal en el plano complejo definida por

$$\Pi_a^b = \{w : a < \operatorname{Im} w < b\}.$$

Obviamente, las funciones  $\sinh w$  y  $\sinh(w + i\beta)$  proveen una cubierta de 2-hojas de  $\mathbb{C}^+$  por  $\Pi_0^\pi$  y  $\Pi_{-\beta}^{\pi-\beta}$  respectivamente. Sean  $\hat{V}_1^+ \equiv \Pi_0^\pi$  y  $\hat{V}_2^+ \equiv \Pi_{-\beta}^{\pi-\beta}$ . Consideremos los automorfismos

$$\hat{h}_1(w) = -w + i\pi, \quad w \in \hat{V}_1^+, \quad (2.1.2)$$

y

$$\hat{h}_2(w) = -w + i\pi - 2i\beta, \quad w \in \hat{V}_2^+. \quad (2.1.3)$$

Notemos que las cubiertas  $\Pi_0^\pi$  y  $\Pi_{-\beta}^{\pi-\beta}$  son invariantes bajo  $\hat{h}_1$  y  $\hat{h}_2$  respectivamente. Además, es fácil verificar que  $\hat{h}_1(w)$  es simétrico en  $\hat{V}_1^+$  con respecto al punto  $i\pi/2$ , y  $\hat{h}_2$  es simétrico en  $\hat{V}_2^+$  con respecto al punto  $i\pi/2 - i\beta$ . Definimos las funciones  $\hat{g}(w)$  y  $\hat{u}_{1,2}(w)$  mediante las fórmulas

$$\hat{u}_1(w) = \tilde{u}_1(z_1(w)), \quad w \in \hat{V}_1^+, \quad (2.1.4)$$

$$\hat{u}_2(w) = \tilde{u}_2(z_2(w)), \quad w \in \hat{V}_2^+, \quad (2.1.5)$$

$$\hat{g}(w) = \tilde{g}(z_1(w)), \quad w \in \hat{V}_1^+. \quad (2.1.6)$$

Obviamente, la analiticidad de  $\tilde{u}_1(z_1)$  y de  $\tilde{g}(z_1)$  en  $\mathbb{C}^+$  es equivalente a la analiticidad de  $\hat{u}_1(w)$  y  $\hat{g}(w)$  en  $\hat{V}_1^+$ , con la condición de automorfía (la cual nombraremos en lo sucesivo, la simetría de las funciones):

$$\begin{aligned} \hat{u}_1(\hat{h}_1(w)) &\equiv \hat{u}_1(-w + i\pi) = \hat{u}_1(w) \\ \hat{g}(-w + i\pi) &= \hat{g}(w) \end{aligned} \quad w \in \hat{V}_1^+. \quad (2.1.7)$$

Y, de forma análoga, la analiticidad de  $\tilde{u}_2(z_2)$  en  $\mathbb{C}^+$  es equivalente a la analiticidad de  $\hat{u}_2(w)$  en  $\hat{V}_2^+$  con la condición de simetría:

$$\hat{u}_2(\hat{h}_2(w)) \equiv \hat{u}_2(-w + i\pi - 2i\beta) = \hat{u}_2(w), \quad w \in \hat{V}_2^+. \quad (2.1.8)$$

Reescribimos la ecuación de conexión (1.2.20) en la variable  $w$  usando las fórmulas (2.1.1), (2.1.4) y (2.1.4). Aquí, para el dominio  $V^* \subset V$ , el dominio correspondiente en  $\hat{V}$  (su levantamiento) es  $\hat{V}^* := \Pi_0^\pi \cap \Pi_{-\beta}^{\pi-\beta} = \{w \in \mathbb{C} : 0 < \text{Im} < \pi - \beta\}$ . Después de algunas manipulaciones trigonométricas, y dividiendo por  $\text{sen}\beta$ , obtenemos

$$\hat{u}_1(w) \cosh w - \hat{u}_2(w) \cosh(w + i\beta) = \hat{g}(w), \quad w \in \hat{V}^*. \quad (2.1.9)$$

Esto prueba la siguiente afirmación.

**Lema 1.1.** *La ecuación de conexión (1.2.20), en la clase de funciones analíticas en  $\mathbb{C}^+$ , es equivalente al sistema (2.1.7)-(2.1.9) para las funciones  $\hat{u}_l(w)$  con  $l = 1, 2$ , analíticas en los dominios  $\hat{V}_l^+$ , respectivamente.*

Ahora reducimos el sistema (2.1.7)-(2.1.9) a una ecuación en diferencias .

Como  $\hat{u}_1$  y  $\hat{g}$  son analíticas en  $\Pi_0^\pi$ , entonces la función  $\hat{u}_2$  tiene continuación meromorfa en  $\Pi_0^\pi$  por la ecuación (2.1.9), y por lo tanto, en el dominio  $\Pi_{-\beta}^\pi = \Pi_0^\pi \cup \Pi_{-\beta}^{\pi-\beta}$ ; de aquí, la ecuación (2.1.9) se cumple en el dominio  $\Pi_0^\pi$ . Ya que, la función  $\hat{u}_2(w)$  es meromorfa en  $\Pi_{-\beta}^\pi$  y simétrica con respecto al punto  $i\pi/2 - i\beta$  (véase (2.1.8)), se puede continuar a una función meromorfa y simétrica en el dominio  $\Pi_{-2\beta}^\pi = \Pi_{-\beta}^\pi \cup \hat{h}_2\Pi_{-\beta}^\pi$  mediante la fórmula  $\hat{u}_2(w) = \hat{u}_2(\hat{h}_2(w))$ ,  $w \in \Pi_{-2\beta}^\pi$  (véase la figura 2.1). Por otro lado, evaluando la ecuación (2.1.9) (considerada sobre  $\Pi_0^\pi$ ), en el automorfismo  $\hat{h}_1$ , sumando la ecuación obtenida con (2.1.9), y usando la simetría de las funciones  $\hat{u}_1$  y  $\hat{g}$  (véase (2.1.7)), i.e.

$$\hat{u}_2(\hat{h}_1(w)) = \hat{u}_2(\hat{h}_2\hat{h}_1w) = \hat{u}_2(w - 2i\beta), \quad (2.1.10)$$

obtenemos

$$\hat{u}_2(w) \cosh(w + i\beta) - \hat{u}_2(w - 2i\beta) \cosh(w - i\beta) = -2\hat{g}(w), \quad w \in \Pi_0^\pi, \quad (2.1.11)$$

donde  $\hat{u}_2(w)$  tiene continuación meromorfa en  $\Pi_{-2\beta}^\pi$ , y

$$\hat{u}_2(\hat{h}_2(w)) = \hat{u}_2(w), \quad w \in \Pi_{-2\beta}^\pi. \quad (2.1.12)$$

Esta es la ecuación en diferencias que deseabamos obtener. Así, el sistema (2.1.7)-(2.1.9) implica (2.1.11) y (2.1.12). Investiguemos ahora la afirmación opuesta.

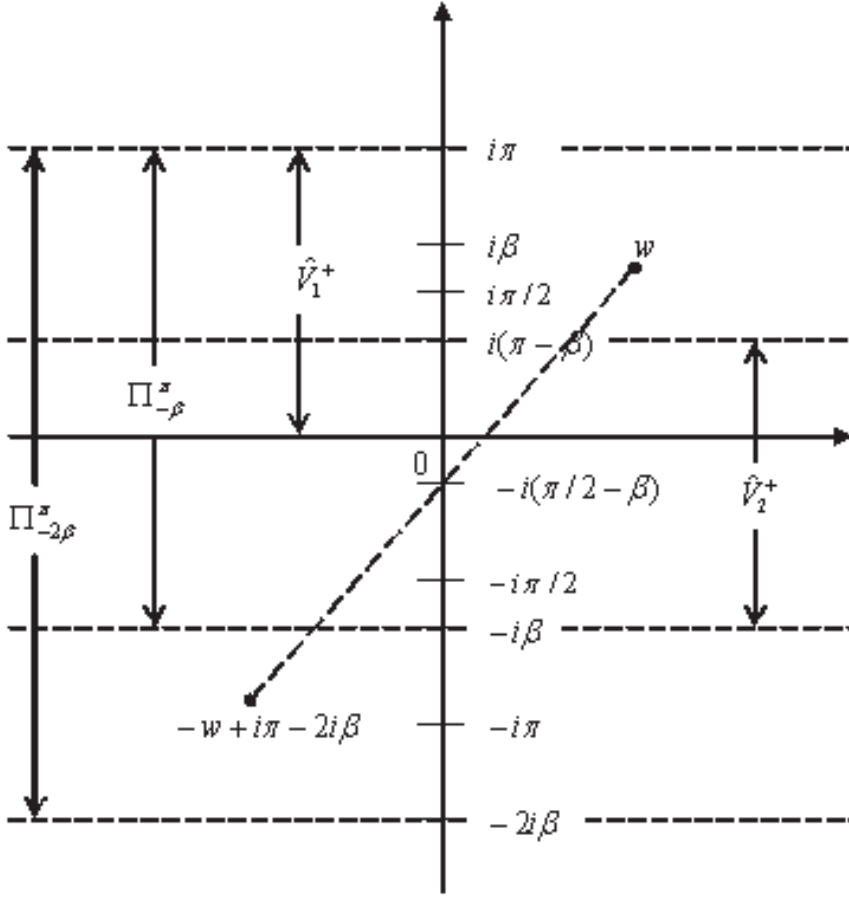


Figura 2.1: Continuación por simetría de  $\hat{u}_2(w)$ .

**Lema 1.2.** Sea  $\hat{u}_2(w)$  analítica en  $\Pi_{-\beta}^{\pi-\beta}$ , meromorfa en  $\Pi_{-2\beta}^{\pi}$  con posibles polos en los puntos donde  $\cosh(w + i\beta) = 0$ , y tal que satisface el sistema (2.1.11)-(2.1.12). Entonces la función

$$\hat{u}_1(w) = \frac{\hat{g}(w) + \hat{u}_2(w) \cosh(w + i\beta)}{\cosh w}, \quad w \in \Pi_0^{\pi} \quad (2.1.13)$$

es analítica en  $\Pi_0^{\pi}$  y el par  $\hat{u}_1, \hat{u}_2$  es solución del problema (2.1.7)-(2.1.9).

**Demostración.** La igualdad (2.1.13) implica que  $\hat{u}_1$  y  $\hat{u}_2$  satisfacen (2.1.9). La función  $\hat{u}_2$  satisface (2.1.8) por (2.1.12). Probaremos ahora que  $\hat{u}_1$  satisface (2.1.7). De (2.1.13) tenemos que

$$\hat{u}_1(-w + i\pi) = -\frac{1}{\cosh w} (\hat{g}(-w + i\pi) - \hat{u}_2(-w + i\pi) \cosh(w - i\beta)), \quad w \in \Pi_0^{\pi}. \quad (2.1.14)$$

Esta igualdad, junto con (2.1.8), (2.1.9) y (2.1.11), implican que  $\hat{u}_1$  satisface (2.1.7). Finalmente, la analiticidad de  $\hat{u}_1(w)$  en  $\Pi_0^{\pi}$  se sigue de la analiticidad de  $\hat{g}(w)$  en  $\Pi_0^{\pi}$ ,

la analiticidad de  $\hat{u}_2$  en  $\Pi_0^\pi$ , y el hecho de que  $\hat{g}(i\pi/2) + \hat{u}_2(i\pi/2) \cosh(i\pi/2 + i\beta) = 0$ . La última igualdad se sigue de (2.1.11) para  $w = i\pi/2$  después de usar (2.1.12) (véase el Lema A.1.4 del Apéndice A.1). El lema está probado. ■

Los sistemas (2.1.7)-(2.1.9) y (2.1.11)-(2.1.12) son equivalentes en la clase de funciones analíticas en sus dominios correspondientes. Nosotros encontraremos una solución “natural” de (2.1.11)-(2.1.12) de esta clase, y chequearemos que el correspondiente par de funciones  $\tilde{u}_1(z_1)$  y  $\tilde{u}_2(z_2)$  es una solución del problema **A**. Más precisamente, las siguientes afirmaciones se cumplen:

**Teorema 1.3.** *Sea  $\hat{u}_2(w) \in H(\Pi_{-\beta}^{\pi-\beta})$ , meromorfa en  $\Pi_{2\beta}^\pi$ , con posibles polos en los puntos donde  $\cosh(w + i\beta) = 0$  y solución del problema (2.1.11)-(2.1.12). Supongamos que  $\tilde{u}_l(z_l)$  para  $l = 1, 2$ , definidas por las fórmulas (2.1.13) y (2.1.4) pertenecen a  $\tilde{S}'(\overline{\mathbb{R}^+})$  y que  $u(x)$  definida por (1.2.22) pertenece a  $H^{1+\varepsilon}(K_+)$ . Entonces  $u(x)$  es solución del problema **A**.*

**Demostración.** Por el Lema 1.2,  $\hat{u}_1$  y  $\hat{u}_2$  son solución de (2.1.7)-(2.1.9). Por el Lema 1.1, el último problema es equivalente a la ecuación de conexión (1.2.20) en la clase de funciones analíticas. Si, además,  $\tilde{u}_l(z_l) \in \tilde{S}'(\overline{\mathbb{R}^+})$  con  $l = 1, 2$ , y  $u(x)$  definida por (1.2.22) pertenece a  $H^{1+\varepsilon}(K_+)$ , entonces  $u$  es solución del problema **A**, el cual es equivalente al problema (0.0.1) por el Teorema 2.6. El Teorema está probado. ■

En las siguientes dos secciones, comenzamos con algunas propiedades de la función  $\hat{g}(w)$ . Después, en las secciones 7 y 8 construimos una solución de la ecuación en diferencias homogénea.

## 2.2. Levantamiento del dato de Neumann

### 2.2.1. Definición de levantamiento

Sean

$$g \in H^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}(\mathbb{R}^+), \quad \varepsilon \in [0, 1) \quad (2.2.1)$$

y

$$\tilde{g}(z_1) := F_{x_1 \rightarrow z_1}[g(x_1)], \quad z_1 \in \mathbb{C}^+ \quad (2.2.2)$$

la Transformada de Fourier-Laplace de la función  $g(x_1)$ . Por el Teorema de Paley-Wiener [8]

$$\tilde{g}(z_1) \in H(\mathbb{C}^+). \quad (2.2.3)$$

Luego, para cualquier  $\tilde{f}(z_1) \in H(\mathbb{C}^+)$  denotamos por  $\hat{f}(w)$  el **levantamiento** de la función  $\tilde{f}(z_1)$  a la cubierta universal  $\hat{V}$ :

$$\hat{f}(w) := \tilde{f}(\sinh w), \quad w \in \Pi_0^\pi. \quad (2.2.4)$$

entonces, por (2.2.2) y (2.1.1)

$$\hat{g} \in H(\Pi_0^\pi), \quad (2.2.5)$$

y es simétrico en este dominio con respecto a  $i\frac{\pi}{2}$ :

$$\hat{g}(-w + i\pi) = \hat{g}(w), \quad w \in \Pi_0^\pi. \quad (2.2.6)$$

En la siguiente sección y en lo que resta de esta,  $w$  se representará como  $w = w_1 + iw_2$ , con  $w_1, w_2 \in \mathbb{R}$ .

### 2.2.2. Propiedades del levantamiento

Ahora probaremos la principal propiedad de  $\hat{g}(w)$  (véase la Proposición 2.5). Iniciamos con un lema auxiliar.

Sea  $\sqrt{1+\xi^2}$  una rama de  $\sqrt{z}$  tal que  $\sqrt{1+\xi^2} \geq 0$ , para  $\xi \in \mathbb{R}$ .

**Lema 2.4.** *Existe  $C > 0$  tal que para cualquier  $\alpha \in [\pi/2 - 1, \pi/2 + 1]$ , se satisface la cota uniforme*

$$\|\tilde{f}(\xi \cos \alpha + i\sqrt{1+\xi^2} \operatorname{sen} \alpha)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq C \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^+)}, \quad f \in L_2(\mathbb{R}^+). \quad (2.2.7)$$

**Demostración.** Notemos que

$$\|\tilde{f}(\xi \cos \alpha + i\sqrt{1+\xi^2} \operatorname{sen} \alpha)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \int_0^\infty e^{-\sqrt{1+\xi^2} \operatorname{sen} \alpha x} |f(x)| dx. \quad (2.2.8)$$

Por lo tanto, es suficiente aplicar la prueba de Schur (véase el Apéndice A.1, Lema A.1.6) al operador generado por el kernel

$$K(x, \xi) := \begin{cases} e^{-\operatorname{sen}\alpha x \sqrt{1+\xi^2}}, & x, \xi \geq 0, \\ 0, & \text{en otro caso;} \end{cases} \quad (2.2.9)$$

y demostrar que  $D$  y  $E$  se pueden escoger para toda  $\alpha \in [\pi/2 - 1, \pi/2 + 1]$ . Sean  $p(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$  y  $q(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\xi}}$ , probaremos que

$$\int_0^\infty e^{-\operatorname{sen}\alpha x \sqrt{1+\xi^2}} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \leq \frac{C}{\sqrt{z}} \quad (2.2.10)$$

y

$$\int_0^\infty e^{-x\sqrt{1+z^2}} \frac{1}{\sqrt{z}} dz \leq \frac{C}{\sqrt{x}}, \quad (2.2.11)$$

donde  $C$  no depende de  $\alpha \in [\pi/2 - 1, \pi/2 + 1]$ . Demostremos primero (2.2.10). Hacemos el cambio de variable:

$$\operatorname{sen}\alpha x \sqrt{1+\xi^2} = s \Rightarrow dx = \frac{ds}{\operatorname{sen}\alpha \sqrt{1+\xi^2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{(1+\xi^2)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\operatorname{sen}\alpha}}{\sqrt{s}}.$$

Sustituyendo estas expresiones en (2.2.10), obtenemos

$$\int_0^\infty e^{-\operatorname{sen}\alpha x \sqrt{1+\xi^2}} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{\sqrt[4]{1+\xi^2} \sqrt{\operatorname{sen}\alpha}} \int_0^\infty \frac{e^{-s}}{\sqrt{s}} ds \leq \frac{C}{\sqrt[4]{1+\xi^2} \sqrt{\operatorname{sen}\alpha}} \leq \frac{D}{\sqrt[4]{1+\xi^2}}, \quad (2.2.12)$$

para  $|\alpha - \pi/2| \leq 1$ .

De manera similar se prueba la desigualdad (2.2.11), con ayuda del cambio de variable  $x\xi \operatorname{sen}\alpha = s$ . ■

Para  $\alpha \in \mathbb{R}$ , denotamos  $\mathcal{C}_\alpha = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} w = \alpha\}$ .

**Proposición 2.5.** (véase [22], Lema 7.2) *La función  $\hat{g}(w)e^{\varepsilon|w|}$  es cuadrado integrable sobre cada línea recta  $\mathcal{C}_\alpha \subset \Pi_0^\pi$ , con  $|\alpha - \pi/2| \leq 1$  paralela al eje real, con la siguiente cota uniforme*

$$\int_{\mathcal{C}_\alpha} |\hat{g}(w)|^2 e^{2\varepsilon|w|} |dw| \leq C \|g\|_{-\frac{1}{2}+\varepsilon}^2, \quad |\alpha - \pi/2| \leq 1. \quad (2.2.13)$$

**Demostración.** Por la hipótesis (2.2.1)  $g(x_1) \in H_+^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}(\mathbb{R}^+)$ , de aquí, por el Teorema de Paley-Wiener [3]  $\tilde{g}(z_1)$  es analítica en  $\mathbb{C}^+$ .

Definimos

$$g_s(x_1) := F_{z_1 \rightarrow x_1}^{-1} \left[ \frac{\tilde{g}(z_1)}{(z_1 + i)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}} \right], \quad (2.2.14)$$

donde la rama de la función exponencial en (2.2.14), es tal que es analítica en el dominio  $\mathbb{C}^+$ . Obviamente,

$$\|g_s\|_0 \leq C_1 \|g\|_{-\frac{1}{2}+\varepsilon}, \quad g \in H_+^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}. \quad (2.2.15)$$

Por otro lado, aplicando el Lema 2.4 a la función  $\tilde{g}_s(z_1)$ , obtenemos

$$\|\tilde{g}_s(\xi_1 \cos \alpha + i\sqrt{1 + \xi_1^2} \operatorname{sen} \alpha)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq C_1 \|g_s\|_{L_2(\mathbb{R}^+)}, \quad |\alpha - \pi/2| \leq 1, \quad (2.2.16)$$

i.e.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{g}_s(\xi_1 \cos \alpha + i\sqrt{1 + \xi_1^2} \operatorname{sen} \alpha)|^2 d\xi_1 \leq C_1 \|g_s\|_{L_2(\mathbb{R}^+)}^2, \quad |\alpha - \pi/2| \leq 1. \quad (2.2.17)$$

Además, de (2.1.1) se sigue que la última desigualdad puede escribirse como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{g}_s(\operatorname{senh}(w_1 + i\alpha))|^2 \cosh w_1 |dw_1 \leq C_1 \|g_s\|_{L_2(\mathbb{R}^+)}^2, \quad |\alpha - \pi/2| \leq 1. \quad (2.2.18)$$

Por (2.2.14),  $|\tilde{g}_s(\operatorname{senh}(w_1 + i\alpha))|^2 = |\tilde{g}(\operatorname{senh}(w_1 + i\alpha))|^2 (\operatorname{senh}(w_1 + i\alpha) + i)^{2\varepsilon-1}$ . Entonces, sustituyendo esta expresión en (2.2.18) obtenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{g}(\operatorname{senh}(w_1 + i\alpha))|^2 (\operatorname{senh}(w_1 + i\alpha) + i)^{2\varepsilon-1} \cosh w_1 |dw_1 \leq C_1 \|g\|_{-\frac{1}{2}+\varepsilon}^2, \quad |\alpha - \pi/2| \leq 1. \quad (2.2.19)$$

Ya que, para  $|\alpha - \pi/2| \leq 1$  se cumple que

$$\begin{aligned} |\sin(w_1 + i\alpha) + i|^2 &= |\operatorname{senh} w_1 \cos \alpha + i \cosh w_1 \operatorname{sen} \alpha + i|^2 \\ &\geq (1 + \cos w_1 \alpha)^2 \geq C^2 \cosh w_1, \end{aligned} \quad (2.2.20)$$

entonces

$$|\operatorname{sen}(w_1 + i\alpha) + i|^{2\varepsilon-1} \cosh w_1 \geq C_2 e^{2\varepsilon|w_1|}, \quad w_1 \in \mathbb{R}. \quad (2.2.21)$$

Por lo tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{g}(\operatorname{senh}(w_1 + i\alpha))|^2 e^{2\varepsilon|w_1|} |dw_1 \leq C_3 \|g\|_{-\frac{1}{2}+\varepsilon}^2, \quad |\alpha - \pi/2| \leq 1. \quad (2.2.22)$$

Por (2.2.4) esta expresión es equivalente a

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{g}(w_1 + i\alpha)|^2 e^{2\varepsilon|w_1|} |dw_1 \leq C_3 \|g\|_{-\frac{1}{2}+\varepsilon}^2, \quad |\alpha - \pi/2| \leq 1, \quad (2.2.23)$$

la cual es equivalente a la cota uniforme (2.2.13). ■

### 2.3. La función $T(w)$

Para construir la solución del problema de Neumann (0.0.1), el papel clave lo juega una función  $T(w)$  que es solución de la ecuación en diferencias que corresponde a la ecuación en diferencias (2.1.11)

$$T(w + i\beta) - T(w - i\beta) = -2\hat{g}(w + i\pi/2), \quad w \in \Pi_{-\pi/2}^{\pi/2}, \quad (2.3.1)$$

con la condición de antisimetría

$$T(-w) = -T(w), \quad w \in \Pi_{-\beta}^{\beta}. \quad (2.3.2)$$

Más detalladamente, queremos encontrar una función analítica en  $\Pi_{-\pi/2-\beta}^{\pi/2+\beta}$  que satisfaga (2.3.1) y (2.3.2). Para evitar complicaciones técnicas en la continuación analítica de  $T(w)$ , de ahora en adelante supondremos que  $\pi/2 < \beta < \pi$ .

Notemos que la Proposición 2.5 prueba, en particular que  $\hat{g}(w)$  es cuadrado integrable sobre la línea recta  $\mathcal{C}_{\frac{\pi}{2}}$ , y por lo tanto, sobre esta línea existe su Transformada de Fourier-Plancherel:

$$\mathcal{G}(t) := \int_{\mathcal{C}_0} \hat{g}(w + i\pi/2) e^{iwt} dw \in L_2(\mathbb{R}). \quad (2.3.3)$$

Además,

$$\|\mathcal{G}(t)\|_{L_2(\mathbb{R})} = \|\hat{g}(w + i\pi/2)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq C \|g\|_{-\frac{1}{2}+\varepsilon} \quad (2.3.4)$$

por (2.2.13). Notemos también que de (2.2.6) se sigue que  $\hat{g}(w + i\pi/2)$  es par sobre  $\mathcal{C}_0$  y por lo tanto,  $\mathcal{G}$  es par sobre  $\mathbb{R}$ .

Introducimos el siguiente espacio. Para cada  $\delta > 0$  y cualquier línea recta  $\mathcal{C}$  paralela a la línea real, definimos  $L_{2,\delta}(\mathcal{C})$  como el espacio de las funciones cuadrado integrables sobre  $\mathcal{C}$  con peso  $\sigma(w) = (1 + |w|)^{-1-\delta}$ , i.e.

$$L_{2,\delta}(\mathcal{C}) = \left\{ f : \int_{\mathcal{C}} |f(w)|^2 (1 + |w|)^{-2-2\delta} dw < \infty \right\}. \quad (2.3.5)$$

Ahora podemos presentar la función  $T(w)$ .

**Definición 3.6.** Para  $\mathcal{G}(t)$  definida por (2.3.3) y  $\pi/2 < \beta < \pi$ , definimos la función:

$$T(w) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen} wt \frac{\mathcal{G}(t)}{\operatorname{senh} \beta t} dt, \quad w \in \mathbb{R}. \quad (2.3.6)$$

Notemos que (A.2.23) y la desigualdad de Cauchy-Schwartz implican que para  $w \in \mathbb{R}$

$$|T(w)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\operatorname{sen} wt}{\operatorname{senh} \beta t} \right| |\mathcal{G}(t)| dt \leq \frac{C(w, \beta)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta|t|} |\mathcal{G}(t)| dt \quad (2.3.7)$$

$$\leq \frac{C(w, \beta)}{2\pi} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\beta|t|} dt \right)^{1/2} \left( \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{G}(t)|^2 dt \right)^{1/2} < \infty, \quad (2.3.8)$$

ya que  $e^{-\beta|t|} \in L_2(\mathbb{R})$  y  $\mathcal{G}(t) \in L_2(\mathbb{R})$  por (2.3.3). Por lo tanto,  $T(w)$  está bien definida. En el siguiente Teorema y en la siguiente sección, damos varias propiedades importantes de la función  $T(w)$ .

**Teorema 3.7.** (véase [22], Lema 7.3) *La función  $T(w)$  posee las siguientes propiedades:*

*i)  $T$  admite continuación analítica en  $\Pi_{-\beta}^{\beta}$ ;*

*ii)  $T(w) \in L_{2,\delta}(\mathcal{C}_m)$  para cualquier  $m \in [-\beta, \beta]$  y para cualquier  $\delta > \frac{1}{2}$ ; además*

$$\|T(w)\|_{L_{2,\delta}(\mathcal{C}_m)} \leq C \|g\|_{-\frac{1}{2}+\varepsilon}; \quad (2.3.9)$$

*iii) Existe el límite de la función  $T(w)|_{\mathcal{C}_m}$  cuando  $m \rightarrow \pm\beta$  en  $L_{2,\delta}$  para  $\delta > 1/2$ ;*

**Demostración. i)** Consideremos la integral (2.3.6) para  $w \in \Pi_{-\beta}^{\beta}$ . Notemos que la estimación (A.2.3) implica la convergencia absoluta de esta integral para  $w \in \Pi_{-\beta}^{\beta}$ . Además, diferenciando bajo el signo de la integral (2.3.6) obtenemos la integral

$$\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} t \cos wt \frac{\mathcal{G}(t)}{\operatorname{senh} \beta t} dt, \quad (2.3.10)$$

la cual converge absolutamente para  $|w_2| < \beta$ , por (A.2.4). Por lo tanto, la integral (2.3.6) admite continuación analítica en  $\Pi_{-\beta}^{\beta}$ . También denotaremos a esta continuación como  $T(w)$ . Entonces,

$$T(w) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen} wt \frac{\mathcal{G}(t)}{\operatorname{senh} \beta t} dt, \quad w \in \Pi_{-\beta}^{\beta}. \quad (2.3.11)$$

Luego,  $T(w) \in H(\Pi_{-\beta}^{\beta})$ .

**ii)** Representemos la función  $T(w)$  en la forma

$$T(w) = T_1(w) + T_2(w), \quad (2.3.12)$$

donde

$$T_1(w) = \frac{i}{2\pi} \int_{|t| \leq 1} \operatorname{sen} wt \frac{\mathcal{G}(t)}{\operatorname{senh} \beta t} dt, \quad w \in \mathbb{C} \quad (2.3.13)$$

y

$$T_2(w) = \frac{i}{2\pi} \int_{|t| > 1} \operatorname{sen} wt \frac{\mathcal{G}(t)}{\operatorname{senh} \beta t} dt, \quad w \in \Pi_{-\beta}^\beta. \quad (2.3.14)$$

1) Demostraremos que  $T_1(w) \in L_{2,\delta}(\mathcal{C}_m)$  para  $\delta > 1/2$  y  $m \in [-\beta, \beta]$ , con la cota (2.3.9). Ya que, para  $w \in \mathbb{C}$ ,  $\frac{\operatorname{sen} wt}{\operatorname{senh} \beta t} \rightarrow \frac{w}{\beta}$  cuando  $t \rightarrow 0$ , entonces  $\frac{\operatorname{sen} wt}{\operatorname{senh} \beta t} \in C[-1, 1]$ . Luego, el hecho de que  $\mathcal{G}(t) \in L_2[-1, 1]$  y la desigualdad de Cauchy-Schwartz implican la convergencia absoluta de la integral (2.3.13). Además, diferenciando bajo el signo de la integral, observando que  $\frac{t \cos wt}{\operatorname{senh} \beta t} \rightarrow \frac{1}{\beta}$  cuando  $t \rightarrow 0$  y usando un argumento análogo al anterior, obtenemos

$$\frac{dT_1(w)}{dw} = \frac{i}{2\pi} \int_{|t| \leq 1} t \cos wt \frac{\mathcal{G}(t)}{\operatorname{senh} \beta t} dt < \infty, \quad w \in \mathbb{C}. \quad (2.3.15)$$

Por lo tanto, la función  $T_1(w)$  es analítica en  $\mathbb{C}$ , en particular en  $\Pi_{-\beta}^\beta$ ; y continua hasta la frontera. Por otro lado, (A.2.3) implica que  $\frac{\operatorname{sen} wt}{\operatorname{senh} \beta t} \in L_2[-1, 1]$  para  $|w_2| \leq \beta$ , y

$$|T_1(w)| \leq C \left\| \frac{\operatorname{sen} wt}{\operatorname{senh} \beta t} \right\|_{L_2[-1,1]} \|g\|_{-\frac{1}{2}+\varepsilon}. \quad (2.3.16)$$

Calculando la norma en (2.3.16), y gracias a (A.2.3) obtenemos

$$|T_1(w)| \leq C |w| \|g\|_{-\frac{1}{2}+\varepsilon}, \quad |w_2| \leq \beta. \quad (2.3.17)$$

Esto implica que, para  $\delta > 1/2$

$$T_1 \in L_{2,\delta}(\mathcal{C}_m), \quad \|T_1\|_{L_{2,\delta}(\mathcal{C}_m)} \leq C \|g\|_{-\frac{1}{2}+\varepsilon} \quad \forall m \in [-\beta, \beta]. \quad (2.3.18)$$

En efecto, (A.2.3), (2.3.17) y el hecho de que  $\delta > 1/2$  implican

$$\|T_1\|_{L_{2,\delta}(\mathcal{C}_m)}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{C}_m} \frac{|T_1(w)|^2}{(1+|w|)^{2\delta+2}} dw \leq \frac{C \|g\|_{-\frac{1}{2}+\varepsilon}^2}{2\pi} \int_{\mathcal{C}_m} \frac{|w|^2}{(1+|w|)^{2\delta+2}} dw \quad (2.3.19)$$

$$\leq C_1 \|g\|_{-\frac{1}{2}+\varepsilon}^2 \int_{\mathcal{C}_m} \frac{1}{(1+|w|)^{2\delta}} dw < C_1 \|g\|_{-\frac{1}{2}+\varepsilon}^2 \quad (2.3.20)$$

ya que  $2\delta > 1$ .

2) Demostraremos que  $T_2(w) \in L_{2,\delta}(\mathcal{C}_m)$  para  $\delta > 0$  y  $m \in [-\beta, \beta]$ , con la cota

(2.3.9). Ya que  $\mathcal{G}(t)$  es par y  $e^{-iwt} = \cos wt - i \operatorname{sen} wt$ , entonces podemos escribir (2.3.14) como:

$$T_2(w) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(t) \frac{\mathcal{G}(t)}{\operatorname{senh}\beta t} e^{-iwt} dt, \quad w \in \Pi_{-\beta}^{\beta}. \quad (2.3.21)$$

Por lo tanto,  $T_2(w)$  es la Transformada de Fourier inversa de la función

$$-\chi(t) \frac{e^{w_2 t}}{\operatorname{senh}\beta t} \mathcal{G}(t), \quad |w_2| \leq \beta, \quad (2.3.22)$$

i.e.

$$T_2(w) = F_{t \rightarrow w_1}^{-1} \left[ -\chi(t) \frac{\mathcal{G}(t)}{\operatorname{senh}\beta t} e^{w_2 t} \right], \quad |w_2| \leq \beta. \quad (2.3.23)$$

Por otro lado, de (A.2.23) se sigue que

$$\left| \chi(t) \frac{e^{w_2 t}}{\operatorname{senh}\beta t} \mathcal{G}(t) \right| \leq C |\mathcal{G}(t)|, \quad |t| \geq 1, \quad |w_2| \leq \beta. \quad (2.3.24)$$

De aquí, por (2.3.4) la función (2.3.22) pertenece a  $L_2(\mathbb{R})$ . Luego, el Teorema de Plancherel establece que  $T_2$  pertenece a  $L_2$ . De aquí

$$\|T_2\|_{L_{2,\delta}(\mathcal{C}_m)}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{C}_m} \frac{|T_2(w)|^2}{(1+|w|)^{2\delta+2}} dw \leq \frac{C \|\mathcal{G}(t)\|_{L_2(\mathbb{R})}}{2\pi} \int_{\mathcal{C}_m} \frac{1}{(1+|w|)^{2\delta+2}} dw \quad (2.3.25)$$

$$\leq C_1 \|g\|_{-\frac{1}{2}+\varepsilon}^2 \int_{\mathcal{C}_m} \frac{1}{(1+|w|)^{2\delta+2}} dw < C_1 \|g\|_{-\frac{1}{2}+\varepsilon}^2, \quad (2.3.26)$$

si  $\delta > -1/2$ . En particular, para  $\delta > 1/2$

$$T_2 \in L_{2,\delta}(\mathcal{C}_m), \quad \|T_2\|_{L_{2,\delta}(\mathcal{C}_m)} \leq C \|g\|_{-\frac{1}{2}+\varepsilon} \quad \forall m \in [-\beta, \beta]. \quad (2.3.27)$$

Luego, (2.3.18) y (2.3.27) implican ii).

**iii)** Probaremos el caso cuando  $m \rightarrow \beta - 0$ . El caso  $m \rightarrow -\beta + 0$  se demuestra de forma similar. Sea  $w \in \mathcal{C}_0$ , demostraremos primero esta afirmación para la función  $T_1(w)$  de (2.3.12). De (2.3.13) se sigue que

$$|T_1(w + i\beta) - T_1(w + im)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 |\operatorname{sen}(wt + i\beta t) - \operatorname{sen}(wt + imt)| \frac{|\mathcal{G}(t)|}{|\operatorname{senh}\beta t|} dt. \quad (2.3.28)$$

Representando la diferencia de senos como un producto, reescribimos la desigualdad anterior como

$$|T_1(w + i\beta) - T_1(w + im)| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left| \operatorname{sen} \frac{it(\beta - m)}{2} \cos \left( wt + \frac{it(\beta - m)}{2} \right) \right| \frac{|\mathcal{G}(t)|}{|\operatorname{senh}\beta t|} dt,$$

para  $w \in \mathcal{C}_0$ . Usando la estimación (A.2.5) con  $x = t(\beta - m)/2$  para  $(\beta - m)$  suficientemente pequeños, y la estimación (A.2.6), obtenemos

$$\left| \operatorname{sen} \frac{it(\beta - m)}{2} \cos \left( wt + \frac{it(\beta - m)}{2} \right) \right| \leq C|\beta - m||t|, \quad \text{para } |t| \leq 1, \quad w \in \mathcal{C}_0. \quad (2.3.29)$$

De aquí, para  $(\beta - m)$  suficientemente pequeños

$$|T_1(w + i\beta) - T_1(w + im)| \leq C(\beta - m) \int_{-1}^1 \frac{|t|}{|\operatorname{senh}\beta t|} |\mathcal{G}(t)| dt \leq C(\beta - m), \quad w \in \mathcal{C}_0, \quad (2.3.30)$$

ya que la función  $\frac{t}{\operatorname{senh}\beta t} \mathcal{G}(t) \in C[-1, 1]$ . Por lo tanto,

$$T_1(w + im) - T_1(w + i\beta) \longrightarrow 0 \quad \text{uniformemente con respecto de } w \in \mathcal{C}_0. \quad (2.3.31)$$

Por lo tanto, la cota (2.3.18) y el Teorema de Lebesgue implican que para  $\delta \geq 1/2$

$$T_1(w + im) - T_1(w + i\beta) \rightarrow 0 \quad \text{en } L_{2,\delta}(\mathcal{C}_0) \quad \text{cuando } m \rightarrow \beta. \quad (2.3.32)$$

Ahora, probaremos iii) para  $T_2$ . Por (2.3.23), tenemos que

$$T_2(w + i\beta) - T_2(w + im) = F_{t \rightarrow w}^{-1} \left[ -\chi(t) \frac{\mathcal{G}(t)}{\operatorname{sen}\beta t} (e^{\beta t} - e^{mt}) \right]. \quad (2.3.33)$$

Notemos que

1.  $-\chi(t) \frac{\mathcal{G}(t)}{\operatorname{senh}\beta t} (e^{\beta t} - e^{mt}) \longrightarrow 0$  puntualmente cuando  $m \rightarrow \beta$ .
2. De (2.3.24) con  $w_2 = \beta$  ó  $m$ , se sigue que

$$\left| -\chi(t) \frac{\mathcal{G}(t)}{\operatorname{senh}\beta t} (e^{\beta t} - e^{mt}) \right| \leq C|\mathcal{G}(t)| \quad t \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq m \leq \beta.$$

Además, como  $\mathcal{G}(t) \in L_2(\mathbb{R})$ , entonces el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue implica que

$$-\chi(t) \frac{\mathcal{G}(t)}{\operatorname{senh}\beta t} (e^{\beta t} - e^{mt}) \longrightarrow 0 \quad \text{en } L_2(\mathbb{R}_t) \quad \text{cuando } m \rightarrow \beta - 0. \quad (2.3.34)$$

Por el Teorema de Plancherel, esto implica que

$$F_{t \rightarrow w}^{-1} \left[ -\chi(t) \frac{\mathcal{G}(t)}{\operatorname{sen}\beta t} (e^{\beta t} - e^{mt}) \right] \longrightarrow 0 \quad \text{en } L_2(\mathbb{R}_w) \quad \text{cuando } m \rightarrow \beta - 0. \quad (2.3.35)$$

De aquí,

$$T_2(w + im) \longrightarrow T_2(w + i\beta) \quad \text{en } L_2(\mathbb{R}_w) \quad \text{cuando } m \rightarrow \beta - 0. \quad (2.3.36)$$

Ya que el embeidimiento natural  $L_2 \hookrightarrow L_{2,\delta}$  es continuo para  $\delta \geq -1$ , entonces (2.3.36) se cumple en  $L_{2,\delta}$  para  $\delta \geq 1/2$ . Esto prueba iii). ■

## 2.4. Continuación analítica de $T(w)$ y la ecuación en diferencias

Iniciamos esta sección introduciendo las siguientes notaciones:

$$\alpha := \pi/(2\beta), \quad a = \alpha w, \quad b = \alpha w'. \quad (2.4.1)$$

**Teorema 4.8.** (véase [22], Lema 7.3) *La función  $T(w)$  posee las siguientes propiedades:*

- i) El límite de la función  $T(w)|_{\mathcal{C}_m}$  cuando  $m \rightarrow \pm\beta$  en  $L_{2,\delta}$  para  $\delta > 1/2$ , satisface la ecuación en diferencias (2.3.1) para  $w \in \mathcal{C}_0$ ;*
- ii)  $T(w)$  puede continuarse a una función analítica en  $\Pi_{-\pi/2-\beta}^{\pi/2+\beta}$  que satisface (2.3.1) y la condición de antisimetría (2.3.2);*

**Demostración.** i) Primero demostraremos que

$$T_1(w + i\beta) - T_1(w - i\beta) = F_{t \rightarrow w}^{-1} [-2\mathcal{G}(t)(1 - \chi(t))], \quad w \in \mathcal{C}_0. \quad (2.4.2)$$

De (2.3.13) se sigue que

$$T_1(w + im) - T_1(w - im) = \frac{i}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\mathcal{G}(t)}{\sinh\beta t} [\sen(w + im)t - \sen(w - im)t] dt. \quad (2.4.3)$$

Ya que  $\sen(w + im)t - \sen(w - im)t = 2i \senhmt \cos wt$ , entonces la igualdad anterior se puede escribir como

$$T_1(w + im) - T_1(w - im) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\senhmt}{\sinh\beta t} \cos wt \mathcal{G}(t) dt. \quad (2.4.4)$$

Como  $\cos wt = e^{-iwt} + i \senwt$ , y usando la imparidad de la función  $\frac{\senhmt}{\sinh\beta t} \senwt \mathcal{G}(t)$ , con respecto de  $t$  (véase (2.3.3)), obtenemos

$$T_1(w + im) - T_1(w - im) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\senhmt}{\sinh\beta t} e^{-iwt} \mathcal{G}(t)(1 - \chi(t)) dt \quad (2.4.5)$$

$$= F_{t \rightarrow w}^{-1} \left[ -2\mathcal{G}(t) \frac{\senhmt}{\sinh\beta t} (1 - \chi(t)) \right]. \quad (2.4.6)$$

Por otro lado, notemos que:

$$1) \quad -2 \frac{\senhmt}{\sinh\beta t} \mathcal{G}(t)(1 - \chi(t)) \rightarrow -2\mathcal{G}(t)(1 - \chi(t)) \quad \text{cuando } m \rightarrow \beta - 0, \text{ p.c.t. } t \in \mathbb{R}; \quad (2.4.7)$$

$$2) \quad \left| -2 \frac{\sinh mt}{\sinh \beta t} \mathcal{G}(t)(1 - \chi(t)) \right| \leq C |\mathcal{G}(t)|, \quad |m| \leq \beta \quad \text{y} \quad |t| \leq 1; \quad (2.4.8)$$

$$3) \quad \mathcal{G}(t) \in L_2(\mathbb{R}). \quad (2.4.9)$$

Por lo tanto, el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue implica que

$$-2 \frac{\sinh mt}{\sinh \beta t} \mathcal{G}(t)(1 - \chi(t)) \rightarrow -2 \mathcal{G}(t)(1 - \chi(t)) \quad \text{cuando} \quad m \rightarrow \beta - 0 \quad \text{en} \quad L_2(\mathbb{R}). \quad (2.4.10)$$

Ya que  $T_1(w + im) - T_1(w - im) \rightarrow T_1(w + i\beta) - T_1(w - i\beta)$ , por el Teorema 3.7 (iii), entonces el Teorema de Plancherel, (2.4.10) y (2.4.5) implican (2.4.2).

Ahora demostraremos que

$$T_2(w + i\beta) - T_2(w - i\beta) = F_{t \rightarrow w}^{-1} [-2 \mathcal{G}(t) \chi(t)], \quad w \in \mathcal{C}_0. \quad (2.4.11)$$

De (2.3.23) tenemos que

$$T_2(w + im) - T_2(w - im) = F_{t \rightarrow w}^{-1} \left[ -2 \mathcal{G}(t) \frac{\sinh mt}{\sinh \beta t} \chi(t) \right]. \quad (2.4.12)$$

Similarmente a (2.4.7)-(2.4.9), por el Teorema de Lebesgue obtenemos

$$-2 \mathcal{G}(t) \frac{\sinh mt}{\sinh \beta t} \chi(t) \rightarrow -2 \mathcal{G}(t) \chi(t) \quad \text{en} \quad L_2(\mathbb{R}) \quad \text{cuando} \quad m \rightarrow \beta - 0. \quad (2.4.13)$$

De aquí, por el Teorema de Plancherel

$$F_{t \rightarrow w}^{-1} \left[ -2 \mathcal{G}(t) \frac{\sinh mt}{\sinh \beta t} \chi(t) \right] \rightarrow F_{t \rightarrow w}^{-1} [-2 \mathcal{G}(t) \chi(t)] \quad \text{en} \quad L_2(\mathcal{C}_0) \quad \text{cuando} \quad m \rightarrow \beta - 0, \quad (2.4.14)$$

i.e.

$$T_2(w + im) - T_2(w - im) \rightarrow F_{t \rightarrow w}^{-1} [-2 \mathcal{G}(t) \chi(t)] \quad \text{en} \quad L_2(\mathcal{C}_0) \quad \text{cuando} \quad m \rightarrow \beta - 0. \quad (2.4.15)$$

De la afirmación iii) del Teorema 3.7 se sigue que

$$T_2(w + im) - T_2(w - im) \rightarrow T_2(w + i\beta) - T_2(w - i\beta) \quad \text{en} \quad L_2(\mathcal{C}_0) \quad \text{cuando} \quad m \rightarrow \beta - 0,$$

por lo tanto, (2.4.11) se cumple. Finalmente, (2.3.1) se sigue de 2.3.12), (2.4.2) y (2.4.11).

**ii)** Sea  $w \in \Pi_{-\pi/2-\beta}^{\pi/2+\beta}$  y  $w \notin \mathcal{C}_{\pm\beta}$ . Definimos una continuación de la función  $T(w)$  mediante las fórmulas

$$\bar{T}(w) = \begin{cases} T(w - 2i\beta) - 2\hat{g}(w - i\beta + i\pi/2), & w \in \Pi_{\beta}^{\pi/2+\beta} \\ T(w), & w \in \Pi_{-\beta}^{\beta} \\ T(w + 2i\beta) + 2\hat{g}(w + i\beta + i\pi/2), & w \in \Pi_{-\pi/2-\beta}^{-\beta}. \end{cases} \quad (2.4.16)$$

1) Probaremos que  $\overline{T}(w)$  es analítica en  $\Pi_{-\pi/2-\beta}^{\pi/2+\beta} \setminus \mathcal{C}_{\pm\beta}$ . En  $\Pi_{-\beta}^{\beta}$ ,  $\overline{T}$  es analítica por i) del Teorema 3.7. Supongamos que  $w \in \Pi_{\beta}^{\pi/2+\beta}$ , esto implica que  $w - 2i\beta \in \Pi_{-\beta}^{\pi/2-\beta} \subset \Pi_{-\beta}^{\beta}$  y  $w - 2i\beta + i\pi/2 \in \Pi_{\pi/2}^{\pi} \subset \Pi_0^{\pi}$ . De aquí, la analiticidad de  $T(w)$  en  $\Pi_{-\beta}^{\beta}$  y la analiticidad de  $\hat{g}$  en  $\Pi_0^{\pi}$  (véase (2.2.5)), implican que  $\overline{T}$  es analítica en  $\Pi_{\beta}^{\pi/2+\beta}$ , por la primera igualdad de (2.4.16). Un argumento análogo muestra que  $\overline{T}$  es analítica en  $\Pi_{-\pi/2-\beta}^{-\beta}$ .

2) Ahora demostraremos que  $\overline{T}(w)$  satisface la ecuación en diferencias (2.3.1) en  $\Pi_{-\pi/2}^{\pi/2}$ . Supongamos que  $w \in \Pi_0^{\pi/2}$ , esto implica que

a)  $w + i\beta \in \Pi_{\beta}^{\pi/2+\beta}$ , luego, por la primera igualdad de (2.4.16) obtenemos

$$\overline{T}(w + i\beta) = T(w - i\beta) - 2\hat{g}(w + i\pi/2); \quad (2.4.17)$$

b)  $w - i\beta \in \Pi_{-\beta}^{\pi/2-\beta} \subset \Pi_{-\beta}^{\beta}$ , por lo tanto

$$\overline{T}(w - i\beta) = T(w - i\beta). \quad (2.4.18)$$

De aquí, se sigue (2.3.1) para  $w \in \Pi_0^{\pi/2}$ . La demostración para el caso cuando  $w \in \Pi_{-\pi/2}^0$  es análoga.

3) Probaremos que  $\overline{T}$  satisface (2.3.2), para  $w \in \Pi_{-\pi/2-\beta}^{\pi/2+\beta} \setminus \mathcal{C}_{\pm\beta}$ .

Supongamos que  $w \in \Pi_{\beta}^{\pi/2+\beta}$ , esto implica que  $-w \in \Pi_{-\pi/2-\beta}^{-\beta}$ , luego de la segunda identidad de (2.4.16) se sigue que

$$\overline{T}(-w) = T(-(w - 2i\beta)) - 2\hat{g}(-(w - i\beta) + i\pi/2). \quad (2.4.19)$$

Ya que  $w - 2i\beta \in \Pi_{-\beta}^{\beta}$ , entonces  $T(-(w - 2i\beta)) = -T(w - 2i\beta)$  por (2.3.11). Además, para  $w - i\beta \in \Pi_0^{\pi/2}$ ,  $\hat{g}(-(w - i\beta) + i\pi/2) = \hat{g}(w - i\beta + i\pi/2)$ , por (2.2.6). Por lo tanto, (2.4.19) implica

$$\overline{T}(-w) = -T(w - 2i\beta) + 2\hat{g}(w - i\beta + i\pi/2), \quad w \in \Pi_{\beta}^{\pi/2+\beta}. \quad (2.4.20)$$

La última expresión es igual a  $-\overline{T}(w)$  por la primera igualdad de (2.4.16). De forma análoga obtenemos (2.3.2) cuando  $w \in \Pi_{-\pi/2-\beta}^{-\beta}$ .

4) Demostraremos ahora que  $\overline{T}$  es analítica sobre las líneas  $\mathcal{C}_{\pm\beta} \subset \Pi_{-\pi/2-\beta}^{\pi/2+\beta}$ . Notemos que de (2.3.2) se sigue que es suficiente probar que  $\overline{T}$  es analítica sobre  $\mathcal{C}_{\beta}$ .

a) Sean  $A, B \in \mathbb{R}^+$ ,  $A < B$ . Probaremos primero que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \overline{T}(w + i\beta \pm i\varepsilon) = T(w + i\beta) \quad \text{en } L_1[A, B], \quad \text{para } w \in \mathcal{C}_0. \quad (2.4.21)$$

Por iii) del Teorema 3.7 y (2.4.16) se sigue que existe el límite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} T(w \pm i\beta \mp i\varepsilon) = T(w \pm i\beta) \quad \text{en } L_{2,\delta}[A, B], \quad w \in \mathcal{C}_0, \quad \delta > 1/2. \quad (2.4.22)$$

Por otro lado, de la primera igualdad de (2.4.16) tenemos que

$$\bar{T}(w + i\beta + i\varepsilon) = T(w - i\beta + i\varepsilon) - 2\hat{g}(w + i\varepsilon + i\pi/2). \quad (2.4.23)$$

Como la función  $\hat{g}(w + i\pi/2) \in H(\Pi_{-\pi/2}^{\pi/2})$  entonces

1.  $\hat{g}(w + i\pi/2 + i\varepsilon) \longrightarrow \hat{g}(w + i\pi/2)$ , cuando  $\varepsilon \rightarrow 0+$  y  $w \in [A, B]$ ;
2. existe  $C > 0$  tal que

$$|\hat{g}(w + i\pi/2 + i\varepsilon)| \leq C, \quad w \in [A, B], \quad \varepsilon \in [-1, 1]. \quad (2.4.24)$$

Por lo tanto, del Teorema de Lesbegue se sigue que

$$\hat{g}(w + i\pi/2 + i\varepsilon) \longrightarrow \hat{g}(w + i\pi/2), \quad \text{cuando } \varepsilon \rightarrow 0+, \quad \text{en } L_1[A, B]. \quad (2.4.25)$$

De aquí, por (2.4.16) obtenemos

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \bar{T}(w + i\beta + i\varepsilon) = T(w - i\beta) - 2\hat{g}(w + i\pi/2), \quad \text{en } L_1[A, B], \quad (2.4.26)$$

por (2.4.33). Usando la ecuación en diferencias (2.3.1) para  $w \in \mathcal{C}_0$ , obtenemos (2.4.21).

b) Demostraremos que

$$|T(w + i\beta - i\varepsilon)| \leq C(w)\varepsilon^{-1/2}, \quad w \in \mathcal{C}_0, \quad \varepsilon > 0; \quad (2.4.27)$$

y

$$|T(w + i\beta + i\varepsilon)| \leq C_1(w)\varepsilon^{-1/2}, \quad w \in \mathcal{C}_0, \quad \varepsilon > 0. \quad (2.4.28)$$

Probaremos primero la desigualdad (2.4.27). La fórmula (2.3.11), la desigualdad (2.3.4) y la desigualdad de Cauchy implican

$$|T(w + i\beta - i\varepsilon)| \leq \frac{C}{2\pi} \|g\|_{-\frac{1}{2}+\varepsilon} \left\| \frac{\text{sen}(w + i\beta - i\varepsilon)t}{\text{senh}\beta t} \right\|_{L_2(\mathcal{C}_0)}. \quad (2.4.29)$$

Por otro lado, de (A.2.3) con  $w_2 = \beta - \varepsilon$  se sigue que

$$\left| \frac{\text{sen}(w + i\beta - i\varepsilon)t}{\text{senh}\beta t} \right| \leq C(w, \beta) \exp\{-\varepsilon|t|\} \quad t \in \mathcal{C}_0. \quad (2.4.30)$$

De aquí,

$$\left\| \frac{\text{sen}(w + i\beta - i\varepsilon)t}{\text{senh}\beta t} \right\|_{L_2(\mathcal{C}_0)}^2 \leq C(w, \beta) \frac{1}{\varepsilon}. \quad (2.4.31)$$

Por lo tanto, las desigualdades (2.4.29) y (2.4.31) implican (2.4.27).

Probaremos ahora (2.4.28). De la primera igualdad de (2.4.16) tenemos que

$$\bar{T}(w + i\beta + i\varepsilon) = T(w - i\beta + i\varepsilon) - 2\hat{g}(w + i\varepsilon + i\pi/2). \quad (2.4.32)$$

De aquí,

$$|\overline{T}(w + i\beta + i\varepsilon)| \leq C + |T(w - i\beta + i\varepsilon)| \quad (2.4.33)$$

ya que  $\hat{g} \in H(\Pi_0^\beta)$ . Luego, de forma análoga a la demostración de (2.4.27), obtenemos (2.4.28).

c1) Para  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0 < 1$ , sean

$$\gamma_1(\varepsilon) = \{w + i(\beta - \varepsilon) : w \in [A, B]\}, \quad (2.4.34)$$

$$\gamma_A(\varepsilon) = \{A + i\xi : |\xi| \leq \varepsilon\}, \quad (2.4.35)$$

y

$$\gamma_B(\varepsilon) = \{B + i\xi : |\xi| \leq \varepsilon\}. \quad (2.4.36)$$

Consideremos el contorno

$$\gamma_\varepsilon = \gamma_1(\varepsilon) \cup [\gamma_1(\varepsilon) + 2i\varepsilon] \cup \gamma_A(\varepsilon) \cup \gamma_B(\varepsilon) \quad (2.4.37)$$

orientado en sentido positivo. Sean  $w = w_1 + iw_2$ , con  $0 < \varepsilon < |w_2| < \varepsilon_0$ ; y  $V_\varepsilon$  un dominio que contenga a  $\gamma_\varepsilon$ , no contenga  $w$  y tal que  $\overline{T}(w) \in H(V_\varepsilon \setminus \mathbb{R})$  (estamos suponiendo que  $\varepsilon_0$  es tan pequeño, que  $V_\varepsilon$  siempre existe).

Sea

$$c_\varepsilon(w) := \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{\overline{T}(w')}{w' - w} dw'. \quad (2.4.38)$$

Notemos que las cotas (2.4.27) y (2.4.28) implican que  $c_\varepsilon(w)$  está bien definida.

Demostraremos que

$$c(w) = 0. \quad (2.4.39)$$

Evidentemente,  $\frac{\overline{T}(w')}{w' - w}$  es analítica en  $V_\varepsilon \setminus \mathbb{R}$  con respecto a  $w'$ , por lo tanto, por el Teorema de Cauchy  $c_\varepsilon(w)$  no depende de  $\varepsilon > 0$ . De aquí, es suficiente demostrar que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} c_\varepsilon(w) = 0. \quad (2.4.40)$$

Las integrales sobre  $[A + i\beta - i\varepsilon, A + i\beta + i\varepsilon]$  y  $[B + i\beta - i\varepsilon, B + i\beta + i\varepsilon]$  tienden a 0, cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  por las cotas (2.4.27) y (2.4.28). Además

$$\int_A^B \frac{\overline{T}(w' + i\beta + i\varepsilon)}{(w' + i\beta + i\varepsilon) - w} dw' \longrightarrow \int_A^B \frac{\overline{T}(w' + i\beta)}{(w' + i\beta) - w} dw', \quad \text{cuando } \varepsilon \rightarrow 0, \quad (2.4.41)$$

y

$$\int_A^B \frac{\overline{T}(w' + i\beta - i\varepsilon)}{(w' + i\beta - i\varepsilon) - w} dw' \longrightarrow \int_A^B \frac{\overline{T}(w' + i\beta)}{(w' + i\beta) - w} dw', \quad \text{cuando } \varepsilon \rightarrow 0, \quad (2.4.42)$$

por (2.4.21). Esto prueba (2.4.40).

c2) Definamos la función

$$F(w) = \int_{\gamma_{\varepsilon_0}} \frac{\overline{T}(w')}{w' - w} dw', \quad w \in \mathcal{U}_{\varepsilon_0}; \quad (2.4.43)$$

donde  $\mathcal{U}_{\varepsilon_0}$  es el interior del contorno  $\gamma_{\varepsilon_0}$ . Por las cotas (2.4.27) y (2.4.28) la integral (2.4.43) converge, y por lo tanto  $F(w)$  está bien definida. Además  $F'(w)$  existe, ya que es posible diferenciar (2.4.43) bajo el signo de la integral por las cotas antes mencionadas.

c3) Demostraremos que

$$F(w) = \overline{T}(w), \quad w \in \mathcal{U}_{\varepsilon_0} \setminus \mathbb{R}. \quad (2.4.44)$$

Sea  $w \in \mathcal{U}_{\varepsilon_0} \setminus \mathbb{R}$ , por ejemplo, sea  $w$  tal que  $\text{Im}w = \beta + \varepsilon$ , con  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ . Consideremos los siguientes contornos auxiliares:

$$\begin{aligned} \gamma_1 := & [A + i\beta + i\varepsilon/2, B + i\beta + i\varepsilon/2] \cup [B + i\beta + i\varepsilon/2, B + i\beta + i\varepsilon_0] \\ & \cup [B + i\beta + i\varepsilon_0, A + i\beta + i\varepsilon_0] \cup [A + i\beta + i\varepsilon_0, A + i\beta + i\varepsilon/2], \end{aligned} \quad (2.4.45)$$

y

$$\begin{aligned} \gamma_2 := & [A + i\beta - i\varepsilon_0, B + i\beta - i\varepsilon_0] \cup [B + i\beta - i\varepsilon_0, B + i\beta + i\varepsilon/2] \\ & \cup [B + i\beta + i\varepsilon/2, A + i\beta + i\varepsilon/2] \cup [A + i\beta + i\varepsilon/2, A + i\beta - i\varepsilon_0]. \end{aligned} \quad (2.4.46)$$

Es evidente que

$$F(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_1} \frac{\overline{T}(w')}{w' - w} dw' + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_2} \frac{\overline{T}(w')}{w' - w} dw'. \quad (2.4.47)$$

De (2.4.39) se sigue que

$$\int_{\gamma_2} \frac{\overline{T}(w')}{w' - w} dw' = 0. \quad (2.4.48)$$

Además el Teorema de Cauchy implica que

$$\frac{1}{i2\pi} \int_{\gamma_2} \frac{\overline{T}(w')}{w' - w} dw' = T(w), \quad (2.4.49)$$

ya que  $T(w)$  es analítica en  $\mathcal{U}_{\varepsilon_0} \setminus \mathbb{R}$ . Esto prueba 4). ■

## 2.5. Solución de la ecuación en diferencias

**Definición 5.9.** Definimos la función  $\hat{u}_2(w)$  como

$$\hat{u}_2(w) = T(w + i\beta - i\pi/2) / \cosh(w + i\beta), \quad w \in \Pi_{-2\beta}^\pi. \quad (2.5.1)$$

**Lema 5.10.** La función  $\hat{u}_2(w)$  es analítica en  $\Pi_{-\beta}^{\pi-\beta}$ , meromorfa en  $\Pi_{-2\beta}^\pi$  con posibles polos en los puntos donde  $\cosh(w + i\beta) = 0$ , y resuelve el sistema (2.1.11)-(2.1.12).

**Demostración.** La función  $T(w + i\beta - i\pi/2)$  es la translación de la función  $T(w)$  por  $i(\pi/2 - \beta)$ , luego  $T(w + i\beta - i\pi/2)$  es analítica en

$$\Pi_{-\pi/2-\beta}^{\pi/2+\beta} + i\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \Pi_{-2\beta}^\pi, \quad (2.5.2)$$

por ii) del Teorema 4.8. Por lo tanto,  $\hat{u}_2(w)$  es meromorfa en  $\Pi_{-2\beta}^\pi$ , con posibles polos en los ceros de  $\cosh(w + i\beta)$ , por (2.5.1). Ya que  $T(w)$  es impar, entonces  $T(w + i\beta - i\pi/2) = 0$  en  $w = i(\pi/2 - \beta)$  por (2.3.11). De aquí,  $\hat{u}_2(w)$  no tiene una singularidad en este punto. Ya que  $\cosh(w + i\beta)$  no tiene otros ceros en  $\Pi_{-\beta}^{\pi-\beta}$  entonces  $\hat{u}_2(w) \in H(\Pi_{-\beta}^{\pi-\beta})$ . Obviamente, el argumento anterior prueba que  $\hat{u}_2(w)$  definida por (2.5.1) es meromorfa en  $\Pi_{-2\beta}^\pi$  con posibles polos en los puntos donde  $\cosh(w + i\beta) = 0$ .

Probaremos (2.1.11). Sustituyendo (2.5.1) en el lado izquierdo de (2.1.11), obtenemos que (2.1.11) es equivalente a

$$T(w + i\beta - i\pi/2) - T(w - i\beta - i\pi/2) = -2\hat{g}(w), \quad w \in \Pi_0^\pi. \quad (2.5.3)$$

Pero esto se cumple por ii) del Teorema 4.8.

Probaremos ahora (2.1.12). Sustituyendo (2.5.1) en el lado izquierdo de (2.1.12), obtenemos

$$\hat{u}_2(\hat{h}_2(w)) = \frac{T(-w - i\beta + i\pi/2)}{\cosh(-w - i\beta + i\pi)} = \frac{-T(w + i\beta - i\pi/2)}{-\cosh(w + i\beta)}, \quad (2.5.4)$$

por (2.1.3) y la condición de antisimetría con respecto de cero de  $T(w)$  en  $\Pi_{-\pi/2-\beta}^{\pi/2+\beta}$ . Luego, usando (2.5.1) obtenemos (2.1.12). ■

Ahora, vamos a "bajar"  $\hat{u}_2(w)$  a  $\mathbb{C}_{z_2}^+$ . Sea  $z_2 \in \mathbb{C}^+$ , ya que el mapeo

$$z_2(w) = \sinh(w + i\beta), \quad w \in \Pi_{-\beta}^{\pi-\beta} \quad (2.5.5)$$

es una cubierta de dos hojas de  $\mathbb{C}^+$ , entonces existen  $w_1$  y  $w_2 \in \Pi_{-\beta}^{\pi-\beta}$  tales que

$$z_2 = z_2(w_1) = z_2(w_2), \quad (2.5.6)$$

y

$$w_2 = \hat{h}_2(w_1). \quad (2.5.7)$$

Definamos la función

$$\tilde{u}_2(z_2) := \hat{u}_2(w), \quad z_2 \in \mathbb{C}^+ \quad (2.5.8)$$

donde  $w$  es cualquiera de los puntos  $w_{1,2}$  tal que se cumple (2.5.6), y  $\hat{u}_2(w)$  es la función definida por (2.5.1). Ya que  $\hat{u}_2(w)$  es automorfa con respecto de  $\hat{h}_2$ , entonces la función (2.5.8) esta bien definida. Además,

**Corolario 5.11.** *La función  $\tilde{u}_2(z_2)$ ,  $z_2 \in \mathbb{C}^+$  es analítica en  $\mathbb{C}^+$ .*

**Demostración.** Se sigue del Lema 5.10 ya que  $\hat{u}_2(w) \in H(\Pi_{-\beta}^{\pi-\beta})$ . ■

Definimos ahora  $\hat{u}_1(w)$  por (2.1.13) usando la función  $\hat{u}_2(w)$  definida por (2.5.1). Ya que  $\hat{u}_2(w)$  satisface las condiciones del Lema 1.2, entonces el par  $\hat{u}_1$  y  $\hat{u}_2$  es solución del problema (2.1.7)-(2.1.9) por el Lema 1.2. Además, la función

$$\tilde{u}_1(z_1) := \hat{u}_1(w), \quad z_1 \in \mathbb{C}^+, \quad (2.5.9)$$

donde  $w \in \Pi_0^\pi$  es tal que  $z_1(w) = z_1$ , está bien definida por la antisimetría de  $\hat{u}_1(w)$ , con respecto de  $\hat{h}_1(w)$  (véase (2.1.7) y el Lema 1.2). Por lo tanto,  $\tilde{u}_1(z_1) \in H(\mathbb{C}^+)$  ya que  $\hat{u}_1(w) \in H(\Pi_0^\pi)$  por el Lema 1.2. Este argumento prueba el siguiente:

**Corolario 5.12.** *La función  $\tilde{u}_1(z_1)$ ,  $z_1 \in \mathbb{C}^+$  es analítica en  $\mathbb{C}^+$ .*

Para usar el Teorema 1.3 y demostrar que  $u_0(x)$  definida por (1.2.22) es solución del problema (0.0.1), nos falta demostrar que

$$\tilde{u}_l(z_l) \in \tilde{S}'(\overline{\mathbb{R}^+}), \quad \text{para } l = 1, 2. \quad (2.5.10)$$

Esto lo haremos en el siguiente capítulo.

# Capítulo 3

## Sumabilidad Cuadrada de la solución

### 3.1. Propiedades de las funciones $\tilde{u}_1(z_1)$ y $\tilde{u}_2(z_2)$ .

En esta sección y en lo que sigue recalcamos el hecho de que estamos trabajando bajo la hipótesis  $\pi/2 < \beta < \pi$ .

**Teorema 1.1.** *Las funciones  $\tilde{u}_l(z_l)$  para  $l = 1, 2$ , definidas por (2.5.9) y (2.5.8), pertenecen a  $\tilde{S}'(\mathbb{R}^+)$ .*

**Demostración.** La afirmación ii) del Teorema 3.7 implica que para  $\tau > 0$

$$\int_{\mathcal{C}_m} |\hat{u}_2(w)|^2 (1 + \exp |w|) (1 + |w|)^{-3-\tau} dw \leq C \|g\|_{-\frac{1}{2}+\varepsilon}^2 \quad \forall m \in [-\beta, \pi - \beta]. \quad (3.1.1)$$

Ahora usaremos el Teorema II de [16] (véase el Lema A.1.5 del Apéndice A.1). Consideremos la función

$$v(w) := \hat{u}_2(w) [\cosh(w + i\beta - i\pi/2)]^{1/2} (i\pi + w)^{-2}, \quad (3.1.2)$$

aquí, tomamos la rama de la raíz cuadrada de manera que sea analítica en  $\Pi_{-\beta}^{\pi-\beta}$ . Entonces  $v(w)$  es analítica en  $\Pi_{-\beta}^{\pi-\beta}$  (por que  $\hat{u}_2(w)$  lo es), y

$$\int_{\mathcal{C}_m} |v(w)|^2 dw \leq C \quad \forall m \in [-\beta, \pi - \beta], \quad (3.1.3)$$

por (3.1.1). Luego, el Teorema antes mencionado (intercambiando la parte real y la parte imaginaria), implica que

$$v(w) = \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(w_1 + i\pi - i\beta)}{w_1 + i\pi - i\beta - w} dw_1 - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(w_1 - i\beta)}{w_1 - i\beta - w} dw_1 \right]. \quad (3.1.4)$$

De aquí, por la desigualdad de Cauchy obtenemos

$$|v(w)| \leq C_1 \|(w_1 + i\pi - i\beta - w)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}_{w_1})} + C_2 \|(w_1 - i\beta - w)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}_{w_1})}, \quad w \in \Pi_{-\beta}^{\pi-\beta}.$$

Calculando las normas que aparecen arriba, la expresión anterior es equivalente a

$$|v(w)| \leq C\rho^{-1/2}(w, \partial\Pi_{-\beta}^{\pi-\beta}), \quad (3.1.5)$$

donde  $\rho(w, R)$  es la distancia de  $w$  a  $R$  (véase el Lema A.1.1 del Apéndice A.1). Las fórmulas (3.1.2) y (3.1.5) implican que

$$|\hat{u}_2(w)| \leq C(1 + \exp|w|)^{-1/2}(1 + |w|)^2 \rho^{-1}(w, \partial\Pi_{-\beta}^{\pi-\beta}). \quad (3.1.6)$$

Luego, los Lemas A.1.2 y A.1.3 del Apéndice A.1, y (2.1.1), implican que

$$(1 + |\exp(w)|)^2 \leq C(1 + |z_2|)^2, \quad w \in \Pi_{-\beta}^{\pi-\beta} \quad (3.1.7)$$

y

$$(1 + e^{|w|})^{-1/2} \rho^{-1/2}(w, \partial\Pi_{-\beta}^{\pi-\beta}) \leq C(\operatorname{Im}z_2)^{-1/2}, \quad z \in \mathbb{C}^+. \quad (3.1.8)$$

Estas dos desigualdades implican la cota:

$$|\tilde{u}_2(z_2)| \leq C(1 + |z_2|)(\operatorname{Im}z_2)^{-1}. \quad (3.1.9)$$

Por lo tanto, el Teorema de Paley-Wiener y la última estimación (véase (1.2.10)), implican que  $\tilde{u}_2(z_2) \in \tilde{S}'(\overline{\mathbb{R}^+})$ . La estimación correspondiente para  $\tilde{u}_1(z_1)$  se prueba de forma análoga, comenzando con (2.1.13) y (2.5.1) en el lado derecho de (3.1.1). El Teorema está probado. ■

**Corolario 1.2.** *Las funciones  $\hat{u}_l(w)$  para  $l = 1, 2$  definidas por (2.5.8) y (2.5.9) pertenecen a  $L_2(\mathcal{C}_{-\beta})$ .*

**Demostración.** Para la función  $\hat{u}_2(w)$  la afirmación se sigue de (3.1.1). De aquí (2.1.13) y la Proposición 2.5 implican una cota similar a (3.1.1) para la función  $\hat{u}_1(w)$ , lo cual termina la demostración. ■

### 3.2. Estimación de la norma de la solución $u(x)$ en $L_2$ .

Esta sección probaremos que la solución del Problema **A**, definida por (1.2.24) pertenece a  $L_2(K_+)$ .

**Teorema 2.3.** Sean  $\tilde{u}_1(z_1)$  y  $\tilde{u}_2(z_2)$  definidas por (2.5.8) y (2.5.9) respectivamente. Entonces  $u(x_1, x_2)$  definida por (1.2.22) pertenece a  $L_2(K_+)$ , y

$$\|u\|_{L_2} \leq C\|g\|_{-\frac{1}{2}+\varepsilon}. \quad (3.2.1)$$

**Demostración.** De (1.2.22) y el Teorema de Parseval se sigue que es suficiente probar que  $\tilde{u}_0(z) \in L_2(\mathbb{R}^2)$ ,  $z \in \mathbb{R}^2$ . Para este fin, hacemos el siguiente cambio de variable. Denotemos  $\Sigma = \mathcal{C}_0 \times \mathcal{C}_{-\beta}$ . En lo que sigue, supondremos que  $\mathbf{w} := (w_1, w_2) \in \Sigma$ , donde  $\mathbf{w}$  esta conectado con  $(z_1, z_2)$  por las fórmulas

$$z_1 = \sinh w_1, \quad z_2 = \sinh(w_2 + i\beta), \quad \mathbf{w} \in \Sigma. \quad (3.2.2)$$

Reescribiendo  $\tilde{f}_0(z_1, z_2)$  definida por (1.2.16) en las variables  $(w_1, w_2)$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \tilde{f}_0(w_1, w_2) &= \frac{1}{\sin^2 \beta} \left\{ -\sin \beta \hat{g}(w_1) + [i \sinh w_1 \cos \beta - i \sinh(w_2 + i\beta)] \hat{u}_1(w_1) \right. \\ &\quad \left. + [i \sinh(w_2 + i\beta) \cos \beta - i \sinh w_1] \hat{u}_2(w_2) \right\}, \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

por (2.5.8), (2.5.9) y (2.1.4). Sustituyendo en lugar de  $\hat{u}_1(w_1)$  su representación obtenida en la expresión (2.1.13), tenemos que

$$\begin{aligned} \tilde{f}_0(w_1, w_2) &= \frac{1}{\sin^2 \beta} \left[ -\sin \beta \hat{g}(w_1) + (i \sinh(w_2 + i\beta) \cos \beta - i \sinh w_1) \hat{u}_2(w_2) \right. \\ &\quad \left. (i \sinh w_1 \cos \beta - i \sinh(w_2 + i\beta)) \left( \frac{\hat{g}(w_1) + \hat{u}_2(w_1) \cosh(w_1 + i\beta)}{\cosh w_1} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

Sean

$$\mathcal{A}_1(\mathbf{w}) = i[\sinh w_1 \cos \beta - \sinh(w_2 + i\beta)] \cosh(w_1 + i\beta), \quad (3.2.5)$$

y

$$\mathcal{A}_2(\mathbf{w}) = i[\sinh(w_2 + i\beta) \cos \beta - \sinh w_1] \cosh w_1. \quad (3.2.6)$$

Entonces, la expresión (3.2.4) puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_0(w_1, w_2) &= \frac{1}{\sin^2 \beta \cosh w_1} \left\{ i \hat{g}(w_1) [\sinh(w_1 + i\beta) - \sinh(w_2 + i\beta)] \right. \\ &\quad \left. + \hat{u}_2(w_1) \mathcal{A}_1(\mathbf{w}) + \hat{u}_2(w_2) \mathcal{A}_2(\mathbf{w}) \right\}. \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

Ahora, vamos a expresar el símbolo del operador de Helmholtz transformado (1.2.14) en términos de  $\mathbf{w}$ . Sustituyendo en lugar de  $z_1$  y  $z_2$  sus expresiones (3.2.2), obtenemos

$$\hat{\mathcal{A}}(\mathbf{w}) = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\beta} \left[ -\operatorname{senh}^2 w_1 - \operatorname{senh}^2(w_2 + i\beta) + 2 \operatorname{senh} w_1 \operatorname{senh}(w_2 + i\beta) \cos \beta - \operatorname{sen}^2 \beta \right]. \quad (3.2.8)$$

Factorizando esta expresión, y usando fórmulas de trigonometría hiperbólica, obtenemos la siguiente expresión equivalente

$$\hat{\mathcal{A}}(\mathbf{w}) = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\beta} \left[ (\operatorname{senh} w_1 - \operatorname{senh} w_2)(\operatorname{senh} w_1 - \operatorname{senh}(w_2 + 2i\beta)) \right]. \quad (3.2.9)$$

Luego, la fórmula (1.2.21) implica que la solución del problema  $\mathbf{A}$  en la variable  $\mathbf{w} \in \Sigma$  se expresa como:

$$\hat{u}(\mathbf{w}) = \frac{i\hat{g}(w_1)(\operatorname{senh}(w_1 + i\beta) - \operatorname{senh}(w_2 + i\beta))}{\cosh w_1 \hat{\mathcal{A}}(\mathbf{w})} + \frac{\hat{u}_2(w_1)A_1(\mathbf{w}) + \hat{u}_2(w_2)A_2(\mathbf{w})}{\cosh w_1 \hat{\mathcal{A}}(\mathbf{w})}, \quad (3.2.10)$$

por (3.2.7). Luego, las fórmulas (3.2.2) implican que la inclusión  $\tilde{u}_0(z_1, z_2) \in L_2(\mathbb{R}^2)$  es equivalente a la inclusión  $\hat{u}(\mathbf{w}) \in L_2(\Sigma, P(\mathbf{w}))$ , donde

$$L_2(\Sigma, P) = \left\{ f(\mathbf{w}) : \int_{\Sigma} |f(\mathbf{w})|^2 P(\mathbf{w}) |d\mathbf{w}| < \infty \right\}; \quad P(\mathbf{w}) = \exp(|w_1| + |w_2|). \quad (3.2.11)$$

Ahora necesitamos la siguiente estimación del denominador en (3.2.10).

**Lema 2.4.** *Sea  $\mathcal{A}(\mathbf{w})$  definido por (3.2.9), entonces*

$$|\hat{\mathcal{A}}(\mathbf{w})| \geq C(e^{2|w_1|} + e^{2|w_2|}), \quad \mathbf{w} \in \Sigma. \quad (3.2.12)$$

**Demstración.** Ya que  $w_2 \in \mathcal{C}_{-\beta}$ , entonces tenemos que  $w_2 = w'_2 - i\beta$ ,  $w'_2 \in \mathcal{C}_0$ . De aquí

$$|\operatorname{senh} w_1 - \operatorname{senh}(w_2 + 2i\beta)| = 2 \left| \operatorname{senh} \left( \frac{w_1 - w'_2}{2} - \frac{i\beta}{2} \right) \right| \left| \cosh \left( \frac{w_1 + w'_2}{2} + \frac{i\beta}{2} \right) \right|. \quad (3.2.13)$$

Ya que  $\pi/2 < \beta < \pi$ , la última expresión nunca se anula para  $(w_1, w'_2) \in \mathcal{C}_0 \times \mathcal{C}_0$ . Así, de (3.2.13) tenemos que

$$|\operatorname{senh} w_1 - \operatorname{senh}(w_2 + 2i\beta)| \geq C \exp\{|w_1 - w'_2|/2 + |w_1 + w'_2|/2\}, \quad (w_1, w'_2) \in \mathcal{C}_0 \times \mathcal{C}_0. \quad (3.2.14)$$

Similarmente,

$$|\operatorname{senh} w_1 - \operatorname{senh} w_2| \geq C \exp\{|w_1 - w'_2|/2 + |w_1 + w'_2|/2\}, \quad \mathbf{w} \in \Sigma. \quad (3.2.15)$$

De (3.2.9), (3.2.14) y (3.2.15) obtenemos que

$$|\hat{\mathcal{A}}(\mathbf{w})| \geq C \exp\{|w_1 - w'_2| + |w_1 + w'_2|\}. \quad (3.2.16)$$

Considerando varias configuraciones posibles del par  $w_1$  y  $w'_2$ , obtenemos la estimación (3.2.12) de (3.2.16). El Lema esta probado. ■

Continuamos con la demostración del Teorema 2.3. Consideremos el primer término en (3.2.10). La definición (3.2.11) y el Lema 2.4 implican que para probar que la función pertenece a  $L_2(\Sigma, P)$  es suficiente probar que

$$\int_{\Sigma} \frac{|\hat{g}(w_1)|^2 e^{|w_2|}}{e^{|w_1|}(e^{2|w_1|} + e^{2|w_2|})} |d\mathbf{w}| < C \|g\|_{-\frac{1}{2}+\varepsilon}^2. \quad (3.2.17)$$

Para esto, integrando el primer término de la expresión anterior sobre  $w_2 \in \mathcal{C}_{-\beta}$ , obtenemos que

$$\int_{\mathcal{C}_{-\beta}} \frac{e^{|w_2|}}{e^{2|w_1|} + e^{2|w_2|}} |dw_2| \leq \frac{C}{e^{|w_1|}}. \quad (3.2.18)$$

Luego, de (3.2.18) y usando la condición (2.2.13), obtenemos (3.2.17).

Consideremos ahora el segundo término en (3.2.10). Este término es la suma de dos funciones  $\mathcal{A}_1$  y  $\mathcal{A}_2$ , donde

$$\mathcal{A}_l = \frac{\hat{u}_2(w_l) \mathcal{A}_l(\mathbf{w})}{\cosh w_1 \hat{\mathcal{A}}(\mathbf{w})}, \quad \text{para } l = 1, 2. \quad (3.2.19)$$

Por el Lema 2.4 y (3.2.5) tenemos que

$$\left| \frac{\mathcal{A}_1(\mathbf{w})}{\cosh w_1 \mathcal{A}(\mathbf{w})} \right| \leq \frac{C}{\exp |w_1| + \exp |w_2|}. \quad (3.2.20)$$

Por lo tanto, de (3.2.18) y (3.2.20) tenemos que

$$\int_{\Sigma} |\mathcal{A}_1(\mathbf{w})|^2 P(\mathbf{w}) |d\mathbf{w}| \leq C \int_{\check{\mathcal{C}}_0} |\hat{u}_2(w_1)|^2 |dw_1| \leq C \|g\|_{-\frac{1}{2}+\varepsilon}^2. \quad (3.2.21)$$

por (3.1.1) con  $m = 0$ . Consideremos  $\mathcal{A}_2(\mathbf{w})$ . Las fórmulas (3.2.6) y (3.2.11) implican que

$$\int_{\Sigma} |\mathcal{A}_2(\mathbf{w})|^2 P(\mathbf{w}) |d\mathbf{w}| \leq C \int_{\mathcal{C}_{-\beta}} |\hat{u}_2(w_2)|^2 e^{|w_2|} \left( \int_{\check{\mathcal{C}}_0} \frac{|dw_1|}{e^{|w_1|}(e^{2|w_1|} + e^{2|w_2|})} \right) |dw_2|. \quad (3.2.22)$$

Integrando el interior de la integral sobre  $w_1$ , obtenemos

$$\int_{\check{\mathcal{C}}_0} \frac{|dw_1|}{e^{|w_1|}(e^{2|w_1|} + e^{2|w_2|})} \leq C e^{-3|w_2|/2}.$$

Esta estimación y (3.2.22) implican

$$\int_{\Sigma} |\mathcal{A}_2(\mathbf{w})|^2 P(\mathbf{w}) |d\mathbf{w}| \leq C \int_{\mathcal{C}_{-\beta}} |\hat{u}_2(w_2)|^2 e^{-|w_2|/2} |dw_2| \leq C \|g\|_{-\frac{1}{2}+\varepsilon}^2,$$

por (3.1.1). Así, todos los términos en (3.2.10) pertenecen a  $L_2(\Sigma, P)$  y el Teorema está probado. ■

# Capítulo 4

## Conclusiones

En nuestro trabajo, encontramos la solución explícita del Problema de Neumann (0.0.1). Dicha solución se obtiene en la forma de la Transformada de Fourier inversa de una función que depende de los datos de Cauchy, estos datos se encuentran usando las condiciones de frontera por el Método de las características complejas. La parte principal de este método, es el uso de la propiedad de simetría de los datos de Cauchy. Esto nos permite encontrar un dato desconocido, como solución de una ecuación en diferencias. Resolvemos esta ecuación en forma explícita e investigamos completamente la solución obtenida. Al final, usando sus propiedades, demostramos que la solución del problema de Neumann pertenece al espacio  $L_2$ .

# Apéndice A

## A.1. Lemas auxiliares

En esta sección, se enuncian y demuestran los lemas auxiliares que se han utilizado a lo largo del trabajo.

**Lema A.1.1.** *Sea  $y \in \mathbb{C}^+$ ,  $y = y_1 + i\rho$ . Entonces*

$$\left\| \frac{1}{|x - y|} \right\|_{L_2(\mathbb{R}_x)} \leq C\rho^{-1/2}. \quad (\text{A.1.1})$$

**Demostración.** Ya que  $|x - y|^2 = (x - y_1)^2 + \rho^2$  (véase la figura A.1), entonces

$$\left\| \frac{1}{|x - y|} \right\|_{L_2(\mathbb{R}_x)} \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x - y_1)^2 + \rho^2} dx. \quad (\text{A.1.2})$$

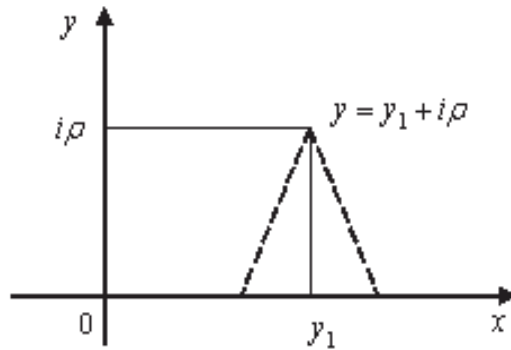


Figura A.1: Interpretación geométrica de la distancia  $\rho$ .

Haciendo el cambio de variable  $x - y_1 = t$ , obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x - y_1)^2 + \rho^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^2 + \rho^2} dx = \frac{C}{\rho}, \quad (\text{A.1.3})$$

de aquí se sigue (A.1.1). ■

**Lema A.1.2.** *Existe  $C > 0$  tal que para cada  $w \in \Pi_{-\beta}^{\pi-\beta}$  se cumple la siguiente desigualdad*

$$(1 + |w|) \leq C(1 + |\sinh(w + i\beta)|), \quad w \in \Pi_{-\beta}^{\pi-\beta}. \quad (\text{A.1.4})$$

**Demostración.** Haciendo el cambio de variables  $w + i\beta \longleftrightarrow w$  reducimos (A.1.4) a la desigualdad

$$1 + |w - i\beta| \leq C(1 + |\sinh w|), \quad w \in \Pi_0^\pi. \quad (\text{A.1.5})$$

Es evidente que existe  $C_1 > 0$  tal que

$$1 + |w - i\beta| \leq C_1(1 + |w|), \quad w \in \mathbb{C}^+. \quad (\text{A.1.6})$$

Por lo tanto, es suficiente demostrar que

$$1 + |w| \leq C(1 + |\sinh w|), \quad w \in \Pi_0^\pi, \quad (\text{A.1.7})$$

para algún  $C > 0$ .

Notemos que para  $w := w_1 + iw_2$

$$|\sinh w| = \cosh^2 w_1 - \cos^2 w_2 \geq \cosh^2 w_1 - 1, \quad (\text{A.1.8})$$

de aquí

$$1 + |\sinh w| \geq \cosh^2 w_1, \quad w \in \mathbb{C}^+. \quad (\text{A.1.9})$$

Por lo tanto, es suficiente demostrar que existe  $C > 0$  tal que

$$1 + |w| \leq C \cosh^2 w_1, \quad w \in \Pi_0^\pi. \quad (\text{A.1.10})$$

Ya que, para  $w \in \Pi_0^\pi$  se cumple que

$$1 + |w| = 1 + |w_1 + iw_2| \leq 1 + |w_1| + \pi, \quad (\text{A.1.11})$$

entonces es suficiente demostrar que existe  $C > 0$  tal que

$$1 + |w_1| + \pi \leq C \cosh^2 w_1, \quad w_1 \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.1.12})$$

Este hecho se sigue de las siguientes afirmaciones:

1.  $\frac{\cosh^2 w}{C + |w|} \longrightarrow \infty$ , cuando  $w \rightarrow \infty$ ;
2. Para cada  $N > 0$  existe  $C_N$  tal que

$$1 + |w| + \pi \leq C_N \cosh^2 w, \quad |w| \leq N; \quad (\text{A.1.13})$$

ya que  $\cosh^2 w \geq 1$ , para  $w \in \mathbb{R}$ .

Luego, el Lema esta probado. ■

**Lema A.1.3.** Sea  $z_2 : \Pi_{-\beta}^{\pi-\beta} \longrightarrow \mathbb{C}^+$  la transformación definida como:

$$z_2(w) = \sinh(w + i\beta). \quad (\text{A.1.14})$$

Entonces, existe  $C > 0$  tal que

$$|\text{Im}z_2(w)| \leq (1 + e^{|w|})\rho(w, \Pi_{-\beta}^{\pi-\beta}), \quad w \in \Pi_{-\beta}^{\pi-\beta}. \quad (\text{A.1.15})$$

**Demostración.** Con el cambio de variable  $w \longleftrightarrow w + i\beta$ , la cota (A.1.15) se reduce a la siguiente expresión:

$$|\text{Im}z_1(w)| \leq (1 + e^{|w|})\rho(w, \Pi_0^\pi), \quad (\text{A.1.16})$$

donde,

$$z_1(w) = \sinh w. \quad (\text{A.1.17})$$

Ya que, para  $w = w_1 + iw_2 \in \Pi_0^\pi$  se cumple que

$$|\text{Im}z(w)| = \cosh w_1 |\text{sen} w_2| \leq C(1 + e^{w_1}) \text{mín}(w_2, \pi - w_2) = C(1 + e^{w_1})\rho(w, \partial\Pi_0^\pi). \quad (\text{A.1.18})$$

Como  $e^{|w_1|} \leq e^{|w|}$ , para  $w \in \Pi_0^\pi$ , entonces la cota (A.1.16) esta demostrada. ■

**Lema A.1.4.** Sea  $\Omega \subset \mathbb{C}$  un dominio. Si  $f \in H(\Omega)$  y es antisimétrica con respecto de  $a \in \Omega$ , entonces

$$f(a) = 0 \quad (\text{A.1.19})$$

**Demostración.** Ya que

$$f(-w + 2a) = -f(w) \quad \forall w \in \Omega, \quad (\text{A.1.20})$$

por ser  $f$  antisimétrica con respecto de  $a$ . Entonces, en particular

$$f(-a + 2a) = -f(a) \quad \Leftrightarrow \quad f(-a) = -f(a) \quad \Rightarrow \quad 2f(a) = 0, \quad (\text{A.1.21})$$

lo cual prueba (A.1.19). ■

**Lema A.1.5.** (véase el Teorema II de [16], página 5). Sea  $F(s)$  una función de variable compleja  $s = \sigma + it$ . Supongamos que  $F(s)$  es analítica sobre  $-\lambda \leq \sigma \leq \mu$ , y tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(\sigma + it)|^2 dt < C \quad (\text{A.1.22})$$

sobre la región  $-\lambda \leq \sigma \leq \mu$ . Luego, si  $s$  está en el interior de esta región, entonces

$$F(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\mu + iy)}{\mu + iy - s} dy - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(-\lambda + iy)}{-\lambda + iy - s} ds. \quad (\text{A.1.23})$$

Para probar una de las principales propiedades del levantamiento  $\hat{g}(w)$ , utilizamos la Prueba de Schur (véase [5], Teorema 6.2).

**Lema A.1.6. (Lema de Schur)** *Sea  $T$  un operador integral con kernel de Schwartz no negativo  $K(x, z)$ , para  $x \in X$  y  $z \in Z$ :*

$$Tf(z) = \int_Y K(x, z)f(x) dx.$$

*Si existen funciones  $p(x) > 0$  y  $q(z) > 0$ , y números  $D > 0$ , y  $E > 0$  tales que*

$$\int_Y K(x, z)q(z) dz \leq Dp(x) \tag{A.1.24}$$

*para casi todo  $x$ , y*

$$\int_X p(x)K(x, z) dx \leq Eq(z) \tag{A.1.25}$$

*para casi todo  $z$ , entonces  $T$  es continuo de  $L_2(Y)$  a  $L_2(X)$ , con norma acotada por*

$$\|T\|_{L_2 \rightarrow L_2} \leq \sqrt{DE}.$$

## A.2. Estimaciones auxiliares

Esta sección esta dedicada a la demostración de algunas estimaciones importantes para la construcción de la función  $T(w)$  (véase [22]).

Sea

$$\chi(t) := \text{char}(|t| \geq 1). \quad (\text{A.2.1})$$

Entonces

$$1 - \chi(t) = \text{char}(|t| \leq 1). \quad (\text{A.2.2})$$

**Lema A.2.1.** Sean  $|w_2| \leq \beta$  y  $w_1 \in \mathbb{R}$ . Existe  $C(\beta) > 0$  tal que

$$\left| \frac{\text{sen}wt}{\text{senh}\beta t} \right| \leq C(\beta) \left\{ |w|(1 - \chi(t)) + e^{(|w_2| - \beta)|t|} \chi(t) \right\}, \quad t \in \mathbb{R}; \quad (\text{A.2.3})$$

$$\left| \frac{t \cos wt}{\text{senh}\beta t} \right| \leq C(\beta) e^{(|w_2| - \beta)|t|}, \quad t \in \mathbb{R}; \quad (\text{A.2.4})$$

$$|\text{sen}ix| \leq 2|x|, \quad |x| \leq 1; \quad (\text{A.2.5})$$

$$|\cos(wt + i\alpha t)| \leq C, \quad |t| \leq 1, \quad w \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.2.6})$$

**Demostración.** I) Probaremos primero la desigualdad (A.2.3).

Ia) Consideremos el caso  $|t| \leq 1$ . Definimos

$$f_t(w) = \begin{cases} \frac{\text{sen}wt}{\text{senh}\beta t}, & t \neq 0, \quad t \in [-1, 1] \\ \frac{w}{\beta}, & t = 0. \end{cases} \quad (\text{A.2.7})$$

La cota (A.2.3) para  $t = 0$  es obvia. Sea  $t \neq 0$ ,  $t \in [-1, 1]$ . En este caso la función  $f_t(w)$  es entera en  $\mathbb{C}_w$ . Usamos la representación integral para  $f_t(w)$ . Ya que  $f_t(0) = 0$ ,

$$f_t(w) = \int_0^w \frac{d}{d\xi} f_t(\xi) d\xi, \quad (\text{A.2.8})$$

donde la integración se hace sobre el intervalo  $[0, w]$ . Esto implica que

$$|f_t(w)| \leq |w| \text{máx} \left\{ \left| \frac{d}{d\xi} f_t(\xi) \right| : \xi \in [0, w] \right\}. \quad (\text{A.2.9})$$

De (A.2.7) se sigue que

$$\left| \frac{d}{d\xi} f_t(\xi) \right| = \left| \frac{t}{\text{senh}\beta t} \right| |\cos \xi t| \leq C |\cos \xi t|, \quad (\text{A.2.10})$$

ya que  $|t| \leq 1$ . Nos falta demostrar que

$$|\cos \xi t| \leq C, \quad \xi \in \overline{\Pi}_{-\beta}^{\beta}, \quad |t| \leq 1. \quad (\text{A.2.11})$$

Esto se sigue de la representación

$$\cos \xi t = \cos(\xi_1 + i\xi_2)t = \cos \xi_1 t \cosh \xi_2 t - i \operatorname{sen} \xi_1 t \operatorname{senh} \xi_2 t. \quad (\text{A.2.12})$$

La cota (A.2.3), esta probada para  $|t| \leq 1$ .

Ib) Consideremos ahora el caso  $|t| \geq 1$ . Ya que la función  $|\operatorname{sen} w t / \operatorname{senh} \beta t|$  es par, es suficiente demostrar (A.2.3) para  $t \geq 1$ . Además, como  $\left| \frac{\operatorname{sen} w t}{\operatorname{senh} \beta t} \right| \leq \frac{e^{|w_2|t}}{|\operatorname{senh} \beta t|}$  entonces, es suficiente demostrar que existe  $C > 0$  tal que

$$\frac{e^{|w_2|t}}{\operatorname{senh} \beta t} \leq C e^{(|w_2| - \beta)t}, \quad t \geq 1, \quad |w_2| \leq \beta. \quad (\text{A.2.13})$$

Esta desigualdad es equivalente a

$$e^{-\beta t} \operatorname{senh} \beta t \geq C_1, \quad t > 1, \quad |w_2| \leq \beta. \quad (\text{A.2.14})$$

Ya que

$$e^{-\beta t} \operatorname{senh} \beta t = \frac{1}{2} e^{-\beta t} (e^{\beta t} - e^{-\beta t}) = \frac{1}{2} (1 - e^{-2\beta t}) \rightarrow \frac{1}{2}, \quad \text{cuando } t \rightarrow +\infty \quad (\text{A.2.15})$$

entonces, existe  $t_{1/2} > 1$ :

$$e^{-\beta t} \operatorname{senh} \beta t \geq \frac{1}{4}, \quad t > t_{1/2}, \quad |w_2| \leq \beta. \quad (\text{A.2.16})$$

Por otro lado, como  $e^{-\beta t} \operatorname{senh} \beta t > 0$  y continua sobre  $[1, t_{1/2}]$ , entonces existe  $C_0 > 0$ :

$$e^{-\beta t} \operatorname{senh} \beta t \geq C_0, \quad t \in [1, t_{1/2}]. \quad (\text{A.2.17})$$

Luego, para  $C = \min\{C_0, 1/4\}$ , obtenemos (A.2.3).

II) La prueba de (A.2.4) es análoga a la demostración 2) de (A.2.3).

III) Demostraremos ahora la desigualdad (A.2.5). Ya que  $|\operatorname{sen} i x| = |\operatorname{senh} x|$ , entonces es suficiente demostrar que

$$\operatorname{senh} x \leq 2x, \quad x \in [0, 1]. \quad (\text{A.2.18})$$

Consideremos la función

$$f(x) := \operatorname{senh} x - 2x, \quad x \in [0, 1]. \quad (\text{A.2.19})$$

Notemos que

1.  $f(0) = 0$ ;
2.  $f'(x) = \cosh x - 2 < 0$ ,  $x \in [0, 1]$ .

Entonces, (1) y (2) implican que

$$f(x) \leq 0, \quad \text{para } x \in [0, 1], \quad (\text{A.2.20})$$

lo que prueba la afirmación.

IV) Ahora demostraremos la desigualdad (A.2.6). Sea  $t \in [-1, 1]$ , entonces

$$|\cos(wt + i\alpha t)| = |\cos wt \cosh i\alpha t - i \operatorname{sen} wt \operatorname{sen} \alpha t| \quad (\text{A.2.21})$$

$$\leq \cos \alpha t + |\operatorname{sen} \alpha t| \leq C, \quad |t| \leq 1 \quad (\text{A.2.22})$$

ya que la función  $\cos \alpha t + |\operatorname{sen} \alpha t|$  es continua. ■

**Corolario A.2.1.** *Existe  $C(w, \beta) > 0$ , tal que*

$$\left| \frac{\operatorname{sen} wt}{\operatorname{senh} \beta t} \right| \leq C(w, \beta) e^{-\beta|t|}, \quad w, t \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.2.23})$$

**Demostración.** Se sigue de (A.2.3), cuando  $w_2 = 0$ . ■

### A.3. Transformación del problema de Neumann en ángulo al primer cuadrante

En este apéndice reduciremos el problema de Neumann (0.0.1) en el ángulo  $\Omega$ , al problema en el primer cuadrante  $K_+$ .

Sea  $(x_1, x_2) \in K_+$ , entonces  $(x_1, x_2) = (x_1(x, y), x_2(x, y)) = \left(x - y \cot \beta, \frac{y}{\operatorname{sen} \beta}\right)$ .

Consideremos la primera ecuación de (0.0.1). De la igualdad (1.1.1) y la regla de la cadena se sigue que

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad (\text{A.3.1})$$

por (1.1.1). De aquí,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \frac{\partial x_1}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial x_1 x_2} \frac{\partial x_2}{\partial x} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}. \quad (\text{A.3.2})$$

Análogamente,

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial y} = -\cot \beta \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{1}{\operatorname{sen} \beta} \frac{\partial}{\partial x_2}. \quad (\text{A.3.3})$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \cot^2 \beta \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\cos \beta}{\operatorname{sen}^2 \beta} \frac{\partial^2}{\partial x_1 x_2} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \beta} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}. \quad (\text{A.3.4})$$

Luego,

$$\begin{aligned} (\Delta - 1) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 1 \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cot^2 \beta \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\cos \beta}{\operatorname{sen}^2 \beta} \frac{\partial^2}{\partial x_1 x_2} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \beta} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - 1 \\ &= \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \beta} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - 2 \cos \beta \frac{\partial^2}{\partial x_1 x_2} - \operatorname{sen}^2 \beta \right). \end{aligned} \quad (\text{A.3.5})$$

De la última igualdad de la expresión anterior se sigue la primera ecuación de (1.1.3). Transformemos ahora las derivadas normales del problema de Neumann (0.0.1). Ya que estamos considerando las derivadas normales exteriores (véase la figura A.2), entonces, para  $(x_1, x_2)$  definido por (1.1.1) tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\vec{n}_1} &= \cos \frac{3\pi}{2} \frac{\partial}{\partial x} + \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} \frac{\partial}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y} \\ &= - \left( -\cot \beta \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{1}{\operatorname{sen} \beta} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) = \frac{1}{\operatorname{sen} \beta} \left( \cos \beta \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.3.6})$$

por (A.3.3). Análogamente,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\vec{n}_2} &= [\cos(\beta + \pi/2)] \frac{\partial}{\partial x} + [\sin(\beta + \pi/2)] \frac{\partial}{\partial y} = -\sin\beta \frac{\partial}{\partial x} + \cos\beta \frac{\partial}{\partial y} \\
&= -\sin\beta \frac{\partial}{\partial x_1} + \cos\beta \left( -\cot\beta \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{1}{\sin\beta} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \\
&= -\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \sin\beta + \frac{\cos^2\beta}{\sin\beta} \right) + \frac{\cos\beta}{\sin\beta} \frac{\partial}{\partial x_2} \\
&= \frac{1}{\sin\beta} \left( -\frac{\partial}{\partial x_1} + \cos\beta \frac{\partial}{\partial x_2} \right),
\end{aligned} \tag{A.3.7}$$

por (A.3.3).

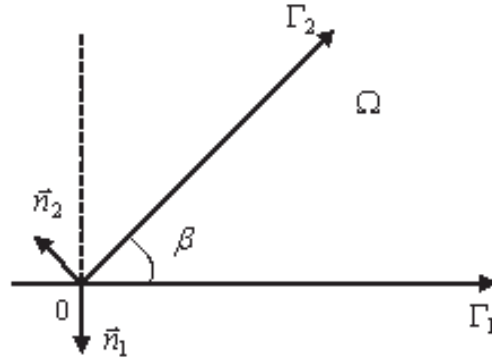


Figura A.2: Dirección de las derivadas normales a la frontera de  $\Omega$ .

Luego, de (A.3.5)-(A.3.7) se sigue que el problema de Neumann (0.0.1), después de la transformación (1.1.1), pasa al siguiente problema en el cuadrante  $K_+$ :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\mathcal{A} \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right) u(x_1, x_2) = 0, \quad (x_1, x_2) \in K_+, \\
\frac{1}{\sin\beta} \left( \cos\beta \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2} \right) u(x_1, 0) = g(x_1), \quad x_1 > 0, \\
\left( -\frac{\partial}{\partial x_1} + \cos\beta \frac{\partial}{\partial x_2} \right) u(0, x_2) = 0. \quad x_2 > 0.
\end{array} \right. \tag{A.3.8}$$

## A.4. Los espacios de Schwartz

**Definición A.4.1.** Sea  $N_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ , y  $p = (p_1, \dots, p_n) \in N_0 \times \dots \times N_0$ . El Espacio de Schwartz sobre  $\mathbb{R}^n$  se define como

$$S(\mathbb{R}^n) := \left\{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \forall m \in N_0 \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|)^m \sum_{|p| \leq m} \left| \frac{\partial^p \varphi}{\partial x^p} \right| < \infty \right\}. \quad (\text{A.4.1})$$

Aquí,  $|p| = p_1 + \dots + p_n$  y  $\frac{\partial^p \varphi}{\partial x^p} = \frac{\partial^{p_1} \varphi(x)}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_n^{p_n}}$ .

Para  $m \in N_0$ , el espacio de Schwartz está dotado con las normas:

$$\|\varphi\|_m = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|)^m \sum_{|p| \leq m} \left| \frac{\partial^p \varphi}{\partial x^p} \right|. \quad (\text{A.4.2})$$

**Lema A.4.1.**  $\|\cdot\|_m$ , definida en (A.4.2) es una norma para cada  $m \in N_0$ ; i.e.,

- i)  $\|\varphi\|_m \geq 0 \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n), \forall m \in N_0$ .
- ii)  $\|\varphi\|_m = 0 \iff \varphi = 0, \forall m \in N_0$ .
- iii)  $\|\lambda\varphi\|_m = |\lambda| \|\varphi\|_m \forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n), \forall m \in N_0$ .
- iv)  $\|\varphi + \psi\|_m \leq \|\varphi\|_m + \|\psi\|_m \forall \varphi, \psi \in S(\mathbb{R}^n), \forall m \in N_0$ .

**Demostración.** Sea  $m \in N_0$ , *i*) es evidente de (A.4.2), *ii*) se sigue de (A.4.2) y del hecho de que  $\frac{\partial^p \varphi}{\partial x^p} = 0 \forall p : 0 \leq |p| \leq m \implies \varphi = 0$ , *iii*) se sigue de (A.4.2) y de las propiedades lineales de la derivada, y finalmente *iv*) se sigue de que para cualesquiera conjuntos  $A$  y  $B$ ,  $\sup(A + B) \leq \sup A + \sup B$ , y del hecho de que  $\varphi, \psi \in S(\mathbb{R}^n)$ . ■

### Topología en $S(\mathbb{R}^n)$

En el espacio de Schwartz se puede definir una topología mediante las vecindades de cada punto de  $S(\mathbb{R}^n)$ . Definimos primero las vecindades de  $0 \in S(\mathbb{R}^n)$ .

Sea  $m \in N_0, \forall n \in \mathbb{N}$

$$V_{m,n} := \left\{ \varphi \in S(\mathbb{R}^n) : \|\varphi\|_{m,n} < \frac{1}{n} \right\}. \quad (\text{A.4.3})$$

**Lema A.4.2.** El sistema  $\{V_{n,m}\}$ , forma una base de vecindades para 0.

Ahora definimos las vecindades de cualquier elemento de  $S(\mathbb{R}^n)$ . Sea  $\phi \in S(\mathbb{R}^n)$ , entonces una familia de vecindades de  $\phi$ , es el conjunto de translaciones de las vecindades de 0, i.e.  $V_\phi$  es una vecindad de  $\phi$  sii  $\exists V_0$  vecindad de 0 :

$$V_\phi = V_0 + \phi. \quad (\text{A.4.4})$$

**Lema A.4.3.** Dado  $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ , el sistema de vecindades (A.4.4) genera una topología  $\tau_S$  en  $S(\mathbb{R}^n)$  de la siguiente forma:

$$U \in \tau_S \iff \forall \varphi \in U \exists V_\varphi \subset U. \quad (\text{A.4.5})$$

**Observación A.4.1.** La topología inducida por este sistema de vecindades (A.4.4) es metrizable, es decir, sean  $\phi, \psi \in S(\mathbb{R}^n)$  entonces

$$d(\psi, \varphi) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{\|\psi - \varphi\|_m}{1 + \|\psi - \varphi\|_m} \quad (\text{A.4.6})$$

satisface:

1.  $d(\psi, \varphi)$  es una métrica, i.e.,
  - I)  $d(\psi, \varphi) \geq 0 \forall \varphi, \psi \in S(\mathbb{R}^n), \forall m \in N_0$ .
  - II)  $d(\psi, \varphi) = 0 \iff \psi = \varphi, \forall m \in N_0$ .
  - III)  $d(\psi, \varphi) = d(\varphi, \psi) \forall \varphi, \psi \in S(\mathbb{R}^n), \forall m \in N_0$ .
  - IV)  $d(\psi, \varphi) \leq d(\psi, \phi) + d(\phi, \varphi) \forall \varphi, \psi, \phi \in S(\mathbb{R}^n), \forall m \in N_0$ .
2.  $d(\psi, \varphi)$  determina la topología de  $S(\mathbb{R}^n)$ ; i.e.,  
 $\forall B(\psi, r) \exists V_\psi : V_\psi \subset B(\psi, r)$ , y  $\forall V_\psi \exists B(\psi, r) : V_\psi \supset B(\psi, r)$ .
3.  $\varphi_k \longrightarrow \varphi \iff \|\varphi_k - \varphi\|_m \longrightarrow 0 \forall m \in N_0$ ,
4.  $d$  está dotada con estructura lineal, es decir, sean  $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset S(\mathbb{R}^n)$ , y  $\varphi, \psi \in S(\mathbb{R}^n)$  entonces
  - $\varphi_n \longrightarrow \varphi, \psi_n \longrightarrow \psi \implies \varphi_n + \psi_n \longrightarrow \varphi + \psi$  en  $S(\mathbb{R}^n)$ .
  - Sea  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$  tal que  $c_n \longrightarrow c \in \mathbb{C}$ .  
 Si  $\varphi_n \longrightarrow \varphi$  entonces  $\varphi_n + c_n \longrightarrow \varphi + c$  en  $S(\mathbb{R}^n)$ .

**Demostración.**

- (1): I) se sigue de (A.4.6) y del Lema A.4.1-i), II) se sigue de (A.4.6) y del Lema A.4.1-ii), III) se sigue de (A.4.6) y del Lema A.4.1-iii), y iv) resulta del hecho de que la función  $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$  definida como  $f(t) = \frac{t}{1+t}$ , es creciente en  $\mathbb{R}^+$  y del Lema A.4.1-i).
- (2): Se sigue del Lema A.4.3 y de la definición (A.4.4).
- (3): Se sigue de (A.4.6).
- (4): Se sigue de (3) y de (A.4.6).

■

**Definición A.4.2.** *Un espacio lineal que satisface (1)-(4), se llama **Espacio de Fréchet**.*

**Definición A.4.3.** *El espacio de Schwartz  $S'(\mathbb{R}^n)$  es el espacio dual de  $S(\mathbb{R}^n)$ , es decir, el espacio de los funcionales lineales continuos sobre  $S(\mathbb{R}^n)$ .*

# Bibliografía

- [1] L. Castro, F. -O. Speck, F. Teixeira. *Mixed boundary value problems for Helmholtz equation en a quadrant*. Integr. Equat. Oper. Theory 56, (2006) 1-44.
- [2] M. Costabel and E. Stephan, *Boundary integral equations for mixed boundary value problems in polygonal domains and Galerkin approximation*. Banach Center Publicat., 15 (1985), pp. 175–251.
- [3] G. I. Eskin. *Boundary value problems for elliptic pseudodifferential equations*. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1981.
- [4] P. Grisvard. *Elliptic problems in nonsmooth domains*. Pitman, Boston-London-Melbourne, 1985.
- [5] P. R. Halmos and V. S. Sunder. *Bounded integral operators on  $L_2$  spaces*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1978.
- [6] A. Komech, A. Merzon, P. Zhevandrov. *A method of complex characteristics for elliptics problem in angles and its applications*. Amer. Math. Soc. Transl. 2202; **206**: 125-159.
- [7] A. I. Komech, *Elliptic boundary value problems on manifolds with piecewise smooth boundary*. Math. USSR Sbornik, 21 (1973), pp. 91–135.
- [8] A. I. Komech, *Linear partial differential equations with constant coefficients*. Pp. 127-260 in: Partial Differential Equations II (Encyclopedia of Mathematical Sciences, Vol.31), Springer, 1994.
- [9] A. I. Komech, A. E. Merzon. *Stationary diffraction problems on the wedges with general boundary value conditions*, in Abstracts of the Conference "Partial Differential Equations", Potsdam, September,1993.
- [10] A. I. Komech, A. E. Merzon, and P. N. Zhevandrov. *On the completeness of Ursell's trapping modes*, Russian J. Math. Phys., 4 (1996), pp. 457-486.

- [11] G. D. Maljuzhinetz. *Excitation, reflection and emission of the surface waves on a wedge with given impedances of the sides*. Dokl. Acad. Nauk SSSR, 1958, v. 121, no 3, pp.436-439.
- [12] V. Malyshev. *Random Walks, Wiener-Hopf Equations in the Quadrant of Plane, Galois Automorphisms*. Moscow University, 1970.
- [13] E. Meister, F. Penzel, F.-O. Speck, and F. S. Teixeira, *Some interior and exterior boundary-value problems for the Helmholtz equation in a quadrant*. Operator Theory: Advances and Applications, 102 (1998), pp. 169–178.
- [14] A. E. Merzon, *General boundary value problems for the Helmholtz equations in a plane angle*. Uspekhi Math. Nauk, 32 (1977), pp. 219–220 (in Russian).
- [15] A. E. Merzon, P. N. Zhevandrov. *High-frequency asymptotics of edge waves on a beach of nonconstant slope*, SIAM J. Appl. Math., Vol. 59, No. 2, pp. 529-546.
- [16] R. E. A. C. Paley and N. Wiener, *Fourier Transforms in the Complex Domain*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1934.
- [17] T. Von Petersdorff. *Boundary integral equations for mixed Dirichlet, Neumann and transmission problems*. Math. Meth. Appl. Sci., 11 (1989), pp. 185–213.
- [18] M. Reed, B. Simon, *Methods of modern mathematical physics, II: Fourier analysis, self-adjointness*. Academic Press, 1975.
- [19] S. L. Sobolev *Applications of functional analysis in mathematical physics*. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1963.
- [20] A. Sommerfeld, *Mathematische theorie der diffraction*. Math. Ann., 47 (1896), pp.317-341.
- [21] P. N. Zhevandrov and A. E. Merzon, *Stability of entrained surface waves under small perturbations of the density of the upper layer*. Math. Notes, 64 (1998), pp. 814–817.
- [22] P.Zhevandrov, A.Merzon, *On the Neumann Problem for the Helmholtz Equation in a Plane Angle*. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 23, 1401-1446, (2000).