Universidad Nacional Autónoma de México y Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Instituto de Física y Matemáticas

Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas
UNAM-UMSNH

Estabilidad oscilatoria en espacios de Banach y teoremas de tipo Ramsey

T E S I S

que para obtener el grado de

Maestro en Ciencias Matemáticas

presenta:

Ana Caren Hernández Soto

Director de Tesis:
Dr. Salvador García Ferreira
Centro en Ciencias Mátematicas,
UNAM, Campus Morelia

Morelia, Michoacán, México
Noviembre, 2020

Agradecimientos

Quiero agradecer a mis padres y a mis hermanos por su apoyo incondicional, el cual me permitió concluir exitosamente esta etapa de mi vida. Todos los esfuerzos tienen su recompensa, y las recompensas saben mejor cuando se comparten con los seres queridos.

Igualmente, quiero agradecer a la Universidad Nacional Autónoma de México y a la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo por permitirme continuar con mi formación académica. Gracias a todos los investigadores y al personal del Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas, PCCM, los cuales hacen que el programa sea un programa de excelencia.

Quiero agradecer a cada uno de mis profesores por seguir alimentando mi amor por las matemáticas con sus extraordinarias clases y su ejemplo.

Especialmente, agradezco al Dr. Salvador García Ferreira por darme la oportunidad de desarrollar este proceso bajo su tutelaje, por su alto nivel de compromiso con el trabajo y conmigo, por su dedicación, su paciencia, sus enseñanzas, por presentar los desafíos más apropiados para mi crecimiento y por preocuparse siempre por mi desarrollo integral.

A mis sinodales y revisores por sus valiosos aportes en el proceso de revisión del presente escrito.

También quiero agradecer al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, CONACYT, por brindarme los medios económicos durante este período. Sin su apoyo mi preparación profesional y la conclusión de este trabajo no sería posible.

Todos los problemas parecen pequeños cuando estas rodeado de amigos. Gracias a Ale Romero, Ale Quintero, Chelsy, Cynthia, Edgar, Fer, Jamie, Nacho y Zama por estar a mi lado en este viaje.

Finalmente, gracias a mis compañeros del PCCM, con los cuales compartí los desafíos de esta experiencia y que al final se convirtieron en amigos.

Índice general

Estabilidad oscilatoria en espacios de Banach y teoremas de tipo Ramsey

Ana Caren Hernández Soto

Resumen

Uno de los objetivos principales de esta tesis es la introducción de una nueva noción de "estabilidad oscilatoria" para una sucesión normalizada en un espacio de Banach, para definir este concepto se usan de manera novedosa sucesiones finitas de barreras en $\mathbb{N}$. Probamos que esta propiedad es equivalente a un teorema de tipo Ramsey concerniente a bloques de barreras. Adicionalmente, logramos ver que este concepto nos otorga una nueva aproximación al célebre Teorema de Brunel-Sucheston sobre modelos dispersos. Con base en esto, otro de nuestros objetivos principales consiste en introducir y analizar a los que llamamos "modelos asintóticos por bloques", los cuales generalizan a los modelos dispersos de Brunel-Sucheston. Queremos remarcar que cada uno de estos modelos se obtiene mediante el uso de bloques de una sucesión infinita de barreras, con esto introducimos una nueva técnica para el estudio de ciertas propiedades de las sucesiones básicas. Mediante ejemplos vemos que estos modelos asintóticos no poseen necesariamente la propiedad de dispersión y que su ventaja radica en que se pueden obtener varios modelos asintóticos por bloques a través de una misma sucesión básica, contrario a los modelos dispersos de Brunel-Sucheston.

Palabras Clave: Sucesión básica, propiedad de Ramsey no nula, bloques de barreras, oscilación bloque estable, modelo asintótico por bloques.

Oscillatory Stability in Banach Spaces and Ramsey-type Theorems

Ana Caren Hernández Soto

Abstract

One of the main aims of this thesis is to introduce a new notion of "oscillatory stability" for a normalized sequence in a Banach space. To define this concept, finite sequences of barriers on $\mathbb{N}$ are used in a novel way. We prove that this property is equivalent to a Ramsey-type theorem about barrier blocks. Furthermore, we see that this concept gives us a new approach to the famous Brunel-Sucheston theorem about spreading models. Based on this, another of our main aims is to introduce and analyze what we call “block asymptotic models” that generalize the Brunel-Sucheston spreading models. We want to emphasize that each of these models is obtained by blocks of an infinite sequence of barriers. With this, we introduce a new technique for the study of certain properties of basic sequences. We present some examples to show that block asymptotic models are not necessarily spreading sequences in general. We also observe that the difference between spreading models and block asymptotic models lies in the fact that it is possible to get several block spreading models through the same basic sequence.

Keywords: Basic sequence, non-zero Ramsey property, barriers blocks, block stable oscillation, block asymptotic model.

Introducción

En algunas ramas de las matemáticas modernas, la Teoría de Ramsey ha mostrado ser una herramienta poderosa. De manera general, los teoremas de tipo Ramsey son de la forma: para cierta función f, cuyo codomino "colorea" los elementos del dominio, se puede encontrar una especie de subestructura infinita tal que la restricción de f a la subestructura es monocromática. Este tipo de teoremas tienen diversas aplicaciones en Combinatoria Finita e Infinita, Topología, Teoría de Conjuntos y, más recientemente, en Análisis Funcional. Específicamente se han encontrado aplicaciones de los Teoremas de tipo Ramsey al estudio de los espacios de Banach. Algunas de estas aplicaciones y nuevas direcciones se pueden consultar en los libros "Ramsey Methods in Analysis" [1] y "Teoría de Ramsey y Espacios de Banach" [9].

Un ejemplo de ello es la demostración encontrada por J. Farahat [13] del famoso Teorema de Rosenthal sobre ℓ_1 [28], el cual asegura que cualquier sucesión acotada $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en un espacio de Banach posee una subsucesión $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tal que alguna de las siguientes condiciones se cumple: la subsucesión $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es débilmente Cauchy o la subsucesión $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es equivalente a la base canónica de ℓ_1. Por otro lado, a mediados de la década de los 70's, A. Brunel y L. Sucheston [2] probaron que toda sucesión básica normalizada dentro de un espacio de Banach tiene una subsucesión "asintóticamente" subsimétrica que, de hecho, produce lo que ahora se conoce como modelo disperso. La prueba de este resultado consiste en la aplicación recursiva del Teorema de Ramsey [27] a la par de un proceso de diagonalización. Los modelos dispersos guardan una estrecha relación con la sucesión a través de la cual son construidos. Una de las propiedades más importantes de estos es que son finitamente representables por bloques en la sucesión inicial. En otras palabras, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$ podemos hallar una subsucesión bloque normalizada de la sucesión generadora, con longitud n, que es $(1+\varepsilon)-$equivalente a la subsucesión finita formada por los primeros n elementos del modelo disperso. De hecho, es por medio de ellos que se obtiene el Teorema de J. L. Krivine [22] sobre la representabilidad finita por bloques de alguno de los espacios ℓ_p, para $1 \leq p \leq \infty$, y c_0 en cualquier espacio de Banach con sucesión básica.

Observemos que, en realidad, el vínculo entre la Teoría de Ramsey y los espacios de Banach se encuentra en las propiedades de las sucesiones de dichos espacios. En muchos casos los teoremas de tipo Ramsey nos proporcionan una forma de obtener subsucesiones "buenas" de una sucesión dada.

En el artículo no publicado [4], E. A. Calderon-García y S. García-Ferreira proporcionan un primer acercamiento a la noción de estabilidad oscilatoria en espacios de Banach por medio del concepto (k,ε)-oscilación estable, el cual fue motivado por la demostración del Teorema de Brunel-Sucheston presentada en [29] y conduce a una "nueva" aproximación de este teorema. Además, se establece que para cada $k \in \mathbb{N}$ el Teorema de Ramsey para $[\mathbb{N}]^k$ es equivalente a la existencia de una subsucesión con la propiedad de $(k, \varepsilon)-$estabilidad oscilatoria, para cualquier sucesión normalizada en un espacio de Banach. Finalmente, gracias a la relación entre la oscilación estable y el modelo disperso, se demuestra que el Teorema de Ramsey y el Teorema de Brunel-Sucheston son equivalentes.

Regresando al contexto de subsucesiones bloque de una sucesión, podemos encontrar diversos resultados relacionados a estos objetos que nos permiten conocer mejor a su sucesión de origen o al espacio de Banach en el que se encuentran. Entre tales aportaciones se puede mencionar el Teorema de Zippin. Este teorema afirma que si una sucesión básica $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es equivalente a cada una de sus subsucesiones bloque normalizadas, entonces la sucesión $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es equivalente a la base canónica de c_0 o existe un $1 \leq p < \infty$ tal que $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es equivalente a la base canónica de ℓ_p.

Basados en la importancia de las subsucesiones bloque de una sucesión básica y la reciente noción de estabilidad oscilatoria nos dimos cuenta que se puede encontrar una estabilidad oscilatoria determinada por bloques de barreras. Dicha idea se conecta con un teorema de tipo Ramsey mediante la coloración finita de una familia de bloques de barreras, la cual también es definida en este trabajo. En consecuencia se introducen nuevos modelos asintóticos, algunos de los cuales generalizan los modelos establecidos por Brunel y Sucheston. Todo esto marcó la dirección principal que se toma en esta tesis de maestría.

El primer capítulo se destinará esencialmente a enunciar y describir los conocimientos básicos que se utilizarán en los capítulos posteriores. Esencialmente formulamos el Teorema de Ramsey y su versión para analistas, mostramos algunas cualidades de las bases de Schauder y terminamos con la construcción de espacios de Banach mediante el uso de conjuntos normantes en c_{00}.

En el segundo capítulo se introducen las barreras y sus características básicas conocidas. Además, se presentan teoremas necesarios para el desarrollo de los resultados concernientes a barreras de los capítulos siguientes. En este mismo apartado se establece el Teorema de Ramsey sobre bloques de barreras, el cual generaliza el célebre Teorema de Ramsey. Por último, obtenemos la versión para analistas de esta generalización y algunas consecuencias debido a ella.

Empezaremos el tercer capítulo con el concepto de $(k, \varepsilon)-$oscilación estable y presentaremos una prueba de que esta propiedad es equivalente al Teorema de Ramsey para $[\mathbb{N}]^k$. Posteriormente, con base en esta idea introducimos la noción $((\mathcal{B}_i)_{i=1}^k, \varepsilon)-$oscilación bloque estable y establecemos su equivalencia con el Teorema de Ramsey sobre bloques de barreras generados por la sucesión de barreras $(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_k)$. De manera paralela, se formula la noción de estabilidad asintótica oscilatoria la cual también es equivalente a un teorema de tipo Ramsey.

En el cuarto y último capítulo recordamos la definición de modelo disperso clásico, mostramos algunos de sus resultados esenciales y hacemos notar su conexión con la estabilidad oscilatoria mediante el Teorema de Brunel-Sucheston. Esto nos lleva de manera natural a la introducción del $(\mathcal{B}_i)_{i\in\mathbb{N}}-$modelo asintótico por bloques y al planteamiento de un resultado análogo al Teorema de Brunel-Sucheston. Probamos que cuando la sucesión de barreras es constante el modelo resultante es disperso y damos un ejemplo de un modelo que no es disperso cuando la sucesión consta de al menos dos barreras distintas. También exponemos dos modelos asintóticos por bloques que son equivalentes, pero que solo uno es disperso.

Cabe mencionar que el contenido de este trabajo se encuentra como un minicurso en [15], donde se agregan conocimientos básicos de la teoría general.

CAPÍTULO 1

Preliminares

Los elementos presentados en este capítulo le darán al lector conocimiento y herramientas suficientes para comprender las ideas y resultados posteriores.

1.1 Conceptos básicos y notación

Una notación estándar que emplearemos frecuentemente en este trabajo es “$\varepsilon_i \searrow 0$”, la cual denotará a una sucesión estrictamente decreciente de números reales positivos que converge a cero.

Dado un conjunto infinito X, denotaremos a la familia de todos los subconjuntos infinitos numerables de X como $[X]^\omega$ y, para $k \in \mathbb{N}$, pondremos $[X]^k := \{s \subseteq X : |s| = k\}$, $[X]^{\leq k} := \{s \subseteq X : 1 \leq |s| \leq k\}$ y $[X]^{<k} := \{s \subseteq X : 1 \leq |s| < k\}$. Para nuestros propósitos será útil no considerar al cero como elemento de los números naturales. La enumeración creciente de un conjunto infinito $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ será $\{m_i : i \in \mathbb{N}\}$. Asimismo, si $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces $M/n := \{m \in M : m > n\}$.

El símbolo FIN^* denotará la familia de todos los subconjuntos finitos y no vacíos de $\mathbb{N}$. Para especificar los elementos de $s \in FIN^*$ escribiremos $s = \{s(1), \ldots, s(|s|)\}$ de manera estrictamente creciente. Si $s, t \in FIN^*$, entonces decimos que “s es menor que t” y escribimos $s < t$ si se cumple que $\max(s) < \min(t)$, es decir, $s(|s|) < t(1)$. En el caso $s = \{n\}$, para algún $n \in \mathbb{N}$, podemos escribir simplemente $n < t$. Además, $s \sqsubseteq t$ significará que s es un *segmento inicial* de t, y cuando $s < t$ denotaremos por $s^\frown t$ a $s \cup t$. Si $s \in FIN^*$ y $M \in [\mathbb{N}]^\omega$, entonces $s \sqsubseteq M$ también significará que s es *segmento inicial* de M.

Para cada $i \in \mathbb{N}$, el símbolo e_i denotará al vector en $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ definido por $e_i(j) = \delta_{i,j}$ (la delta de Kronecker) para todo $j \in \mathbb{N}$. La sucesión $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ será llamada la *base canónica* de $\mathbb{R}^\mathbb{N}$. En el caso finito, para cada $k \in \mathbb{N}$, el conjunto $\{e_1, \cdots, e_k\}$ denotará a la base canónica de $\mathbb{R}^k$. Para cualquier $a = (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ definimos su *soporte* como $supp_\mathbb{R}(a) = \{i \in \mathbb{N} : a_i \neq 0\}$.

La completación de un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ será denotada cuando sea necesario por $\overline{(X, \|\cdot\|)}$. En este texto trabajaremos exclusivamente con espacios de Banach reales y de dimensión infinita. La esfera unitaria de un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ se denotará por $S(X) := \{x \in X : \|x\| = 1\}$ y su bola cerrada unitaría por $B_1(X) := \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$. El espacio dual de un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ se representará como X^* o $(X, \|\cdot\|)^*$ cuando se desee hacer énfasis en su norma. En el caso de que varios espacios de Banach estén involucrados en un mismo argumento, se especificará la norma de cada espacio con un subíndice. Una sucesión $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ se denomina *normalizada* si $\|x_i\| = 1$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Por conveniencia, en algunos casos, una subsucesión $(x_{m_i})_{i\in\mathbb{N}}$ de una sucesión $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ se escribirá como $(x_i)_{i\in M}$, donde $M = \{m_i : i \in \mathbb{N}\}$. Para todo subconjunto Y de un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$, el símbolo $\langle Y\rangle$ denotará al subespacio vectorial de X generado por Y. Mientras que $[Y]$ representará la cerradura topológica de $\langle Y\rangle$ en $(X, \|\cdot\|)$. La *norma* de una función acotada (continua) $T : X \to Y$, entre dos espacios de Banach, será denotada por $||T||$ y recordamos que $\|T(x)\|_Y \leq \|T\| \cdot \|x\|_X$ para todo $x \in X$ y $\|T\| = \sup\{\|T(x)\|_X : x \in S(X)\}$.

Ejemplo 1.1.1. Algunos de los espacios de Banach clásicos a los que recurriremos con frecuencia para ejemplificar son los siguientes:

1. Para cada número real $p \in [1, \infty)$, el espacio vectorial $\ell_p = \{a = (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p < \infty\}$ con la norma
$$\|a\|_{\ell_p} = \Big(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}.$$
2. El espacio vectorial $c_0 = \{a = (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : a_i \to 0\}$ con la norma del supremo
$$\|a\|_\infty = \sup\{|a_i| : i \in \mathbb{N}\}.$$

Dados un espacio métrico (X, d) y $\varepsilon > 0$, la bola abierta de centro $x \in X$ y radio $r > 0$ se denotará por $B_r(x)$.

Definición 1.1.2. Una ε-*red* de un espacio métrico (X, d) es una sucesión finita de puntos $\{x_0, \dots, x_n\}$ de X tal que $X = \bigcup_{i\leq n} B_\varepsilon(x_i)$. Decimos que un espacio métrico X es *totalmente acotado* si X tiene una ε-red para toda $\varepsilon > 0$.

A continuación enlistamos algunas nociones y resultados elementales sobre conjuntos bien ordenados [7, 20] que necesitaremos en la sección de Barreras del segundo capítulo.

Recordemos que para cada conjunto bien ordenado $(A, \leq)$, existe un único isomorfismo de orden de $(A, \leq)$ a un número ordinal, al cual se le denomina *tipo de orden* de $(A, \leq)$ y lo denotamos como $ord(A)$.

Teorema 1.1.3. *Dados $(A, \leq)$ un conjunto bien ordenado y $B \subseteq A$ tales que existe un isomorfismo de orden $f : A \longrightarrow B$. Entonces $a \leq f(a)$ para toda $a \in A$.*

Teorema 1.1.4. *El tipo de orden de un conjunto bien ordenado $(A, \leq)$ no es igual al tipo de orden del segmento inicial $\mathscr{S}(a) = \{b \in A : b < a\}$ para cualquier $a \in A$.*

Teorema 1.1.5. *Sea* $(A, \leq)$ *un conjunto bien ordenado. Si* $\{A_i\}_{i=1}^n$ *es una partición finita de* A *tal que para cualquier* $i < n$ *se satisface que* $a_i < a_{i+1}$ *para toda* $a_i \in A_i$ *y toda* $a_{i+1} \in A_{i+1}$*, entonces* $ord(A) = \sum_{i=1}^n ord(A_i)$.

Aquellas nociones y resultados que usaremos y no hemos mencionado se pueden consultar en libros básicos del tema correspondiente, por ejemplo [7, 8, 10, 12, 17, 21, 20].

1.2 Teorema de Ramsey y su versión para Analistas

La Teoría de Ramsey es una de las herramientas matemáticas más importantes en la Combinatoria Finita. Esta teoría se deriva de un resultado clásico de F. P. Ramsey que data de 1928, conocido con el nombre de Teorema de Ramsey [27]. En esta sección hablaremos de este teorema y su relación con el Análisis Matemático.

Definición 1.2.1. Dados $k, q \in \mathbb{N}$, una *coloración finita* es una función

$$\varphi : [\mathbb{N}]^k \longrightarrow \{1, \cdots, q\}.$$

Decimos que $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ es *monocromático*, bajo la coloración $\varphi : [\mathbb{N}]^k \longrightarrow \{1, \ldots, q\}$, si existe $i \leq q$ tal que $[M]^k \subseteq \varphi^{-1}(i)$.

Actualmente el Teorema de Ramsey tiene muchas variaciones y generalizaciones, enseguida enunciamos una de las más comunes y que utilizaremos en este trabajo. Para comodidad del lector, damos una demostración conocida de este famoso teorema.

Teorema 1.2.2 (de Ramsey)**.** *Sean* $N \in [\mathbb{N}]^\omega$ *y* $k, q \in \mathbb{N}$*. Para cada coloración finita* $\varphi : [N]^k \longrightarrow \{1, \ldots, q\}$ *existe* $M \in [N]^\omega$ *tal que* M *es monocromático.*

Demostración. La prueba se realizará por inducción sobre k. Para el caso $k = 1$, el resultado es evidente. Ahora, supongamos que el teorema es válido para $k \in \mathbb{N}$. Probemos que se cumple para $k + 1$. Para ello consideremos una coloración finita arbitraria

$$\varphi : [N]^{k+1} \longrightarrow \{1, \ldots, q\}.$$

Después, para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos $\varphi_n : [N/n]^k \longrightarrow \{1, \ldots, q\}$ mediante la regla

$$\varphi_n(s) = \varphi(\{n\} \cup s) \text{ para cada } s \in [\mathbb{N}/n]^k.$$

Sean $M_0 := N$ y $m_0 := \text{mín}(M_0)$. Por la hipótesis de inducción, hallamos un conjunto monocromático $M_1 \in [M_0/m_0]^\omega$ bajo la coloración finita φ_{m_0}. Sean $m_1 := \text{mín}(M_1)$ e $i_1 \leq q$ el color elegido por el conjunto monocromático $[M_1]^k$. Para el paso de recursión suponemos que para cada $0 < j \leq n$, con $n \in \mathbb{N}$, hemos encontrado $M_j \in [\mathbb{N}]^\omega$ e $i_j \leq q$ tal que $M_j \in [M_{j-1}/m_{j-1}]^\omega$, $m_j := \text{mín}(M_j)$ y $[M_j]^k \subseteq \varphi_{m_{j-1}}^{-1}(i_j)$. Aplicando la hipótesis de inducción a la coloración finita

$$\varphi_{m_n} \restriction_{[M_n/m_n]^k} : [M_n/m_n]^k \longrightarrow \{1, \ldots, q\},$$

se obtiene un conjunto infinito $M_{n+1} \in [M_n/m_n]^\omega$ de tal modo que $[M_{n+1}]^k$ sea monocromático bajo la coloración finita $\varphi_{m_n} \upharpoonright_{[M_n/m_n]^k}$ con color $i_{n+1} \leq q$. De este modo se encuentra una sucesión $(M_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de conjuntos infinitos en $\mathbb{N}$, una sucesión $(m_j)_{j\in\mathbb{N}}$ estrictamente creciente en $\mathbb{N}$ y una sucesión $(i_j)_{j\in\mathbb{N}}$ en $\{1,\dots,q\}$ tales que $[M_j]^k \subseteq \left(\varphi_{m_{j-1}} \upharpoonright_{[M_{j-1}/m_{j-1}]^k}\right)^{-1}(i_j)$. Consideremos el conjunto infinito $M' = \{m_i : i \in \mathbb{N}\}$ y la coloración finita

$$\varphi' : [M']^k \longrightarrow \{1,\dots,q\}$$

dada por la fórmula $\varphi'(s) = i_{\ell_s+1}$, donde $\text{mín}(s) = m_{\ell_s}$ y $\ell_s \in \mathbb{N}$, para toda $s \in [M']^k$. Usando nuevamente la hipótesis inductiva, existe $M \in [M']^\omega$ tal que $[M]^k$ es monocromático bajo la coloración finita φ'. Fijemos $s, t \in [M]^{k+1}$, entonces tenemos que

$$\varphi(s) = \varphi_{\text{mín}(s)}(s \setminus \{\text{mín}(s)\}) = i_{\ell_s+1} \text{ y } \varphi(t) = \varphi_{\text{mín}(t)}(t \setminus \{\text{mín}(t)\}) = i_{\ell_t+1}.$$

Pero como $s\setminus\{\text{mín}(s)\}, t\setminus\{\text{mín}(t)\} \in [M]^k$ y $[M]^k$ es monocromático bajo la coloración φ', se cumple que $i_{\ell_s+1} = i_{\ell_t+1}$. Esto muestra que el conjunto $[M]^{k+1}$ es monocromático bajo la coloración inicial φ. □

Para propósitos futuros es suficiente suponer que $q = 2$ tal y como se establece en el siguiente lema, el cual es muy conocido pero usualmente nadie lo demuestra, es por ello que incluimos una prueba.

Lema 1.2.3. *Sean $k, q \in \mathbb{N}$ con $q \geq 2$ y $N \in [\mathbb{N}]^\omega$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *Para toda coloración finita $\varphi : [N]^k \longrightarrow \{1, 2\}$ existe $M \in [N]^\omega$ tal que M es monocromático.*

(2) *Para toda coloración finita $\psi : [N]^k \longrightarrow \{1,\dots,q\}$ existe $M \in [N]^\omega$ tal que M es monocromático.*

Demostración. (1) ⇒ (2). Consideremos una coloración arbitraria $\psi : [N]^k \longrightarrow \{1,\dots, q\}$. Para cada $n < q$ definamos la función $\varphi_n : [N]^k \longrightarrow 2$, en el elemento $s \in [N]^k$, como

$$\varphi_n(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } \psi(s) = n \\ 2 & \text{en otro caso} \end{cases} .$$

Por comodidad ponemos $M_0 := N$. Debido a la hipótesis existe un conjunto monocromático $M_1 \in [M_0]^\omega$ bajo la coloración φ_1 con color $i_1 \leq 2$. Si $i_1 = 1$, entonces M_1 es un conjunto monocromático bajo ψ con color 1, por lo cual hemos terminado la demostración. Supongamos que $i_1 = 2$. Aplicando la hipótesis se obtiene un conjunto monocromático $M_2 \in [M_1]^\omega$ con color $i_2 \leq 2$, bajo la coloración $\varphi_2 \upharpoonright_{[M_1]^k}$. Si $i_2 = 1$, entonces M_2 es un conjunto monocromático bajo ψ y su color es 2. En el caso $i_2 = 2$, nuevamente, por hipótesis podemos encontrar un conjunto monocromático $M_3 \in [M_2]^\omega$ con color $i_3 \leq 2$ bajo la coloración $\varphi_3 \upharpoonright_{[M_2]^k}$. Así sucesivamente este procedimiento se puede repetir hasta $q-1$ veces. De aquí podemos suponer que $i_j = 2$ para cada $1 \leq j < q-1$. Entonces $\psi([M_{q-2}]^k) \subseteq \{q-1, q\}$. Por hipótesis hallamos un conjunto monocromático $M_{q-1} \in [M_{q-2}]^\omega$ bajo la coloración $\psi \restriction_{[M_{q-2}]^k}$. Siendo así M_{q-1} el conjunto deseado que elige color $q-1$ o q bajo ψ.

(2) $\Rightarrow$ (1). Esta implicación es inmediata. $\square$

De manera más general, es posible usar los elementos de un conjunto X, no vació, para colorear al conjunto $[\mathbb{N}]^k$ donde k es cualquier número entero positivo, simplemente se selecciona una función $\varphi : [\mathbb{N}]^k \longrightarrow X$. Dicha generalización y el Teorema de Ramsey (Teorema 1.2.2) inducen un resultado conocido como el Teorema de Ramsey para Analistas, el cual fue formulado por primera vez en las notas de Th. Schlumprecht [29] que se pueden consultar fácilmente en internet. Estas notas contienen, de manera unificada, la versión para analistas y dos de sus consecuencias que presentaremos de manera dividida en el Teorema 1.2.4 y los Corolarios 1.2.5 y 1.2.8 para facilitar su entendimiento.

Teorema 1.2.4 (de Ramsey para Analistas)**.** *Sean (X, d) un espacio métrico totalmente acotado, $N \in [\mathbb{N}]^\omega$ y $k \in \mathbb{N}$. Para cada coloración $\varphi : [N]^k \longrightarrow X$ y cada $\varepsilon > 0$ existe $M \in [N]^\omega$ tal que*

$$d(\varphi(s), \varphi(t)) < \varepsilon$$

si $s = \{s(1), \ldots, s(k)\}$, $t = \{t(1), \ldots, t(k)\} \in [M]^k$.

Demostración. Es suficiente probar el resultado para $N = \mathbb{N}$, ya que existe una biyección entre N y $\mathbb{N}$ que preserva el orden creciente de ambos conjuntos para toda $N \in [\mathbb{N}]^\omega$. Sean (X, d) un espacio métrico totalmente acotado y $k \in \mathbb{N}$. Fijamos una coloración $\varphi : [\mathbb{N}]^k \longrightarrow X$ y $\varepsilon > 0$, ambos arbitrarios. De acuerdo a la hipótesis, podemos encontrar $x_1, \ldots, x_q$ en X, para algún $q \in \mathbb{N}$, tal que $X = \bigcup_{i \leq q} B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i)$. Definimos los conjuntos

$$A_1 = B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_1) \text{ y } A_i = B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i) \setminus \Big(\bigcup_{j<i} B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_j) \Big) \text{ para cada } 1 < i \leq q.$$

Entonces la familia $\{A_i : i \leq q\}$ es una partición finita de X. Ahora, consideremos la función $\phi : X \longrightarrow \{1, \ldots, q\}$ definida como

$$\phi(x) = i \text{ si } x \in A_i, \text{ para algún } i \leq q.$$

Es claro que ϕ está bien definida y que

$$\phi \circ \varphi : [\mathbb{N}]^k \longrightarrow \{1, \ldots, q\}$$

es una coloración finita. El Teorema de Ramsey (Teorema 1.2.2) nos garantiza la existencia de un conjunto monocromático $M \in [\mathbb{N}]^\omega$, es decir, para algún $i \leq q$ resulta que $[M]^k \subseteq (\phi \circ \varphi)^{-1}(i) = \varphi^{-1}(\phi^{-1}(i))$. Lo cual implica que $\varphi([M]^k) \subseteq \phi^{-1}(i) = A_i \subseteq B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i)$. En consecuencia se obtiene que

$$d(\varphi(s), \varphi(t)) < \varepsilon$$

para todo s, $t \in [M]^k$, tal y como se deseaba. $\square$

Cabe señalar que el teorema falla si el espacio métrico no es totalmente acotado. Si (X,d) no es un espacio metrico totalmente acotado, entonces se puede encontrar $\varepsilon > 0$ y una sucesión $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en X tal que $d(x_i,x_j) > \varepsilon$ para toda $i,j \in \mathbb{N}$ distintos. Luego, para un número natural k, definimos la coloración $\varphi : [\mathbb{N}]^k \longrightarrow X$ como $\varphi(s) = x_{p_1^{s(1)}\cdots p_k^{s(k)}}$ en el punto $s \in [\mathbb{N}]^k$, donde $p_1,\ldots,p_k$ son los primeros k números primos. De esta forma, se tiene que $d(\varphi(s),\varphi(t)) > \varepsilon$ para cualesquiera $s,t \in [\mathbb{N}]^k$ distintos.

A continuación presentamos una versión asintótica del Teorema de Ramsey para Analistas.

Corolario 1.2.5. *Sean (X,d) un espacio métrico totalmente acotado y $k \in \mathbb{N}$. Para cada coloración $\varphi : [\mathbb{N}]^k \longrightarrow X$ y cada $\varepsilon_i \searrow 0$, existe $M = \{m_i : i \in \mathbb{N}\} \in [\mathbb{N}]^\omega$ tal que para todo $s = \{s(1),\ldots,s(k)\}$, $t = \{t(1),\ldots,t(k)\} \in [M]^k$ se cumple que*

$$d(\varphi(s),\varphi(t)) < \varepsilon_\ell,$$

donde $\text{mín}\{s(1),t(1)\} = m_\ell$ *para algún* $\ell \in \mathbb{N}$.

Demostración. Sean (X,d) un espacio métrico totalmente acotado y $k \in \mathbb{N}$. Consideremos una coloración $\varphi : [\mathbb{N}]^k \longrightarrow X$ y una sucesión $\varepsilon_i \searrow 0$, arbitrarias. Por el Teorema 1.2.4, existe un conjunto $M_1 \in [\mathbb{N}]^\omega$ tal que $d(\varphi(s),\varphi(t)) < \varepsilon_1$ para todo $s,t \in [M_1]^k$. Pongamos $m_1 := \text{mín}(M_1)$. Aplicando el Teorema 1.2.4 recursivamente a $\varphi\restriction_{[M_i/m_i]^k}$ y a ε_{i+1} para cada $i \in \mathbb{N}$, obtenemos una sucesión $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de conjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ y una sucesión $(m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de números naturales, tales que:

— $m_i := \text{mín}(M_i)$ para toda $i \in \mathbb{N}$.

— $M_1 \in [N]^\omega$ y $M_{i+1} \in [M_i/m_i]^\omega \subseteq [M_i]^\omega$ para cada $i \in \mathbb{N}$, lo cual implica que $m_i < m_{i+1}$ para toda $i \in \mathbb{N}$.

— Se cumple que $d(\varphi(s),\varphi(t)) < \varepsilon_{i+1}$ para todo $s,t \in [M_{i+1}]^k$.

Sea $M := \{m_i : i \in \mathbb{N}\}$. Si $s = \{s(1),\ldots,s(k)\}$, $t = \{t(1),\ldots,t(k)\} \in [M]^k$, entonces $s,t \in [M_\ell]^k$ donde $\text{mín}\{s(1),t(1)\} = m_\ell$ para algún $\ell \in \mathbb{N}$. En consecuencia se tiene que

$$d(\varphi(s),\varphi(t)) < \varepsilon_\ell.$$

Por lo tanto, M es el conjunto buscado. $\square$

Veamos que el Teorema de Ramsey para Analistas nos proporciona un tipo de convergencia para coloraciones con rango en un espacio métrico, que formalmente se establece de la siguiente manera:

Definición 1.2.6. Sean (X,d) un espacio métrico, $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ y $k \in \mathbb{N}$. Decimos que una coloración $\varphi : [M]^k \longrightarrow X$ converge a $x \in X$, si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\ell \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(\varphi(s),x) < \varepsilon,$$

para todo $s = \{s(1),\ldots,s(k)\} \in [M/\ell]^k$. Esta convergencia la denotaremos por el símbolo

$$\lim_{[M]^k \ni \{s(1),\ldots,s(k)\}\to\infty} \varphi(\{s(1),\ldots,s(k)\}) = x.$$

En algunos artículos la convergencia de una coloración $\varphi : [M]^k \longrightarrow X$, en el sentido de la definición anterior, se expresa de la forma

$$\lim_{s(1)\to\infty} \lim_{s(2)\to\infty} \cdots . \lim_{s(k)\to\infty} \varphi(\{s(1),\ldots,s(k)\}) = x,$$

pero se debe tener precaución para no confundirla con la convergencia iterada ya que no son equivalentes, como se ejemplifica a continuación.

Ejemplo 1.2.7. Consideremos la corolación $\varphi : [\mathbb{N}]^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisface la regla

$$\varphi(\{n_1,n_2\}) = (-1)^{n_1+n_2}(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}) \text{ para cada } \{n_1,n_2\} \in [\mathbb{N}]^2.$$

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\ell \in \mathbb{N}$ tal que $\ell \geq \frac{2}{\varepsilon}$. Entonces

$$\begin{aligned} |\varphi(\{n_1,n_2\}) - 0| &= \left|(-1)^{n_1+n_2}(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})\right| \\ &= \frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2} < \varepsilon \text{ para todo } \{n_1,n_2\} \in [\mathbb{N}/\ell]^2. \end{aligned}$$

Lo cual significa que

$$\lim_{[\mathbb{N}]^2 \ni \{n_1,n_2\}\to\infty} \varphi(\{n_1,n_2\}) = 0.$$

Por otra parte, fijamos $n_1 \in \mathbb{N}$ y observamos que

$$\begin{aligned} &\lim_{k\to\infty}(-1)^{n_1+2k}(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{2k}) = (-1)^{n_1}\frac{1}{n_1} \quad \text{y} \\ &\lim_{k\to\infty}(-1)^{n_1+(2k-1)}(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{2k-1}) = (-1)^{n_1+1}\frac{1}{n_1}. \end{aligned}$$

Esto implica que $\lim_{n_2\to\infty}(-1)^{n_1+n_2}(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})$ no existe. Por consiguiente, el límite iterado de $\varphi(\{n_1,n_2\})$ tampoco.

Las coloraciones sobre espacios métricos en general no convergen, por ejemplo consideremos el conjunto de los números naturales con la métrica discreta y la coloración $\varphi : [\mathbb{N}]^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ definida como $\varphi(s) = \max(s)$ para cada $s \in [\mathbb{N}]^2$. El siguiente resultado nos asegura que toda coloración a un espacio métrico compacto posee una restricción convergente.

Corolario 1.2.8. *Sean (K,d) un espacio métrico compacto y k un número entero positivo. Para cada $N \in [\mathbb{N}]^\omega$ y cada coloración $\varphi : [N]^k \longrightarrow K$ existen $M \in [N]^\omega$ y $x \in K$ tal que*

$$\lim_{[M]^k \ni \{s(1),\ldots,s(k)\}\to\infty} \varphi(\{s(1),\ldots,s(k)\}) = x.$$

Demostración. Sean (K,d) un espacio métrico compacto y $k \in \mathbb{N}$. Sin pérdida de generalidad, podemos tomar $\varphi : [\mathbb{N}]^k \longrightarrow K$ una coloración arbitraria. Por el Corolario

1.2.5, hallamos $M = \{m_i : i \in \mathbb{N}\} \in [\mathbb{N}]^\omega$ tal que para cualesquiera $s = \{s(1), \dots, s(k)\}$, $t = \{t(1), \dots, t(k)\} \in [M]^k$ resulta que

$$d(\varphi(s), \varphi(t)) < \frac{1}{2^\ell},$$

donde $\text{mín}\{s(1), t(1)\} = m_\ell$ para algún $\ell \in \mathbb{N}$. Por otro lado, como K es compacto y la familia $\Big\{cl_K\Big(\{\varphi(s) : s \in [M/j]^k\}\Big)\Big\}_{j \in \mathbb{N}}$ cuenta con la propiedad de intersección finita, podemos encontrar un punto

$$x \in \bigcap_{j \in \mathbb{N}} cl_K\Big(\{\varphi(s) : s \in [M/j]^k\}\Big).$$

Ahora, mostremos que la coloración $\varphi : [M]^k \longrightarrow K$ converge a x. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\ell \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^\ell} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Como $x \in cl_K(\{\varphi(s) : s \in [M/m_{\ell-1}]^k\})$, entonces existe $t \in [M/m_{\ell-1}]^k$ tal que $d(\varphi(t), x) < \frac{1}{2^\ell}$. Por lo cual se concluye que

$$\begin{aligned} d(\varphi(s), x) &\leq d(\varphi(s), \varphi(t)) + d(\varphi(t), x) \\ &< \frac{1}{2^\ell} + \frac{1}{2^\ell} \leq \varepsilon \end{aligned}$$

para todo $s \in [M/m_{\ell-1}]^k$. □

Para que el teorema anterior se cumpla, no basta con que el rango de la coloración se encuentre en un espacio métrico totalmente acotado: Por ejemplo, consideremos la coloración $\varphi : [\mathbb{N}]^1 \longrightarrow (0, 1]$ definida como $\varphi(\{n\}) = \frac{1}{n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y observemos que para ningún subconjunto $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ la restricción $\varphi \restriction_{[M]^1}$ converge en $(0, 1]$.

1.3 Teorema de Hindman-Milliken y su versión para Analistas

Otro teorema de tipo Ramsey notable es el Teorema de Hindman-Milliken. Este resultado es una versión más fuerte del Teorema de Ramsey (Teorema 1.2.2) y fue demostrado por K. Milliken en [25]. Antes de formular el teorema, definamos algunos objetos presentes en él.

Definición 1.3.1. Sea $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{N}$. Una *partición* $P = \{p_i : i \in I\}$ de un conjunto M es una familia de subconjuntos no vacíos de M tal que son disjuntos entre sí y satisfacen que $\bigcup_{i \in I} p_i = M$. Los elementos de una partición P serán llamados *bloques*.

Si P es una partición de algún subconjunto infinito de $\mathbb{N}$, entonces P se denomina una *partición especial* si para todo par de bloques $p_i, p_j \in P$ se tiene que $p_i < p_j$, $p_i = p_j$ ó $p_i > p_j$.

Dadas dos particiones especiales P_1 y P_2, no necesariamente del mismo subconjunto de $\mathbb{N}$, decimos que P_1 es *más gruesa* que P_2, o P_2 es *más fina* que P_1 y lo denotamos por $P_1 \sqsubseteq P_2$, si cada bloque de P_1 es la unión de bloques de P_2.

Notemos que si P es una partición especial cuya cardinalidad es infinita, entonces todos sus bloques son subconjuntos finitos.

En esta sección utilizaremos la siguiente notación:

— Para todo cardinal $\nu \leq \omega$, denotemos por $\langle\omega\rangle^\nu$ a la familia de todas las particiones especiales P de algún subconjunto de $\mathbb{N}$ tal que $|P| = \nu$. En particular, $\langle\omega\rangle^\omega$ es el conjunto de todas las particiones especiales formadas por un número infinito de bloques.

— Para una partición especial P y un cardinal $\nu \leq \omega$ definimos $\langle P\rangle^\nu := \{Q \in \langle\omega\rangle^\nu : Q \sqsubseteq P \text{ y } Q \subseteq FIN^*\}$.

— Además, para un conjunto $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ denotaremos por $\mathsf{P}(M)$ a la familia de todas las particiones especiales de M.

Teorema 1.3.2 (de Hindman-Milliken)**.** *Sean k, m números enteros positivos, $Q \in \langle\omega\rangle^\omega$ y $\varphi : \langle Q\rangle^k \to \{1, \ldots, m\}$ una función, entonces existe $P \in \langle Q\rangle^\omega$ tal que φ es constante sobre $\langle P\rangle^k$.*

Otra consecuencia del resultado anterior, a la cual se le atribuye parte de su nombre, es el Teorema de Hindman [19].

De manera similar que en el Teorema de Ramsey es posible trasladar el Teorema de Hindman-Milliken a un espacio métrico con propiedades específicas.

Teorema 1.3.3 (de Hindman-Milliken para Analistas)**.** *Sean (X, d) un espacio métrico totalmente acotado, $Q \in \langle\omega\rangle^\omega$ una partición y $k \in \mathbb{N}$. Para cada función $\varphi : \langle Q\rangle^k \longrightarrow X$ y cada $\varepsilon > 0$, existe $P \in \langle Q\rangle^\omega$ tal que*

$$d(\varphi(S), \varphi(T)) < \varepsilon$$

para todo S, $T \in \langle P\rangle^k$.

Demostración. Análoga al Teorema de Ramsey para Analistas. □

Aplicando el teorema previo, de manera recursiva, y argumentos de diagonalización se puede concluir el siguiente resultado.

Corolario 1.3.4. *Sean (X, d) un espacio métrico totalmente acotado, $Q \in \langle\omega\rangle^\omega$ y $k \in \mathbb{N}$. Para cada función $\varphi : \langle Q\rangle^k \to X$ y cada sucesión $\varepsilon_i \searrow 0$ en $\mathbb{R}^+$ existe $P = \{p_i : i \in \mathbb{N}\} \in \langle Q\rangle^\omega$ tal que*

$$d(\varphi(S), \varphi(T)) < \varepsilon_\ell;$$

donde $\ell = \min\{i \ : \ p_i \subseteq s_1 \cup t_1\}$, para todo $S = \{s_1, \ldots, s_k\}$, $T = \{t_1, \ldots, t_k\} \in \langle P\rangle^k$.

Motivados por las ideas de la sección del Teorema de Ramsey, es posible definir una convergencia relacionada a la familia $\langle Q\rangle^\nu$ para algúna partición $Q \in \langle\omega\rangle^\omega$ y algún cardinal $\nu < \omega$.

Definición 1.3.5. Dados un espacio métrico (X, d), una partición $Q = \{q_i : i \in \mathbb{N}\} \in \langle\omega\rangle^\omega$ y $k \in \mathbb{N}$. Una función $\varphi : \langle Q\rangle^k \to X$ converge a $x \in X$, si para cada $\varepsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(\varphi(S), x) < \varepsilon \text{ para todo } S \in \langle Q\backslash\{q_i\}_{i=1}^n\rangle^k.$$

Siguiendo el patrón de notación para la convergencia anteriormente definida, denotaremos esta convergencia como

$$\lim_{\langle Q\rangle^k \ni S \to \infty} \varphi(S) = x.$$

En correspondencia al Corolario 1.2.8 se puede establecer lo siguiente:

Corolario 1.3.6. *Sean (K, d) un espacio métrico compacto, $Q \in \langle\omega\rangle^\omega$ y $k \in \mathbb{N}$. Para toda función $\varphi : \langle Q\rangle^k \to K$ existe $P \in \langle Q\rangle^\omega$ y $x \in K$ tal que*

$$\lim_{\langle P\rangle^k \ni S \to \infty} \varphi(S) = x.$$

1.4 Bases de Schauder

Uno de los temas más fascinantes del Análisis Funcional que actualmente han llamado mucho la atención a los expertos, es el estudio de los espacios de Banach que poseen una base de Schauder. Dentro de este tema, ha cobrado mucha relevancia el conocido Teorema de A. Brunel y L. Sucheston [2] del cual hablaremos en el cuarto capítulo.

Definición 1.4.1. Una sucesión $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ se denomina una *base de Schauder* para $(X, \|\cdot\|)$ si, para cada vector $x \in X$, existe una única sucesión de números reales $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tal que

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i,$$

es decir, la serie converge a x. En general, decimos que una sucesión $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en $(X, \|\cdot\|)$ es *básica* si es una base de Schauder para $[\{x_i : i \in \mathbb{N}\}]$. Además, dado $C \geq 1$, una sucesión básica $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es *C-incondicional* si para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y cada $(\varepsilon_i)_{i=1}^n \in \{1, -1\}^n$ la desigualdad

$$\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\| \leq C\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i a_i x_i\|$$

es válida para toda $(a_i)_{i=1}^n \in [1, -1]^n$.

No es difícil convencernos que toda sucesión básica de un espacio de Banach es linealmente independiente. También, vale la pena observar que todo espacio de Banach con base de Schauder tiene que ser separable. Sin embargo, no todo espacio de Banach separable tiene una base de Schauder tal y como lo estableció P. Enflo en su trabajo [11].

Enseguida, enunciamos algunos de los espacios de Banach clásicos que poseen una base de Schauder.

Ejemplo 1.4.2. La base canónica $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder para cada uno de los siguientes espacios de Banach: $(\ell_p, \|\cdot\|_{\ell_p})$ con $p \in [1,\infty)$ y $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$.

En un espacio de Banach con una base de Schauder se pueden definir funcionales y operadores especiales que nos permiten estudiar sus propiedades y equiparlo con una nueva norma equivalente que resulta ser, en algunos casos, maś conveniente.

Definición 1.4.3. Dada $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una base de Schauder para un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y para cada $x = \sum_{i=1}^\infty a_i x_i \in X$ definimos:

— la *funcional n-ésima coordenada*, $x_n^* : X \longrightarrow \mathbb{R}$, como $x_n^*(\sum_{i=1}^\infty a_i x_i) = a_n$; y

— la *n-ésima proyección*, $P_n : X \longrightarrow X$, como $P_n(\sum_{i=1}^\infty a_i x_i) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$.

Se deduce directamente de la definición que:

— $x_m^*(x_n) = \delta_{m,n}$ para toda $m, n \in \mathbb{N}$,

— P_n es una proyección sobre el subespacio $P_n(X)$ de X generado por $\{x_i : i \leq n\}$, para toda $n \in \mathbb{N}$, y

— $P_m \circ P_n = P_{\text{mín}\{m,n\}}$ para toda $m, n \in \mathbb{N}$.

Las ideas originales de las demostraciones de las siguientes propiedades que involucran a las funciones lineales x_n^*'s y P_n's pertenecen a S. Banach y pueden ser consultadas en [5, 15].

Teorema 1.4.4. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach con una base de Schauder $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1. *Para cada $x \in X$, el número*

$$|||x||| := \sup\{\|P_n(x)\| : n \in \mathbb{N}\} < \infty$$

está bien definido, y $|||\cdot||| : X \to [0,\infty)$ es una norma en X que es equivalente a la norma original $\|\cdot\|$; es decir, existen constantes $A, B > 0$ tales que

$$A^{-1}|||x||| \leq \|x\| \leq B|||x|||$$

para todo $x \in X$. En particular, $(X, |||\cdot|||)$ es un espacio de Banach.

2. *P_n es acotada para cada $n \in \mathbb{N}$.*
3. *$C := \sup\{\|P_n\| : n \in \mathbb{N}\} < \infty$, es decir, las proyecciones $\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ son uniformemente acotadas.*
4. *x_n^* es acotada para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Al número C se le conoce como la *constante de base* de la sucesión básica $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Además, observemos que

$$\|P_n(x)\|_X = \|(P_n(P_n(x))\|_X \leq \|P_n\|\|P_n(x)\|_X$$

para toda $x \in X$ y toda $n \in \mathbb{N}$. De donde podemos ver que $\|P_n\| \geq 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $C \geq 1$. A una base de Schauder con constante 1 también se le denomina *base monótona*. Por ejemplo, la base canónica para ℓ_p, con $p \in [1,\infty)$, es una base monótona.

Ahora, presentamos una caracterización de las bases de Schauder que nos permite ver de manera sencilla cuando una sucesión es básica, la cual también es una aportación de Banach [5, 15].

Teorema 1.4.5. *Dada una sucesión $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de elementos no cero en un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$, las siguientes dos propiedades son equivalentes:*

1. *$(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es base de Schauder para $(X, \|\cdot\|)$.*
2. *$X = [\{x_i : i \in \mathbb{N}\}]$ y existe un $C \geq 1$ tal que:*

$$\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\| \leq C\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\| \tag{1.4.1}$$

para todo $m \leq n$ y $(a_i)_{i=1}^n \in [-1,1]^n$.

El corolario que sigue nos garantiza que toda subsucesión de una sucesión básica es básica.

Corolario 1.4.6. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach con una base de Schauder $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, cuya constante de base es $C \geq 1$. Para todo $s = \{s(1), \ldots, s(n)\} \in FIN^*$ y para cada $(a_i)_{i=1}^n \in [-1,1]^n$ se cumple que*

$$\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_{s(i)}\| \leq C\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_{s(i)}\| \quad \textit{para toda } m \leq n.$$

Demostración. Consideramos $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una base de Schauder para un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$, cuya constante de base es $C \geq 1$. Fijamos $s = \{s(1), \ldots, s(n)\} \in FIN^*$ y $(a_i)_{i=1}^n \in [-1,1]^n$. Después, definimos $(b_j)_{j=1}^{s(n)} \in [-1,1]^{s(n)}$ como

$$b_j = \begin{cases} a_i & \text{si } j = s(i), \text{ para algún } i \leq n, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

para cada $j \leq s(n)$. Como la constante de base de $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es C y $s(m) \leq s(n)$ para todo $m \leq n$, resulta que

$$\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_{s(i)}\| = \|\sum_{j=1}^{s(m)} b_j x_j\| \leq C\|\sum_{j=1}^{s(n)} b_j x_j\| = C\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_{s(i)}\|$$

gracias al Teorema 1.4.5. □

El siguiente criterio nos dice cuando dos sucesiones se comportan de manera análoga.

Definición 1.4.7. Sean $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ y $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones básicas en los espacios de Banach $(X, \|\cdot\|_X)$ y $(Y, \|\cdot\|_Y)$, respectivamente. Se dice que $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es $C-$*equivalente* a $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ si existen constantes reales positivas A y B con $AB \leq C$ tales que, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, se cumple la condición

$$A^{-1}\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\|_X \leq \|\sum_{i=1}^{n} a_i y_i\|_Y \leq B\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\|_X,$$

para toda $(a_i)_{i=1}^n \in [-1,1]^n$. Diremos que las sucesiones básicas $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ y $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ son equivalentes si existe una constante real positiva C tal que estas son $C-$*equivalentes*.

Dado un vector en un espacio de Banach con una base de Schauder, es natural asignar a este el conjunto de índices con coeficientes no cero de su única representación en tal base.

Definición 1.4.8. Para cada $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ en un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ con base de Schauder $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, el *soporte* de x (con respecto a $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$) es el conjunto

$$supp(x) := \{i \in \mathbb{N} : a_i \neq 0\}.$$

El concepto anterior nos permitirá enunciar una clase de sucesiones muy útiles en el estudio de los espacios de Banach con bases de Schauder.

Definición 1.4.9. Sea $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión básica. Una sucesión $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en el subespacio $\langle\{x_i : i \in \mathbb{N}\}\rangle$ es una *subsucesión bloque* de $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ si el soporte de y_i respecto a $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es finito para cada $i \in \mathbb{N}$ y

$$supp(y_1) < supp(y_2) < \cdots < supp(y_n) < \cdots .$$

Recordemos que $c_{00} = \{x = (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : |supp_{\mathbb{R}}(x)| < \omega\} \subseteq c_0$ es un espacio vectorial normado con la norma $\|\cdot\|_\infty$. Por conveniencia, el vector $x = (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in c_{00}$ también se expresará como $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$. El siguiente teorema determina una relación entre cualquier espacio de Banach con base de Schauder y el espacio c_{00}.

Teorema 1.4.10 (Folklore)**.** *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach con una base de Schauder $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Definimos*

$$|||\sum_{i=1}^{n} a_i e_i||| := \|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\|$$

para cada $\sum_{i=1}^{n} a_i e_i \in c_{00}$. Entonces $|||\cdot||| : c_{00} \to [0, \infty)$ es una norma en c_{00} y la completación del espacio vectorial normado $(c_{00}, |||\cdot|||)$ es isométricamente isomorfo a $(X, \|\cdot\|)$. Además, la base canónica $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de c_{00} resulta ser una base de Schauder de esta completación.

El resultado anterior establece que todo espacio de Banach con base de Schauder es isomorfo a la completación de c_{00} bajo cierta norma. Esto proporciona una metodología para encontrar espacios de Banach con base de Schauder, la cual consiste en equipar con una norma adecuada al espacio vectorial c_{00} y tomar su completación. Un ejemplo del uso de esta técnica es la obtención del famoso espacio de B. S. Tsirelson [30], cuya construcción a través de este método se detalla en [15].

1.5 Conjuntos Seminormantes y Normantes en c_{00}

El Teorema 1.4.10 establece que todo espacio de Banach que posee una base de Schauder es isométricamente isomorfo a la completación del espacio vectorial c_{00} junto con una norma. Por esta razón el objetivo principal de esta sección es describir un método para construir normas para el espacio vectorial c_{00}. Dicho método es el que más se usa en Análisis Funcional y consiste esencialmente en la búsqueda de un conjunto de funcionales en c_{00}^*, donde al espacio c_{00} está equipado con la norma del supremo, que nos permiten llevar a cabo nuestra tarea.

Sabemos, por una consecuencia del famoso Teorema de Hahn-Banach [8, Cor. 6.7], que para todo espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ se cumple que $\|x\| = \sup\{|f(x)| : f \in B_1(X^*)\}$ para cada $x \in X$. Generalizando este hecho introduciremos la siguiente noción.

Definición 1.5.1. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Un conjunto no vacío $W \subseteq X^*$ es un *conjunto normante* de X si $\|x\| = \sup\{|f(x)| : f \in W\}$ para cada $x \in X$.

Cabe mencionar que en otros trabajos se condiciona que el espacio normado X en cuestión sea Banach y el conjunto W sea acotado (ver por ejemplo [6]).

La defínción de conjunto normante motiva una técnica de construcción de nuevas seminormas [1] que en algunos casos inducen nuevos espacios de Banach con determinadas propiedades:

Definición 1.5.2. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado. Decimos que un subconjunto no vacío $W \subseteq X^*$ es un *conjunto seminormante de* X si se cumple que $sup\{|f(x)| : f \in W\} < \infty$ para toda $x \in X$.

Si $W \subseteq X^*$ es un conjunto seminormante, entonces para cada $x \in X$ definimos $\|x\|_W := sup\{|f(x)| : f \in W\}$. No es difícil probar que la función $\|\cdot\|_W : X \to [0, +\infty)$ es una seminorma en X.

Observemos que si $W \subseteq (X, \|\cdot\|)^*$ es un conjunto acotado por $r \in \mathbb{R}^+$, entonces

$$\|x\|_W \leq r\|x\| \text{ para cada } x \in X.$$

Lo cual significa que todo subconjunto acotado de $(X, \|\cdot\|)^*$ es un conjunto seminormante. También es importante resaltar la condición siguiente:

$\|\cdot\|_W$ es una norma en X si y solo si para cada $x \in X\backslash\{0\}$ existe una funcional $f \in W$ tal que $f(x) \neq 0$.

Por lo anterior convenimos, de manera muy general, denominar *conjunto normante de* X a cada conjunto seminormante $W \subseteq X^*$ cuando $\|\cdot\|_W$ es una norma. Si $W \subseteq X^*$ es un conjunto normante, denotamos por $(X_W, \|\cdot\|_W)$ a la completación de $(X, \|\cdot\|_W)$ y por X_W^* al espacio dual de la completación.

Hasta este punto es posible que exista confusión sobre las dos definiciones de conjuntos normantes que se han presentado. La primera hace referencia a la norma ya existente de un espacio normado, y la segunda nos proporciona una norma, sobre un espacio normado, posiblemente distinta a la original. Sin embargo, el lema siguiente nos permite establecer una conexión entre ellas.

1. Dado un espacio vectorial V sobre los números reales, una seminorma $\rho : V \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función con valores en los números reales no negativos que cumple las siguientes propiedades: $\rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y)$, $\rho(ax) = |a|\rho(x)$ y $\rho(0) = 0$ para cada $a \in \mathbb{R}$ y cualesquiera $x, y \in V$.

Lema 1.5.3. *Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $W \subseteq X^*$ un conjunto seminormante que genera una norma para X. Entonces para cada $f \in W$ existe una única $\widetilde{f} \in X_W^*$ tal que $\widetilde{f}(x) = f(x)$ para toda $x \in X$ y $\|\widetilde{f}\| \leq 1$. Más aún, si $\widetilde{W} := \{\widetilde{f} \in X_W^* : f \in W\}$, entonces $\|x\|_W = \|x\|_{\widetilde{W}}$ para toda $x \in X_W$.*

Demostración. Fijemos una funcional $f \in W$. Por definición se cumple que $|f(x)| \leq \|x\|_W$ para toda $x \in X$. Lo cual implica que $f : (X, \|\cdot\|_W) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ es una función acotada y $\|f\| \leq 1$. Por otro lado, el Teorema de Hahn Banach para espacios normados nos asegura la existencia de $\widetilde{f} \in X_W^*$ tal que $\|f\| = \|\widetilde{f}\| \leq 1$ y $\widetilde{f}(x) = f(x)$ para toda $x \in X$. La unicidad de $\widetilde{f}$ es consecuencia de su continuidad y de que X es un conjunto denso en X_W. Ahora, considerando el conjunto $\widetilde{W} := \{\widetilde{f} \in X_W^* : f \in W\}$, vamos a demostrar que $\|\cdot\|_W = \|\cdot\|_{\widetilde{W}}$ sobre el espacio vectorial X_W. Sea $x \in X_W$, como X es denso en X_W, entonces existe $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X tal que $x_i \to x$ bajo la norma $\|\cdot\|_W$. Observemos que

$$\begin{aligned}\|x\|_W &= \lim_{i\to\infty} \|x_i\|_W = \lim_{i\to\infty} \sup\{|f(x_i)| : f \in W\} \\ &= \lim_{i\to\infty} \sup\{|\widetilde{f}(x_i)| : \widetilde{f} \in \widetilde{W}\} = \sup\{|\widetilde{f}(x)| : \widetilde{f} \in \widetilde{W}\} = \|x\|_{\widetilde{W}}.\end{aligned}$$

Como $x \in X_W$ es arbitraria, se concluye que $\|\cdot\|_W = \|\cdot\|_{\widetilde{W}}$. □

Del lema anterior podemos identificar W con $\widetilde{W}$ y así considerar a W como un conjunto normante, según la definición 1.5.1, del espacio de Banach $(X_W, \|\cdot\|_W)$.

Regresando a nuestro objetivo principal de este capítulo, necesitamos recordar la definición de producto interno.

Definición 1.5.4. El *producto interno* de cualesquiera dos elementos $x, y \in c_{00}$ es el número real $< x, y >:= \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i$, donde $x = (a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ y $y = (b_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

Mediante el producto interno y los elementos del mismo espacio vectorial c_{00} podemos generar funcionales sobre $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$. En efecto, para $x \in c_{00}$ se define $x^* : c_{00} \to \mathbb{R}$ como

$$x^*(y) =< x, y > \text{ para cada } y \in c_{00}.$$

Observemos que

$$|x^*(y)| \leq \sum_{i\in supp_{\mathbb{R}}(x)} |a_i||b_i| \leq \|y\|_\infty \sum_{i\in supp_{\mathbb{R}}(x)} |a_i| \leq k\|x\|_\infty \|y\|_\infty$$

para todo $y \in c_{00}$, donde $k = |supp_{\mathbb{R}}(x)|$. Por lo tanto, x^* es una funcional lineal acotada y pertenece a $B_1((c_{00}, \|\cdot\|_\infty)^*)$ si $\|x\|_\infty \leq 1/k$.

Por otra parte, existe una correspondencia entre el conjunto FIN^* y el conjunto $c_{00} \cap \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$: A cada $s \in FIN^*$ lo asociamos con el elemento $\sum_{i\in s} e_i$. De esta manera podemos considerar a cada $s \in FIN^*$ como un elemento en c_{00}. Observemos que al tomar el espacio vectorial c_{00} con la norma $\|\cdot\|_{\ell_1}$, se obtiene que $|(\sum_{i\in s} e_i)^*(x)| = |\sum_{i\in s} a_i| \leq \|x\|_{\ell_1}$ para todo $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \in c_{00}$ y $s \in FIN^*$.

En futuros ejemplos, para garantizar que obtengamos normas bastará con suponer que nuestro conjunto seminormante W contiene al conjunto $G_0 := \{\pm e_i^* : i \in \mathbb{N}\}$, que está contenido en $B_1((c_{00}, \|\cdot\|_\infty)^*)$. De ahora en adelante la completación de c_{00} con la norma $\|\cdot\|_W$ será denotada por X_W para hacer énfasis en el conjunto normante. A continuación enlistamos algunos ejemplos de normas que proceden de conjuntos normantes:

1. Si $W = G_0$, entonces $(X_W, \|\cdot\|_W)$ es isométricamente isomorfo a $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$.
2. Cuando $W = \{\sum_{i\in s} \pm e_i^* \ : s \in FIN^*\}$ tenemos que $(X_W, \|\cdot\|_W)$ es isométricamente isomorfo a $(\ell_1, \|\cdot\|_{\ell_1})$.
3. Si $W = \{\sum_{i=n}^\infty e_i^* : n \in \mathbb{N}\}$, entonces $(X_W, \|\cdot\|_W)$ es isométricamente isomorfo a $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$.

Algunas veces resulta difícil identificar la completación X_W de c_{00} y sus propiedades partiendo del conjunto normante W. Mientras el Teorema 1.4.10 afirma que todo espacio de Banach con base de Schauder es isomemétrico a la completación de alguna norma de c_{00}, el siguiente resultado nos permiten describir los elementos de X_W para algunos casos [9], omitimos la demostración de esta afirmación por ser muy técnica y no contribuir sustancialmente al trabajo académico de esta tesis.

Teorema 1.5.5. *Si $\|\cdot\|$ es una norma definida en c_{00} en la cual la base canónica es $1-$básica. Entonces la completación resulta ser $\overline{(c_{00}, \|\cdot\|)} = (\mathscr{C}, |||\cdot|||)$, donde*

$$\mathscr{C} := \{(a_i)_{i=1}^\infty \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : (\sum_{i=1}^n a_i e_i)_{n=1}^\infty \text{ es una sucesión de Cauchy en } (c_{00}, \|\cdot\|)\} \text{ y}$$

$$|||(a_i)_{i=1}^\infty||| := \limsup \Big\{ \|\sum_{i=1}^n a_i e_i\| : n \in \mathbb{N} \Big\}.$$

CAPÍTULO 2

Teorema de Ramsey sobre Bloques de Barreras

Para el estudio de las sucesiones normalizadas mediante “subsucesiones bloque” vamos a requerir el concepto de familia de bloques de una sucesión de barreras y un teorema de tipo Ramsey relacionado a este. Todas las herramientas necesarias para ello se presentan en este capítulo.

2.1 Barreras

En la literatura reciente se han utilizado ciertas familias de subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ para dotar a c_{00} de una norma peculiar que al tomar su completación obtengamos un espacio de Banach con base de Schauder satisfaciendo ciertas propiedades predeterminadas [24, 23]. Entre estas familias sobresalen las barreras, un objeto mátematico introducido por C. Nash-Williams, el cual se presentará en esta sección y que es esencial en el desarrollo de este trabajo.

En lo que resta de la tesis usaremos la siguiente notación:

Si $\mathcal{F}$ es una familia de subconjuntos finitos no vacíos de $\mathbb{N}$, $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ y $s \in FIN^*$, entonces

$$\mathcal{F}_s = \{t \in FIN^* : s < t \text{ y } s^\frown t\text{ [1]} \in \mathcal{F}\} \text{ y}$$
$$\mathcal{F} \restriction_M = \{t \in \mathcal{F} : t \subseteq M\}$$

son dos tipos de restricciones de $\mathcal{F}$.

A continuación exponemos una propiedad importante de la Teoría de Nash-Williams [26] que posee una notoria relación con el Teorema de Ramsey (Teorema 1.2.2).

Definición 2.1.1 (Nash-Williams)**.** Dada una familia $\emptyset \neq \mathcal{F} \subseteq FIN^*$, decimos que $\mathcal{F}$ tiene la *Propiedad de Ramsey* si para cada función $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \{1, \ldots, q\}$, donde $q \in \mathbb{N}$,

1. Recordemos que $s^\frown t$ denota a $s \cup t$ cuando $s < t$.

existe un conjunto $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ tal que a lo más una de las restricciones $\varphi^{-1}(1) \upharpoonright_M$, $\ldots, \varphi^{-1}(q) \upharpoonright_M$ no es vacía . En particular, $\mathcal{F}$ posee la *Propiedad de Ramsey no nula* si existe $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ tal que solo una de las restricciones no es vacía.

Observemos que cualquier colección no vacía $\mathcal{F} \subseteq FIN^*$ tal que $M = \mathbb{N} \setminus (\cup\mathcal{F})$ pertenece a $[\mathbb{N}]^\omega$ posee la propiedad de Ramsey ya que para toda coloración finita $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \{1, \ldots, q\}$ se cumple que las restricciones $\varphi^{-1}(1) \upharpoonright_M, \ldots, \varphi^{-1}(q) \upharpoonright_M$ son iguales al conjunto vacío. Es por esto que utilizaremos la propiedad de Ramsey no nula para evitar casos triviales.

Ahora, enunciemos las condiciones que un subconjunto de FIN^* debe cumplir para que se denomine barrera.

Definición 2.1.2. Dado un conjunto $N \in [\mathbb{N}]^\omega$, una colección $\mathcal{B} \subseteq FIN^*$ no vacía es una *barrera* en N si:

(B1) $s, t \in \mathcal{B}$ y $s \neq t$, entonces $s \nsubseteq t$ y $t \nsubseteq s$.

(B2) Para cada $M \in [N]^\omega$ existe un $s \in \mathcal{B}$ tal que $s \sqsubseteq M$.

(B3) $\bigcup \mathcal{B} = N$.

Los ejemplos más simples de barreras son:

Ejemplo 2.1.3.

1. Para cada $k \in \mathbb{N}$ y $N \in [\mathbb{N}]^\omega$, el conjunto $[N]^k = \{s \subseteq N : |s| = k\}$ es una barrera en N.
2. La barrera de Schreier $\mathcal{S} = \{s \in FIN^* : |s| = \text{mín}(s)\}$.

Directamente de la definición de barrera se concluye su unicidad bajo contención.

Lema 2.1.4. *Si $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ son barreras en algún $N \in [\mathbb{N}]^\omega$ tal que $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2$, entonces $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2$.*

La estructura de barrera se preserva bajo ciertas restricciones y puede generar nuevas barreras tal como lo establece el siguiente resultado.

Lema 2.1.5. *Sea $\mathcal{B} \subseteq FIN^*$ una barrera en $N \in [\mathbb{N}]^\omega$.*

1. *Para todo $M \in [N]^\omega$, el conjunto $\mathcal{B} \upharpoonright_M$ es una barrera en M.*
2. *Para cada $s \in FIN^* \setminus \mathcal{B}$, el conjunto $\mathcal{B}_s$ es una barrera en $N/\text{máx}(s)$.*
3. *A la barrera $\mathcal{B}$ se le puede asociar una barrera en $\mathbb{N}$: Si $\{n_i : i \in \mathbb{N}\}$ es la enumeración creciente de N, entonces $\mathcal{B}_\mathbb{N} := \{\{i \in \mathbb{N} : n_i \in s\} : s \in \mathcal{B}\}$ es una barrera en $\mathbb{N}$.*

Por la tercera propiedad del lema anterior, toda barrera puede ser considerada como una barrera en $\mathbb{N}$. Por está razón, en ocasiones, los resultados concerniente a barreras serán formulados y demostrados únicamente para barreras en $\mathbb{N}$.

Veamos que es posible construir nuevas barreras a partir de otras barreras. Para ello se usa la operación que se describe a continuación: Si $k \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_k \subseteq FIN^*$, entonces

$$\bigoplus_{i=1}^{k} \mathcal{B}_i := \{s_1{}^\frown s_2{}^\frown \cdots {}^\frown s_k : \forall i \leq k \ (s_i \in \mathcal{B}_i) \text{ y } s_1 < s_2 < \cdots < s_k\}.$$

Lema 2.1.6. *Sean $k \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_k \subseteq FIN^*$ barreras en $N \in [\mathbb{N}]^\omega$. Entonces el conjunto $\bigoplus_{i=1}^k \mathcal{B}_i$ es una barrera en N.*

Demostración. Basta con probar el caso $k = 2$. Fijemos $M \in [N]^\omega$, como $\mathcal{B}_1$ es barrera en N entonces existe $s \in \mathcal{B}_1$ tal que $s \sqsubseteq M$. Tomemos $m := \text{máx}(s)$, gracias a la definición de barrera y a que $M/m \in [N]^\omega$, podemos encontrar $t \in \mathcal{B}_2$ que satisface que $t \sqsubseteq M/m$. Por lo tanto, hallamos $s^\frown t \in \bigoplus_{i=1}^2 \mathcal{B}_i$ tal que $s^\frown t \sqsubseteq M$. Además, supongamos que existen $s_1{}^\frown s_2, t_1{}^\frown t_2 \in \bigoplus_{i=1}^2 \mathcal{B}_i$ tal que $s_1{}^\frown s_2 \subseteq t_1{}^\frown t_2$. Entonces alguna de las siguientes condiciones se cumple:

(i) $s_1{}^\frown s_2 \subseteq t_1$,

(ii) $s_1{}^\frown s_2 \subseteq t_2$, y

(iii) $s_1{}^\frown s_2 \cap t_i \neq \emptyset$ para $i = 1, 2$.

Si (i) o (ii), entonces se cumple que $s_1 \subseteq t_1$ o $s_2 \subseteq t_2$, respectivamente, lo cual contradice la definición de barrera. Para el caso (iii) se tiene que $s_1 \subseteq t_1$ o $s_2 \subseteq t_2$ ya que $s_1 < s_2$ y $t_1 < t_2$, nuevamente una contradicción a la definición de barrera. De todo lo anterior podemos concluir que $\bigoplus_{i=1}^k \mathcal{B}$ es una barrera en N. $\square$

Es fácil ver que para cualquier $N \in [\mathbb{N}]^\omega$ y cada sucesión finita $(n_i)_{i=1}^k$ de números naturales resulta que $\bigoplus_{i=1}^k [N]^{n_i} = [N]^{n_1+n_2+\cdots+n_k}$.

Para probar algunos resultados que involucran barreras, el método por inducción transfinita es una herramienta eficiente. Para ello consideramos la relación de *orden lexicográfico* en la familia de subconjuntos finitos de los números naturales, definida para cualesquiera $s, t \in FIN^*$ como

$$s <_{lex} t \text{ si y solo si } \text{mín}(s \triangle t) \in s,$$

donde $s \triangle t$ es la diferencia simétrica, $s \backslash t \cup t \backslash s$.

Recordemos el siguiente hecho conocido [1, Lem. II.2.15] del cual proporcionamos una demostración por su importancia en los resultados posteriores.

Lema 2.1.7. *Toda barrera es un conjunto bien ordenado respecto al orden lexicográfico.*

Demostración. Sea $\mathcal{B}$ una barrera en $N \in [\mathbb{N}]^\omega$. Decimos que $s \leq t$ si y solo si $s <_{lex} t$ o $s = t$ para cualesquiera $s, t \in \mathcal{B}$. Vamos a probar que $(\mathcal{B}, \leq)$ es un orden total y todo subconjunto infinito de la barrera $\mathcal{B}$ posee un elemento mínimo. Por la definición del orden lexicográfico y las propiedades de las barreras es fácil ver que la relación $\leq$ es reflexiva, antisimétrica y comparable (total ó completa). Ahora tomamos $r, s, t \in \mathcal{B}$ tal que $r \leq s$ y $s \leq t$. Si $r = s$ o $s = t$, entonces directamente sabemos que $r \leq t$. En el caso $r < s$ y $s < t$, descartamos la opción $\text{mín}(r \triangle s) = \text{mín}(s \triangle t)$ en virtud de que $\text{mín}(r \triangle s) \in r \setminus s$ y $\text{mín}(s \triangle t) \in s$ gracias a la definición de diferencia simétrica y a la hipótesis. Esto nos deja con dos posibilidades : $\text{mín}(r \triangle s) < \text{mín}(s \triangle t)$ o $\text{mín}(r \triangle s) > \text{mín}(s \triangle t)$. Primero apreciemos que para todo $r, s \in \mathcal{B}$ distintos se satisface la condición

$$\begin{aligned} r \cap s \cap \{1, 2, \ldots, \text{mín}(r \triangle s) - 1\} &= r \cap \{1, 2, \ldots, \text{mín}(r \triangle s) - 1\} \\ &= s \cap \{1, 2, \ldots, \text{mín}(r \triangle s) - 1\} \sqsubseteq r, s. \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

Supongamos que $\min(r \triangle s) < \min(s \triangle t)$. Tomando en cuenta la desigualdad previa y la observación (2.1.1) tenemos que

$$\begin{aligned} r \cap \{1, 2, \ldots, \min(r \triangle s) - 1\} &= s \cap \{1, 2, \ldots, \min(r \triangle s) - 1\} \\ &\sqsubset s \cap \{1, 2, \ldots, \min(s \triangle t) - 1\} \sqsubseteq t. \end{aligned}$$

Además, no es posible que $\min(r \triangle s) \in t$ puesto que $\min(r \triangle s) \notin s$ y $s < t$. De lo anterior obtenemos que $\min(r \triangle s) \in r \triangle t$ y que $\min(r \triangle s) \leq n$ para todo $n \in r \triangle t$, en otras palabras, $\min(r \triangle t) = \min(r \triangle s) \in r$. De forma similar, si $\min(r \triangle s) > \min(s \triangle t)$, entonces se cumple que

$$\begin{aligned} t \cap \{1, 2, \ldots, \min(s \triangle t) - 1\} &= s \cap \{1, 2, \ldots, \min(s \triangle t) - 1\} \\ &\sqsubset s \cap \{1, 2, \ldots, \min(r \triangle s) - 1\} \sqsubset r. \end{aligned}$$

Adicionalmente, sucede que $\min(s \triangle t) \in r$, en su defecto $\min(s \triangle t) \in r \triangle s$ y $\min(s \triangle t) < \min(r \triangle s)$, lo cual es una contradicción. Así es como llegamos a que $\min(s \triangle t) \in r \triangle t$ y $\min(s \triangle t) \leq n$ para todo $n \in r \triangle t$, es decir, $\min(r \triangle t) = \min(s \triangle t) \in r$. Por lo tanto, $r < t$.

Finalmente probemos la existencia del mínimo por contradicción. Supongamos que la barrera $\mathcal{B}$ contiene una sucesión $(s_i)_{i \in \mathbb{N}}$ estrictamente decreciente respecto a la relación $\leq$. Observemos que $\min(s_i \triangle s_j) \neq \min(s_j \triangle s_k)$ para todo $i < j < k$ en $\mathbb{N}$. Consideremos la coloración $\varphi : [\mathbb{N}]^3 \to \{1, 2\}$ dada por

$$\varphi(\{i, j, k\}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \min(s_i \triangle s_j) < \min(s_j \triangle s_k), \\ 2 & \text{si } \min(s_i \triangle s_j) > \min(s_j \triangle s_k), \end{cases}$$

para todo $\{i, j, k\} \in [\mathbb{N}]^3$. Por el Teorema de Ramsey (Teorema 1.2.2) es posible encontrar $\ell \in \{1, 2\}$ y $N \in [\mathbb{N}]^\omega$ tal que $[N]^3 \subseteq \varphi^{-1}(\ell)$. Sin embargo, es imposible que $\min(s_i \triangle s_j) > \min(s_j \triangle s_k)$ para cada $i < j < k$ en N, ya que $\min(s_i \triangle s_j)$ es un número finito y $(s_i)_{i \in N}$ es una sucesión infinita. Por esta razón, para cada $i < j < k$ en N, la desigualdad

$$\min(s_i \triangle s_j) < \min(s_j \triangle s_k) \tag{2.1.2}$$

se satisface. Definamos la coloración $\phi : [N]^3 \to \{1, 2, 3\}$ como

$$\phi(\{i, j, k\}) = \begin{cases} 1 & \text{si } s_i \cap \{1, 2, \ldots, \min(s_i \triangle s_j)\} \sqsupset s_j \cap \{1, 2, \ldots, \min(s_j \triangle s_k)\}, \\ 2 & \text{si } s_i \cap \{1, 2, \ldots, \min(s_i \triangle s_j)\} \sqsubset s_j \cap \{1, 2, \ldots, \min(s_j \triangle s_k)\}, \\ 3 & \text{si } s_i \cap \{1, 2, \ldots, \min(s_i \triangle s_j)\} = s_j \cap \{1, 2, \ldots, \min(s_j \triangle s_k)\}, \end{cases}$$

para todo $\{i, j, k\} \in [N]^3$ con $i < j < k$. Nuevamente, por el Teorema de Ramsey (Teorema 1.2.2), existe $\ell \in \{1, 2, 3\}$ y $M \in [N]^\omega$ tal que $\phi([M]^3) = \{\ell\}$. Notemos que $\ell \neq 1$ en vista de que

$$\begin{aligned} s_i \cap \{1, \ldots, \min\{s_i \triangle s_j\}\} &= s_i \cap \{1, \ldots, \min\{s_i \triangle s_j\} - 1\} \\ &= s_j \cap \{1, \ldots, \min\{s_i \triangle s_j\} - 1\} \\ &\sqsubset s_j \cap \{1, \ldots, \min\{s_j \triangle s_k\} - 1\} \\ &= s_j \cap \{1, \ldots, \min\{s_j \triangle s_k\}\}, \end{aligned}$$

para todo $i < j < k$ en M, pues $(s_i)_{i\in N}$ es estrictamente decreciente y se cumplen las propiedades (2.1.1) y (2.1.2). Supongamos que $s_i \cap \{1, 2, \ldots, \text{mín}(s_i \triangle s_j)\} \sqsubseteq s_j \cap \{1, 2, \ldots, \text{mín}(s_j \triangle s_k)\}$, para todo $i < j < k$ en M. Dado que (2.1.2) se cumple, para cualquier $i < j < k$ en M, obtenemos que

$$\text{mín}(s_i \triangle s_{i+1}) \in s_j \cap \{1, \ldots, \text{mín}\{s_j \triangle s_{j+1}\}\}, \tag{2.1.3}$$

para todo $i < j$ en M. Consideremos el conjunto $\Big\{\text{mín}(s_i \triangle s_{i+1}) : i \in M\Big\} \subseteq \mathbb{N}$, el cual es infinito ya que la relación entre los conjuntos es propia, como $\mathcal{B}$ es barrera en $\mathbb{N}$ podemos hallar $t \in \mathcal{B}$ tal que $t \sqsubseteq \{\text{mín}(s_i \triangle s_{i+1}) : i \in M\} \subseteq \mathbb{N}$. Por (2.1.3) existe $j \in M$ tal que $t \subseteq s_j \cap \{1, 2, \ldots, \text{mín}(s_j \triangle s_{j+1})\} \sqsubseteq s_j$, esto contradice la propiedad (B1) de las barreras. En consecuencia, ℓ debe ser igual a 3, es decir, $s_i \cap \{1, 2, \ldots, \text{mín}(s_i \triangle s_j)\} = s_j \cap \{1, 2, \ldots, \text{mín}(s_j \triangle s_k)\}$ para todo $i < j < k$ en M. Como (2.1.2) y la sucesión es estrictamente decreciente se tiene que $\text{mín}(s_i \triangle s_j) \in s_j \cap \{1, 2, \ldots, \text{mín}(s_j \triangle s_k)\} \subseteq s_i$ para todo $i < j < k$ en M, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, el Teorema de Ramsey no se cumple. De esta forma se prueba que todo subconjunto infinito de la barrera $\mathcal{B}$ contiene un elemento mínimo. □

La clasificación de las barreras según su tipo de orden es de gran ayuda en la demostración del teorema principal de este texto (Teorema 3.2.3). Algunas características relacionadas al tipo de orden, que son de suma importancia para nuestros propósitos, serán descritas en los siguientes resultados (2.1.12, 2.1.13).

En lo siguiente, usaremos la notación $P_{lex}(s)$ para el conjunto de todos los predecesores de $s \in FIN^*$ bajo el orden lexicográfico. Si $\mathcal{B}$ es una barrera y $s \in \mathcal{B}$ denotaremos a la intersección $P_{lex}(s) \cap \mathcal{B}$ por $P_{lex}(s, \mathcal{B})$. Además, denotaremos al tipo de orden de $\mathcal{B}$ como $ord(\mathcal{B})$.

Lema 2.1.8. *Dada una barrera $\mathcal{B}$ en $\mathbb{N}$ se cumple que $ord(\mathcal{B}_{\{n\}}) < ord(\mathcal{B})$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Sea $\mathcal{B}$ una barrera en $\mathbb{N}$ y fijemos arbitrariamente $n \in \mathbb{N}$. Si $\mathcal{B}_{\{n\}}$ es el conjunto vacío, entonces $ord(\mathcal{B}_{\{n\}}) < ord(\mathcal{B})$. En caso de que $\mathcal{B}_{\{n\}}$ no sea el conjunto vacío, definimos la función $f : \mathcal{B}_{\{n\}} \to \mathcal{B}$ como $f(s) = \{n\}^\frown s$ para cada $s \in \mathcal{B}_{\{n\}}$. Es fácil ver que la función f es inyectiva y preserva el orden lexicográfico. Además, por propiedades de las barreras, existe $s_{n+1} \in \mathcal{B}$ tal que $s_{n+1} \sqsubseteq \mathbb{N}/n$. En consecuencia, $f(s) <_{lex} s_{n+1}$ para todo $s \in \mathcal{B}_{\{n\}}$, es decir, $f(\mathcal{B}_{\{n\}}) \subseteq P_{lex}(s_{n+1}, \mathcal{B})$. De aquí se deduce que $ord(\mathcal{B}_{\{n\}}) \leq ord(P_{lex}(s_{n+1}, \mathcal{B}))$. Mientras que en el Teorema 1.1.4 se garantiza que $ord(P_{lex}(s_{n+1}, \mathcal{B})) < ord(\mathcal{B})$. Por lo tanto, podemos concluir que $ord(\mathcal{B}_{\{n\}}) < ord(\mathcal{B})$ para cada $n \in \mathbb{N}$. □

Lema 2.1.9. *Para cada barrera $\mathcal{B}$ en $\mathbb{N}$ se tiene que $ord(\mathcal{B}) \geq \omega^{|s|}$ para todo $s \in \mathcal{B}$.*

Demostración. Sean $\mathcal{B}$ una barrera en $\mathbb{N}$ y $s \in \mathcal{B}$. Basta probar que $\mathcal{B}$ contiene un subconjunto $\mathcal{F}$ tal que $s \leq_{lex} t$ para todo $t \in \mathcal{F}$ y su tipo de orden respecto al orden lexicográfico sea ω^k donde $k = |s|$. Procederemos por inducción sobre k:

En el caso $k = 1$, sea $s = \{s(1)\} \in \mathcal{B}$. Por la definición de barrera podemos encontrar $s_i \in \mathcal{B}$ tal que $s_i \sqsubseteq \{s(1)+i-1, s(1)+i, s(1)+i+1, s(1)+i+2, \ldots\}$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Notemos que $s_i <_{lex} s_{i+1}$ para cada $i \in \mathbb{N}$, por construcción. Por lo tanto, existe un isomorfismo de orden entre $\mathcal{F} := \{s_i : i \in \mathbb{N}\}$ y ω, inducido de manera natural por el orden lexicográfico. Esto demuestra que $ord(\mathcal{F}) = \omega$.

Para $k = 2$, tomamos $s = \{s(1), s(2)\} \in \mathcal{B}$ y $s_1 := s$. La propiedad (B2) de las barreras nos permite hallar $s_i \in \mathcal{B}$ tal que $s_i \sqsubseteq \{s(2)+i-2, s(2)+i-1, s(2)+i, s(2)+i+1, \ldots\}$ para toda $i \in \mathbb{N}/1$. Mientras que, para cada $i \in \mathbb{N}/1$, la propiedad (B1) de las barreras implica que $\{s(2)+i-2, s(2)+i-1\} \sqsubseteq s_i$. De lo contrario, si $s_i = \{s(2)+i-2\}$, entonces $s_i \subseteq s_{i-1}$. De modo que $|s_i| \geq 2$ y $s_i <_{lex} s_{i+1}$ para toda $i \in \mathbb{N}$. Tomando $n_i := |s_i|$ para cada $i \in \mathbb{N}$, nuevamente por la definición de barrera, obtenemos $s_{i,j} \in \mathcal{B}$ tal que $s_{i,j} \sqsubseteq \{s_i(1), \ldots s_i(n_i - 1), s_i(n_i) + j, s_i(n_i) + j + 1, \ldots\}$ y $\{s_i(1), \ldots s_i(n_i - 1), s_i(n_i) + j\} \sqsubseteq s_{ij}$ para todo $i, j \in \mathbb{N}$. Por construcción, resulta que $s_i <_{lex} s_{i,1}$ y $s_{i,j} <_{lex} s_{i,j+1} <_{lex} s_{i+1}$ para cada $i, j \in \mathbb{N}$. Observemos que existe un isomorfismo de orden entre $\mathcal{F} := \{s_i : i \in \mathbb{N}\} \cup \{s_{i,j} : i, j \in \mathbb{N}\}$ y ω^2 dado naturalmente de manera lexicográfica:

$$\begin{array}{cccccc}
s_1 & s_2 & s_3 & \ldots & s_m & \ldots \\
s_{1,1} & s_{2,1} & s_{3,1} & \ldots & s_{m,1} & \ldots \\
s_{1,2} & s_{2,2} & s_{3,2} & \ldots & s_{m,2} & \ldots \\
s_{1,3} & s_{2,3} & s_{3,3} & \ldots & s_{m,3} & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\
s_{1,m} & s_{2,m} & s_{3,m} & \ldots & s_{m,m} & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots
\end{array}.$$

Por esta razón el tipo de orden de $\mathcal{F}$ es ω^2.

Supongamos que si $s \in \mathcal{B}$ y $|s| = k$, entonces existe $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$ con tipo de orden ω^k tal que $s \leq_{lex} t$ para todo $t \in \mathcal{F}$. Para el caso inductivo $k+1$, sea $s = \{s(1), \ldots, s(k+1)\} \in \mathcal{B}$. Como $\mathcal{B}$ es una barrera en $\mathbb{N}$, encontramos $s_i \in \mathcal{B}$ tal que es segmento inicial de

$$\begin{cases} \{s(i), s(i+1), \ldots s(k), s(k+1), s(k+1)+1, \ldots\} & \text{si } i \leq k+1 \\ \{s(k+1)+(i-k)-1, s(k+1)+(i-k), & \\ \quad s(k+1)+(i-k)+1, s(k+1)+(i-k)+2, \ldots\} & \text{si } i > k+1, \end{cases}$$

para cada $i \in \mathbb{N}$. Además, la condición (B1) de las barreras implica que

$$\begin{aligned} &\{s(i), s(i+1), \ldots s(k), s(k+1), s(k+1)+1, \ldots, \\ &\qquad s(k+1)+(i-1)\} \sqsubseteq s_i \text{ si } i \leq k+1, \\ \text{o } &\{s(k+1)+(i-k)-1, s(k+1)+(i-k), s(k+1)+(i-k)+1, \ldots, \\ &\qquad s(k+1)+(i-k)+(k-1)\} \sqsubseteq s_i \text{ si } i > k+1, \end{aligned}$$

para cada $i \in \mathbb{N}$. Por construcción tenemos que $|s_i| \geq k+1$ y $s_i <_{lex} s_{i+1}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Renombremos a los elementos de s_i como $\{s_i(1), \ldots, s_i(n_i)\}$, donde $|s_i| = n_i$, para cada $i \in \mathbb{N}$. Ahora, para cada $i \in \mathbb{N}$, consideremos la barrera $\mathcal{B}_{\{s_i(1), \ldots, s_i(n_i - k)\}}$ y tomemos el elemento

$$t_i := \{s_i(n_i - k + 1), s_i(n_i - k + 2), \ldots, s_i(n_i)\} \in \mathcal{B}_{\{s_i(1), \ldots, s_i(n_i - k)\}}.$$

Como $|t_i| = k$, la hipótesis de inducción nos dice que existe $\mathcal{G}_i \subseteq \mathcal{B}_{\{s_i(1),\ldots,s_i(n_i-k)\}}$ con tipo de orden ω^k tal que $t_i \leq_{lex} t$ para todo $t \in \mathcal{G}_i$. Sea

$$\mathcal{F}_i = \Big\{\{s_i(1), \ldots, s_i(n_i - k)\}^\frown t : t \in \mathcal{G}_i\Big\} \subseteq \mathcal{B}$$

para cada $i \in \mathbb{N}$. La función $f_i : \mathcal{G}_i \to \mathcal{F}_i$ definida como $f_i(t) = \{s_i(1), \ldots, s_i(n_i-k)\}^\frown t$ para cada $t \in \mathcal{G}_i$, con $i \in \mathbb{N}$, es un isomorfismo de orden respecto al orden lexicográfico. Por lo cual el $ord(\mathcal{F}_i) = \omega^k$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Notemos, para cada $i \in \mathbb{N}$, que $s <_{lex} s_{i+1}$ para todo $s \in S_i$ ya que $s(1) < s_{i+1}(1)$. Esto implica la existencia de un isomorfismo de orden entre $\mathcal{F} = \cup_{i\in\mathbb{N}}\mathcal{F}_i$ y ω^{k+1} inducido naturalmente por el orden lexicográfico, es decir, $ord(\mathcal{F}) = \omega^{k+1}$. $\square$

Corolario 2.1.10. *La única barrera en $\mathbb{N}$ con orden ω es $[\mathbb{N}]^1$.*

Demostración. Se realizará la prueba por contradicción. Supongamos que $\mathcal{B}$ es una barrera en $\mathbb{N}$ con tipo de orden ω y $\mathcal{B} \neq [\mathbb{N}]^1$, entonces existe $s \in \mathcal{B}$ que satisface $|s| \geq 2$. Por el Lema 2.1.9 se concluye que $ord(\mathcal{B}) \geq \omega^2$. $\square$

Lema 2.1.11. *Si $\mathcal{B}$ es una barrera en $\mathbb{N}$ distinta de $[\mathbb{N}]^1$, entonces $|\mathcal{B}\cap[\mathbb{N}]^1| < \infty$. En particular, se tiene que $\{i\} \in \mathcal{B}$ para cada $i \leq \text{máx}\Big(\bigcup(\mathcal{B}\cap[\mathbb{N}]^1)\Big)$.*

Demostración. Sea $\mathcal{B} \neq [\mathbb{N}]^1$ una barrera en $\mathbb{N}$ y supongamos que el conjunto $\mathcal{B}\cap[\mathbb{N}]^1$ es infinito. Tomamos $s = \{s(1), \ldots, s(k)\} \in \mathcal{B}\backslash[\mathbb{N}]^1$, con $k \geq 2$. Como $\mathcal{B}$ es una barrera, para cada $i \geq s(k)$ encontramos un $t_i \in \mathcal{B}$ tal que $\{s(1), \ldots, s(k-1), i\} \sqsubseteq t_i$. Debido a que $|\mathcal{B}\cap[\mathbb{N}]^1| = \infty$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $m > s(k)$ y $\{m\} \in \mathcal{B}$. Así que $\{m\} \subseteq t_m$, una contradicción de la propiedad (B1) de las barreras.

Sea $n := \text{máx}\Big(\bigcup(\mathcal{B}\cap[\mathbb{N}]^1)\Big)$ y supongamos que existe $m < n$ tal que $\{m\} \notin \mathcal{B}$. Consideremos el conjunto infinito $\{m, n, n+1, n+2, \ldots\} \subseteq \mathbb{N}$. Por la definición de barrera existe $s \in \mathcal{B}$ tal que $s \sqsubseteq \{m, n, n+1, n+2, \ldots\}$. Sabemos que $s \neq \{m\}$, entonces $\{m, n\} \sqsubseteq s$ y en consecuencia $\{n\} \subseteq s$, lo cual es una contradicción. $\square$

El lema anterior también implica que para toda barrera $\mathcal{B}$ en $\mathbb{N}$ distinta de $[\mathbb{N}]^1$ resulta que $\mathcal{B}\backslash[\mathbb{N}]^1$ es barrera en $\mathbb{N}/n$ donde $n := \text{máx}\Big(\bigcup(\mathcal{B}\cap[\mathbb{N}]^1)\Big)$.

Teorema 2.1.12. *Para cada $k \in \mathbb{N}$ con $k \geq 2$ se cumplen las siguientes afirmaciones:*

$(1)_k$ *Sea $\mathcal{B}$ una barrera en $\mathbb{N}$. Entonces $\mathcal{B}$ tiene tipo de orden ω^k si y solo si todo $s \in \mathcal{B}$ satisface que $|s| \leq k$ y existe $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ tal que $[\mathbb{N}/n]^k \subseteq \mathcal{B}$.*

$(2)_k$ *Para toda barrera $\mathcal{B}$ en $\mathbb{N}$ con $ord(\mathcal{B}) > \omega^k$ se tiene que el conjunto*

$$\mathfrak{M}_k(\mathcal{B}) = \Big\{m \in \mathbb{N} : m = \text{mín}(s) \text{ para algún } s \in \mathcal{B}\cap[\mathbb{N}]^k\Big\} \text{ es finito.}$$

Demostración. Procedemos por inducción sobre k. Para el caso $k = 2$ tenemos que:

$(1)_2$ $(\Rightarrow)$ Sea $\mathcal{B}$ una barrera en $\mathbb{N}$ con orden ω^2. Supongamos que existe $s \in \mathcal{B}$ tal que $|s| > 2$, entonces $ord(\mathcal{B}) \geq \omega^3$ por el Lema 2.1.9, lo que contradice la hipótesis. Por consiguiente, para todo $s \in \mathcal{B}$ se cumple que $|s| \leq 2$. En virtud del Lema

2.1.11 y del resultado previo, obtenemos que $[\mathbb{N}/n]^2 \subseteq \mathcal{B}$ donde $n := \text{máx}\left(\bigcup(\mathcal{B}\cap [\mathbb{N}]^1)\right)$.

($\Leftarrow$) Consideramos $\mathcal{B}$ una barrera en $\mathbb{N}$ tal que todo $s \in \mathcal{B}$ satisface que $|s| \leq 2$ y $[\mathbb{N}/n]^2 \subseteq \mathcal{B}$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Por hipótesis, el conjunto $\mathcal{B}_{\{i\}} \subseteq [\mathbb{N}]^{<2}$ para cada $i \leq n$. En consecuencia, $\mathcal{B}_{\{i\}}$ es vacío o $\mathcal{B}_{\{i\}} = [\mathbb{N}/i]^1$ si $i \leq n$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\mathcal{B}_{\{i\}} \neq \emptyset$ para cada $i \leq n$. Esto implica que el orden de $\Gamma_{\{i\}} := \{\{i\}^\frown s : s \in \mathcal{B}_{\{i\}}\} \subseteq \mathcal{B}$ es igual al $ord(\mathcal{B}_{\{i\}}) = \omega$ para cada $i \leq n$. Aplicando el Teorema 1.1.5 a $\{\Gamma_{\{i\}}\}_{i=1}^n \cup \{[\mathbb{N}/n]^2\}$ obtenemos que

$$ord(\mathcal{E}) = \left(\sum_{i=1}^{n} ord(\Gamma_{\{i\}})\right) + ord([\mathbb{N}/n]^2) = \omega^2.$$

$(2)_2$ Sea $\mathcal{B}$ una barrera en $\mathbb{N}$ tal que $ord(\mathcal{B}) > \omega^2$ y supongamos que $\mathfrak{M}_2(\mathcal{B})$ es infinito. Primero probemos que existe $\ell \in \mathbb{N}$ tal que la barrera $\mathcal{B}_{\{\ell\}}$ tiene un elemento s con cardinalidad mayor o igual a 2. Supongamos que $\mathcal{B}_{\{i\}} \subseteq [\mathbb{N}]^{<2}$ para cualquier $i \in \mathbb{N}$. Sabemos que $\mathcal{B}_{\{i\}}$ es el conjunto vacío o una barrera. Sin pérdida de generalidad, gracias al Lema 2.1.11 y al inciso 3. del Lema 2.1.5, podemos suponer que $\mathcal{B}_{\{i\}} \neq \emptyset$ para toda $i \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $ord(\mathcal{B}_{\{i\}}) = \omega$ para toda $i \in \mathbb{N}$. Debido al Teorema 1.1.5 y a los resultados previos tenemos que

$$\begin{aligned} ord(\mathcal{B}) &= \sum_{i=1}^{\infty} ord(\Gamma_{\{i\}}) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \omega = \omega^2, \end{aligned}$$

ya que de igual manera al inciso anterior se cumple que $ord(\Gamma_{\{i\}}) = ord(\mathcal{B}_{\{i\}})$ para toda $i \in \mathbb{N}$, lo cual contradice la hipótesis. Sea $\ell \in \mathbb{N}$ tal que hay un $s \in \mathcal{B}_{\{\ell\}}$ con $|s| \geq 2$, el Lema 2.1.9 afirma que el tipo de orden de $\mathcal{B}_{\{\ell\}}$ es mayor o igual a ω^2. Mientras que por el Teorema 2.1.11, obtenemos que $\mathfrak{M}_1(\mathcal{B}_{\{\ell\}}) = \bigcup(\mathcal{B}_{\{\ell\}} \cap [\mathbb{N}]^1)$ es finito. Por consiguiente, si $n := \text{máx}\left(\mathfrak{M}_1(\mathcal{B}_{\{\ell\}})\right) > \ell$ entonces $\mathcal{B}_{\{\ell\}} \restriction_{\mathbb{N}/n}$ es una barrera en $\mathbb{N}/n$ que no tiene elementos con cardinalidad 1. Por otro lado, como $\mathfrak{M}_2(\mathcal{B})$ es infinito, hallamos $m \in \mathfrak{M}_2(\mathcal{B})$ tal que $m > n$. Tomamos algún $\{m, i\} \in \mathcal{B} \cap [\mathbb{N}]^2$ y consideramos el conjunto $\{m, i, i+1, i+2, \ldots\} \subseteq \mathbb{N}/n$. Por definición de barrera, obtenemos $s \in \mathcal{B}_{\{\ell\}}$ tal que $s \sqsubseteq \{m, i, i+1, i+2, \ldots\}$. Debido a la construcción $s \neq \{m\}$, así que $\{m, i\} \sqsubseteq s$. Por eso $\{\ell\}^\frown s \in \mathcal{B}$ y $\{m, i\} \in \mathcal{B}$, lo cual contradice la propiedad (B1) de las barreras.

Supongamos que $(1)_j$ y $(2)_j$ se cumplen para cada $1 < j \leq k$. Por demostrar que las afirmaciones son válidas para $k+1$.

$(1)_{k+1}$ ($\Rightarrow$) Sea $\mathcal{B}$ una barrera en $\mathbb{N}$ tal que $ord(\mathcal{B}) = \omega^{k+1}$. Supongamos que existe $s \in \mathcal{B}$ tal que $|s| > k+1$, aplicando el Lema 2.1.9 obtenemos que $ord(\mathcal{B}) > \omega^{k+2}$. Una contradicción de la hipótesis. Por lo tanto, para todo $s \in \mathcal{B}$ se satisface que $|s| \leq k+1$. Observemos que $\mathfrak{M}_1(\mathcal{B}), \mathfrak{M}_2(\mathcal{B}), \ldots, \mathfrak{M}_k(\mathcal{B})$ son conjuntos finitos por el Lema 2.1.11 y $(2)_j$ para $1 < j \leq k$. En consecuencia, $\mathfrak{M}_{k+1}(\mathcal{B})$ es un conjunto infinito. Finalmente, los resultados previos implican que $[\mathbb{N}/n]^{k+1} \subseteq \mathcal{B}$ para $n := \text{máx}\left(\bigcup_{j\leq k}\mathfrak{M}_j(\mathcal{B})\right)$.

($\Leftarrow$) Consideramos $\mathcal{B}$ una barrera en $\mathbb{N}$ tal que todo $s \in \mathcal{B}$ satisface que $|s| \leq k+1$ y $[\mathbb{N}/n]^{k+1} \subseteq \mathcal{B}$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Por hipótesis $\mathcal{B}_{\{i\}} \subseteq [\mathbb{N}]^{<k+1}$ para cada $i \leq n$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\mathcal{B}_{\{i\}} \neq \emptyset$ para $i \leq n$. Gracias al Lema 2.1.9 se tiene que $ord(\mathcal{B}_{\{i\}}) \geq \omega^{d_i}$, donde $d_i = \max\{|t| : t \in \mathcal{B}_{\{i\}}\}$, para cada $i \leq n$. Notemos que $d_i \leq k$ para toda $i \leq n$, entonces $\omega^{d_i} \leq \omega^k$. Aplicando el Lema 2.1.11 y $(2)_j$ para todo $j < d_i$ obtenemos que los conjuntos $\mathfrak{M}_1(\mathcal{B}_{\{i\}}), \ldots, \mathfrak{M}_{d_i-1}(\mathcal{B}_{\{i\}})$ poseen cardinalidad finita si $i \leq n$. En consecuencia, $\mathfrak{M}_{d_i}(\mathcal{B}_{\{i\}})$ es un conjunto infinito para cada $i \leq n$. Por la contrapuesta de $(2)_{d_i}$ tenemos que $ord(\mathcal{B}_{\{i\}}) \leq \omega^{d_i}$ para toda $i \leq n$. Por lo cual podemos concluir que $ord(\mathcal{B}_{\{i\}}) = \omega^{d_i}$ si $i \leq n$. Finalmente, gracias al Teorema 1.1.5 y a la igualdad entre el tipo de orden de $\mathcal{B}_{\{i\}}$ y el tipo de orden de $\Gamma_{\{i\}} := \{\{i\}^\frown s : s \in \mathcal{B}_{\{i\}}\}$ para cada $i \leq n$, resulta que

$$\begin{aligned} ord(\mathcal{B}) &= \Big(\sum_{i \leq n} ord(\Gamma_{\{i\}})\Big) + ord([\mathbb{N}/n]^{k+1}) \\ &= \Big(\sum_{i \leq n} \omega^{d_i}\Big) + \omega^{k+1} \\ &= \omega^{k+1}. \end{aligned}$$

$(2)_{k+1}$ Consideremos $\mathcal{B}$ una barrera en $\mathbb{N}$ con tipo de orden mayor a ω^{k+1} y supongamos que $\mathfrak{M}_{k+1}(\mathcal{B})$ es un conjunto infinito. Probemos, por contradicción, que existe $\ell \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{B}_{\{\ell\}}$ contiene un elemento de cardinalidad mayor o igual a $k+1$. Para ello supongamos que $\mathcal{B}_{\{i\}} \subseteq [\mathbb{N}]^{<k+1}$ para toda $i \in \mathbb{N}$, es decir, $\mathcal{B} \subseteq [\mathbb{N}]^{\leq k+1}$. Del Lema 2.1.9 se obtiene que $ord(\mathcal{B}) \geq \omega^d$ con $d = \max\{|s| : s \in \mathcal{B}\} \leq k+1$. Observemos que $\mathfrak{M}_d(\mathcal{B})$ es un conjunto infinito ya que $|s| \leq d$ para toda $s \in \mathcal{B}$ y $\mathfrak{M}_1(\mathcal{B}), \ldots, \mathfrak{M}_{d-1}(\mathcal{B})$ poseen cardinalidad finita según el Lema 2.1.11 y los incisos $(2)_2, \ldots, (2)_{d-1}$. De aquí se deduce que $[\mathbb{N}/n]^d \subseteq \mathcal{B}$ para $n := \max\Big(\bigcup_{i \leq d-1} \mathfrak{M}_i(\mathcal{B})\Big)$. Por $(1)_{k+1}$ se concluye que $ord(\mathcal{B}) = \omega^d \leq \omega^{k+1}$, una contradicción de la hipótesis. Sea $\ell \in \mathbb{N}$ tal que hay un elemento $s \in \mathcal{B}$ cuya cardinalidad es mayor o igual que $k+1$. Entonces del Lema 2.1.9 obtenemos que $ord(\mathcal{B}_{\{\ell\}}) \geq \omega^{k+1}$. El Lema 2.1.11 y los incisos $(2)_2, \ldots, (2)_k$ nos aseguran que $\mathfrak{M}_1(\mathcal{B}_{\{\ell\}}), \ldots, \mathfrak{M}_k(\mathcal{B}_{\{\ell\}})$ son conjuntos finitos. Por lo tanto, $\mathcal{B}_{\{\ell\}} \restriction_{\mathbb{N}/n}$ es una barrera en $\mathbb{N}/n$ que no posee elementos de tamaño menor o igual a k cuando $n := \max\Big(\bigcup_{i \leq k} \mathfrak{M}_i(\mathcal{B}_{\{\ell\}})\Big) > \ell$. Luego, como $\mathfrak{M}_{k+1}(\mathcal{B})$ es infinito, existe $m \in \mathfrak{M}_{k+1}(\mathcal{B})$ tal que $m > n$. Tomamos algún $\{m, i_1, i_2, \ldots, i_k\} \in \mathcal{B} \cap [\mathbb{N}]^{k+1}$ y consideramos el conjunto infinito $\{m, i_1, i_2, \ldots, i_k, i_k+1, i_k+2, \ldots\} \subseteq \mathbb{N}/n$. Por definción de barrera, podemos encontrar $s \in \mathcal{B}_{\{\ell\}} \restriction_{\mathbb{N}/n}$ tal que $s \sqsubseteq \{m, i_1, i_2, \ldots, i_k, i_k+1, i_k+2, \ldots\}$. Pero dado que $|s| \geq k+1$ se tiene que $\{m, i_1, i_2, \ldots, i_k\} \sqsubseteq s$. Así $\{\ell\}^\frown s$ y $\{m, i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ pertenecen a $\mathcal{B}$, esto contradice la definición de barrera.

□

Corolario 2.1.13. *Si $\mathcal{B}$ es una barrera en $\mathbb{N}$ con tipo de orden menor a ω^ω, entonces $ord(\mathcal{B}) = \omega^k$ para algún $k \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Dada $\mathcal{B}$ una barrera en $\mathbb{N}$ tal que $ord(\mathcal{B}) < \omega^\omega$ y $ord(\mathcal{B}) \neq \omega^k$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\omega^n < ord(\mathcal{B}) < \omega^{n+1}$. Por el Teorema 2.1.12

los conjuntos $\mathfrak{M}_1(\mathcal{B}), \ldots, \mathfrak{M}_n(\mathcal{B})$ son finitos. Además, por contrapuesta del Lema 2.1.9, ningún $s \in \mathcal{B}$ cumple que $|s| \geq n+1$. En otras palabras, $|s| \leq n$ para toda $s \in \mathcal{B}$. Esto implica que $\mathfrak{M}_i(\mathcal{B})$ es un conjunto infinito para algún $i \leq n$, lo cual es una contradicción. $\square$

Del resultado anterior y del hecho de que la barrera de Schreier $\mathcal{S}$ tiene tipo de orden ω^ω, es natural preguntarse si existen barreras en $\mathbb{N}$ con tipo de orden mayor a ω^ω. La respuesta es si, un ejemplo de ello es la barrera

$$[\mathbb{N}]^1 \oplus \mathcal{S} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\{n\} \cup s : s \in \mathcal{S} \restriction_{\mathbb{N}/n}\}$$

con tipo de orden igual a $\omega^{\omega+1}$.

El siguiente teorema es uno de los resultados más relevantes que conectan a familias arbitrarias de subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ con barreras, la demostración se puede encontrar en el libro [1, Lema II.3.8].

Teorema 2.1.14 (de Galvin)**.** *Para cada $\mathcal{F}$ familia de conjuntos finitos de $\mathbb{N}$ y todo $N \in [\mathbb{N}]^\omega$ existe $M \in [N]^\omega$ tal que $\mathcal{F} \restriction_M$ es vacío o contiene una barrera.*

Una consecuencia directa del teorema anterior y la definición de barrera es:

Teorema 2.1.15 (de Ramsey sobre Barreras)**.** *Toda barrera $\mathcal{B}$ en $N \in [\mathbb{N}]^\omega$ tiene la propiedad de Ramsey no nula. De hecho, para cada coloración $\varphi : \mathcal{B} \to \{1, \ldots, q\}$, con $q \in \mathbb{N}$, podemos hallar $i \leq q$ y $M \in [N]^\omega$ tales que $\emptyset \neq \mathcal{B} \restriction_M \subseteq \varphi^{-1}(i)$.*

Demostración. Sean $\mathcal{B}$ una barrera en $N \in [\mathbb{N}]^\omega$ y $\varphi : \mathcal{B} \longrightarrow \{1, 2\}$ una coloración. Tomamos $B_i := \varphi^{-1}(i)$, la preimagen de i bajo φ, para cada $i \leq 2$. Por el Teorema de Galvin (Teorema 2.1.14) existe $M \in [N]^\omega$ tal que $B_1 \restriction_M$ es vacío o una barrera en M. Si $B_1 \restriction_M = \emptyset$, entonces $\mathcal{B} \restriction_M = B_2 \restriction_M$, y debido al Lema 2.1.5 sabemos que $\mathcal{B} \restriction_M$ es una barrera en M, se termina la demostración. Supongamos entonces que $B_1 \restriction_M$ es una barrera en M. Gracias al Lema 2.1.5 tenemos que $B \restriction_M$ es una barrera en M, y el Lema 2.1.4 nos permite concluir que $B_1 \restriction_M = B \restriction_M$ y $B_2 \restriction_M = \emptyset$. $\square$

Es posible deducir el resultado anterior a través de un teorema más general y que es central en la Teoría de Nash-Williams de Fronteras y Barreras [1, 26].

Por otro lado, motivados por la relevancia de las sucesiones bloque de una sucesión básica normalizada en un espacio de Banach, introduciremos el siguiente concepto.

Definición 2.1.16. Dados $k \in \mathbb{N}$ y barreras $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_k \subseteq FIN^*$ en $N \in [\mathbb{N}]^\omega$, definimos el conjunto

$$Bl(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_k) := \{\{s_1, \ldots, s_k\} : \forall i \leq k \ (s_i \in \mathcal{B}_i) \text{ y } s_1 < s_2 < \cdots < s_k\},$$

y lo llamamos *la familia de bloques de barreras de la sucesión* $(\mathcal{B}_i)_{i=1}^k$. Si $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2 = \cdots = \mathcal{B}_k$, entonces denotamos brevemente a $Bl(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_k)$ como $Bl^k(\mathcal{B}_1)$. Además, a los elementos de la familia $Bl(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_k)$ los denominaremos $k-$bloques.

Remarquemos que el conjunto $Bl(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_k)$ es infinito para cualquier sucesión de barreras $(\mathcal{B}_i)_{i=1}^k$ en $\mathbb{N}$ gracias a las propiedades de una barrera.

Ahora, extendemos el Teorema de Ramsey sobre Barreras a una familia de bloques de barreras. El siguiente resultado, que se encuentra en el artículo [16], generaliza el Teorema de Ramsey y su prueba se muestra posteriormente en este texto.

Teorema 2.1.17 (de Ramsey sobre Bloques de Barreras)**.** *Sea $(\mathcal{B}_i)_{i=1}^k$ una sucesión finita de barreras en $N \in [\mathbb{N}]^\omega$. Entonces para cualquier coloración $\varphi : Bl(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_k) \to \{1, \ldots, q\}$, con $q \in \mathbb{N}$, existen $i \leq q$ y $M \in [N]^\omega$ tales que $Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_M, \ldots, \mathcal{B}_k \restriction_M) \subseteq \varphi^{-1}(i)$.*

2.2 Teorema de Ramsey sobre Bloques de Barreras para Analistas

En base a la noción de $k-$bloques de barreras y su propiedad de Ramsey no nula, establecidas previamente, es natural pensar en su conexión con el Análisis Matemático. Esta idea se expone en [16] y es la que abordaremos en la presente sección, siguiendo las pautas asentadas en el apartado Teorema de Ramsey y Teorema de Ramsey para Analistas.

Teorema 2.2.1 (de Ramsey sobre Bloques de Barreras para Analistas)**.** *Sean (X, d) un espacio métrico totalmente acotado, $k \in \mathbb{N}$ y $(\mathcal{B}_i)_{i=1}^k$ una sucesión finita de barreras en $N \in [\mathbb{N}]^\omega$. Para cada coloración $\varphi : Bl(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_k) \longrightarrow X$ y cada $\varepsilon > 0$ existe $M \in [N]^\omega$ tal que*

$$d(\varphi(S), \varphi(T)) < \varepsilon$$

si S, $T \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_M, \ldots, \mathcal{B}_k \restriction_M)$.

Demostración. Sean (X, d) un espacio métrico totalmente acotado, $k \in \mathbb{N}$ y $(\mathcal{B}_i)_{i=1}^k$ una sucesión de barreras en $N \in [\mathbb{N}]^\omega$. Fijemos una coloración $\varphi : Bl(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_k) \longrightarrow X$ y $\varepsilon > 0$, ambos arbitrarios. Como X es totalmente acotado, existen $q \in \mathbb{N}$ y $x_1, \ldots, x_q$ en X tal que $X = \bigcup_{i \leq q} B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i)$. Consideremos la partición $\{A_i : i \leq q\}$ de X, donde

$$A_1 = B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_1) \quad \text{y} \quad A_i = B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i) \setminus \Big(\bigcup_{j<i} B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_j)\Big) \text{ para cada } 1 < i \leq q.$$

Entonces podemos definir la función $\phi : X \longrightarrow \{1, \ldots, q\}$, en el punto $x \in X$, como

$$\phi(x) = i \text{ si } x \in A_i, \text{ para algún } i \leq q.$$

Es claro que ϕ está bien definida y que

$$\phi \circ \varphi : Bl(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_k) \longrightarrow \{1, \ldots, q\}$$

es una coloración finita. El Teorema de Ramsey sobre Bloques de Barreras (Teorema 2.1.17) nos garantiza que podemos hallar $i \leq q$ y $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ tal que $Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_M, \ldots,$

$\mathcal{B}_k \restriction_M) \subseteq (\phi \circ \varphi)^{-1}(i) = \varphi^{-1}(\phi^{-1}(i))$. Por consiguiente $\varphi\Big(Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_M, \dots, \mathcal{B}_k \restriction_M)\Big) \subseteq \phi^{-1}(i) = A_i \subseteq B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i)$. Lo que significa que

$$d(\varphi(S), \varphi(T)) < \varepsilon$$

para todo S, $T \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_M, \dots, \mathcal{B}_k \restriction_M)$. □

Mediante el teorema anterior y cierto proceso de diagonalización se obtiene una variación del Teorema 2.2.1, en donde los bloques de barreras resultantes se acercan asintóticamente entre sí.

Corolario 2.2.2. *Sean (X, d) un espacio métrico totalmente acotado, $k \in \mathbb{N}$ y $(\mathcal{B}_i)_{i=1}^k$ una sucesión de barreras en $N \in [\mathbb{N}]^\omega$. Para cada coloración $\varphi : Bl(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_k) \longrightarrow X$ y cada sucesión $\varepsilon_i \searrow 0$, existe $M = \{m_i : i \in \mathbb{N}\} \in [\mathbb{N}]^\omega$ tal que*

$$d(\varphi(S), \varphi(T)) < \varepsilon_\ell,$$

siempre que $\min(s_1 \cup t_1) = m_\ell$*, para cualesquiera* $S = \{s_1, \dots, s_k\}$*,* $T = \{t_1, t_2 \dots, t_k\} \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_M, \dots, \mathcal{B}_k \restriction_M)$.

Demostración. Sean (X, d) un espacio métrico totalmente acotado, $k \in \mathbb{N}$ y $(\mathcal{B}_i)_{i=1}^k$ una sucesión de barreras en $N \in [\mathbb{N}]^\omega$. Consideremos una sucesión $\varepsilon_i \searrow 0$ y una coloración $\varphi : Bl(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_k) \longrightarrow X$, arbitrarias. Por el Teorema 2.2.1, existe un conjunto $M_1 \in [N]^\omega$ tal que $d(\varphi(S), \varphi(T)) < \varepsilon_1$ para todo $S, T \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_{M_1}, \dots, \mathcal{B}_k \restriction_{M_1})$. Pongamos $m_1 := \min(M_1)$. Supongamos que para todo $i < n$ con $n \in \mathbb{N}$ existe $M_{i+1} \in [M_i/m_i]^\omega$, donde $m_i := \min(M_i)$, que satisface que $d(\varphi(S), \varphi(T)) < \varepsilon_{i+1}$ para todo $S, T \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_{M_{i+1}}, \dots, \mathcal{B}_k \restriction_{M_{i+1}})$. Aplicando el Teorema 2.2.1 a $\varphi \restriction_{Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_{M_n/m_n}, \dots, \mathcal{B}_k \restriction_{M_n/m_n})}$ y a ε_{n+1}, encontramos un conjunto $M_{n+1} \in [M_n/m_n]^\omega$ tal que $d(\varphi(S), \varphi(T)) < \varepsilon_{n+1}$ para todo $S, T \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_{M_{n+1}}, \dots, \mathcal{B}_k \restriction_{M_{n+1}})$ y ponemos $m_{n+1} := \min(M_{n+1})$. De esta forma generamos una sucesión $(m_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de números naturales y una sucesión $(M_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos infinitos de N, con las siguientes características:

— $m_i := \min(M_i)$ para toda $i \in \mathbb{N}$.

— $M_1 \in [N]^\omega$ y $M_{i+1} \in [M_i/m_i]^\omega \subseteq [M_i]^\omega$ para cada $i \in \mathbb{N}$, lo cual implica que $m_i < m_{i+1}$ para toda $i \in \mathbb{N}$.

— Para cada $i \in \mathbb{N}$, se cumple que $d(\varphi(S), \varphi(T)) < \varepsilon_i$ siempre que $S, T \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_{M_i}, \dots, \mathcal{B}_k \restriction_{M_i})$

Ahora, tomemos $M := \{m_i : i \in \mathbb{N}\}$. Notemos que para cada $S = \{s_1, \dots, s_k\}$, $T = \{t_1, \dots, t_k\} \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_M, \dots, \mathcal{B}_k \restriction_M)$, existe $\ell \in \mathbb{N}$ tal que $\min(s_1 \cup t_1) = m_\ell$. De ahí que $S, T \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_{M_\ell}, \dots, \mathcal{B}_k \restriction_{M_\ell})$ y

$$d(\varphi(S), \varphi(T)) < \varepsilon_\ell.$$

Por lo tanto, M es el conjunto buscado. □

De manera análoga a lo que se hizo en el Teorema 1.2.4, el Teorema 2.2.1 nos conduce a un tipo de convergencia de coloraciones de bloques de barreras a espacios métricos. Más aún, esta convergencia es una extensión de la expuesta en la Definición 1.2.6.

Definición 2.2.3. Sean (X,d) un espacio métrico, $k \in \mathbb{N}$ y $(\mathcal{B}_i)_{i=1}^k$ una sucesión de barreras en $N \in [\mathbb{N}]^\omega$. Una coloración $\varphi : Bl(\mathcal{B}_1,\ldots,\mathcal{B}_k) \longrightarrow X$ converge a $x \in X$, si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\ell \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(\varphi(S),x) < \varepsilon,$$

para todo $S = \{s_1,\ldots,s_k\} \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_{N/\ell},\ldots,\mathcal{B}_k \restriction_{N/\ell})$. Esta convergencia la denotaremos por el símbolo

$$\lim_{Bl(\mathcal{B}_1,\ldots,\mathcal{B}_k)\ni S\longrightarrow\infty} \varphi(S) = x.$$

La compacidad de un espacio métrico nos asegura que toda coloración mediante elementos de dicho espacio tiene una restricción convergente.

Corolario 2.2.4. *Sean (K,d) un espacio métrico compacto, $k \in \mathbb{N}$ y $(\mathcal{B}_i)_{i=1}^k$ una sucesión de barreras en $N \in [\mathbb{N}]^\omega$. Para cada coloración $\varphi : Bl(\mathcal{B}_1,\ldots,\mathcal{B}_k) \longrightarrow K$ existen $M \in [N]^\omega$ y $x \in K$ tal que*

$$\lim_{Bl(\mathcal{B}_1\restriction_M,\ldots,\mathcal{B}_k\restriction_M)\ni S\longrightarrow\infty} \varphi(S) = x.$$

Demostración. Sean (K,d) un espacio métrico compacto, $k \in \mathbb{N}$ y $(\mathcal{B}_i)_{i=1}^k$ una sucesión de barreras en $N \in [\mathbb{N}]^\omega$. Fijemos una coloración $\varphi : Bl(\mathcal{B}_1,\ldots,\mathcal{B}_k) \longrightarrow K$. Por el Corolario 2.2.2, hallamos $M = \{m_i : i \in \mathbb{N}\} \in [N]^\omega$ tal que

$$d(\varphi(S),\varphi(T)) < \frac{1}{2^\ell}, \text{ donde } \min(s_1 \cup t_1) = m_\ell \text{ para algún } \ell \in \mathbb{N},$$

para cada $S = \{s_1,\ldots,s_k\}$, $T = \{t_1,\ldots,t_k\} \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_M,\ldots,\mathcal{B}_k \restriction_M)$. Por otra parte, como K es compacto y la familia $\Big\{cl_K\Big(\{\varphi(S) : S \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_{M/j},\ldots,\mathcal{B}_k \restriction_{M/j})\}\Big)\Big\}_{j\in\mathbb{N}}$ posee la propiedad de intersección finita, podemos encontrar un punto

$$x \in \bigcap_{j\in\mathbb{N}} cl_K\Big(\{\varphi(S) : S \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_{M/j} \ldots,\mathcal{B}_k \restriction_{M/j})\}\Big).$$

Ahora, probemos que la coloración $\varphi : Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_M,\ldots,\mathcal{B}_k \restriction_M) \longrightarrow K$ converge a x. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\ell \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^\ell} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Como

$$x \in cl_K\Big(\{\varphi(S) : S \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_{M/m_{\ell-1}},\ldots,\mathcal{B}_k \restriction_{M/m_{\ell-1}})\}\Big),$$

existe $T \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_{M/m_{\ell-1}},\ldots,\mathcal{B}_k \restriction_{M/m_{\ell-1}})$ tal que $d(\varphi(T),x) < \frac{1}{2^\ell}$. Finalmente, se concluye que

$$\begin{aligned} d(\varphi(S),x) &\leq d(\varphi(S),\varphi(T)) + d(\varphi(T),x) \\ &< \frac{1}{2^\ell} + \frac{1}{2^\ell} \leq \varepsilon \end{aligned}$$

para todo $S \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_{M/m_{\ell-1}},\ldots,\mathcal{B}_k \restriction_{M/m_{\ell-1}})$. $\square$

CAPÍTULO 3

Estabilidad Oscilatoria

Empezaremos el capítulo presentando la noción de $(k,\varepsilon)-$oscilación estable propuesta en [4] y su relación con el Teorema de Ramsey. Después extenderemos dicho concepto mediante el uso de k-bloques de barreras y probaremos que la nueva oscilación es equivalente al Teorema de Ramsey y al Teorema de Ramsey sobre bloques de barreras.

3.1 Oscilación estable

Recordemos del libro [1, Def. III.5.4] que una función $f : S(X) \to \mathbb{R}$ se llama *oscilación estable* sobre el espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ si para todo subespacio de Banach de dimensión infinita Y de X y cada $\varepsilon > 0$ existe un subespacio de Banach de dimensión infinita Z de Y tal que

$$\sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in S(Z)\} < \varepsilon.$$

Esta noción permitió a los autores del artículo [4] observar la existencia de una propiedad oscilatoria dentro de las condiciones que conducen a la construcción de un modelo disperso (ver la Definición 4.1.1). De manera formal enunciamos dicha observación de la siguiente manera:

Definición 3.1.1. Sean $k \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$. Una sucesión normalizada $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ se denomina (k,ε)-*oscilación estable* si para cualesquiera $s = \{s(1),\ldots,s(k)\}$, $t = \{t(1),\ldots,t(k)\} \in [\mathbb{N}]^k$ tenemos que

$$\Big|\|\sum_{i=1}^{k} a_i x_{s(i)}\| - \|\sum_{i=1}^{k} a_i x_{t(i)}\|\Big| < \varepsilon,$$

para todo $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$.

La relevancia de la anterior propiedad es su relación con el Teorema de Ramsey, la cual será expuesta y demostrada posteriormente en esta sección. Para ello introducimos el espacio métrico que fue crucial en la demostración del Teorema de Brunel-Sucheston (Teorema 4.1.3) presentada en las notas de Th. Schlumprecht [29]:

Para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos el espacio métrico

$$\mathcal{M}_k = \{\rho : \mathbb{R}^k \to [0, \infty) : \rho \text{ es una norma y } \forall i = 1, \dots, k \ (\rho(e_i) = 1)\}$$

cuya métrica esta dada por

$$d_k(\rho_1, \rho_2) = \sup \left\{ \left| \rho_1(a) - \rho_2(a) \right| : a = (a_1, \dots, a_k) \in [-1, 1]^k \right\}.$$

para cada par de normas $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{M}_k$. Una afirmación errónea en esta prueba fue "para toda $k \in \mathbb{N}$, el espacio métrico $(\mathcal{M}_k, d_k)$ es compacto". A continuación se presenta un ejemplo simple que nos permite observar que estos espacios no son compactos.

Ejemplo 3.1.2 ([4]). Sea $(\mathcal{M}_2, d_2)$ el espacio métrico previamente definido. Consideremos la sucesión $(\| \cdot \|_{W_n})_{n \in \mathbb{N}}$ de normas de $\mathbb{R}^2$ definidas por lo conjuntos normantes $W_n = \{e_1^* - e_2^*, \frac{1}{n} e_2^*, \} \subseteq (\mathbb{R}^2)^*$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Primero demostremos que la sucesión $(\| \cdot \|_{W_n})_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy, en otras palabras, dado $\varepsilon > 0$ encontremos $\ell \in \mathbb{N}$ tal que

$$d_2(\| \cdot \|_{W_m}, \| \cdot \|_{W_n}) = \sup \left\{ \left| \|a\|_{W_m} - \|a\|_{W_n} \right| : \ a \in [-1, 1]^2 \right\} < \varepsilon$$

si $m, n \geq \ell$. Tomemos $a \in [-1, 1]^2$, sin pérdida de generalidad supongamos que $0 \leq \|a\|_{W_m} - \|a\|_{W_n}$ y observemos que:

1) Cuando $\|a\|_{W_m} = |\frac{1}{m} e_2^*(a)|$ y $\|a\|_{W_n} = |\frac{1}{n} e_2^*(a)|$ se tiene que

$$\begin{aligned} \|a\|_{W_m} - \|a\|_{W_n} &= |\frac{1}{m} e_2^*(a)| - |\frac{1}{n} e_2^*(a)| \\ &= \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right) |e_2^*(a)| \\ &\leq \frac{1}{m} - \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

2) Si $\|a\|_{W_m} = |(e_1^* - e_2^*)(a)|$, entonces $\|a\|_{W_n} = |(e_1^* - e_2^*)(a)|$ y se obtiene la igualdad

$$\|a\|_{W_m} - \|a\|_{W_n} = 0.$$

3) Cuando $\|a\|_{W_m} = |\frac{1}{m} e_2^*(a)|$ y $\|a\|_{W_n} = |(e_1^* - e_2^*)(a)|$ resulta que

$$\begin{aligned} \|a\|_{W_m} - \|a\|_{W_n} &= |\frac{1}{m} e_2^*(a)| - |(e_1^* - e_2^*)(a)| \\ &\leq |\frac{1}{m} e_2^*(a)| - |\frac{1}{n} e_2^*(a)| \\ &\leq \frac{1}{m} - \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Así $\left| \|a\|_{W_m} - \|a\|_{W_n} \right| \leq \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right|$, y como $a \in [-1, 1]^2$ es arbitrario se concluye que

$$d_2(\| \cdot \|_{W_m}, \| \cdot \|_{W_n}) \leq \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right| \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{n}.$$

Finalmente eligiendo $\ell \in \mathbb{N}$ tal que $\ell > \frac{2}{\varepsilon}$, se cumple que

$$d_2(\|\cdot\|_{W_m}, \|\cdot\|_{W_n}) \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \text{si } m, n \geq \ell.$$

De ahí que $(\|\cdot\|_{W_n})_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy y consecuentemente $(\|a\|_{W_n})_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$ para cada $a \in \mathbb{R}^2$. Definimos $\rho : \mathbb{R}^2 \to [0,\infty)$ como $\rho(a) = \lim_{n\to\infty} \|a\|_{W_n}$ para toda $a \in \mathbb{R}^2$. De hecho, para cada $a \in \mathbb{R}^2$ se tiene que

$$\rho(a) = \begin{cases} |(e_1^* - e_2^*)(a)| & \text{si } e_1^*(a) \neq e_2^*(a), \\ 0 & \text{si } e_1^*(a) = e_2^*(a). \end{cases}$$

Ahora probemos que $lim_{n\to\infty}\|\cdot\|_{W_n} = \rho$. Dado $a \in [-1,1]^2$ tenemos que:

1. Si $e_1^*(a) = e_2^*(a)$, entonces $\Big|\|a\|_{W_n} - \rho(a)\Big| = |\frac{1}{n}e_2^*(a)| = \frac{1}{n}|e_2^*(a)| \leq \frac{1}{n}$.
2. Si $e_1^*(a) \neq e_2^*(a)$, entonces

$$\|a\|_{W_n} - \rho(a) = \begin{cases} |(e_1^* - e_2^*)(a)| - |(e_1^* - e_2^*)(a)| = 0 & \text{si } \|a\|_{W_n} = |(e_1^* - e_2^*)(a)|, \\ |\frac{1}{n}e_2^*(a)| - |(e_1^* - e_2^*)(a)| \leq \frac{1}{n}|e_2^*(a)| \leq \frac{1}{n} & \text{si } \|a\|_{W_n} = |\frac{1}{n}e_2^*(a)|, \end{cases}$$

y

$$\|a\|_{W_n} - \rho(a) = \begin{cases} |(e_1^* - e_2^*)(a)| - |(e_1^* - e_2^*)(a)| = 0 & \text{si } \|a\|_{W_n} = |(e_1^* - e_2^*)(a)|, \\ |\frac{1}{n}e_2^*(a)| - |(e_1^* - e_2^*)(a)| \geq |(e_1^* - e_2^*)(a)| & \\ -|(e_1^* - e_2^*)(a)| = 0 & \text{si } \|a\|_{W_n} = |\frac{1}{n}e_2^*(a)|. \end{cases}$$

De lo anterior inferimos que $\Big|\|a\|_{W_n} - \rho(a)\Big| \leq \frac{1}{n}$ para toda $a \in [-1,1]^2$, es decir, $d_2(\|\cdot\|_{W_n}, \rho) \leq \frac{1}{n}$. Así, para cada $\varepsilon > 0$, al tomar $\ell \in \mathbb{N}$ tal que $\ell > \frac{1}{\varepsilon}$ obtenemos la desigualdad

$$d_2(\|\cdot\|_{W_n}, \rho) \leq \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \text{si } n \geq \ell.$$

Sin embargo, ρ no es una norma ya que $\rho((1,1)) = 0$. Por lo tanto, $(\mathcal{M}_2, d_2)$ no es compacto.

La afirmación se vuelve cierta si reemplazamos "norma" por "seminorma" de la siguiente manera

$$\mathcal{N}_k = \{\rho : \mathbb{R}^k \longrightarrow [0,\infty) : \rho \text{ es una seminorma y } \forall i = 1,\ldots,k\ (\rho(e_i) = 1)\}.$$

Enseguida verificaremos que $(\mathcal{N}_k, d_k)$ es un espacio métrico compacto, aunque este hecho es conocido daremos una prueba detallada. Para esto es importante observar que para cualquier $k \in \mathbb{N}$ y cada $\rho \in \mathcal{N}_k$ resulta que

$$\rho(a) \leq \sum_{i=1}^{k} \rho(a_i e_i) = \sum_{i=1}^{k} |a_i| =\leq \|a\|_{\ell_1},$$

para toda $a = \sum_{i=1}^{k} a_i e_i \in \mathbb{R}^k$.

Lema 3.1.3 ([3]). *Para cada número natural k, el espacio métrico $(\mathcal{N}_k, d_k)$ es compacto.*

Demostración. Sea $k \in \mathbb{N}$. Demostraremos que el espacio es completo y totalmente acotado (esto es equivalente a la compacidad en espacios métricos, una prueba de ello se puede consultar en [12]). Para ver que es completo tomamos una sucesión de Cauchy $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $(\mathcal{N}_k, d_k)$. De la definicíon de la métrica d_k podemos ver que las sucesiones $\{(\rho_n(x))_{n\in\mathbb{N}} : x \in \mathbb{R}^k\}$ son uniformemente Cauchy en el espacio de Banach $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Más aún, las sucesiones $\{(\rho_n(x))_{n\in\mathbb{N}} : x \in \mathbb{R}^k\}$ convergen uniformemente en $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Tomando el límite puntual podemos definir $\rho(x) := \lim_{n\to\infty} \rho_n(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}^k$. Es fácil ver que ρ es una seminorma en $\mathbb{R}^k$ y $\rho_n \to \rho$. Ahora probaremos que $(\mathcal{N}_k, d_k)$ es totalmente acotado. Fijemos $\varepsilon > 0$ y consideremos una $\frac{\varepsilon}{4}$-red B en $([-1,1]^k, \|\cdot\|_{\ell_1})$ y A una $\frac{\varepsilon}{4}$-red en $[0,k]$. Para cada función $f : B \to A$ definimos

$$C_f = \{\rho \in \mathcal{N}_k : \ |\rho(b) - f(b)| < \frac{\varepsilon}{4} \ \forall b \in B\}.$$

Afirmamos que $\rho_1, \rho_2 \in C_f$ satisfacen que $d_k(\rho_1, \rho_2) < \varepsilon$. Para ver esto tomamos $x \in [-1,1]^k$ y $b \in B$ tal que $\|x - b\|_{\ell_1} < \frac{\varepsilon}{4}$. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} |\rho_1(x) - \rho_2(x)| &\leq |\rho_1(x) - \rho_1(b)| + |\rho_1(b) - f(b)| \\ &\quad + |f(b) - \rho_2(b)| + |\rho_2(b) - \rho_2(x)| \\ &\leq |\rho_1(x - b)| + |\rho_2(b - x)| + \frac{2\varepsilon}{4} \\ &\leq 2\|x - b\|_{\ell_1} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Ahora para cada C_f no vacío fijamos $\rho_f \in C_f$. Veamos que $\{\rho_f \in \mathcal{N}_k : f : B \to A\}$ es una ε-red en $\mathcal{N}_k$. Ciertamente, dada ρ en $\mathcal{N}_k$ consideramos la función $f : B \to A$ definida por

$$f(b) = \min\{a \in A : |\rho(b) - a| < \frac{\varepsilon}{4}\}.$$

De donde se sigue que $\rho \in C_f$ y por ello se cumple que $d_k(\rho, \rho_f) < \varepsilon$. Esto prueba que $(\mathcal{N}_k, d_k)$ es totalmente acotado. Por lo tanto, $(\mathcal{N}_k, d_k)$ es compacto. □

Siendo más específicos, la prueba del Teorema de Brunel-Sucheston a la que hicimos referencia previamente, usa una consecuencia del Teorema de Ramsey para Analistas (Corolario 1.2.6) sobre ciertas coloraciones cuyo codominio está en el espacio $\mathcal{M}_k$, suponiendo de manera equivocada que es un espacio compacto. Pero esto se rescata simplemente usando el espacio métrico $\mathcal{N}_k$ que resulta ser compacto.

A continuación para cada $k \in \mathbb{N}$ utilizaremos el espacio métrico compacto $\mathcal{N}_k$ y una sucesión normalizada de un espacio de Banach para colorear la familia de bloques de k barreras arbitrarias.

Sean $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión normalizada de un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$, $k \in \mathbb{N}$ y $(\mathcal{B}_i)_{i=1}^k$ una sucesión de barreras en $\mathbb{N}$. Para cada $s \in FIN^*$ escogemos el vector

$\mathcal{X}(s) := \frac{\sum_{i\in s} x_i}{\|\sum_{i\in s} x_i\|}$, y definimos la coloración $\Psi_k : Bl(\mathcal{B}_1,\ldots,\mathcal{B}_k) \longrightarrow \mathcal{N}_k$ asociada a la sucesión $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, en el punto $S = \{s_1,\ldots,s_k\} \in Bl(\mathcal{B}_1,\ldots,\mathcal{B}_k)$, como

$$\Psi_k(S)(\sum_{i=1}^k a_i e_i) := \|\sum_{i=1}^k a_i \mathcal{X}(s_i)\|,$$

para todo $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$. Por comodidad cuando consideremos las coloraciones Ψ_k's quedará implícita la sucesión a la cual están asociadas. En un caso muy particular, cuando $(\mathcal{B}_1,\ldots,\mathcal{B}_k) = ([\mathbb{N}]^1,\ldots,[\mathbb{N}]^1)$, la coloración $\Psi_k : Bl^k([\mathbb{N}]^1) \longrightarrow \mathcal{N}_k$ se identificará con la función $\psi_k : [\mathbb{N}]^k \longrightarrow \mathcal{N}_k$ definida en el punto $s = \{s(1),\ldots,s(k)\} \in [\mathbb{N}]^k$ como

$$\psi_k(s)(\sum_{i=1}^k a_i e_i) := \|\sum_{i=1}^k a_i x_{s(i)}\|,$$

para todo $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$. Además, podemos ver que para cada $S \in Bl(\mathcal{B}_1,\ldots,\mathcal{B}_k)$ y cada $s \in [\mathbb{N}]^k$

$$\|\sum_{i=1}^k a_i \mathcal{X}(s_i)\| \leq \sum_{i=1}^k \|a_i \mathcal{X}(s_i)\| \leq \sum_{i=1}^k |a_i| = \|\sum_{i=1}^k a_i e_i\|_{\ell_1}$$
$$\text{y } \|\sum_{i=1}^k a_i x_{s(1)}\| \leq \sum_{i=1}^k \|a_i x_{s(i)}\| \leq \sum_{i=1}^k |a_i| = \|\sum_{i=1}^k a_i e_i\|_{\ell_1},$$

para todo $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$.

El siguiente lema garantiza que para cada $k \in \mathbb{N}$ y cada coloración Ψ_k asociada a una sucesión básica normalizada, existe una restricción que converge a una norma dentro del espacio compacto $\mathcal{N}_k$.

Lema 3.1.4. *Sea $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión básica normalizada en un espacio de Banach $(X,\|\cdot\|)$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ y cada $(\mathcal{B}_i)_{i=1}^k$ sucesión finita de barrera en $\mathbb{N}$, existen $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ y una norma $\rho_k : \mathbb{R}^k \longrightarrow [0,\infty)$ tal que*

$$\lim_{Bl(\mathcal{B}_1\restriction_M,\ldots,\mathcal{B}_k\restriction_M)\ni S\longrightarrow\infty} \Psi_k(S) = \rho_k,$$

esta convergencia se establece dentro del espacio métrico compacto $\mathcal{N}_k$.

Demostración. Sean $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión básica normalizada en el espacio de Banach $(X,\|\cdot\|)$ y C su constante de base. Fijemos $k \in \mathbb{N}$ y $(\mathcal{B}_i)_{i=1}^k$ una sucesión finita de barrera en $\mathbb{N}$. De acuerdo con el Corolario 2.2.4 podemos encontrar $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ y $\rho_k \in \mathcal{N}_k$ de tal modo que para cada $\varepsilon > 0$ existe $\ell \in M$ tal que

$$d_k(\Psi_k(S),\rho_k) = \sup\{\Big|\|\sum_{i=1}^k a_i \mathcal{X}(s_i)\| - \rho_k\Big(\sum_{i=1}^k a_i e_i\Big)\Big| : (a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k\} < \frac{\varepsilon}{C}$$

para toda $S = \{s_1,\ldots,s_k\} \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_{M/\ell},\ldots,\mathcal{B}_k \restriction_{M/\ell})$. Para finalizar con la demostración solo nos queda comprobar que ρ_k es una norma. Para esto supongamos que hallamos $(b_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k \setminus \{(0,\ldots,0)\}$ tal que $\rho_k\Big(\sum_{i=1}^k b_i e_i\Big) = 0$. Consideremos

$i_0 = \text{mín}\{i \leq k : b_i \neq 0\}$ y fijemos $0 < \varepsilon < |b_{i_0}|$. Por el Corolario 1.4.6 y la convergencia de la coloración, tenemos que

$$|b_{i_0}| = \| \sum_{i=1}^{i_0} b_i \mathcal{X}(s_i) \| \leq C \| \sum_{i=1}^{k} b_i \mathcal{X}(s_i) \| \leq C d_k(\Psi_k(S), \rho_k) < \varepsilon,$$

para cada $S \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_{M/\ell}, \dots, \mathcal{B}_k \restriction_{M/\ell})$, lo cual es imposible. De este modo concluimos que ρ_k es una norma. $\square$

Corolario 3.1.5. *Sea $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión básica normalizada de un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, existen $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ y una norma $\rho_k : \mathbb{R}^k \longrightarrow [0, \infty)$ tal que*

$$\lim_{s\in[M]^k\to\infty} \psi_k(s) = \rho_k,$$

esta convergencia se establece dentro del espacio métrico compacto $\mathcal{N}_k$.

Enseguida enunciamos uno de los resultados claves de esta sección, el cual aparece en el artículo [4]. Para comodidad del lector, incluimos una demostración completa y accesible.

Teorema 3.1.6. *Para cada número natural k mayor a 1, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *(Teorema de Ramsey para k) Para cualquier coloración $\varphi : [N]^k \longrightarrow \{1, \dots, q\}$, con $q \in \mathbb{N}$ y $N \in [\mathbb{N}]^\omega$, podemos encontrar $i \leq q$ y $M \in [N]^\omega$ tal que $[M]^k \subseteq \varphi^{-1}(i)$.*

(2) *(Teorema de Ramsey para Analistas respecto a k) Sean (X, d) un espacio métrico totalmente acotado y $N \in [\mathbb{N}]^\omega$. Para cada coloración $\varphi : [N]^k \longrightarrow X$ y cada $\varepsilon > 0$ existe $M \in [N]^\omega$ tal que*

$$d(\varphi(s), \varphi(t)) < \varepsilon,$$

si s, $t \in [M]^k$.

(3) *Para cada sucesión normalizada $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ y cualquier $\varepsilon > 0$, existe $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ tal que $(x_i)_{i\in M}$ es (k, ε)-oscilación estable.*

Demostración. La implicación (1) $\Rightarrow$ (2) es el Teorema 1.2.4.

(2) $\Rightarrow$ (3). Sea $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión normalizada de un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ consideramos la función $\psi_k : [\mathbb{N}]^k \longrightarrow \mathcal{N}_k$, asociada a la sucesión $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, definida anteriormente. Fijamos $\varepsilon > 0$. Aplicando el Teorema de Ramsey para Analistas, podemos encontrar $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ tal que

$$d_k(\psi_k(s), \psi_k(t)) < \varepsilon,$$

para todo s, $t \in [M]^k$. Es decir, si $s = \{s(1), \dots, s(k)\}$, $t = \{t(1), \dots, t(k)\} \in [M]^k$, entonces

$$\Big| \| \sum_{i=1}^{k} a_i x_{s(i)} \| - \| \sum_{i=1}^{k} a_i x_{t(i)} \| \Big| < \varepsilon,$$

para todo $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$. Por ende, la sucesión $(x_i)_{i\in M}$ es (k,ε)-oscilación estable.

(3) $\Rightarrow$ (1). Como se plantea en el Lema 1.2.3, basta probar el caso $q=2$. Dados $k \in \mathbb{N}$ y una coloración arbitraria $\varphi : [\mathbb{N}]^k \longrightarrow \{1,2\}$. Consideremos el espacio vectorial c_{00} y el conjunto normante

$$W = G_0 \cup \{\sum_{i\in s} e_i^* : s \in [\mathbb{N}]^k \text{ y } \varphi(s)=1\}.$$

Notemos que $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión normalizada bajo la norma generada por W. Además, es fácil ver que si $s \in [\mathbb{N}]^k$ y $\varphi(s)=1$, entonces $\|\sum_{i\in s} e_i\|_W = k$. Más aún, probemos que $\|\sum_{i\in t} e_i\|_W \le k-1$ para cada $t \in [\mathbb{N}]^k$ tal que $\varphi(t)=2$. Para ello supongamos que $t \in [\mathbb{N}]^k$ y $\varphi(t)=1$. Fijemos $f \in W$. Si $f \in G_0$, es claro que $f(\sum_{i\in t} e_i) \le 1$. Si $f \in W \setminus G_0$, entonces existe $u \in [\mathbb{N}]^k$ tal que $\varphi(u)=1$ y $f=\sum_{i\in u} e_i^*$. Como $t \neq u$ y $|t|=|u|$, existe $i_0 \in t\backslash u$. Así, tenemos que

$$f(\sum_{i\in t} e_i) = f(\sum_{i\in t\backslash\{i_0\}} e_i) \le k-1.$$

Por lo tanto, $\|\sum_{i\in t} e_i\|_W \le k-1$ siempre que $t \in [\mathbb{N}]^k$ y $\varphi(t)=2$. Aplicando la hipótesis a la sucesión $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ y a $\varepsilon=\frac{1}{2}$, podemos encontrar $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ de tal modo que:

$$\Big|\|\sum_{i\in s} e_i\|_W - \|\sum_{i\in t} e_i\|_W\Big| < \frac{1}{2},$$

para cada $s,t \in [M]^k$. Supongamos que existen $s,t \in [M]^k$ tal que $\varphi(s)=1$ y $\varphi(t)=2$. Entonces

$$\begin{aligned} \Big|\|\sum_{i\in s} e_i\|_W - \|\sum_{i\in t} e_i\|_W\Big| &< \frac{1}{2} \\ k - \|\sum_{i\in t} e_i\|_W &< \frac{1}{2} \\ k - \frac{1}{2} &< \|\sum_{i\in t} e_i\|_W. \end{aligned}$$

Lo cual es una contradicción e implica que $[M]^k \subseteq \varphi^{-1}(j)$ para algún $j \le 2$. □

La noción de (k,ε)-oscilación estable nos conduce a una propiedad de asintoticidad, la cual se formaliza en la siguiente definición.

Definición 3.1.7. Dado $k \in \mathbb{N}$, una sucesión normalizada $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ se dice $k-$*oscilación asintótica estable* si existe $\varepsilon_i \searrow 0$ tal que para todo $s=\{s(1),\dots,s(k)\}$, $t=\{t(1),\dots,t(k)\} \in [\mathbb{N}]^k$ se cumple que

$$\Big|\|\sum_{i=1}^k a_i x_{s(i)}\| - \|\sum_{i=1}^k a_i x_{t(i)}\|\Big| < \varepsilon_{\min\{s(1),t(1)\}},$$

para cada $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$.

A continuación enunciamos una condición que es equivalente a la propiedad de $k-$estabilidad oscilatoria asintótica y facilita su uso en algunos casos. Dicho resultado será generalizado en el Lema 3.2.6, proporcionando a la vez una demostración.

Lema 3.1.8. *Sea k un número natural. Una sucesión normalizada $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ es k-oscilación asintótica estable si y solo si para cada $\varepsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para cualesquiera $s = \{s(1), \ldots, s(k)\}$, $t = \{t(1), \ldots, t(k)\} \in [\mathbb{N}/n]^k$ se satisface que*

$$\Big| \| \sum_{i=1}^{k} a_i x_{s(i)} \| - \| \sum_{i=1}^{k} a_i x_{t(i)} \| \Big| < \varepsilon,$$

para todo $(a_i)_{i=1}^k \in [-1, 1]^k$.

Esta nueva propiedad nos proporciona una versión equivalente al Teorema 3.1.6.

Corolario 3.1.9. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes, para cada $k \in \mathbb{N}/1$:*

(1) *El Teorema de Ramsey para Analistas respecto a k.*

(2) *Sea $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión normalizada de un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$. Para toda $\varepsilon_i \searrow 0$ y para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $M = \{m_i : i \in \mathbb{N}\} \in [\mathbb{N}]^\omega$ tal que todo $s = \{s(1), \ldots, s(k)\}$, $t = \{t(1), \ldots, t(k)\} \in [M]^k$ satisface que*

$$\Big| \| \sum_{i=1}^{k} a_i x_{s(i)} \| - \| \sum_{i=1}^{k} a_i x_{t(i)} \| \Big| < \varepsilon_\ell,$$

donde $\text{mín}\{s(1), t(1)\} = m_\ell$, para cada $(a_i)_{i=1}^k \in [-1, 1]^k$.

(3) *Para cada sucesión normalizada $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ y cualquier $k \in \mathbb{N}$ existe $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ tal que $(x_i)_{i\in M}$ es $k-$oscilación asintóticamente estable.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Sean $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión normalizada de un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ y $k \in \mathbb{N}$. Consideremos la coloración $\psi_k : [\mathbb{N}]^k \to \mathcal{N}_k$ asociada a la sucesión $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Por el Corolario 1.2.5, para cada $\varepsilon_i \searrow 0$, obtenemos un conjunto $M = \{m_i : i \in \mathbb{N}\}$ tal que para cualquier par $s = \{s(1), \ldots, s(k)\}$, $t = \{t(1), \ldots, t(k)\} \in [M]^k$ la desigualdad

$$\Big| \| \sum_{i=1}^{k} a_i x_{s(i)} \| - \| \sum_{i=1}^{k} a_i x_{t(i)} \| \Big| \leq d_k(\varphi(s), \varphi(t)) < \varepsilon_\ell,$$

donde $\text{mín}\{s(1), t(1)\} = m_\ell$, es cierta para cada $(a_i)_{i=1}^k \in [-1, 1]^k$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Esta implicación es inmediata.

(3) $\Rightarrow$ (1). Sea $k \in \mathbb{N}$ y $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión normalizada en un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$. Por el Teorema 3.1.6 basta demostrar que para cada $\varepsilon > 0$ existe $M_\varepsilon \in [\mathbb{N}]^\omega$ tal que $(x_i)_{i\in M_\varepsilon}$ es $(k, \varepsilon)-$oscilación estable. Por hipótesis existe $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ tal que $(x_i)_{i\in M}$ es $k-$oscilación estable. Gracias al Lema 3.1.8 sabemos que para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que si $s, t \in [M/n_\varepsilon]^k$, entonces

$$\Big| \| \sum_{i=1}^{k} a_i x_{s(i)} \| - \| \sum_{i=1}^{k} a_i x_{t(i)} \| \Big| < \varepsilon$$

para todo $(a_i)_{i=1}^k \in [-1, 1]^k$. Para cada $\varepsilon > 0$ pongamos $M_\varepsilon := M/n_\varepsilon$, entonces podemos concluir que $(x_i)_{i\in M_\varepsilon}$ es $(k, \varepsilon)-$oscilación estable. $\square$

3.2 Oscilación bloque estable por barreras

En las nociones de “$(k, \varepsilon)-$oscilación estable” y “$k-$oscilación asintótica estable” está presente la barrera $[\mathbb{N}]^k$, para cualquier $k \in \mathbb{N}$, y es importante que sus elementos estén enumerados de manera creciente. Esto motivó algunos resultados importantes del trabajo [16] que están presentes en esta sección, entre ellos una generalización de la oscilación utilizando una familia de bloques de una cantidad finita de barreras como la formalizaremos a continuación.

Notación: Sea $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ y para cada $s \in FIN^*$ definimos el vector bloque

$$\mathcal{X}(s) = \frac{\sum_{i\in s} x_i}{\|\sum_{i\in s} x_i\|}.$$

Definición 3.2.1. Dadas una sucesión finita de barreras $(\mathcal{B}_i)_{i=1}^k$ en $\mathbb{N}$ y una constante $\varepsilon > 0$. Una sucesión normalizada $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ se dice $((\mathcal{B}_i)_{i=1}^k, \varepsilon)-$*oscilación bloque estable* si para todo $S = \{s_1, \ldots, s_k\}$, $T = \{t_1, \ldots, t_k\} \in Bl(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_k)$ se cumple que

$$\Big|\|\sum_{i=1}^k a_i\mathcal{X}(s_i)\| - \|\sum_{i=1}^k a_i\mathcal{X}(t_i)\|\Big| < \varepsilon,$$

para todo $(a_i)_{i=1}^k \in [-1, 1]^k$. Particularmente, la sucesión $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ se denomina $(\mathcal{B}, k, \varepsilon)-$*oscilación bloque estable* si es $((\mathcal{B}, \ldots, \mathcal{B}), \varepsilon)-$oscilación bloque estable.

Observación 3.2.2. Si una sucesión $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es $([\mathbb{N}]^1, k, \varepsilon)-$oscilación bloque estable entonces es $(k, \varepsilon)-$oscilación estable.

Nuestra principal contribución en esta tesis son las siguientes condiciones equivalentes al Teorema de Ramsey, que muestran una conexión de este con el Análisis Funcional.

Teorema 3.2.3. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) *Teorema de Ramsey.*

(2) *Teorema de Ramsey sobre Barreras.*

(3) *Sean $k \in \mathbb{N}/1$ y una sucesión de barreras $(\mathcal{B}_i)_{i=1}^k$ en $\mathbb{N}$. Para cualquier coloración $\varphi : Bl(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_k) \longrightarrow \{1, \ldots, q\}$, con $q \in \mathbb{N}$, existen $i \leq q$ y $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ tales que $Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_M, \ldots, \mathcal{B}_k \restriction_M) \subseteq \varphi^{-1}(i)$.*

(4) *Sean (X, d) un espacio métrico totalmente acotado, $k \in \mathbb{N}/1$ y $(\mathcal{B}_i)_{i=1}^k$ una sucesión de barreras en $\mathbb{N}$. Para toda coloración $\varphi : Bl(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_k) \to X$ y cada $\varepsilon > 0$ encontramos $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ tal que $d(\varphi(S), \varphi(T)) < \varepsilon$ siempre que S, $T \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_M, \ldots, \mathcal{B}_k \restriction_M)$.*

(5) *Sean $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión normalizada de un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ y $k \in \mathbb{N}/1$. Para cada sucesión de barreras $(\mathcal{B}_i)_{i=1}^k$ en $\mathbb{N}$ y cada $\varepsilon > 0$, podemos hallar $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ tal que $(x_i)_{i\in M}$ es $((\mathcal{B}_i \restriction_M)_{i=1}^k, \varepsilon)-$oscilación bloque estable.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Procedemos por inducción sobre el orden de la barrera. Sea $\mathcal{B}$ una barrera en $N \in [\mathbb{N}]^\omega$ con orden ω^k para algún $k \in \mathbb{N}$. Tomemos una coloración arbitraria $\varphi : \mathcal{B} \longrightarrow \{1, \ldots, q\}$ donde $q \in \mathbb{N}$. Por el Corolario 2.1.10 y el Teorema 2.1.12, existe $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $[N/n]^k \subseteq \mathcal{B}$. Consideremos la restricción $\varphi \restriction_{\mathcal{B}\restriction_{N/n}}: \mathcal{B} \restriction_{N/n} \to \{1, \ldots, q\}$, donde $\mathcal{B} \restriction_{N/n} = [N/n]^k$. Gracias al Teorema de Ramsey (Teorema 1.2.2) podemos hallar $i \leq q$ y $M \in [N/n]^\omega$ tal que $[M]^k \subseteq (\varphi|_{\mathcal{B}\restriction_{N/n}})^{-1}(i)$. Lo cual implica que $\mathcal{B} \restriction_M \subseteq \varphi^{-1}(i)$.

Ahora, supongamos que para toda barrera $\mathcal{B}$ en $N \in [\mathbb{N}]^\omega$ con $ord(\mathcal{B}) < \alpha$ tal que $\omega^\omega \leq \alpha$ y cada coloración finita $\varphi : \mathcal{B} \longrightarrow \{1, \ldots, q\}$ existen $i \leq q$ y $M \in [N]^\omega$ tal que $\mathcal{B} \restriction_M \subseteq \varphi^{-1}(i)$.

Sean $\mathcal{B}$ una barrera en $N \in [\mathbb{N}]^\omega$ de orden $\alpha \geq \omega^\omega$ y $\varphi : \mathcal{B} \to \{1, \ldots, q\}$ una coloración finita arbitraria. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\mathcal{B}_{\{n\}} \neq \emptyset$ para toda $n \in N$. Entonces definimos, para cada $n \in N$,

$$\varphi_n : \mathcal{B}_{\{n\}} \to \{1, \ldots, q\} \text{ como } \varphi_n(s) = \varphi(\{n\}^\frown s) \text{ para todo } s \in \mathcal{B}_{\{n\}}.$$

Notemos que, por el Lema 2.1.8, $ord(\mathcal{B}_{\{n\}} \restriction M) < \alpha$ para cualquier $n \in N$ y toda $M \in [N]^\omega$. Pongamos $m_1 := \min(N)$. Aplicando la hipótesis de inducción a φ_{m_1} resulta que existen $i_1 \leq q$ y $M_1 \in [N/m_1]^\omega$ tal que $\varphi_{m_1}(\mathcal{B}_{\{m_1\}} \restriction_{M_1}) = \{i_1\}$. Tomamos $m_2 := \min(M_1)$ y consideremos la restricción $\varphi_{m_2} \restriction_{\mathcal{B}_{\{m_2\}}\restriction_{M_1}}$. Nuevamente, por la hipótesis de inducción, encontramos $i_2 \leq q$ y $M_2 \in [M_1/m_2]^\omega$ tal que $\varphi_{m_2}(\mathcal{B}_{\{m_2\}} \restriction_{M_2}) = \{i_2\}$. De manera recursiva obtenemos $i_j \leq q$ y $M_j \in [M_{j-1}/m_j]^\omega$ tal que $\varphi_{m_j}(\mathcal{B}_{\{m_j\}} \restriction_{M_j}) = \{i_j\}$, donde $m_j := \min(M_{j-1})$, para cada $j \in \mathbb{N}$. Definimos la coloración finita $\phi : [\mathbb{N}]^1 \to \{1, \ldots, q\}$ por la regla

$$\phi(\{j\}) = i_j, \text{ para cada } \{j\} \in [\mathbb{N}]^1.$$

Por lo expuesto en la sección de barreras sabemos que $ord([\mathbb{N}]^1) = \omega$. En consecuencia podemos hallar $i \leq q$ y $L \in [\mathbb{N}]^\omega$ tal que $\phi([L]^1) = \{i\}$. Consideremos el conjunto $M = \{m_j : j \in L\}$. Dado $s \in \mathcal{B} \restriction M$ arbitrario, tenemos que $s = \{m_{j_1}, \ldots, m_{j_{\ell_s}}\}$ con $|s| = \ell_s$. Recordemos que $m_{j_2} = \min(M_{j_2-1})$ y $M_{j_2-1} \subseteq M_{j_1}$ ya que $j_1 \leq j_2 - 1$. De ahí que $\{m_{j_2}, \ldots, m_{j_{\ell_s}}\}$ pertenezca a $\mathcal{B}_{\{m_{j_1}\}} \restriction_{M_{j_1}}$. Por lo tanto, $\varphi(s) = \varphi_{m_{j_1}}(\{m_{j_2}, \ldots, m_{j_{\ell_s}}\}) = i$. Debido a que $s \in \mathcal{B} \restriction M$ es arbitrario se concluye que $\varphi(s) = i$ para todo $s \in \mathcal{B} \restriction M$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Sean $k \in \mathbb{N}/1$ y $(\mathcal{B}_i)_{i=1}^k$ una sucesión de barreras en $\mathbb{N}$. Definimos la función $f : Bl(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_k) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^k \mathcal{B}_i$ como $f(\{s_1, \ldots, s_k\}) = s_1{}^\frown s_2{}^\frown \cdots {}^\frown s_k$ para todo $\{s_1, \ldots, s_k\} \in Bl(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_k)$. Es fácil ver que f es una biyección. Lo cual garantiza la existencia de su inversa f^{-1}.

Por otra parte, sea $\varphi : Bl(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_k) \longrightarrow \{1, \ldots, q\}$ una coloración finita y consideremos la coloración $\varphi \circ f^{-1} : \bigoplus_{i=1}^k \mathcal{B}_i \longrightarrow \{1, \ldots, q\}$. Como consecuencia del Lema 2.1.6 y la hipótesis, existen $i \leq q$ y $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ tal que

$$(\bigoplus_{i=1}^k \mathcal{B}_i) \restriction_M \subseteq (\varphi \circ f^{-1})^{-1}(i).$$

Como $(\bigoplus_{i=1}^k \mathcal{B}_i) \restriction_M = \bigoplus_{i=1}^k (\mathcal{B}_i \restriction_M)$ y f es una biyección, se tiene que $Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_M, \ldots, \mathcal{B}_k \restriction_M)$ es monocromático con color i bajo φ.

(3) $\Rightarrow$ (4). Consultar la prueba del Teorema 2.2.1.

(4) $\Rightarrow$ (5). Sean $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión normalizada en un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ y $(\mathcal{B}_i)_{i=1}^k$ una sucesión finita de barreras en $\mathbb{N}$. Esta implicación se deduce directamente de aplicar el cuarto inciso a la función $\Psi_k : Bl(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_k) \longrightarrow \mathcal{N}_k$ asociada a la sucesión $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

(5) $\Rightarrow$ (1). Sean k un número natural, $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión normalizada en un espacio de Banach X y $\varepsilon > 0$. Por el Teorema 3.1.6 es suficiente demostrar que la sucesión $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión (k, ε)-oscilación estable. Consideremos la sucesión finita de barreras $([\mathbb{N}]^1, \ldots, [\mathbb{N}]^1)$ de tamaño k. Aplicando el quinto inciso encontramos un conjunto $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ tal que $(x_i)_{i\in M}$ es $([M]^1, k, \varepsilon)$-oscilación bloque estable. Por lo anterior y la Observación 3.2.2, se determina que $(x_i)_{i\in M}$ es una subsucesión (k, ε)-oscilación estable. □

En la siguiente sección veremos la importancia de la noción de asintoticidad de una oscilación estable en la obtención de un modelo disperso, es por esto que a continuación introducimos una condición de asintoticidad para oscilaciones bloque estable.

Teorema 3.2.4. *Sea $(\mathcal{B}_i)_{i=1}^k$ una sucesión de barreras en $\mathbb{N}$, con $k \in \mathbb{N}$. Para cada sucesión normalizada $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$, las propiedades siguientes son equivalentes:*

(1) *Para cada $\varepsilon > 0$ existe $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ tal que $(x_i)_{i\in M}$ es $((\mathcal{B}_i \restriction_M)_{i=1}^k, \varepsilon)-$oscilación bloque estable.*

(2) *Para cada $\varepsilon_i \searrow 0$ existe $M = \{m_i : i \in \mathbb{N}\} \in [\mathbb{N}]^\omega$ tal que para cualesquiera $S = \{s_1, \ldots, s_k\}$, $T = \{t_1, \ldots, t_k\} \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_M, \ldots, \mathcal{B}_k \restriction_M)$ se satisface que*

$$\Big| \|\sum_{i=1}^k a_i \mathcal{X}(s_i)\| - \|\sum_{i=1}^k a_i \mathcal{X}(t_i)\| \Big| < \varepsilon_\ell,$$

donde $\min(s_1 \cup t_1) = m_\ell$, *para cada* $(a_i)_{i=1}^k \in [-1, 1]^k$.

(3) *Existen $\varepsilon_i \searrow 0$ y $M = \{m_i : i \in \mathbb{N}\} \in [\mathbb{N}]^\omega$ tales que para todo $S = \{s_1, \ldots, s_k\}$, $T = \{t_1, \ldots, t_k\} \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_M, \ldots, \mathcal{B}_k \restriction_M)$ resulta que*

$$\Big| \|\sum_{i=1}^k a_i \mathcal{X}(s_i)\| - \|\sum_{i=1}^k a_i \mathcal{X}(t_i)\| \Big| < \varepsilon_\ell$$

siempre que $\min(s_1 \cup t_1) = m_\ell$, *para cada* $(a_i)_{i=1}^k \in [-1, 1]^k$.

Demostración. Sean $k \in \mathbb{N}$, $(\mathcal{B}_i)_{i=1}^k$ una sucesión de barreras en $\mathbb{N}$ y $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión normalizada en un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$.

(1) $\Rightarrow$ (2). Consideremos una sucesión $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de números reales, decreciente y que converja a cero. De manera inductiva podemos encontrar una sucesión $(M_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de conjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ y una sucesión $(m_j)_{j\in\mathbb{N}}$ estrictamente creciente en $\mathbb{N}$ que poseen las siguientes cualidades:

1. $m_j := \min(M_j)$ para toda $j \in \mathbb{N}$,
2. $M_1 \in [\mathbb{N}]^\omega$ y $M_{j+1} \in [M_j/m_j]^\omega \subseteq [M_j]^\omega$ para cada $j \in \mathbb{N}$ y,

3. para cualquier $j \in \mathbb{N}$, la subsucesión $(x_i)_{i\in M_j}$ es $((\mathcal{B}_i \restriction_{M_j})_{i=1}^k, \varepsilon_j)-$oscilación bloque estable.

En efecto, supongamos que hemos hallado una sucesión finita $(M_j)_{j=1}^n$ de conjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ y una sucesión finita $(m_j)_{j=1}^n$ estrictamente creciente en $\mathbb{N}$ que obedece las condiciones antes enlistadas. Enseguida consideremos la sucesión normalizada $(x_i)_{i\in M_n/m_n}$ y ε_{n+1}. Usando el primer inciso encontramos un conjunto $M_{n+1} \in [M_n/m_n]^\omega$ tal que $(x_i)_{i\in M_{n+1}}$ es $((\mathcal{B}_i \restriction_{M_{n+1}})_{i=1}^k, \varepsilon_{n+1})-$oscilación bloque estable, esto es, que cada $S = \{s_1, \dots, s_k\}$, $T = \{t_1, \dots, t_k\} \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_{M_{n+1}}, \dots, \mathcal{B}_k \restriction_{M_{n+1}})$ cumple que

$$\Big| \| \sum_{i=1}^k a_i \mathcal{X}(s_i) \| - \| \sum_{i=1}^k a_i \mathcal{X}(t_i) \| \Big| < \varepsilon_{n+1},$$

para cada $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$.

Proponemos a $M := \{m_j : j \in \mathbb{N}\}$ como el conjunto deseado. Efectivamente, observemos que para todo $S = \{s_1, \dots, s_k\}$, $T = \{t_1, \dots, t_k\} \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_M, \dots, \mathcal{B}_k \restriction_M)$ se tiene que

$$\Big| \| \sum_{i=1}^k a_i \mathcal{X}(s_i) \| - \| \sum_{i=1}^k a_i \mathcal{X}(t_i) \| \Big| < \varepsilon_\ell,$$

siempre que $\min(s_1 \cup t_1) = m_\ell$, para cada $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$, ya que $S, T \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_{M_\ell}, \dots, \mathcal{B}_k \restriction_{M_\ell})$ y $(x_i)_{i\in M_\ell}$ es $((\mathcal{B}_i \restriction_{M_\ell})_{i=1}^k, \varepsilon_\ell)-$oscilación bloque estable.

(2) $\Rightarrow$ (3) Esta implicación es inmediata.

(3) $\Rightarrow$ (1). Por la afirmación del tercer inciso existen $\varepsilon_i \searrow 0$ y $N = \{n_j : j \in \mathbb{N}\} \in [\mathbb{N}]^\omega$ tales que para todo $S = \{s_1, \dots, s_k\}$, $T = \{t_1, \dots, t_k\} \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_N, \dots, \mathcal{B}_k \restriction_N)$ resulta que

$$\Big| \| \sum_{i=1}^k a_i \mathcal{X}(s_i) \| - \| \sum_{i=1}^k a_i \mathcal{X}(t_i) \| \Big| < \varepsilon_\ell \text{ donde } \min(s_1 \cup t_1) = n_\ell \text{ para algún } \ell \in \mathbb{N},$$

para cada $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$. Como la sucesión $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es estrictamente decreciente y converge a 0, entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\ell \in \mathbb{N}$ que satisface $\varepsilon_\ell \leq \varepsilon$. En consecuencia, al tomar $M = N/n_{\ell-1}$ obtenemos que la subsucesión $(x_i)_{i\in M}$ es $((\mathcal{B}_i \restriction_M)_{i=1}^k, \varepsilon)-$oscilación bloque estable. $\square$

El teorema anterior induce la siguiente propiedad de estabilidad oscilatoria asintótica por bloques para una sucesión normalizada en un espacio de Banach.

Definición 3.2.5. Sean k un número natural y $(\mathcal{B}_i)_{i=1}^k$ una sucesión de barreras en $\mathbb{N}$. Una sucesión normalizada $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$, se dice $(\mathcal{B}_i)_{i=1}^k-$*oscilación bloque asintótica estable* si existe $\varepsilon_i \searrow 0$ tal que para todo $S = \{s_1, \dots, s_k\}$, $T = \{t_1, \dots, t_k\} \in Bl(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_k)$ se cumple la condición

$$\Big| \| \sum_{i=1}^k a_i \mathcal{X}(s_i) \| - \| \sum_{i=1}^k a_i \mathcal{X}(t_i) \| \Big| < \varepsilon_{\min(s_1 \cup t_1)}$$

para cada $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$.

Una generalización del Lema 3.1.8 se presenta a continuación.

Lema 3.2.6. *Sean $k \in \mathbb{N}$ y $(\mathcal{B}_i)_{i=1}^k$ una sucesión de barreras en $\mathbb{N}$. Una sucesión normalizada $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ es $(\mathcal{B}_i)_{i=1}^k-$oscilación bloque asintótica estable si y solo si para cada $\varepsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que si $S = \{s_1, \ldots, s_k\}$, $T = \{t_1, \ldots, t_k\} \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_{\mathbb{N}/n}, \ldots, \mathcal{B}_k \restriction_{\mathbb{N}/n})$, entonces*

$$\Big|\|\sum_{i=1}^k a_i \mathcal{X}(s_i)\| - \|\sum_{i=1}^k a_i \mathcal{X}(t_i)\|\Big| < \varepsilon$$

para todo $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$.

Demostración. Sean $k \in \mathbb{N}$ y $(\mathcal{B}_i)_{i=1}^k$ una sucesión de barreras en $\mathbb{N}$. Consideremos $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión normalizada en un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$.

($\Rightarrow$) Supongamos que $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es $(\mathcal{B}_i)_{i=1}^k-$oscilación bloque asintótica estable, es decir, existe una sucesión $\varepsilon_i \searrow 0$ tal que para todo $S = \{s_1, \ldots, s_k\}$, $T = \{t_1, \ldots, t_k\} \in Bl(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_k)$ se tiene que

$$\Big|\|\sum_{i=1}^k a_i \mathcal{X}(s_i)\| - \|\sum_{i=1}^k a_i \mathcal{X}(t_i)\|\Big| < \varepsilon_{\text{mín}(s_1\cup t_1)},$$

para cada $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$. Dado $\varepsilon > 0$, como $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es estrictamente decreciente y converge a 0, existe $n \in \mathbb{N}$ para el cual $\varepsilon_{n+1} \leq \varepsilon$. Observemos que si $S, T \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_{\mathbb{N}/n}, \ldots, \mathcal{B}_k \restriction_{\mathbb{N}/n})$, entonces

$$\Big|\|\sum_{i=1}^k a_i \mathcal{X}(s_i)\| - \|\sum_{i=1}^k a_i \mathcal{X}(t_i)\|\Big| < \varepsilon_{\text{mín}(s_1\cup t_1)} \leq \varepsilon_{n+1} \leq \varepsilon$$

para cada $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$.

($\Leftarrow$) Para el recíproco, supongamos que para cada $\varepsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que cualesquiera $S = \{s_1, \ldots, s_k\}$, $T = \{t_1, \ldots, t_k\} \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_{\mathbb{N}/n}, \ldots, \mathcal{B}_k \restriction_{\mathbb{N}/n})$ cumplen que

$$\Big|\|\sum_{i=1}^k a_i \mathcal{X}(s_i)\| - \|\sum_{i=1}^k a_i \mathcal{X}(t_i)\|\Big| < \varepsilon,$$

para todo $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$. Notemos que si $S, T \in Bl(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_k)$, entonces para cada $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$ se tiene que

$$\begin{aligned}\Big|\|\sum_{i=1}^k a_i \mathcal{X}(s_i)\| - \|\sum_{i=1}^k a_i \mathcal{X}(t_i)\|\Big| &\leq \sum_{i=1}^k |a_i|\|\mathcal{X}(s_i)\| + \sum_{i=1}^k |a_i|\|\mathcal{X}(t_i)\| \\ &= \sum_{i=1}^k |a_i| + \sum_{i=1}^k |a_i| \leq 2k.\end{aligned}$$

Por la hipótesis, hallamos $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que para S, $T \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_{\mathbb{N}/n_1}, \ldots, \mathcal{B}_k \restriction_{\mathbb{N}/n_1})$ se cumple la desigualdad

$$\Big|\|\sum_{i=1}^k a_i \mathcal{X}(s_i)\| - \|\sum_{i=1}^k a_i \mathcal{X}(t_i)\|\Big| < \frac{1}{2}$$

para todo $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$. Para cada $i \leq n_1$ definimos

$$\varepsilon_i := 2k + \frac{n_1 + 1 - i}{2^{n_1}}.$$

Por construcción $(\varepsilon_i)_{i \leq n_1}$ es estrictamente decreciente, $\varepsilon_i > 2k$ para todo $i \leq n_1$ y $\varepsilon_{n_1} = 2k + \frac{1}{2^{n_1}}$. Aplicando de forma recursiva la hipótesis, para cada $j \in \mathbb{N}/1$, se puede encontrar $n_j \in \mathbb{N}$ con $n_j > n_{j-1}$ tal que si $S, T \in Bl(\mathcal{B}_1 \upharpoonright_{\mathbb{N}/n_j}, \ldots, \mathcal{B}_k \upharpoonright_{\mathbb{N}/n_j})$, entonces

$$\Big| \| \sum_{i=1}^k a_i \mathcal{X}(s_i) \| - \| \sum_{i=1}^k a_i \mathcal{X}(t_i) \| \Big| < \frac{1}{2^j}$$

para todo $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$. Después, tomando $d_j := \text{máx}\{j, n_j - n_{j-1}\}$ para cada $j \in \mathbb{N}/1$, definimos para cada $i \in \mathbb{N}$, que cumpla la restricción $n_{j-1} < i \leq n_j$, el número real positivo

$$\varepsilon_i := \frac{1}{2^{j-1}} + \frac{n_j + 1 - i}{2^{d_j}}.$$

Se obtiene que $(\varepsilon_i)_{i \leq n_j}$ es estrictamente decreciente, $\varepsilon_i > \frac{1}{2^{j-1}}$ para todo $i \leq n_j$ y $\varepsilon_{n_j} = \frac{1}{2^{j-1}} + \frac{1}{2^{d_j}}$. Más aún, la sucesión $(\varepsilon_i)_{i \in \mathbb{N}}$ es estrictamente decreciente y converge a cero.

Ahora, consideremos $S, T \in Bl(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_k)$. Si el $\text{mín}(s_1 \cup t_1) \leq n_1$, entonces resulta que

$$\Big| \| \sum_{i=1}^k a_i \mathcal{X}(s_i) \| - \| \sum_{i=1}^k a_i \mathcal{X}(t_i) \| \Big| < 2k < \varepsilon_{\text{mín}(s_1 \cup t_1)}$$

para cualquier $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$. En el caso contrario, como $(n_j)_{j \in \mathbb{N}}$ es estrictamente creciente, existe $\ell \in \mathbb{N}$ tal que $\ell = \text{máx}\{j \in \mathbb{N} : n_j < \text{mín}(s_1 \cup t_1)\}$ y $\text{mín}(s_1 \cup t_1) \leq n_{\ell+1}$. Lo cual implica que S, $T \in Bl(\mathcal{B}_1 \upharpoonright_{\mathbb{N}/n_\ell}, \ldots, \mathcal{B}_k \upharpoonright_{\mathbb{N}/n_\ell})$ y

$$\Big| \| \sum_{i=1}^k a_i \mathcal{X}(s_i) \| - \| \sum_{i=1}^k a_i \mathcal{X}(t_i) \| \Big| < \frac{1}{2^\ell} < \varepsilon_{\text{mín}(s_1 \cup t_1)},$$

para cada $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$. Por lo tanto, $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ es $(\mathcal{B}_i)_{i=1}^k-$oscilación bloque asintótica estable. □

La siguiente definición extiende el concepto de oscilación bloque asintótica estable a través de una sucesión infinita de barreras en $\mathbb{N}$.

Definición 3.2.7. Sea $(\mathcal{B}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión de barreras en $\mathbb{N}$. Una sucesión normalizada $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de un espacio de Banach $(X, \| \cdot \|)$ se dice $(\mathcal{B}_i)_{i \in \mathbb{N}}-$*oscilación bloque asintótica estable* si existe una sucesión $\varepsilon_i \searrow 0$ tal que para cada $k \in \mathbb{N}$ y cualesquiera $S = \{s_1, \ldots, s_k\}$, $T = \{t_1, \ldots, t_k\} \in Bl(\mathcal{B}_1 \upharpoonright_{\mathbb{N}/(k-1)}, \ldots, \mathcal{B}_k \upharpoonright_{\mathbb{N}/(k-1)})$ se cumple que

$$\Big| \| \sum_{j=1}^k a_j \mathcal{X}(s_j) \| - \| \sum_{j=1}^k a_j \mathcal{X}(t_j) \| \Big| < \varepsilon_{\text{mín}(s_1 \cup t_1)},$$

para toda $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$.

El lector conocedor del Teorema de Brunel-Sucheston (Teorema 4.1.3) puede adivinar hacia dónde vamos, a una generalización de dicho teorema. Para establecer esta generalización necesitamos el siguiente lema y posteriormente enunciamos el corolario que nos permite demostrar el Teorema de Brunel Sucheston empleando la noción de oscilación estable. Cabe mencionar que por si solo este lema es importante ya que nos asegura la existencia de sucesiones con la propiedad de estabilidad oscilatoria asintótica por bloques respecto a una sucesión infinita de barreras tal y como está enunciado en la definición anterior.

Lema 3.2.8. *Sea $(\mathcal{B}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de barreras en $\mathbb{N}$. Si $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión normalizada en un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$, entonces para cada $\varepsilon_i \searrow 0$ existe $M = \{m_i : i \in \mathbb{N}\} \in [\mathbb{N}]^\omega$ tal que para cada $k \in \mathbb{N}$ y todo $S = \{s_1, \dots, s_k\}$, $T = \{t_1, \dots, t_k\} \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_{M/m_{k-1}}, \dots, \mathcal{B}_k \restriction_{M/m_{k-1}})$ se satisface la desigualdad*

$$\Big|\| \sum_{i=1}^{k} a_i \mathcal{X}(s_i)\| - \| \sum_{i=1}^{k} a_i \mathcal{X}(t_i)\|\Big| < \varepsilon_\ell,$$

donde $\min(s_1 \cup t_1) = m_\ell$ *y $\ell \in \mathbb{N}$, para cada $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$. Es decir, $(x_i)_{i\in M}$ es $(\mathcal{B}_i \restriction_M)_{i\in\mathbb{N}}-$oscilación bloque asintótica estable.*

Demostración. Sean $(\mathcal{B}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de barreras en $\mathbb{N}$ y $\varepsilon_i \searrow 0$ una sucesión arbitraria. Consideremos una sucesión normalizada $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$. Por el quinto inciso del Teorema 3.2.3 podemos hallar $M_1 \in [\mathbb{N}]^\omega$ tal que $(x_i)_{i\in M_1}$ es una $(\mathcal{B}_1 \restriction_{M_1}, 1, \varepsilon_1)-$oscilación bloque estable. En otras palabras, si $S = \{s_1\}$, $T = \{t_1\} \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_{M_1})$, entonces

$$\Big|\|a\mathcal{X}(s_1)\| - \|a\mathcal{X}(t_1)\|\Big| < \varepsilon_1$$

para cada $a \in [-1,1]$. Pongamos $m_1 := \min(M_1)$. Aplicando recursivamente el quinto inciso del Teorema 3.2.3, obtenemos una sucesión $(M_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ y una sucesión $(m_j)_{j\in\mathbb{N}}$ creciente en $\mathbb{N}$ tales que:

1. $m_j := \min(M_j)$ para todo $j \in \mathbb{N}$,
2. $M_1 \in [\mathbb{N}]^\omega$ y $M_{j+1} \in [M_j/m_j]^\omega$ para cada $j \in \mathbb{N}$ y
3. la subsucesión $(x_i)_{i\in M_j}$ es $((\mathcal{B}_i \restriction_{M_j})_{i=1}^j, \varepsilon_j)-$oscilación bloque estable para toda $j \in \mathbb{N}$.

Del tercer inciso vemos que si $j \in \mathbb{N}$ y $S, T \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_{M_j}, \dots, \mathcal{B}_j \restriction_{M_j})$, entonces se cumple que

$$\Big|\| \sum_{i=1}^{j} a_i \mathcal{X}(s_i)\| - \| \sum_{i=1}^{j} a_i \mathcal{X}(t_i)\|\Big| < \varepsilon_j,$$

para cada $(a_i)_{i=1}^j \in [-1,1]^j$. Tomemos el conjunto $M = \{m_j : j \in \mathbb{N}\}$. Fijamos $k \in \mathbb{N}$ y S, $T \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_{M/m_{k-1}}, \dots, \mathcal{B}_k \restriction_{M/m_{k-1}})$. Observamos que $\min(s_1 \cup t_1) = m_\ell$ para alguna $\ell \in \mathbb{N}$. Por la propiedad ii) de las barreras existen $S' = \{s'_i \in \mathcal{B}_i \restriction_M : k+1 \le i \le \ell\}$ y

$T' = \{t'_i \in \mathcal{B}_i \restriction_M : k+1 \leq i \leq \ell\}$ tal que $S \cup S', T \cup T' \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_{M/m_{\ell-1}}, \ldots, \mathcal{B}_\ell \restriction_{M/m_{\ell-1}})$. Entonces se cumple la siguiente relación

$$\Big| \| \sum_{i=1}^{k} a_i \mathcal{X}(s_i) \| - \| \sum_{i=1}^{k} a_i \mathcal{X}(t_i) \| \Big| = \Big| \| \sum_{i=1}^{k} a_i \mathcal{X}(s_i) + \sum_{i=k+1}^{\ell} 0 \mathcal{X}(s'_i) \| \\ - \| \sum_{i=1}^{k} a_i \mathcal{X}(t_i) + \sum_{i=k+1}^{\ell} 0 \mathcal{X}(t'_i) \| \Big| < \varepsilon_\ell,$$

para cada $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$. Lo cual demuestra que M es el conjunto deseado. $\square$

En particular, cuando se considera la sucesión $([\mathbb{N}]^1, [\mathbb{N}]^1, \ldots, [\mathbb{N}]^1, \ldots)$ obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 3.2.9. *Si $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión normalizada en un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$, entonces para cada $\varepsilon_i \searrow 0$ existe una subsucesión $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ tal que para toda s, $t \in FIN^*$ con $s(1) \geq |s| = k = |t| \leq t(1)$ se cumple que*

$$\Big| \| \sum_{j=1}^{k} a_j x_{n_{s(j)}} \| - \| \sum_{j=1}^{k} a_j x_{n_{t(j)}} \| \Big| < \varepsilon_{\min\{s(1), t(1)\}},$$

para toda $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$.

3.3 Oscilación bloque estable por una partición especial infinita

Previamente el Teorema de Ramsey y el Teorema de Ramsey sobre bloques de barreras fueron empleados para describir propiedades de las sucesiones normalizadas de un espacio de Banach. En esta dirección, usaremos el conocido Teorema de Hindman-Milliken para introducir otras ideas de oscilación.

Definición 3.3.1. Dados un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$, una partición $Q \in \langle\omega\rangle^\omega$ de $\mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$; una sucesión normalizada $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en $(X, \|\cdot\|)$ es $(Q, k, \varepsilon)-$*oscilación bloque estable* si para todo $S = \{s_1, \ldots, s_k\}$, $T = \{t_1, \ldots, t_k\} \in \langle Q\rangle^k$ se satisface que

$$\Big| \| \sum_{i=1}^{k} a_i \mathcal{X}(s_i) \| - \| \sum_{i=1}^{k} a_i \mathcal{X}(t_i) \| \Big| < \varepsilon,$$

para cada $(a_i)_{j=1}^k \in [-1,1]^k$. Si $Q = [\mathbb{N}]^1$, entonces decimos que la sucesión $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es $(k, \varepsilon)-$oscilación P-bloque estable.

Notemos que si $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es (k, ε)-oscilación P-bloque estable para algún $k \in \mathbb{N}$, entonces es una $(Q, k, \varepsilon)-$oscilación bloque estable para toda $Q \in \langle\omega\rangle^\omega$ ya que $\langle Q\rangle^k \subseteq \langle[\mathbb{N}]^1\rangle^k$.

Siguiendo la afirmación del último inciso del Teorema 3.1.6, de una sucesión normalizada de un espacio de Banach podemos obtener una subsucesión que cumpla las condiciones de la Definición 3.3.1:

Teorema 3.3.2. *Dadas una sucesión normalizada $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en un espacio de Banach $(X,\|\cdot\|)$ y una partición $Q\in\langle\omega\rangle^\omega\cap\mathsf{P}(\mathbb{N})$. Para cada $k\in\mathbb{N}$ y cada $\varepsilon>0$ existen $M\in[\mathbb{N}]^\omega$ y $P\in\langle Q\rangle^\omega$ una partición de M, tal que $(x_i)_{i\in M}$ es (P,k,ε)-oscilación bloque estable.*

Demostración. Tomemos $k\in\mathbb{N}$, una sucesión normalizada $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de un espacio de Banach $(X,\|\cdot\|)$ y $Q\in\langle\omega\rangle^\omega\cap\mathsf{P}(\mathbb{N})$. Definimos la función $\vartheta_k:\langle Q\rangle^k\to\mathcal{N}_k$ en $S=\{s_1,\dots,s_k\}\in\langle Q\rangle^k$ como

$$\vartheta_k(S)\left(\sum_{i=1}^k a_ie_i\right)=\|\sum_{i=1}^k a_i\mathcal{X}(s_i)\|,\quad \text{para cada}\quad (a_i)_{i=1}^k\in[-1,1]^k.$$

Fijando $\varepsilon>0$, el Teorema 1.3.3 nos dice que existe $P\in\langle Q\rangle^\omega$ tal que $d_k(\vartheta_k(S),\vartheta_k(T))<\varepsilon$ para toda S, $T\in\langle P\rangle^k\subseteq\langle Q\rangle^k$. En otras palabras, si $S,T\in\langle P\rangle^k$, entonces

$$\Big|\|\sum_{i=1}^k a_i\mathcal{X}(s_i)\|-\|\sum_{i=1}^k a_i\mathcal{X}(t_i)\|\Big|<\varepsilon,$$

para cada $(a_i)_{i=1}^k\in[-1,1]^k$. Por lo tanto, tomando $M=\bigcup P$, se concluye $(x_i)_{i\in M}$ es una sucesión (P,k,ε)-oscilación bloque estable. $\square$

Considerando las funciónes ϑ_k's definidas en la demostración previa y aplicando el Corolario 1.3.4 se obtiene la siguiente noción de asintoticidad.

Corolario 3.3.3. *Para toda sucesión normalizada $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en un espacio de Banach $(X,\|\cdot\|)$, cada $k\in\mathbb{N}$ y toda sucesión $\varepsilon_i\searrow 0$ en $\mathbb{R}^+$, existe una partición $P=\{p_i:i\in\mathbb{N}\}\in\langle\omega\rangle^\omega$ tal que para toda $S=\{s_1,\dots,s_k\}$, $T=\{t_1,\dots,t_k\}\in\langle P\rangle^k$ se satisface que*

$$\Big|\|\sum_{i=1}^k a_i\mathcal{X}(s_i)\|-\|\sum_{i=1}^k a_i\mathcal{X}(t_i)\|\Big|<\varepsilon_\ell,$$

donde $\ell=\min\{i:p_i\subseteq s_1\cup t_1\}$,para cada $(a_i)_{i=1}^k\in[-1,1]^k$.

El corolario anterior se generaliza de la siguiente manera (comparar con el Lema 3.2.8).

Lema 3.3.4. *Para toda sucesión normalizada $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en un espacio de Banach $(X,\|\cdot\|)$, toda partición $Q\in\langle\omega\rangle^\omega\cap\mathsf{P}(\mathbb{N})$ y toda sucesión $\varepsilon_i\searrow 0$ en $\mathbb{R}^+$, existe una partición $P=\{p_i:i\in\mathbb{N}\}\in\langle Q\rangle^\omega$ tal que para cada $k\in\mathbb{N}$ y cualesquiera $S=\{s_1,\dots,s_k\}$, $T=\{t_1,\dots,t_k\}\in\langle P\setminus\{p_1,\dots,p_{k-1}\}\rangle^k$ se cumple que*

$$\Big|\|\sum_{i=1}^k a_i\mathcal{X}(s_i)\|-\|\sum_{i=1}^k a_i\mathcal{X}(t_i)\|<\varepsilon_\ell,$$

siempre que $\ell=\min\{i:p_i\subseteq s_1\cup t_1\}$, para cada $(a_i)_{i=1}^k\in[-1,1]^k$.

Demostración. Sean $Q \in \langle\omega\rangle^\omega \cap \mathsf{P}(\mathbb{N})$ una partición, $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión normalizada de un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ y $\varepsilon_i \searrow 0$ una sucesión. Consideremos, para cada $k \in \mathbb{N}$, la función ϑ_k. Al aplicar el Teorema de Hindman-Milliken para Analistas (Teorema 1.3.3) a la función ϑ_1 y a ε_1 se obtiene $P_1 = \{p_i^1 : i \in \mathbb{N}\} \in \langle[\mathbb{N}]^1\rangle^\omega$ tal que para todo $S = \{s_1\}$, $T = \{t_1\} \in \langle P_1\rangle^1$ se tiene que

$$\Big|\|a_1\mathcal{X}(s_1)\| - \|a_1\mathcal{X}(t_1)\|\Big| < \varepsilon_1,$$

para cada $a_1 \in [-1,1]$. Tomamos $p_1 := p_1^1$. Usando recursivamente el Teorema 1.3.3 en $\vartheta_i \restriction_{\langle P_{i-1}\backslash\{p_{i-1}\}\rangle^i}$ y ε_i para cada $i \in \mathbb{N}/1$, se construyen paralelamente una sucesión $(P_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en $\langle\omega\rangle^\omega$ y una sucesión $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en FIN^* tales que

1. $p_i := p_1^i$, donde $p_1^i \in P_i$, para toda $i \in \mathbb{N}$.
2. $P_1 \in \langle Q\rangle^\omega$ y $P_{i+1} \in \langle P_i\backslash\{p_i\}\rangle^\omega \subseteq \langle P_i\rangle^\omega$, para cada $i \in \mathbb{N}$; en consecuencia $p_i < p_{i+1}$.
3. Para cada $k \in \mathbb{N}$ y cualesquiera $S = \{s_1, \ldots, s_k\}$, $T = \{t_1, \ldots, t_k\} \in \langle P_k\rangle^k$ se cumple que

$$\Big|\|\sum_{j=1}^{k} a_j\mathcal{X}(s_j)\| - \|\sum_{j=1}^{k} a_j\mathcal{X}(t_j)\|\Big| < \varepsilon_k,$$

para cada $(a_j)_{j=1}^k \in [-1,1]^k$.

Ahora, verifiquemos que $P = \{p_i \in \mathbb{N}\}$ es la partición deseada. Fijemos $k \in \mathbb{N}$ y tomemos S, $T \in \langle P\backslash\{p_i\}_{i\leq k-1}\rangle^k$. Sea $m := \min\{i : p_i \subseteq (s_1 \cup t_1)\}$, debido a la construcción de P es fácil ver que S, $T \in \langle P\backslash\{p_i\}_{i\leq m-1}\rangle^k \subseteq \langle P_m\rangle^k$. Entonces las particiones especiales

$$\{s_i\}_{i=1}^k \cup \{p_{\max\{j:p_j\subseteq s_k\}+i-k}\}_{i=k+1}^m \quad \text{y} \quad \{t_i\}_{i=1}^k \cup \{p_{\max\{j:p_j\subseteq t_k\}+i-k}\}_{i=k+1}^m$$

pertenecen a $\langle P_m\rangle^m$. Lo cual implica que la desigualdad

$$\begin{aligned}\Big|\|\sum_{i=1}^{k} a_i\mathcal{X}(s_i)\| - \|\sum_{i=1}^{k} a_i\mathcal{X}(t_i)\|\Big| = \Big|\|\sum_{i=1}^{k} a_i\mathcal{X}(s_i) &+ \sum_{i=k+1}^{m} 0\mathcal{X}(p_{\max\{j:p_j\subseteq s_k\}+i-k})\| \\ &- \|\sum_{i=1}^{k} a_i\mathcal{X}(t_i) + \sum_{i=k+1}^{m} 0\mathcal{X}(p_{\max\{j:p_j\subseteq t_k\}+i-k})\|\Big| \\ &< \varepsilon_{\min\{i:p_i\subseteq s_1\cup t_1\}}\end{aligned}$$

se satisface para todo $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$. □

Por último introduciremos una oscilación distinta usando un teorema de tipo Ramsey más fuerte que el Teorema de Ramsey y el Teorema de Hindman, pero más debíl que el Teorema de Hindman-Milliken [25]. Para nuestra intención primero establecemos la notación del objeto central de dicho teorema y un atributo de este, el cual es consecuencia inmediata de su definición.

Si $N \in [\mathbb{N}]^\omega$ y α un cardinal tal que $\alpha \leq \omega$, entonces $\langle N\rangle_\Sigma^\alpha$ es la colección de conjuntos $s \in [\mathbb{N}]^\alpha$ tal que $s = \{\sum_{j\in t_i} j : i \leq \alpha\}$ para alguna sucesión $(t_i)_{i=1}^\alpha$ en $[N]^{<\omega}$ tal que $t_i \neq \emptyset$ y $t_i < t_{i+1}$ para cada $i < \alpha$.

Lema 3.3.5. *Si* $N \in [\mathbb{N}]^\omega$*,* α *es un cardinal menor o igual a* ω *y* $M \in \langle \mathbb{N} \rangle_\Sigma^\omega$*, entonces* $\langle M \rangle_\Sigma^\alpha \subseteq \langle N \rangle_\Sigma^\alpha$*.*

Ahora si, enunciemos el teorema que motiva otro tipo de oscilación siguiendo las equivalencias del Teorema de Ramsey presentadas en el Teorema 3.1.6.

Teorema 3.3.6. *Para cada número natural* $k \geq 2$*, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) *Dados* $N \in [\mathbb{N}]^\omega$ *y* $m \in \mathbb{N}$*, para toda función* $f : \langle N \rangle_\Sigma^k \to \{1, \ldots, m\}$ *existe* $M \in \langle N \rangle_\Sigma^\omega \cap \langle \{2^i : i \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \rangle_\Sigma^\omega$ *tal que* f *es constante en* $\langle M \rangle_\Sigma^k$*.*

(2) *Sean* (X, d) *un espacio métrico totalmente acotado,* $N \in [\mathbb{N}]^\omega$ *y* m *un números natural. Para cada función* $f : \langle N \rangle_\Sigma^k \to \{1, \ldots, m\}$ *y cada* $\varepsilon > 0$*, existe* $M \in \langle N \rangle_\Sigma^\omega \cap \langle \{2^i : i \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \rangle_\Sigma^\omega$ *tal que* $d(f(s), f(t)) < \varepsilon$ *para todo* $s = \{s(1), \ldots, s(k)\}$*,* $t = \{t(1), \ldots, t(k)\} \in \langle M \rangle_\Sigma^k$*.*

(3) *Para cada* $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ *una sucesión normalizada en un espacio de Banach* $(X, \|\cdot\|)$*, toda* $k \in \mathbb{N}$ *y cualquier* $\varepsilon > 0$*, existe* $M \in \langle \{2^i : i \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \rangle_\Sigma^\omega$ *tal que cualesquiera* $s = \{s(1), \ldots, s(k)\}$*,* $t = \{t(1), \ldots, t(k)\} \in \langle M \rangle_\Sigma^k$ *satisfacen la desigualdad*

$$\Big| \| \sum_{i=1}^{k} a_i x_{s(i)} \| - \| \sum_{i=1}^{k} a_i x_{t(i)} \| \Big| < \varepsilon,$$

para cada $(a_i)_{i=1}^k \in [-1, 1]^k$*.*

Notemos que si se cumple la tercera afirmación del teorema anterior, entonces la subsucesión resultante es oscilación estable. El Teorema 3.3.6 es un ejemplo más de que es posible obtener propiedades de tipo estabilidad oscilatoria a través de teoremas de tipo Ramsey, y que estos sean equivalentes.

CAPÍTULO 4

Modelo Disperso

En este capítulo expondremos la noción de modelo disperso asociado a una sucesíon básica normalizada, la cual fue introducida por A. Brunel y L. Sucheston en 1973 [2], y daremos una demostración de la existencia de dicho modelo que es conocido como el Teorema de Brunel-Sucheston. Posteriormente introduciremos la noción de modelo asintótico por bloques y enunciaremos su teorema tipo Brunel-Sucheston correspondiente. Para después presentar algunos ejemplos de modelos asintóticos por bloques con el fin de comprender mejor la naturaleza de dichos objetos matemáticos. Por último, estableceremos otro modelo cuyo comportamiento está determinado por una partición de $\mathbb{N}$ con características especiales.

4.1 Modelo disperso clásico

Definición 4.1.1. Sea $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión básica normalizada en un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|_X)$. Una base de Schauder $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ para un espacio de Banach $(Y, \|\cdot\|_Y)$ es un *modelo disperso* de $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ si existe una sucesión $\varepsilon_i \searrow 0$ tal que para todo $s = \{s(1), \dots, s(k)\} \in FIN^*$ con $s(1) \geq |s| = k$ se tiene que

$$\Big|\|\sum_{j=1}^{k} a_j x_{s(j)}\|_X - \|\sum_{j=1}^{k} a_j y_j\|_Y\Big| < \varepsilon_{s(1)},$$

para cada $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$. También decimos que $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ genera a $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ como *modelo disperso*.

El lector puede comprobar fácilmente que la base canónica $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ para el espacio de Banach c_0 (ℓ_p con $p \in [1,\infty)$) es modelo disperso de cualquier subsucesión de $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en el mismo espacio de Banach.

Sea $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión básica normalizada en un espacio de Banach. La norma del modelo disperso $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ relacionado a la sucesión básica $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ se puede expresar, por consecuencia directa de la definición, como

$$\|\sum_{i=1}^{k} a_i y_i\|_Y = \lim_{[\mathbb{N}]^k \ni t \to \infty} \|\sum_{i=1}^{k} a_i x_{t(i)}\|_X, \tag{4.1.1}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ y cada $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$.

Recordemos que una sucesión $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ se denomina *sucesión dispersa* si para cada $k \in \mathbb{N}$ y todo $s \in [\mathbb{N}]^k$ se cumple que

$$\|\sum_{i=1}^{k} a_i x_i\| = \|\sum_{i=1}^{k} a_i x_{s(i)}\|,$$

para toda $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$. El lema que a continuación presentamos garantiza que todo modelo disperso es una sucesión dispersa.

Lema 4.1.2. *Sean $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ y $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ un par de sucesiones básicas normalizadas en los espacios de Banach $(X, \|\cdot\|_X)$ y $(Y, \|\cdot\|_Y)$, respectivamente. Si la sucesión $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es un modelo disperso de $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, entonces para toda $k \in \mathbb{N}$ y toda $s \in [\mathbb{N}]^k$ se cumple que*

$$\|\sum_{i=1}^{k} a_i y_i\|_Y = \|\sum_{i=1}^{k} a_i y_{s(i)}\|_Y,$$

para cada $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$.

Demostración. Consideremos dos sucesiones básicas normalizada $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ y $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en los espacios de Banach $(X, \|\cdot\|_X)$ y $(Y, \|\cdot\|_Y)$, respectivamente. Supongamos que $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ genera a $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ como modelo disperso. Primero fijemos $k \in \mathbb{N}$ y $s = \{s(1), \ldots, s(k)\} \in [\mathbb{N}]^k$. Por la observación (4.1.1) sobre la norma de un modelo disperso, sabemos que para cada $\varepsilon > 0$ existe $\ell \in \mathbb{N}$ tal que para todo $t = \{t(1), \ldots, t(k)\} \in [\mathbb{N}/\ell]^k$ resulta que

$$\Big|\|\sum_{i=1}^{k} a_i x_{t(i)}\|_X - \|\sum_{i=1}^{k} a_i y_i\|_Y\Big| < \varepsilon,$$

para cada $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$. Después, a cada sucesión $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$ le asociamos la sucesión $(b_i)_{i=1}^{s(k)} \in [-1,1]^{s(k)}$ definida, en cada $i \leq s(k)$, como

$$b_i = \begin{cases} a_j & \text{si } i = s(j) \text{ para algún } j \leq k, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Notemos que, para toda $t \in [\mathbb{N}]^{s(k)}$ y cada sucesión $(b_i)_{i=1}^{s(k)}$ relacionada con alguna $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$, la identidad $\|\sum_{i=1}^{s(k)} b_i x_{t(i)}\|_X = \|\sum_{i=1}^{k} a_i x_{t(s(i))}\|_X$ es válida. Además, para cualquier $t \in [\mathbb{N}/\ell]^{s(k)}$ se cumple que $\{t(s(1)), \ldots, t(s(k))\} \in [\mathbb{N}/\ell]^k$. Por consiguiente, si $t \in [\mathbb{N}/\ell]^{s(k)}$, entonces

$$\Big|\|\sum_{i=1}^{k} a_i x_{t(s(i))}\|_X - \|\sum_{i=1}^{k} a_i y_i\|_Y\Big| < \varepsilon$$

para cada $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$. En otras palabras

$$\lim_{[\mathbb{N}]^{s(k)} \ni t \to \infty} \| \sum_{i=1}^k a_i x_{t(s(i))} \|_X = \| \sum_{i=1}^k a_i y_i \|_Y,$$

para cualquier $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$. Como el límite es único, obtenemos que $\| \sum_{i=1}^k a_i y_i \|_Y = \| \sum_{i=1}^k a_i y_{s(i)} \|_Y$ para cada $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$. Finalmente, ya que $k \in \mathbb{N}$ y $s \in [\mathbb{N}]^k$ son arbitrarios, podemos concluir que para cada $k \in \mathbb{N}$ y cualquier $s \in [\mathbb{N}]^k$ se cumple que

$$\| \sum_{i=1}^k a_i y_i \|_Y = \| \sum_{i=1}^k a_i y_{s(i)} \|_Y, \text{ para toda } (a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k.$$

□

A. Brunel y L. Sucheston [2] establecieron el siguiente teorema clásico del Análisis Funcional.

Teorema 4.1.3 (de Brunel-Sucheston)**.** *Toda sucesión básica normalizada de un espacio de Banach posee una subsucesión que genera un modelo disperso.*

Demostración. Sean $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión básica normalizada de un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ y $\varepsilon_i \searrow 0$. Por el Corolario 3.2.9 podemos encontrar una subsucesión $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ de $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tal que para cualesquiera $s, t \in FIN^*$ con $s(1) \geq |s| = k = |t| \leq t(1)$ se satisface que

$$\Big| \| \sum_{j=1}^k a_j x_{n_{s(j)}} \| - \| \sum_{j=1}^k a_j x_{n_{t(j)}} \|_X \Big| < \frac{\varepsilon_{\text{mín}\{s(1),t(1)\}}}{2}, \tag{4.1.2}$$

para toda $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$. Ahora, tomamos k un número natural fijo. Es fácil ver que el conjunto $[\mathbb{N}]^k$ con la relación $\leq$, definida como

$$\begin{aligned} &s < t \text{ si y solo si } \operatorname{máx}(s) < \operatorname{mín}(t) \quad \text{y} \\ &s = t \text{ si y solo si } s = t \text{ (como conjuntos)} \end{aligned}$$

para cada $s, t \in [\mathbb{N}]^k$, es un conjunto dirigido. Consideremos la red $(\psi_k(s))_{s\in[\mathbb{N}]^k}$, recordando que

$$\psi_k(s)(\sum_{i=1}^k a_i e_i) = \| \sum_{i=1}^k a_i x_{n_{s(i)}} \| \text{ para todo } (a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k,$$

en el espacio métrico compacto $(\mathcal{N}_k, d_k)$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $\ell \in \mathbb{N}$ tal que $\varepsilon_\ell \leq 2\varepsilon$ y $\ell \geq k$, ya que $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente que converge a cero. Por la construcción previa, si $s, t \in [\mathbb{N}]^k$ y satisfacen que $s, t \geq \{\ell, \ell+1, \ldots, \ell+k-1\}$, entonces se cumple la desigualdad

$$d_k\Big(\psi_k(s), \psi_k(t)\Big) < \frac{\varepsilon_{\text{mín}\{s(1),t(1)\}}}{2} \leq \frac{\varepsilon_\ell}{2} \leq \varepsilon.$$

Lo cual significa que $(\psi_k(s))_{s\in[\mathbb{N}]^k}$ es una red de Cauchy en el espacio compacto $\mathcal{N}_k$. De manera que existe una seminorma $\rho_k \in \mathcal{N}_k$ a la cual converge la red. Enseguida, mostremos que

$$\lim_{[\mathbb{N}]^k\ni s\to\infty} \psi_k(s) = \rho_k. \tag{4.1.3}$$

Como la red converge, dado $\varepsilon > 0$ existe $t = \{t(1), \ldots, t(k)\} \in [\mathbb{N}]^k$ tal que

$$d_k(\psi_k(s), \rho_k) < \varepsilon$$

para toda $s \in [\mathbb{N}]^k$ tal que $s \geq t$. Por definición, si $s \in [\mathbb{N}/t(k)]^k$, entonces $s > t$. En consecuencia,

$$d_k(\psi_k(s), \rho_k) < \varepsilon \text{ para todo } s \in [\mathbb{N}/t(k)]^k.$$

De esta manera concluimos que ρ_k es el límite de la coloración ψ_k. Además, el Lema 3.1.5 afirma que ρ_k es una norma para $\mathbb{R}^k$.

El siguiente paso es encontrar el modelo disperso y su espacio de Banach a través de las normas límite obtenidas anteriormente:

Consideremos el espacio vectorial c_{00} y la base canónica $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ para c_{00}. Definamos la norma $|||\cdot||| : c_{00} \to [0, \infty)$, para cada $k \in \mathbb{N}$, como

$$|||\sum_{i=1}^k a_ie_i||| = \rho_k\Big(\sum_{i=1}^k a_ie_i\Big) \quad \text{en } \sum_{i=1}^k a_ie_i \in c_{00}.$$

Esta última función está bien definida ya que para todo $k \in \mathbb{N}$ y todo $s \in [\mathbb{N}]^{k+1}$ resulta que

$$\psi_{k+1}(s)\left(\sum_{i=1}^k a_ie_i + 0e_{k+1}\right) = \psi_k(s \setminus \{s(k+1)\})\left(\sum_{i=1}^k a_ie_i\right),$$

para cada $(a_i)_{i=1}^k \in [-1, 1]^k$. Por lo tanto, para cada $k \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\begin{aligned}\rho_{k+1}\left(\sum_{i=1}^k a_ie_i + 0e_{k+1}\right) &= \lim_{[\mathbb{N}]^{k+1}\ni s\to\infty} \psi_{k+1}(s)\left(\sum_{i=1}^k a_ie_i + 0e_{k+1}\right)\\ &= \lim_{[\mathbb{N}]^k\ni t\to\infty} \psi_k(t)\left(\sum_{i=1}^k a_ie_i\right)\\ &= \rho_k\left(\sum_{i=1}^k a_ie_i\right)\end{aligned}$$

para todo $(a_i)_{i=1}^k \in [-1, 1]^k$. La sucesión normalizada $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en el espacio de Banach $(E, |||\cdot|||)$, donde E es la completación del espacio c_{00} bajo la norma $|||\cdot|||$, es la candidata a ser el modelo disperso de $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$. Primero probemos que $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder para $(E, |||\cdot|||)$. Como $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica, existe $C \geq 1$ tal que para cualesquiera $m, n \in \mathbb{N}$ con $m \leq n$ y $s \in [\mathbb{N}]^n$ obtenemos que

$$\begin{aligned}\psi_m(\{s(1), \ldots, s(m)\})(\sum_{i=1}^m a_ie_i) &= \|\sum_{i=1}^m a_ix_{n_{s(i)}}\|_X\\ &\leq C\|\sum_{i=1}^n a_ix_{n_{s(i)}}\|_X = C\psi_n(s)(\sum_{i=1}^n a_ie_i),\end{aligned}$$

para cada $(a_i)_{i=1}^n \in [-1,1]^n$. Así pues, para cada $m,n \in \mathbb{N}$ con $m \leq n$ resulta que

$$|||\sum_{i=1}^{m} a_i e_i||| = \rho_m(\sum_{i=1}^{m} a_i e_i) \leq C\rho_n(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i) = C|||\sum_{i=1}^{n} a_i e_i|||,$$

para todo $(a_i)_{i=1}^n \in [-1,1]^n$. Por el Teorema 1.4.5, podemos concluir que $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder para $(E, |||\cdot|||)$. Por último, mostremos que la desigualdad, entre la sucesión básica normalizada y su modelo disperso propuesto, se cumple. Para ello fijamos $k \in \mathbb{N}$ y $s \in [\mathbb{N}/(k-1)]^k$. Debido a la convergencia (4.1.3) y a la definición de le norma $|||\cdot|||$, existe $\ell \in \mathbb{N}/(k-1)$ tal que para cualquier $t \in [\mathbb{N}/\ell]^k$ tenemos que

$$\Big|\|\sum_{i=1}^{k} a_i x_{n_{t(i)}}\| - |||\sum_{i=1}^{k} a_i e_i|||\Big| < \frac{\varepsilon_{s(1)}}{2}, \tag{4.1.4}$$

para cada $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$. Por las desigualdades (4.1.2) y (4.1.4), al tomar algún $t \in [\mathbb{N}/\max\{\ell, s(1)\}]^k$, se deduce que

$$\begin{aligned}\Big|\|\sum_{i=1}^{k} a_i x_{n_{s(i)}}\| - |||\sum_{i=1}^{k} a_i e_i|||\Big| &\leq \Big|\|\sum_{i=1}^{k} a_i x_{n_{s(i)}}\| - \|\sum_{i=1}^{k} a_i x_{n_{t(i)}}\|\Big| \\ &\quad + \Big|\|\sum_{i=1}^{k} a_i x_{n_{t(i)}}\| - |||\sum_{i=1}^{k} a_i e_i|||\Big| < \varepsilon_{s(1)},\end{aligned}$$

para toda $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$. $\square$

El Teorema de Brunel-Sucheston es equivalente al Teorema de Ramsey (Teorema 1.2.2), lo cual se demuestra como se hizó previamente mediante la noción de oscilación estable y el Teorema 3.1.6.

Teorema 4.1.4. . *Los siguientes enunciados son equivalentes.*

1. *Teorema de Ramsey.*
2. *Teorema de Ramsey para Analistas.*
3. *Teorema de Brunel-Sucheston.*

4.2 Modelo asintótico por bloques de barreras

Por lo que hemos visto hasta aquí surge de manera natural la idea de extender la noción de modelo disperso relacionándolo a una sucesión de barreras, sin embargo, el modelo que se obtiene no necesariamente es una sucesión dispersa, como veremos en el Ejemplo 4.3.3 de este capítulo. Pero siguiendo la línea del artículo [18] podemos introducir un modelo asintótico mediante el uso de ciertas subsucesiones bloque de una sucesión básica normalizada:

Definición 4.2.1. ([16]) Sean $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión básica normalizada en un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|_X)$ y $(\mathcal{B}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de barreras en $\mathbb{N}$. Una base de Schauder $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ para un espacio de Banach $(Y, \|\cdot\|_Y)$ es un $(\mathcal{B}_i)_{i\in\mathbb{N}}-$*modelo asintótico por bloques* de $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ si existe $\varepsilon_i \searrow 0$ tal que para cada $k \in \mathbb{N}$ y cualquier $S = \{s_1, \dots, s_k\} \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_{\mathbb{N}/(k-1)}, \dots, \mathcal{B}_k \restriction_{\mathbb{N}/(k-1)})$ se tiene que

$$\Big| \| \sum_{j=1}^{k} a_j \mathcal{X}(s_j) \|_X - \| \sum_{j=1}^{k} a_j y_j \|_Y \Big| < \varepsilon_{\text{mín}(s_1)},$$

para toda $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$. En particular, si $\mathcal{B} = \mathcal{B}_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$, entonces diremos que $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ genera a $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ como *$\mathcal{B}-$modelo asintótico por bloques.*

Si $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es un $(\mathcal{B}_i)_{i\in\mathbb{N}}-$modelo asintótico por bloques generado por alguna sucesión básica normalizada $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, entonces para cada $k \in \mathbb{N}$ la norma $\|\cdot\|_Y$ se puede obtener de la siguiente manera

$$\| \sum_{i=1}^{k} a_i y_i \|_Y = \lim_{Bl(\mathcal{B}_1,\dots,\mathcal{B}_k)\ni S\to\infty} \| \sum_{i=1}^{k} a_i \mathcal{X}(s_i) \|_X, \tag{4.2.1}$$

para toda $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$.

Para cualquier barrera $\mathcal{B}$ es fácil verificar que un $\mathcal{B}-$modelo asintótico por bloques tiene la propiedad de dispersión. Para comodidad del lector presentamos una prueba de este hecho.

Teorema 4.2.2. *Sea $\mathcal{B}$ una barrera en $\mathbb{N}$. Dado un $\mathcal{B}-$modelo asintótico por bloques $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de alguna sucesión básica normalizada en un espacio de Banach, para cada $k \in \mathbb{N}$ y cualquier $s = \{s(1), \dots, s(k)\} \in [\mathbb{N}]^k$ se satisface que*

$$\| \sum_{i=1}^{k} a_i y_i \|_Y = \| \sum_{i=1}^{k} a_i y_{s(i)} \|_Y,$$

para toda $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$.

Demostración. Consideremos una sucesión básica normalizada $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en el espacio de Banach $(X, \|\cdot\|_X)$. Supongamos que $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es un $\mathcal{B}-$modelo asintótico por bloques de $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, donde $\mathcal{B}$ es una barrera en $\mathbb{N}$. Primero fijamos $k \in \mathbb{N}$, $s = \{s(1), \dots, s(k)\} \in [\mathbb{N}]^k$ y $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$ y luego elegimos $(b_i)_{i=1}^{s(k)} \in [-1,1]^{s(k)}$ tal que para cada $i \leq s(k)$ se tiene que

$$b_i = \begin{cases} a_j & \text{si } i = s(j) \text{ para algún } j \leq k, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por la elección de $(b_i)_{i=1}^{s(k)}$, sabemos lo siguiente:

$$\| \sum_{i=1}^{s(k)} b_i y_i \|_Y = \| \sum_{i=1}^{k} a_i y_{s(i)} \|_Y \quad y \quad \| \sum_{i=1}^{s(k)} b_i \mathcal{X}(t_i) \|_X = \| \sum_{i=1}^{k} a_i \mathcal{X}(t_{s(i)}) \|_X,$$

para todo $T = \{t_1, \ldots, t_{s(k)}\} \in Bl^{s(k)}(\mathcal{B})$. Gracias a las igualdades anteriores y a (4.2.1), resulta que

$$\lim_{Bl^k(\mathcal{B}) \ni T = \{t_1,\ldots,t_k\} \to \infty} \| \sum_{i=1}^{k} a_i \mathcal{X}(t_i) \|_X = \| \sum_{i=1}^{k} a_i y_i \|_Y \quad y$$

$$\lim_{Bl^{s(k)}(\mathcal{B}) \ni T = \{t_1,\ldots,t_{s(k)}\} \to \infty} \| \sum_{i=1}^{k} a_i \mathcal{X}(t_{s(i)}) \|_X = \| \sum_{i=1}^{k} a_i y_{s(i)} \|_Y .$$

En otras palabras, dado $\varepsilon > 0$, existe $\ell \in \mathbb{N}$ tal que para cada $T = \{t_1, \ldots, t_k\} \in Bl^k(\mathcal{B} \restriction_{\mathbb{N}/\ell})$ se cumple

$$\Big| \| \sum_{i=1}^{k} a_i \mathcal{X}(t_i) \|_X - \Big| \| \sum_{i=1}^{k} a_i y_i \|_Y \Big| < \varepsilon.$$

Es fácil ver que si $T = \{t_1, \ldots, t_{s(k)}\} \in Bl^{s(k)}(\mathcal{B} \restriction_{\mathbb{N}/\ell})$, entonces $\{t_{s(1)}, \ldots, t_{s(k)}\} \in Bl^k(\mathcal{B} \restriction_{\mathbb{N}/\ell})$. De esto se infiere que, para todo $T \in Bl^{s(k)}(\mathcal{B} \restriction_{\mathbb{N}/\ell})$, la desigualdad

$$\Big| \| \sum_{i=1}^{k} a_i \mathcal{X}(t_{s(i)}) \|_X - \| \sum_{i=1}^{k} a_i y_i \|_Y \Big| < \varepsilon$$

es válida. Así, tenemos que

$$\lim_{Bl^{s(k)}(\mathcal{B}) \ni T \to \infty} \| \sum_{i=1}^{k} a_i \mathcal{X}(t_{s(i)}) \|_X = \| \sum_{i=1}^{k} a_i y_i \|_Y$$

y la unicidad del límite nos garantiza que $\| \sum_{i=1}^{k} a_i y_{s(i)} \|_Y = \| \sum_{i=1}^{k} a_i y_i \|_Y$. Finalmente, como $k \in \mathbb{N}$, $s \in [\mathbb{N}]^k$ y $(a_i)_{i=1}^{k} \in [-1, 1]^k$ son arbitrarios, podemos concluir que para cada $k \in \mathbb{N}$ y cada $s \in [\mathbb{N}]^k$ se satisface que

$$\| \sum_{i=1}^{k} a_i y_i \|_Y = \| \sum_{i=1}^{k} a_i y_{s(i)} \|_Y ,$$

para toda $(a_i)_{i=1}^{k} \in [-1, 1]^k$. □

Lo anterior atestigua que el concepto de $\mathcal{B}-$modelo asintótico por bloques extiende la noción de modelo disperso. Por esta razón, es conveniente llamar al $\mathcal{B}-$modelo asintótico por bloques simplemente *$\mathcal{B}-$modelo disperso*.

El siguiente teorema establecido en [16] es una generalización del Teorema de Brunel-Sucheston (4.1.3) y es equivalente a cualquiera de las condiciones del Teorema 3.2.3.

Teorema 4.2.3. *Para toda sucesión básica normalizada $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ y toda sucesión $(\mathcal{B}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de barreras en $\mathbb{N}$, existe $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ tal que la subsucesión $(x_i)_{i\in M}$ induce una norma $|||\cdot|||$ en el espacio c_{00} tal que $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es un $(\mathcal{B}_i \restriction_M)_{i\in\mathbb{N}}$-modelo asintótico por bloques de $(x_i)_{i\in M}$.*

Demostración. Sean $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión básica normalizada de un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$, $(\mathcal{B}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de barreras en $\mathbb{N}$ y $\varepsilon_i \searrow 0$. Por el Lema 3.2.8, podemos encontrar $M = \{m_i : i \in \mathbb{N}\} \in [\mathbb{N}]^\omega$ tal que cada $k \in \mathbb{N}$ y cualesquiera $S = \{s_1 \dots, s_k\}$, $T = \{t_1 \dots, t_k\} \in Bl(\mathcal{B}_1 \upharpoonright_{M/m_{k-1}}, \dots, \mathcal{B}_k \upharpoonright_{M/m_{k-1}})$ cumplen la desigualdad

$$\Big|\|\sum_{j=1}^{k} a_j \mathcal{X}(s_j)\| - \|\sum_{j=1}^{k} a_j \mathcal{X}(t_j)\|\Big| < \frac{\varepsilon_\ell}{2}, \tag{4.2.2}$$

siempre que $\text{mín}(s_1 \cup t_1) = m_\ell$, para toda $(a_i)_{i=1}^k \in [-1, 1]^k$.

Fijemos $k \in \mathbb{N}$. Es fácil verificar que el conjunto $Bl(\mathcal{B}_1 \upharpoonright_M, \dots, \mathcal{B}_k \upharpoonright_M)$ con la relación $\leq$, definida como

$$\begin{aligned} &S < T \text{ si y solo si } \text{máx}(s_1) < \text{mín}(t_1) \quad \text{y} \\ &S = T \text{ si } \cup_{i\leq k} s_i = \cup_{i \leq k} t_i \text{ (como conjuntos)} \end{aligned}$$

para cualesquiera $S = \{s_1 \dots, s_k\}$, $T = \{t_1 \dots, t_k\} \in Bl(\mathcal{B}_1 \upharpoonright_M, \dots, \mathcal{B}_k \upharpoonright_M)$, es un conjunto dirigido. Consideremos la red $\Big(\Psi_k(S)\Big)_{S\in Bl(\mathcal{B}_1\upharpoonright_M,\dots,\mathcal{B}_k\upharpoonright_M)}$, donde

$$\Psi_k(S)(\sum_{i=1}^{k} a_i e_i) = \|\sum_{i=1}^{k} a_i \mathcal{X}(s_i)\| \text{ para todo } (a_i)_{i=1}^k \in [-1, 1]^k,$$

en el espacio métrico compacto $(\mathcal{N}_k, d_k)$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $\ell \in \mathbb{N}$ tal que $\varepsilon_\ell \leq 2\varepsilon$ y $\ell \geq k$. Por la propiedad (B2) de las barreras podemos hallar $R = \{r_1, \dots, r_k\} \in Bl(\mathcal{B}_1 \upharpoonright_M, \dots, \mathcal{B}_k \upharpoonright_M)$ tal que $\text{mín}(r_1) = m_\ell$. Observemos que para cualquier par S, $T \in Bl(\mathcal{B}_1 \upharpoonright_M, \dots, \mathcal{B}_k \upharpoonright_M)$ resulta que

$$\begin{aligned} S \geq T &\Leftrightarrow \text{mín}(s_1) > \text{máx}(t_1) \text{ ó } \cup_{i\leq k} s_i = \cup_{i\leq k} t_i \\ &\Leftrightarrow S \in Bl(\mathcal{B}_1 \upharpoonright_{M/\text{máx}(t_1)}, \dots, \mathcal{B}_k \upharpoonright_{M/\text{máx}(t_1)}) \cup \{T\}. \end{aligned}$$

Lo que incide en que si $S, T \in Bl(\mathcal{B}_1 \upharpoonright_M, \dots, \mathcal{B}_k \upharpoonright_M)$ y $S, T \geq R$, entonces

$$d_k\Big(\Psi_k(S), \Psi_k(T)\Big) < \frac{\varepsilon_{\ell'}}{2} \leq \frac{\varepsilon_\ell}{2} \leq \varepsilon$$

donde $\text{mín}(s_1 \cup t_1) = m_{\ell'}$ para algún $\ell' \in \mathbb{N}$. Es decir, $(\Psi_k(S))_{S\in Bl(\mathcal{B}_1\upharpoonright_M,\dots,\mathcal{B}_k\upharpoonright_M)}$ es una red de Cauchy. Por lo tanto, existe $\rho_k \in \mathcal{N}_k$ tal que la red $\Big(\Psi_k(S)\Big)_{S\in Bl(\mathcal{B}_1\upharpoonright_M,\dots,\mathcal{B}_k\upharpoonright_M)}$ converge a ρ_k. Vamos a mostrar que

$$\lim_{Bl(\mathcal{B}_1\upharpoonright_M,\dots,\mathcal{B}_k\upharpoonright_M)\ni S\to\infty} \Psi_k(S) = \rho_k. \tag{4.2.3}$$

Por la convergencia de la red, dado $\varepsilon > 0$ existe $T \in Bl(\mathcal{B}_1 \upharpoonright_M, \dots, \mathcal{B}_k \upharpoonright_M)$ tal que $d_k(\Psi_k(S), \rho_k) < \varepsilon$ si $S \in Bl(\mathcal{B}_1 \upharpoonright_M, \dots, \mathcal{B}_k \upharpoonright_M)$ y $S \geq T$. Lo cual implica que

$$d_k(\Psi_k(S), \rho_k) < \varepsilon \text{ para todo } S \in Bl(\mathcal{B}_1 \upharpoonright_{M/\text{máx}(t_1)}, \dots, \mathcal{B}_k \upharpoonright_{M/\text{máx}(t_1)}).$$

En consecuencia, el Lema 3.1.4 asegura que ρ_k es una norma para $\mathbb{R}^k$.

Ahora, construyamos una norma a partir de las normas ρ_k's que encontramos anteriormente. Consideramos el espacio vectorial c_{00} y su base canónica $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Definimos la función $|||\cdot||| : c_{00} \to [0,\infty)$ como

$$|||\sum_{i=1}^{k} a_i e_i||| = \rho_k\Big(\sum_{i=1}^{k} a_i e_i\Big),$$

para cada $k \in \mathbb{N}$ y cualquier $\sum_{i=1}^{k} a_i e_i \in c_{00}$. Notemos que $|||\cdot|||$ está bien definida ya que para cada $k \in \mathbb{N}$ y todo $S = \{s_1, \dots, s_{k+1}\} \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_M, \dots, \mathcal{B}_{k+1} \restriction_M)$ resulta que

$$\Psi_{k+1}(S)\left(\sum_{i=1}^{k} a_i e_i + 0e_{k+1}\right) = \Psi_k(S \setminus \{s_{k+1}\})\left(\sum_{i=1}^{k} a_i e_i\right),$$

para todo $(a_i)_{i=1}^{k} \in [-1,1]^k$. Por consiguiente, para cada $k \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\begin{aligned}\rho_{k+1}\left(\sum_{i=1}^{k} a_i e_i + 0e_{k+1}\right) &= \lim_{Bl(\mathcal{B}_1\restriction_M,\dots,\mathcal{B}_{k+1}\restriction_M)\ni S\to\infty} \Psi_{k+1}(S)\left(\sum_{i=1}^{k} a_i e_i + 0e_{k+1}\right)\\ &= \lim_{Bl(\mathcal{B}_1\restriction_M,\dots,\mathcal{B}_{k}\restriction_M)\ni T\to\infty} \Psi_{k}(T)\left(\sum_{i=1}^{k} a_i e_i\right)\\ &= \rho_k\left(\sum_{i=1}^{k} a_i e_i\right)\end{aligned}$$

para todo $(a_i)_{i=1}^{k} \in [-1,1]^k$. Además, $|||\cdot|||$ es una norma para c_{00} gracias a que, para cada $k \in \mathbb{N}$, ρ_k es una norma para $\mathbb{R}^k$. Denotemos por $(E, |||\cdot|||)$ al espacio de Banach resultante de la completación del espacio normado $(c_{00}, |||\cdot|||)$. Propongamos a la sucesión $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ como el posible $(\mathcal{B}_i \restriction_M)_{i\in\mathbb{N}}-$modelo asintótico por bloques de $(x_i)_{i\in M}$. En primer lugar, mostremos que la sucesión $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder para $(E, |||\cdot|||)$. Por la definición del espacio vectorial c_{00} y el espacio de Banach $(E, |||\cdot|||)$, sabemos que E es la completación de $\langle\{e_i : i \in \mathbb{N}\}\rangle$ bajo la norma $|||\cdot|||$. Como la sucesión $(x_i)_{i\in M}$ es básica, existe $C \geq 1$ tal que para cualesquiera $m, n \in \mathbb{N}$ con $m \leq n$ y todo $S \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_M, \dots, \mathcal{B}_n \restriction_M)$ se cumple que

$$\Psi_m(\{s_1,\dots,s_m\})(\sum_{i=1}^{m} a_i e_i) = \|\sum_{i=1}^{m} a_i \mathcal{X}(s_i)\| \leq C\|\sum_{i=1}^{n} a_i \mathcal{X}(s_i)\| = C\Psi_n(S)(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i),$$

para toda $(a_i)_{i=1}^{n} \in [-1,1]^n$. De donde se puede deducir que para cualesquiera $m, n \in \mathbb{N}$ con $m \leq n$ la desigualdad

$$|||\sum_{i=1}^{m} a_i e_i||| = \rho_m(\sum_{i=1}^{m} a_i e_i) \leq C\rho_n(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i) = C|||\sum_{i=1}^{n} a_i e_i|||$$

es válida para todo $(a_i)_{i=1}^{n} \in [-1,1]^n$. El Teorema 1.4.5 nos permite concluir que $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder para $(E, |||\cdot|||)$. Finalmente probemos que la base de Schauder $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ satisface la condición para ser un $(\mathcal{B}_i \restriction_M)_{i\in\mathbb{N}}-$modelo asintótico por bloques de $(x_i)_{i\in M}$. Para ello, fijamos $k \in \mathbb{N}$ y $S \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_{M/m_{k-1}}, \dots, \mathcal{B}_k \restriction_{M/m_{k-1}})$, donde $\text{mín}(s_1) = m_\ell$ para algún $\ell \in \mathbb{N}$. Por la convergencia (4.2.3), existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier $T = \{t_1, \ldots, t_k\} \in Bl(\mathcal{B}_1 \upharpoonright_{M/n}, \ldots, \mathcal{B}_k \upharpoonright_{M/n})$ se satisface que

$$\Big| \| \sum_{i=1}^{k} a_i \mathcal{X}(t_i) \| - ||| \sum_{i=1}^{k} a_i e_i ||| \Big| < \frac{\varepsilon_\ell}{2}, \tag{4.2.4}$$

para cada $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$. Sea $T \in Bl(\mathcal{B}_1 \upharpoonright_{M/\,\text{máx}\{n, m_\ell\}}, \ldots, \mathcal{B}_k \upharpoonright_{M/\,\text{máx}\{n, m_\ell\}})$ arbitrario, teniendo en cuenta (4.2.2) y (4.2.4) se obtiene que

$$\begin{aligned} \Big| \| \sum_{i=1}^{k} a_i \mathcal{X}(s_i) \| - ||| \sum_{i=1}^{k} a_i e_i ||| \Big| \leq & \Big| \| \sum_{i=1}^{k} a_i \mathcal{X}(s_i) \| - \| \sum_{i=1}^{k} a_i \mathcal{X}(t_i) \| \Big| \\ & + \Big| \| \sum_{i=1}^{k} a_i \mathcal{X}(t_i) \| - ||| \sum_{i=1}^{k} a_i e_i ||| \Big| < \varepsilon_\ell, \end{aligned}$$

para toda $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$. □

Una consecuencia directa del teorema anterior es el hecho de que una sucesión básica normalizada puede originar más de un modelo asintótico por bloques, cada uno relacionado a una distinta sucesión de barreras en $\mathbb{N}$. La pregunta natural que surgió en el proceso de elaboración del trabajo [16] fue:

¿Existe alguna conexión entre los diversos modelos asintóticos por bloques generados por una misma sucesión básica normalizada?

Esta pregunta motiva un nuevo tema de investigación que nos permita establecer un vínculo entre los modelos dispersos y los modelos asintóticos por bloques. En especial, se busca descartar que todos los modelos asintóticos por bloques de una misma sucesión básica normalizada sean isomorfos.

4.3 Ejemplos

A continuación presentamos dos $\mathcal{B}-$modelos dispersos, para distintas $\mathcal{B}$ barreras en $\mathbb{N}$, de una sucesión básica normalizada, que fueron descritos en [16], los cuales nos permiten concluir que sus normas asociadas no son iguales pero son equivalentes.

Ejemplo 4.3.1. Primero, a partir del espacio vectorial c_{00} y un conjunto normante, construimos un espacio de Banach que posea una sucesión básica. Dados $m, n \in \mathbb{N}/1$ con $m < n$, consideremos el conjunto normante

$$W = G_0 \cup \left\{ \frac{m+1}{2m} \sum_{i \in s} \pm e_i^* : s \in [\mathbb{N}]^m \right\} \cup \left\{ \frac{n+1}{2n} \sum_{i \in s} \pm e_i^* : s \in [\mathbb{N}]^n \right\},$$

donde $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es la base canónica del espacio vectorial c_{00}. La completación del espacio normado $(c_{00}, \|\cdot\|_W)$ se denotará como $(X_W, \|\cdot\|_W)$. Ahora, veamos que la elección del conjunto normante W le aporta a la norma las siguientes propiedades:

Observación 4.3.2. Dados $k \in \mathbb{N}$ y $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$ se cumple que

(1) $\|\sum_{i=1}^k a_i e_i\|_W = \|\sum_{i=1}^k \varepsilon_i a_i e_i\|_W$ para todo $(\varepsilon_i)_{i=1}^k \in \{-1,1\}^k$,

(2) $\|\sum_{i=1}^k a_i e_i\|_W = \|\sum_{i=1}^k a_{\sigma(i)} e_i\|_W$ para cada permutación $\sigma : \{1,\dots,k\} \to \{1,\dots,k\}$, y

(3) $\|\sum_{i=1}^k a_i e_i\|_W = \|\sum_{i=1}^k a_i e_{t(i)}\|_W$ para todo $t \in [\mathbb{N}]^k$.

Demostración de la observación. Sean $k \in \mathbb{N}$ y $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$. Fijemos una función $f \in W$ arbitraria. Por definición $f = \frac{\ell+1}{2\ell}\sum_{j=1}^\ell \gamma_j e^*_{s(j)}$ para algunos $s \in [\mathbb{N}]^\ell$ y $(\gamma_j)_{j=1}^\ell \in \{-1,1\}^\ell$, con $\ell \in \{1, m, n\}$. Entonces

$$f(\sum_{i=1}^k a_i e_i) = \sum_{i=1}^k a_i f(e_i) = \frac{\ell+1}{2\ell}\sum_{i=1}^k\sum_{j=1}^\ell a_i\gamma_j\delta_{s(j),i}.$$

En especial, cuando $(\gamma_j)_{j=1}^\ell = (1,\dots,1)$, se satisface la identidad

$$f(\sum_{i=1}^k a_i e_i) = \sum_{i=1}^k a_i f(e_i) = \frac{\ell+1}{2\ell}\sum_{i=1}^k a_i \chi_s{}^{1}(i).$$

(1) Dado $(\varepsilon_i)_{i=1}^k \in \{-1,1\}^k$, consideremos una sucesión finita $(\lambda_j)_{j=1}^\ell \in \{-1,1\}^\ell$, definida como $sgn^{2}(\lambda_j) = sgn(\varepsilon_{s(j)} a_{s(j)})$ para cada $j \le \ell$, y $g = \frac{\ell+1}{2\ell}\sum_{j=1}^\ell \lambda_j e^*_{s(j)} \in W$. Como

$$g(\sum_{i=1}^k \varepsilon_i a_i e_i) = \sum_{i=1}^k \varepsilon_i a_i g(e_i) = \frac{\ell+1}{2\ell}\sum_{i=1}^k\sum_{j=1}^\ell \lambda_j\varepsilon_i a_i\delta_{s(j),i} = \frac{\ell+1}{2\ell}\sum_{i=1}^k |a_i|\chi_s(i)$$

resulta que

$$f(\sum_{i=1}^k a_i e_i) \le g(\sum_{i=1}^k \varepsilon_i a_i e_i) \le \|\sum_{i=1}^k \varepsilon_i a_i e_i\|_W.$$

En consecuencia

$$\|\sum_{i=1}^k a_i e_i\|_W \le \|\sum_{i=1}^k \varepsilon_i a_i e_i\|_W.$$

Como $(\varepsilon_i)_{i=1}^k \in \{-1,1\}^k$ es arbitrario se tiene que la desigualdad anterior se satisface para todo $(\varepsilon_i)_{i=1}^k \in \{-1,1\}^k$. Por lo tanto, podemos concluir que

$$\|\sum_{i=1}^k a_i e_i\|_W = \|\sum_{i=1}^k \varepsilon_i a_i e_i\|_W$$

para cada $(\varepsilon_i)_{i=1}^k \in \{-1,1\}^k$.

Para la prueba de los siguientes incisos podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $a_i \ge 0$ y $\gamma_i = 1$ para todo $i \le k$, esto es, gracias a lo anterior y a la definición de la norma.

---

1. Sea X un conjunto, la función característica de $s \subset X$ sigue la regla $\chi_s(x) = 1$ si $x \in s$ y $\chi_s(x) = 0$ si $x \notin s$.
2. Recordemos que $sgn(a) = 1$ si $a > 0$ y $sgn(a) = -1$ si $a < 0$.

(2) Para una permutación fija $\sigma : \{1,\dots,k\} \to \{1,\dots,k\}$, definamos $\hat{\sigma} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ como $\hat{\sigma}(i) = \sigma(i)$ para todo $i \leq k$ y $\hat{\sigma}(i) = i$ para todo $i > k$. Consideremos el conjunto $r := \{\hat{\sigma}^{-1}(s(1)),\dots,\hat{\sigma}^{-1}(s(\ell))\}$. Primero veamos que

$$\begin{aligned}
i \in r \cap \{1,\dots,k\} &\Leftrightarrow i = \hat{\sigma}^{-1}(s(j)) \in \{1,\dots,k\} \text{ para algún } j \leq \ell \\
&\Leftrightarrow \sigma(i) = \hat{\sigma}(i) = \hat{\sigma}(\hat{\sigma}^{-1}(s(j)) = s(j) \in \{1,\dots,k\} \text{ para algún } j \leq \ell \\
&\Leftrightarrow \sigma(i) \in s \cap \{1,\dots,k\}.
\end{aligned}$$

Para el funcional $g = \frac{\ell+1}{2\ell}\sum_{i=1}^{\ell} e^*_{r(i)} \in W$ se cumple lo siguiente

$$\begin{aligned}
g(\sum_{i=1}^{k} a_{\sigma(i)}e_i) = \sum_{i=1}^{k} a_{\sigma(i)}g(e_i) = \frac{\ell+1}{2\ell}\sum_{i=1}^{k} a_{\sigma(i)}\chi_r(i) &= \frac{\ell+1}{2\ell}\sum_{i\in r\cap\{1,\dots,k\}} a_{\sigma(i)} \\
&= \frac{\ell+1}{2\ell}\sum_{\sigma(i)\in s\cap\{1,\dots,k\}} a_{\sigma(i)} = \frac{\ell+1}{2\ell}\sum_{i=1}^{k} a_{\sigma(i)}\chi_s(\sigma(i)) \\
&= \frac{\ell+1}{2\ell}\sum_{j=1}^{k} a_j\chi_s(j) = f(\sum_{i=1}^{k} a_ie_i).
\end{aligned}$$

En consecuencia

$$\|\sum_{i=1}^{k} a_ie_i\|_W \leq \|\sum_{i=1}^{k} a_{\sigma(i)}e_i\|_W$$

se satisface para la permutación σ que fue tomada arbitrariamente. Por ende, podemos concluir que

$$\|\sum_{i=1}^{k} a_ie_i\|_W = \|\sum_{i=1}^{k} a_{\sigma(i)}e_i\|_W,$$

para toda permutación σ de 1 hasta k.

(3) Fijemos $t \in [\mathbb{N}]^k$ y tomemos una permutación $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que cumpla que $\sigma(i) = t(i)$ para todo $i \leq k$ y $\sigma(i) = i$ para todo $i > t(k)$. Consideremos el conjunto $r := \{\sigma(s(1)),\dots,\sigma(s(\ell))\}$. Primero notemos que

$$\begin{aligned}
\sigma(i) \in r \cap t &\Leftrightarrow \sigma(i) = \sigma(s(j)) \in t \;\text{ para algún } j \leq \ell \\
&\Leftrightarrow i = s(j) \in \{1,\dots,k\} \text{ para algún } j \leq \ell \\
&\Leftrightarrow i \in s \cap \{1,\dots,k\}.
\end{aligned}$$

De aquí podemos observar que para el funcional $g = \frac{\ell+1}{2\ell}\sum_{i=1}^{\ell} e^*_{r(i)} \in W$ se cumple lo siguiente

$$\begin{aligned}
g(\sum_{i=1}^{k} a_ie_{\sigma(i)}) = \sum_{i=1}^{k} a_ig(e_{\sigma(i)}) = \frac{\ell+1}{2\ell}\sum_{i=1}^{k} a_i\chi_r(\sigma(i)) &= \frac{\ell+1}{2\ell}\sum_{\sigma(i)\in r\cap t} a_i \\
&= \frac{\ell+1}{2\ell}\sum_{i\in s\cap\{1,\dots,k\}} a_i = \frac{\ell+1}{2\ell}\sum_{i=1}^{k} a_i\chi_s(i) \\
&= f(\sum_{i=1}^{k} a_ie_i).
\end{aligned}$$

Por consiguiente

$$\|\sum_{i=1}^{k} a_i e_i\|_W \leq \|\sum_{i=1}^{k} a_i e_{\sigma(i)}\|_W = \|\sum_{i=1}^{k} a_i e_{t(i)}\|_W.$$

Como $t \in [\mathbb{N}]^k$ es arbitrario se tiene que la desigualdad anterior se satisface para todo elemento en $[\mathbb{N}]^k$. Por lo tanto, podemos concluir que

$$\|\sum_{i=1}^{k} a_i e_i\|_W = \|\sum_{i=1}^{k} a_i e_{t(i)}\|_W$$

para todo $t \in [\mathbb{N}]^k$. □

En lo que resta de este ejemplo, por las condiciones de los incisos de la Observación 4.3.2, podemos suponer sin pérdida de generalidad que para cada $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_k \geq 0$.

Enseguida, vamos a demostrar que la sucesión $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es básica. Para ello, usemos el Teorema 1.4.5. Fijemos $p, q \in \mathbb{N}$ con $p \leq q$ y $(a_i)_{i=1}^q \in [0,1]^q$ arbitrarios. Luego, fijemos $f \in W$. Como se mencionó en las observaciones previas $f = \frac{\ell+1}{2\ell}\sum_{i=1}^{\ell} \gamma_i e^*_{s(i)}$ para algunos $s \in [\mathbb{N}]^\ell$ y $(\gamma_i)_{i=1}^{\ell} \in \{-1,1\}^\ell$, con $\ell \in \{1, m, n\}$. Más aún, podemos considerar $(\gamma_i)_{i=1}^{\ell} = (1,\ldots,1)$ gracias al primer inciso de la Observación 4.3.2 y a que $(a_i)_{i=1}^q \in [0,1]^q$. Como $\{1,\ldots,p\} \cap s \subseteq \{1,\ldots,q\} \cap s$, se obtiene que

$$\begin{aligned} f(\sum_{i=1}^{p} a_i e_i) &= \sum_{i=1}^{p} a_i f(e_i) = \frac{\ell+1}{2\ell} \sum_{i\in\{1,\ldots,p\}\cap s} a_i \leq \frac{\ell+1}{2\ell} \sum_{i\in\{1,\ldots,q\}\cap s} a_i \\ &= \sum_{i=1}^{q} a_i f(e_i) = f(\sum_{i=1}^{q} a_i e_i). \end{aligned}$$

En consecuencia se deduce que $\|\sum_{i=1}^{p} a_i e_i\|_W \leq \|\sum_{i=1}^{q} a_i e_i\|_W$. De aquí podemos concluir que la sucesión $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder para el espacio de Banach $(X_W, \|\cdot\|_W)$.

Ahora, vamos a expresar a la norma $\|\cdot\|_W$ mediante una fórmula conveniente, que se obtiene directamente de los elementos que conforman el conjunto normante: Para todo $t \in FIN^*$ tal que $|t| = k \geq m$ tenemos que

$$\|\sum_{i=1}^{k} a_i e_{t(i)}\|_W = \begin{cases} a_1 & \text{si } a_1 \geq \frac{m+1}{2m}\sum_{i=1}^{m} a_i \\ & \text{y } a_1 \geq \frac{n+1}{2n}\sum_{i=1}^{\text{mín}\{k,n\}} a_i, \\ \frac{m+1}{2m}\sum_{i=1}^{m} a_i & \text{si } a_1 \leq \frac{m+1}{2m}\sum_{i=1}^{m} a_i \\ & \text{y } \frac{m+1}{2m}\sum_{i=1}^{m} a_i \geq \frac{n+1}{2n}\sum_{i=1}^{\text{mín}\{k,n\}} a_i, \\ \frac{n+1}{2n}\sum_{i=1}^{\text{mín}\{k,n\}} a_i & \text{si } a_1 \leq \frac{n+1}{2n}\sum_{i=1}^{\text{mín}\{k,n\}} a_i \\ & \text{y } \frac{m+1}{2m}\sum_{i=1}^{m} a_i \leq \frac{n+1}{2n}\sum_{i=1}^{\text{mín}\{k,n\}} a_i, \end{cases} \qquad (*)$$

para todo $(a_i)_{i=1}^k \in [0,1]^k$. En particular

$$\|\sum_{i=1}^k e_{t(i)}\|_W = \begin{cases} \frac{m+1}{2} & \text{si } k = m, \\ \frac{(n+1)k}{2n} & \text{si } m < k < n, \\ \frac{n+1}{2} & \text{si } n \leq k. \end{cases}$$

Por el algoritmo de la división sabemos que existe $q, r \in \mathbb{Z}$ con $r < m$ tal que $n = qm + r$. Tomando en cuenta este resultado y la fórmula $(*)$, para cada $k \in \mathbb{N}$ y todo $S = \{s_1, \ldots, s_k\} \in Bl^k([\mathbb{N}]^m)$, se obtiene que

$$\begin{aligned} \|\sum_{i=1}^k a_i \mathcal{E}(s_i)\|_W &= \|\sum_{i=1}^k a_i \left(\frac{\sum_{j=1}^m e_{s_i(j)}}{\|\sum_{j=1}^m e_{s_i(j)}\|_W} \right) \|_W = \frac{2}{m+1} \|\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m a_i e_{s_i(j)}\|_W \\ &= \frac{2}{m+1} \begin{cases} \frac{m+1}{2} a_1 & \text{si } \frac{m+1}{2} a_1 \geq \frac{n+1}{2n} h((a_i)_{i=1}^k), \\ \frac{n+1}{2n} h((a_i)_{i=1}^k) & \text{si } \frac{m+1}{2} a_1 \leq \frac{n+1}{2n} h((a_i)_{i=1}^k), \end{cases} \\ &= \begin{cases} a_1 & \text{si } \frac{m+1}{2} a_1 \geq \frac{n+1}{2n} h((a_i)_{i=1}^k), \\ \frac{n+1}{(m+1)n} h((a_i)_{i=1}^k) & \text{si } \frac{m+1}{2} a_1 \leq \frac{n+1}{2n} h((a_i)_{i=1}^k), \end{cases} \\ &\text{en donde } h((a_i)_{i=1}^k) = \text{mín}\{m \sum_{i=1}^k a_i, m \sum_{i=1}^q a_i + r a_{q+1}\}, \end{aligned}$$

para cada $(a_i)_{i=1}^k \in [0,1]^k$. Igualmente, para cada $k \in \mathbb{N}$ y cualquier $T = \{t_1, \ldots, t_k\} \in Bl^k([\mathbb{N}]^n)$, resulta que

$$\begin{aligned} \|\sum_{i=1}^k a_i \mathcal{E}(t_i)\|_W &= \|\sum_{i=1}^k a_i \left(\frac{\sum_{j=1}^n e_{t_i(j)}}{\|\sum_{j=1}^n e_{t_i(j)}\|_W} \right) \|_W = \frac{2}{n+1} \|\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n a_i e_{t_i(j)}\|_W \\ &= \frac{2}{n+1} \left(\frac{n+1}{2} a_1 \right) = a_1 \end{aligned}$$

para toda $(a_i)_{i=1}^k \in [0,1]^k$. Además, observemos que

$$\frac{n+1}{(m+1)n} \text{mín}\{m \sum_{i=1}^k a_i, m \sum_{i=1}^q a_i + r a_{q+1}\} \leq \frac{n+1}{(m+1)n} \text{mín}\{mka_1, na_1\}$$

ya que $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_k \geq 0$. Por otra parte, si

$$\frac{m+1}{2} a_1 \leq \frac{n+1}{2n} \text{mín}\{m \sum_{i=1}^k a_i, m \sum_{i=1}^q a_i + r a_{q+1}\},$$

entonces

$$\begin{aligned} a_1 = \frac{2}{m+1} \left(\frac{m+1}{2} a_1 \right) &\leq \frac{2}{m+1} \left(\frac{n+1}{2n} \text{mín}\{m \sum_{i=1}^k a_i, m \sum_{i=1}^q a_i + r a_{q+1}\} \right) \\ &= \frac{n+1}{(m+1)n} \text{mín}\{m \sum_{i=1}^k a_i, m \sum_{i=1}^q a_i + r a_{q+1}\}. \end{aligned}$$

Lo cual implica que, para cada $k \in \mathbb{N}$ y cualesquiera $S \in Bl^k([\mathbb{N}]^m)$ y $T \in Bl^k([\mathbb{N}]^n)$, se cumple la desigualdad

$$\|\sum_{i=1}^{k} a_i\mathcal{E}(t_i)\|_W \leq \|\sum_{i=1}^{k} a_i\mathcal{E}(s_i)\|_W \leq \frac{n+1}{(m+1)n}\,\text{mín}\{mk,n\}\|\sum_{i=1}^{k} a_i\mathcal{E}(t_i)\|_W, \qquad (4.3.1)$$

para toda $(a_i)_{i=1}^k \in [0,1]^k$.

Finalmente, aplicando dos veces el Teorema 4.2.3, primero para la barrera $[\mathbb{N}]^m$ y después para la barrera $[\mathbb{N}]^n$, podemos encontrar un conjunto $M = \{m_i : i \in \mathbb{N}\} \in [\mathbb{N}]^\omega$ tal que la subsucesión $(e_i)_{i\in M}$ genera a $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ como $[M]^m$-modelo disperso y como $[M]^n$-modelo disperso, es decir, para cada $\ell \in \{m,n\}$ existe $\varepsilon_i \searrow 0$ tal que para cada $k \in \mathbb{N}$ y todo $S = \{s_1,\ldots,s_k\} \in Bl^k([M/m_{k-1}]^\ell)$ se tiene que

$$\Big|\|\sum_{i=1}^{k} a_i\mathcal{E}(s_i)\|_W - \|\sum_{i=1}^{k} a_ie_i\|_\ell\Big| < \varepsilon_{n_1}$$

donde $\text{mín}(s_1) = m_{n_1}$ para algún $n_1 \in \mathbb{N}$, para todo $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$. Recordemos que, para cada $\ell \in \{n,m\}$, se tiene que

$$\|\sum_{i=1}^{k} a_ie_i\|_\ell = \lim_{Bl^k([M]^\ell)\ni S\to\infty} \|\sum_{i=1}^{k} a_i\mathcal{E}(s_i)\|_W$$

para cada $k \in \mathbb{N}$ y todo $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$ y

$$E_\ell = [\{e_i : i \in \mathbb{N}\}] \text{ respecto a la norma } \|\cdot\|_\ell.$$

Por los cálculos anteriores y suponiendo que $(a_i)_{i=1}^k$ satisface que $1 \geq a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_k \geq 0$ con $k \in \mathbb{N}$, se concluye que

$$\|\sum_{i=1}^{k} a_ie_i\|_m = \begin{cases} a_1 & \text{si } \frac{m+1}{2}a_1 \geq \frac{n+1}{2n}h((a_i)_{i=1}^k), \\ \frac{n+1}{(m+1)n}h((a_i)_{i=1}^k) & \text{si } \frac{m+1}{2}a_1 \leq \frac{n+1}{2n}h((a_i)_{i=1}^k), \end{cases}$$

$$\text{recordando que } h((a_i)_{i=1}^k) = \text{mín}\{m\sum_{i=1}^{k} a_i, m\sum_{i=1}^{q} a_i + ra_{q+1}\};\ \text{y}$$

$$\|\sum_{i=1}^{k} a_ie_i\|_n = a_1.$$

En particular, se tiene que para todo $k \in \mathbb{N}$

$$\|\sum_{i=1}^{k} e_i\|_m = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 1, \\ \frac{mk(n+1)}{(m+1)n} & \text{si } 1 < k \leq q, \\ \frac{n+1}{m+1} & \text{si } q < k, \end{cases}$$

$$\|\sum_{i=1}^{k} e_i\|_n = 1.$$

Además, por la desigualdad (4.3.1) y propiedades del límite, para cada $k \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$\| \sum_{i=1}^{k} a_i e_i \|_n \leq \| \sum_{i=1}^{k} a_i e_i \|_m \leq \frac{n+1}{m+1} \| \sum_{i=1}^{k} a_i e_i \|_n$$

para todo $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$.

Por lo tanto, los modelos dispersos generados por $(e_i)_{i\in M}$ respecto a las barreras $[M]^m$ y $[M]^n$ poseen distintas normas que resultan ser equivalentes. Lo cual implica que $(E_m, \|\cdot\|_m)$ y $(E_n, \|\cdot\|_n)$ son espacios de Banach isomorfos.

El siguiente ejemplo muestra que en general un modelo asintótico por bloques no es disperso.

Ejemplo 4.3.3. Consideremos la base de Schauder $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ para el espacio de Banach anterior $(X_W, \|\cdot\|_W)$ con $m = 2$ y $n = 8$. De acuerdo con el Teorema 4.2.3 podemos encontrar $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ y una norma $\|\cdot\|_{2,8}$ tal que la sucesión $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ bajo dicha norma es $([M]^2, [M]^8, \ldots, [M]^2, [M]^8, \ldots)$-modelo asintótico por bloques de $(e_i)_{i\in M}$.

Antes de probar que $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ no es una sucesión dispersa en la norma $\|\cdot\|_{2,8}$, recordemos que

$$\| \sum_{i=1}^{2k-1} a_i e_i \|_{2,8} = \lim_{Bl([M]^2,[M]^8,\ldots,[M]^8,[M]^2)\ni\{s_1,\ldots,s_{2k-1}\}\to\infty} \| \sum_{i=1}^{2k-1} a_i \mathcal{E}(s_i) \|_W \text{ y}$$

$$\| \sum_{i=1}^{2k} a_i e_i \|_{2,8} = \lim_{Bl([M]^2,[M]^8,\ldots,[M]^2,[M]^8)\ni\{s_1,\ldots,s_{2k}\}\to\infty} \| \sum_{i=1}^{2k} a_i \mathcal{E}(s_i) \|_W,$$

para cada $k \in \mathbb{N}$ y cualquier $(a_i)_{i=1}^{2k} \in [-1,1]^{2k}$. También tengamos presente, como se mostró en el ejemplo previo, que para cada $k \in \mathbb{N}$, todo $S = \{s_1, \ldots, s_k\} \in Bl^k([\mathbb{N}]^2)$ y todo $T = \{t_1, \ldots, t_k\} \in Bl^k([\mathbb{N}]^8)$ resulta que

$$\| \sum_{i=1}^{k} a_i \mathcal{E}(s_i) \|_W = \begin{cases} a_1 & \text{si } \frac{3}{2}a_1 \geq \frac{9}{8}\sum_{i=1}^{\min\{k,4\}} a_i, \\ \frac{3}{4}\sum_{i=1}^{\min\{k,4\}} a_i & \text{si } \frac{3}{2}a_1 \leq \frac{9}{8}\sum_{i=1}^{\min\{k,4\}} a_i, \end{cases}$$

y

$$\| \sum_{i=1}^{k} a_i \mathcal{E}(t_i) \|_W = a_1,$$

para cualesquiera $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_k \geq 0$.

Ahora, observemos que

$$\begin{aligned} \|e_1 + e_3\|_{2,8} &= \lim_{Bl([M]^2,[M]^8,[M]^2)\ni\{s_1,s_2,s_3\}\to\infty} \|\mathcal{E}(s_1) + \mathcal{E}(s_3)\|_W \\ &= \lim_{Bl^2([M]^2)\ni\{s_1,s_2\}\to\infty} \|\mathcal{E}(s_1) + \mathcal{E}(s_2)\|_W \\ &= \lim_{Bl^2([M]^2)\ni\{s_1,s_2\}\to\infty} \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{y } \|e_2+e_4\|_{2,8} &= \lim_{Bl([M]^2,[M]^8,[M]^2,[M]^8)\ni\{s_1,s_2,s_3,s_4\}\to\infty} \|\mathcal{E}(s_2)+\mathcal{E}(s_4)\|_W \\ &= \lim_{Bl^2([M]^8)\ni\{t_1,t_2\}\to\infty} \|\mathcal{E}(t_1)+\mathcal{E}(t_2)\|_W \\ &= \lim_{Bl^2([M]^8)\ni\{t_1,t_2\}\to\infty} 1 = 1, \end{aligned}$$

lo cual muestra que la sucesión $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ no es dispersa.

Para finalizar esta sección, ejemplifiquemos que la equivalencia entre dos modelos asintóticos por bloques no preserva la propiedad de dispersión.

Ejemplo 4.3.4. Nuevamente, consideremos la base de Schauder $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ para el anterior espacio de Banach $(X_W, \|\cdot\|_W)$, con $m = 2$ y $n = 8$. Por el Teorema 4.2.3 podemos encontrar un conjunto $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ tal que la sucesión $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ con la norma $\|\cdot\|_8$ es un $[M]^8-$modelo disperso de $(e_i)_{i\in M}$ y $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ con la norma $\|\cdot\|_{2,2,8}$ un $([M]^2,[M]^2,[M]^8,\ldots)-$modelo asintótico por bloques de $(e_i)_{i\in M}$. Recordemos como están dadas las normas anteriores:

$$\|\sum_{i=1}^k a_ie_i\|_8 = \lim_{Bl^k([M]^8)\ni\{s_1,\ldots,s_k\}\to\infty} \|\sum_{i=1}^k a_i\mathcal{E}(s_i)\|_W \tag{4.3.2}$$

$$\|\sum_{i=1}^k a_ie_i\|_{2,2,8} = \lim_{Bl([M]^2,[M]^2,[M]^8,\ldots,[M]^8)\ni\{s_1,\ldots,s_k\}\to\infty} \|\sum_{i=1}^k a_i\mathcal{E}(s_i)\|_W \tag{4.3.3}$$

para cada $k \in \mathbb{N}$ y todo $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$.

Mostraremos que estos dos modelos asintóticos por bloques son equivalentes, pero solo uno de ellos es una sucesión dispersa. Para ello analizaremos las normas $\|\cdot\|_8$ y $\|\cdot\|_{2,2,8}$ a través de las identidades (4.3.3) y (4.3.2).

En el Ejemplo 4.3.1 se establece que $\|\sum_{i=1}^k a_i\mathcal{E}(t_i)\|_W = \max\{|a_i| : i \le k\}$ para cada $k \in \mathbb{N}$, cualquier $T = \{t_1,\ldots,t_k\} \in Bl^k([M]^8)$ y toda $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$. Lo cual implica que

$$\|\sum_{i=1}^k a_ie_i\|_8 = \max\{|a_i| : i \le k\} \tag{4.3.4}$$

para cualquier $k \in \mathbb{N}$ y toda $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$.

Por el primer inciso de la Observación 4.3.2 podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que los coeficientes de las combinaciones lineales de $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ son no negativos al calcular sus normas en $\|\cdot\|_W$.

Nuestro siguiente objetivo es encontrar una relación que nos permita comparar las normas $\|\cdot\|_8$ y $\|\cdot\|_{2,2,8}$. Para este fin estimaremos una cota inferior y una cota superior de la norma $\|\sum_{i=1}^k a_i\mathcal{E}(s_i)\|_W$ donde $S = \{s_1,\ldots,s_k\} \in Bl([M]^2,[M]^2,[M]^8,\ldots,[M]^8)$. Procederemos de manera creciente, iniciando con el caso $k = 2$, y en todas las instancias recurriremos a la fórmula $(*)$.

Para todo $S = \{s_1, s_2\} \in Bl^2([\mathbb{N}]^2)$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\|a_1\mathcal{E}(s_1) + a_2\mathcal{E}(s_2)\|_W &= \|a_1\left(\frac{\sum_{j=1}^2 e_{s_1(j)}}{\|\sum_{j=1}^2 e_{s_1(j)}\|_W}\right) + a_2\left(\frac{\sum_{j=1}^2 e_{s_2(j)}}{\|\sum_{j=1}^2 e_{s_2(j)}\|_W}\right)\|_W \\
&= \frac{2}{3}\|\sum_{j=1}^2 a_1 e_{s_1(j)} + \sum_{j=1}^2 a_2 e_{s_2(j)}\|_W \\
&= \frac{2}{3}\begin{cases} \frac{3}{2}\max\{a_1, a_2\} & \text{si } \frac{3}{2}\max\{a_1, a_2\} \geq \frac{9}{8}(a_1 + a_2), \\ \frac{9}{8}(a_1 + a_2) & \text{si } \frac{3}{2}\max\{a_1, a_2\} < \frac{9}{8}(a_1 + a_2), \end{cases} \\
&= \begin{cases} \max\{a_1, a_2\} & \text{si } \frac{3}{2}\max\{a_1, a_2\} \geq \frac{9}{8}(a_1 + a_2), \\ \frac{3}{4}(a_1 + a_2) & \text{si } \frac{3}{2}\max\{a_1, a_2\} < \frac{9}{8}(a_1 + a_2), \end{cases}
\end{aligned}$$

para toda $(a_i)_{i=1}^2 \in [0,1]^2$. Además, de la fórmula anterior se deduce que para cualquier $S \in Bl^2([\mathbb{N}]^2)$ se cumple la desigualdad

$$\max\{a_1, a_2\} \leq \|a_1\mathcal{E}(s_1) + a_2\mathcal{E}(s_2)\|_W \leq \frac{3}{2}\max\{a_1, a_2\}, \tag{4.3.5}$$

para toda $(a_i)_{i=1}^2 \in [0,1]^2$.

Ahora, si $S = \{s_1, s_2, s_3\} \in Bl([\mathbb{N}]^2, [\mathbb{N}]^2, [\mathbb{N}]^8)$, entonces

$$\begin{aligned}
\|\sum_{i=1}^3 a_i\mathcal{E}(s_i)\|_W &= \|a_1\left(\frac{\sum_{j=1}^2 e_{s_1(j)}}{\|\sum_{j=1}^2 e_{s_1(j)}\|_W}\right) + a_2\left(\frac{\sum_{j=1}^2 e_{s_2(j)}}{\|\sum_{j=1}^2 e_{s_2(j)}\|_W}\right) \\
&\quad + a_3\left(\frac{\sum_{j=1}^8 e_{s_3(j)}}{\|\sum_{j=1}^8 e_{s_3(j)}\|_W}\right)\|_W \\
&= \frac{2}{3}\|\sum_{j=1}^2 a_1 e_{s_1(j)} + \sum_{j=1}^2 a_2 e_{s_2(j)} + \sum_{j=1}^8 \frac{1}{3}a_3 e_{s_3(j)}\|_W
\end{aligned}$$

$$= \frac{2}{3}\begin{cases}
\frac{3}{2}a_1 & \text{si } a_1 \geq a_2 \geq \frac{1}{3}a_3 \text{ y } \frac{3}{2}a_1 \geq \frac{9}{8}(a_1 + a_2 + \frac{2}{3}a_3), \\
\frac{9}{8}(a_1 + a_2 + \frac{2}{3}a_3) & \text{si } a_1 \geq a_2 \geq \frac{1}{3}a_3 \text{ y } \frac{3}{2}a_1 < \frac{9}{8}(a_1 + a_2 + \frac{2}{3}a_3), \\
\frac{3}{2}a_1 & \text{si } a_1 \geq \frac{1}{3}a_3 \geq a_2 \text{ y } \frac{3}{2}a_1 \geq \frac{9}{8}(a_1 + a_3), \\
\frac{9}{8}(a_1 + a_3) & \text{si } a_1 \geq \frac{1}{3}a_3 \geq a_2 \text{ y } \frac{3}{2}a_1 < \frac{9}{8}(a_1 + a_3), \\
\frac{3}{2}a_2 & \text{si } a_2 \geq a_1 \geq \frac{1}{3}a_3 \text{ y } \frac{3}{2}a_2 \geq \frac{9}{8}(a_1 + a_2 + \frac{2}{3}a_3), \\
\frac{9}{8}(a_1 + a_2 + \frac{2}{3}a_3) & \text{si } a_2 \geq a_1 \geq \frac{1}{3}a_3 \text{ y } \frac{3}{2}a_2 < \frac{9}{8}(a_1 + a_2 + \frac{2}{3}a_3), \\
\frac{3}{2}a_2 & \text{si } a_2 \geq \frac{1}{3}a_3 \geq a_1 \text{ y } \frac{3}{2}a_2 \geq \frac{9}{8}(a_2 + a_3), \\
\frac{9}{8}(a_2 + a_3) & \text{si } a_2 \geq \frac{1}{3}a_3 \geq a_1 \text{ y } \frac{3}{2}a_2 < \frac{9}{8}(a_2 + a_3), \\
\frac{3}{2}a_3 & \text{si } \frac{1}{3}a_3 \geq a_1, a_2,
\end{cases}$$

$$= \begin{cases} a_1 & \text{si } a_1 \geq a_2 \geq \frac{1}{3}a_3 \text{ y } \frac{3}{2}a_1 \geq \frac{9}{8}(a_1 + a_2 + \frac{2}{3}a_3), \\ \frac{3}{4}(a_1 + a_2 + \frac{2}{3}a_3) & \text{si } a_1 \geq a_2 \geq \frac{1}{3}a_3 \text{ y } \frac{3}{2}a_1 < \frac{9}{8}(a_1 + a_2 + \frac{2}{3}a_3), \\ a_1 & \text{si } a_1 \geq \frac{1}{3}a_3 \geq a_2 \text{ y } \frac{3}{2}a_1 \geq \frac{9}{8}(a_1 + a_3), \\ \frac{3}{4}(a_1 + a_3) & \text{si } a_1 \geq \frac{1}{3}a_3 \geq a_2 \text{ y } \frac{3}{2}a_1 < \frac{9}{8}(a_1 + a_3), \\ a_2 & \text{si } a_2 \geq a_1 \geq \frac{1}{3}a_3 \text{ y } \frac{3}{2}a_2 \geq \frac{9}{8}(a_1 + a_2 + \frac{2}{3}a_3), \\ \frac{3}{4}(a_1 + a_2 + \frac{2}{3}a_3) & \text{si } a_2 \geq a_1 \geq \frac{1}{3}a_3 \text{ y } \frac{3}{2}a_2 < \frac{9}{8}(a_1 + a_2 + \frac{2}{3}a_3), \\ a_2 & \text{si } a_2 \geq \frac{1}{3}a_3 \geq a_1 \text{ y } \frac{3}{2}a_2 \geq \frac{9}{8}(a_2 + a_3), \\ \frac{3}{4}(a_2 + a_3) & \text{si } a_2 \geq \frac{1}{3}a_3 \geq a_1 \text{ y } \frac{3}{2}a_2 < \frac{9}{8}(a_2 + a_3), \\ a_3 & \text{si } \frac{1}{3}a_3 \geq a_1, a_2, \end{cases} \tag{4.3.6}$$

para toda $(a_i)_{i=1}^3 \in [0,1]^3$.

Enseguida procedemos a buscar una cota inferior y una cota superior para la norma anterior. Para ello fijemos $S \in Bl([\mathbb{N}]^2, [\mathbb{N}]^2, [\mathbb{N}]^8)$ y $(a_i)_{i=1}^3 \in [0,1]^3$, y analicemos todos los posibles órdenes del conjunto $\{a_1, a_2, a_3\}$. Empecemos con dos casos principales los cuales subdividiremos:

Para el primer caso supongamos que $a_3 = \max\{a_i : i \leq 3\}$. De la expresión (4.3.6) se puede ver que solo es posible que ocurran los siguientes subcasos:

Subcaso 1. Para $k, \ell \in \{1,2\}$ distintos, $a_k \geq a_\ell \geq \frac{1}{3}a_3$ y $\frac{3}{2}a_k < \frac{9}{8}(a_k + a_\ell + \frac{2}{3}a_3)$. Como $a_3 \geq a_1, a_2$ y $a_1, a_2 \geq \frac{1}{3}a_3$ resulta que

$$\begin{aligned} a_3 = \frac{3}{4}(\frac{1}{3}a_3 + \frac{1}{3}a_3 + \frac{2}{3}a_3) \leq \| \sum_{i=1}^{3} a_i \mathcal{E}(s_i) \|_W =& \frac{3}{4}(a_1 + a_2 + \frac{2}{3}a_3) \\ \leq& \frac{3}{4}(a_3 + a_3 + \frac{2}{3}a_3) = 2a_3. \end{aligned}$$

Subcaso 2. Para $k, \ell \in \{1,2\}$ distintos si $a_k \geq \frac{1}{3}a_3 \geq a_\ell$ y $\frac{3}{2}a_k < \frac{9}{8}(a_k + a_3)$, entonces

$$a_3 = \frac{3}{4}(\frac{1}{3}a_3 + a_3) \leq \| \sum_{i=1}^{3} a_i \mathcal{E}(s_i) \|_W = \frac{3}{4}(a_k + a_3) \leq \frac{3}{4}(a_3 + a_3) = \frac{3}{2}a_3.$$

Subcaso 3. Cuando $\frac{1}{3}a_3 \geq a_1, a_2$ sabemos que $\| \sum_{i=1}^{3} a_i \mathcal{E}(s_i) \|_W = a_3$.
En consecuencia, se satisface que

$$\max\{a_i : i \leq 3\} = a_3 \leq \| \sum_{i=1}^{3} a_i \mathcal{E}(s_i) \|_W \leq 2a_3 = 2 \max\{a_i : i \leq 3\}.$$

En el segundo caso supongamos que $a_k = \max\{a_i : i \leq 3\}$ para $k \in \{1,2\}$. Así que la norma del vector $\sum_{i=1}^{3} a_i \mathcal{E}(s_i)$ se puede estimar en los subcasos que a continuación examinaremos.

Subcaso 1. Si $a_k \geq a_\ell \geq \frac{1}{3}a_3$ y $\frac{3}{2}a_k \geq \frac{9}{8}(a_k + a_\ell + \frac{2}{3}a_3)$ con $\ell \in \{1,2\}$ y $k \neq \ell$, entonces

$$\| \sum_{i=1}^{3} a_i \mathcal{E}(s_i) \|_W = a_k.$$

Subcaso 2. Cuando $a_k \geq a_\ell \geq \frac{1}{3}a_3$ y $\frac{3}{2}a_k < \frac{9}{8}(a_k + a_\ell + \frac{2}{3}a_3)$ con $\ell \in \{1, 2\}$ y $k \neq \ell$, directamente de la suposición inicial se cumple la condición

$$\|\sum_{i=1}^{3} a_i \mathcal{E}(s_i)\|_W = \frac{3}{4}(a_1 + a_2 + \frac{2}{3}a_3) \leq \frac{3}{4}(a_k + a_k + \frac{2}{3}a_k) = 2a_k.$$

De la desigualdad $\frac{3}{2}a_k < \frac{9}{8}(a_k + a_\ell + \frac{2}{3}a_3)$ podemos ver que $\frac{1}{3}a_k < a_\ell + \frac{2}{3}a_3$ y por ende

$$a_k = \frac{3}{4}(a_k + \frac{1}{3}a_k) \leq \frac{3}{4}(a_k + a_\ell + \frac{2}{3}a_3) = \|\sum_{i=1}^{3} a_i \mathcal{E}(s_i)\|_W.$$

Subcaso 3. Si $a_k \geq \frac{1}{3}a_3 \geq a_\ell$ y $\frac{3}{2}a_k \geq \frac{9}{8}(a_k + a_3)$ con $\ell \in \{1, 2\}$ y $k \neq \ell$, entonces

$$\|\sum_{i=1}^{3} a_i \mathcal{E}(s_i)\|_W = a_k.$$

Subcaso 4. Cuando $a_k \geq \frac{1}{3}a_3 \geq a_\ell$ y $\frac{3}{2}a_k < \frac{9}{8}(a_k + a_3)$ con $\ell \in \{1, 2\}$ y $k \neq \ell$, sabemos que

$$\|\sum_{i=1}^{3} a_i \mathcal{E}(s_i)\|_W = \frac{3}{4}(a_k + a_3) \leq \frac{3}{4}(a_k + a_k) = \frac{3}{2}a_k,$$

ya que $a_k \geq a_3$. La condición $\frac{3}{2}a_k < \frac{9}{8}(a_k + a_3)$ implica la desigualdad $\frac{1}{3}a_k < a_3$ y consecuentemente

$$a_k = \frac{3}{4}(a_k + \frac{1}{3}a_k) \leq \frac{3}{4}(a_k + a_3) = \|\sum_{i=1}^{3} a_i \mathcal{E}(s_i)\|_W.$$

Los subcasos del segundo caso que hemos visto nos conducen a la estimación

$$\text{máx}\{a_i : i \leq 3\} = a_k \leq \|\sum_{i=1}^{3} a_i \mathcal{E}(s_i)\|_W \leq 2a_k = 2\,\text{máx}\{a_i : i \leq 3\}.$$

Después de tomar en cuenta todos los posibles casos podemos concluir que para cada $S \in Bl([\mathbb{N}]^2, [\mathbb{N}]^2, [\mathbb{N}]^8)$ la propiedad

$$\text{máx}\{a_i : i \leq 3\} \leq \|\sum_{i=1}^{3} a_i \mathcal{E}(s_i)\|_W \leq 2\,\text{máx}\{a_i : i \leq 3\} \tag{4.3.7}$$

es válida para todo $(a_i)_{i=1}^3 \in [0, 1]^3$.

Veamos que se obtiene una condición similar a la anterior cuando $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ pertenece a $Bl([\mathbb{N}]^2, [\mathbb{N}]^2, [\mathbb{N}]^8, [\mathbb{N}]^8)$. Para esta S sabemos que

$$\begin{aligned}
\|\sum_{i=1}^{4} a_i \mathcal{E}(s_i)\|_W &= \|\sum_{i=1}^{2} a_i \left(\frac{\sum_{j=1}^{2} e_{s_i(j)}}{\|\sum_{j=1}^{2} e_{s_i(j)}\|_W}\right) + \sum_{i=3}^{4} a_i \left(\frac{\sum_{j=1}^{8} e_{s_i(j)}}{\|\sum_{j=1}^{8} e_{s_i(j)}\|_W}\right)\|_W \\
&= \frac{2}{3}\|\sum_{j=1}^{2} a_1 e_{s_1(j)} + \sum_{j=1}^{2} a_2 e_{s_2(j)} + \sum_{j=1}^{8} \frac{1}{3} a_3 e_{s_3(j)} + \sum_{j=1}^{8} \frac{1}{3} a_4 e_{s_4(j)})\|_W
\end{aligned}$$

para toda $(a_i)_{i=1}^4 \in [0,1]^4$. Fijemos un elemento $S \in Bl([\mathbb{N}]^2, [\mathbb{N}]^2, [\mathbb{N}]^8, [\mathbb{N}]^8)$ y analicemos la norma

$$\|\sum_{j=1}^{2} a_1 e_{s_1(j)} + \sum_{j=1}^{2} a_2 e_{s_2(j)} + \sum_{j=1}^{8} \frac{1}{3} a_3 e_{s_3(j)} + \sum_{j=1}^{8} \frac{1}{3} a_4 e_{s_4(j)}\|_W$$

para cada $(a_i)_{i=1}^4 \in [0,1]^4$. Para ello examinemos dos casos: $a_4 \geq a_3$ y $a_3 \geq a_4$. Primero seleccionemos $(a_i)_{i=1}^4 \in [0,1]^4$ tal que $a_4 \geq a_3$. Por comodidad, en algunas ocasiones, denotaremos al vector $\sum_{j=1}^2 a_1 e_{s_1(j)} + \sum_{j=1}^2 a_2 e_{s_2(j)} + \sum_{j=1}^8 \frac{1}{3} a_3 e_{s_3(j)} + \sum_{j=1}^8 \frac{1}{3} a_4 e_{s_4(j)}$ por x. Fijemos $f = \frac{\ell+1}{2\ell} \sum_{i \in s} e_i^*$ con $s \in [\mathbb{N}]^\ell$ para algún $\ell \in \{1, 2, 8\}$. Observemos que si $s \cap s_3 = \emptyset$, entonces

$$\begin{aligned} f(x) &= f\Big(\sum_{j=1}^{2} a_1 e_{s_1(j)} + \sum_{j=1}^{2} a_2 e_{s_2(j)} + \sum_{j1}^{8} \frac{1}{3} a_4 e_{s_4(j)}\Big) \\ &\leq \|\sum_{j=1}^{2} a_1 e_{s_1(j)} + \sum_{j=1}^{2} a_2 e_{s_2(j)} + \sum_{j=1}^{8} \frac{1}{3} a_4 e_{s_4(j)}\|_W. \end{aligned}$$

Cuando $s \cap s_3 \neq \emptyset$, podemos tomar un subconjunto t de $s_4 \backslash s$ con cardinalidad $|s \cap s_3|$ y la función $g = \frac{\ell+1}{2\ell} \sum_{i \in t \cup (s \backslash s_3)} e_i^*$, de tal suerte que

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\ell+1}{2\ell} \left[\frac{|s \cap s_3| a_3}{3} + \sum_{i \in (s \backslash s_3)} e_i^*\Big(x - \sum_{j=1}^{8} \frac{1}{3} a_3 e_{s_3(j)}\Big) \right] \\ &\leq \frac{\ell+1}{2\ell} \left[\frac{|t| a_4}{3} + \sum_{i \in (s \backslash s_3)} e_i^*\Big(x - \sum_{j=1}^{8} \frac{1}{3} a_3 e_{s_3(j)}\Big) \right] \\ &= \frac{\ell+1}{2\ell} \sum_{i \in t \cup (s \backslash s_3)} e_i^*\Big(x - \sum_{j=1}^{8} \frac{1}{3} a_3 e_{s_3(j)}\Big) \\ &= g\Big(x - \sum_{j=1}^{8} \frac{1}{3} a_3 e_{s_3(j)}\Big) \\ &\leq \|\sum_{j=1}^{2} a_1 e_{s_1(j)} + \sum_{j=1}^{2} a_2 e_{s_2(j)} + \sum_{j=1}^{8} \frac{1}{3} a_4 e_{s_4(j)})\|_W. \end{aligned}$$

De aquí obtenemos que

$$\begin{aligned} \|\sum_{j=1}^{2} a_1 e_{s_1(j)} &+ \sum_{j=1}^{2} a_2 e_{s_2(j)} + \sum_{j=1}^{8} \frac{1}{3} a_3 e_{s_3(j)} + \sum_{j=1}^{8} \frac{1}{3} a_4 e_{s_4(j)}\|_W \\ &\leq \|\sum_{j=1}^{2} a_1 e_{s_1(j)} + \sum_{j=1}^{2} a_2 e_{s_2(j)} + \sum_{j=1}^{8} \frac{1}{3} a_4 e_{s_4(j)}\|_W. \end{aligned}$$

Como $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ en $(X_W, \|\cdot\|_W)$ es una base de Schauder con constante de base uno y una sucesión dispersa, tal y como se indica en el tercer inciso de la Observación 4.3.2, entonces si tomamos $s \in [\mathbb{N}]^8$ con $s > s_4$ la condición

$$\begin{aligned}\| \sum_{j=1}^{2} a_1 e_{s_1(j)} + & \sum_{j=1}^{2} a_2 e_{s_2(j)} + \sum_{j=1}^{8} \frac{1}{3} a_3 e_{s_3(j)} + \sum_{j=1}^{8} \frac{1}{3} a_4 e_{s_4(j)} \|_W \\ &= \| \sum_{j=1}^{2} a_1 e_{s_1(j)} + \sum_{j=1}^{2} a_2 e_{s_2(j)} + \sum_{j=1}^{8} \frac{1}{3} a_4 e_{s_4(j)} + \sum_{j=1}^{8} \frac{1}{3} a_3 e_{s(j)} \|_W \\ &\geq \| \sum_{j=1}^{2} a_1 e_{s_1(j)} + \sum_{j=1}^{2} a_2 e_{s_2(j)} + \sum_{j=1}^{8} \frac{1}{3} a_4 e_{s_4(j)} \|_W\end{aligned}$$

es válida para toda $(a_i)_{i=1}^4 \in [0,1]^4$. Así, podemos concluir que

$$\begin{aligned}\| a_1 (\sum_{j=1}^{2} e_{s_1(j)}) + a_2 (\sum_{j=1}^{2} e_{s_2(j)}) + \frac{1}{3} a_3 (\sum_{j=1}^{8} e_{s_3(j)}) + \frac{1}{3} a_4 (\sum_{j=1}^{8} e_{s_4(j)}) \|_W \\ = \| a_1 (\sum_{j=1}^{2} e_{s_1(j)}) + a_2 (\sum_{j=1}^{2} e_{s_2(j)}) + \frac{1}{3} a_3 (\sum_{j=1}^{8} e_{s_3(j)}) \|_W\end{aligned}$$

para toda $(a_i)_{i=1}^4 \in [0,1]^4$ con $a_4 \geq a_3$. Para nuestro segundo caso, procediendo de manera similar al caso anterior, llegamos a que

$$\begin{aligned}\| a_1 (\sum_{j=1}^{2} e_{s_1(j)}) + a_2 (\sum_{j=1}^{2} e_{s_2(j)}) + \frac{1}{3} a_3 (\sum_{j=1}^{8} e_{s_3(j)}) + \frac{1}{3} a_4 (\sum_{j=1}^{8} e_{s_4(j)}) \|_W \\ = \| a_1 (\sum_{j=1}^{2} e_{s_1(j)}) + a_2 (\sum_{j=1}^{2} e_{s_2(j)}) + \frac{1}{3} a_3 (\sum_{j=1}^{8} e_{s_3(j)}) \|_W,\end{aligned}$$

para toda $(a_i)_{i=1}^4 \in [0,1]^4$ con $a_3 \geq a_4$. Por lo tanto, para todo $S \in Bl([\mathbb{N}]^2, [\mathbb{N}]^2, [\mathbb{N}]^8, [\mathbb{N}]^8)$ se tiene que

$$\| \sum_{i=1}^{4} a_i \mathcal{E}(s_i) \|_W = \begin{cases} \| a_1 \mathcal{E}(s_1) + a_2 \mathcal{E}(s_2) + a_3 \mathcal{E}(s_3) \|_W & \text{si } a_3 \geq a_4, \\ \| a_1 \mathcal{E}(s_1) + a_2 \mathcal{E}(s_2) + a_4 \mathcal{E}(s_4) \|_W & \text{si } a_4 \geq a_3, \end{cases}$$

para toda $(a_i)_{i=1}^4 \in [0,1]^4$. La identidad previa y la desigualdad (4.3.7) nos permite inferir que cualquier $S \in Bl([\mathbb{N}]^2, [\mathbb{N}]^2, [\mathbb{N}]^8, [\mathbb{N}]^8)$ satisface la desigualdad

$$\text{máx}\{a_i : i \leq 4\} \leq \| \sum_{i=1}^{4} a_i \mathcal{E}(s_i) \|_W \leq 2\, \text{máx}\{a_i : i \leq 4\}, \tag{4.3.8}$$

para toda $(a_i)_{i=1}^4 \in [0,1]^4$.

El caso $k = 4$ nos conduce a generalizar algunas características de la norma de los vectores que nos interesan:
Para cada $k \in \mathbb{N}/3$ y todo $S = \{s_1, \ldots, s_k\} \in Bl([\mathbb{N}]^2, [\mathbb{N}]^2, [\mathbb{N}]^8, \ldots, [\mathbb{N}]^8)$ resulta que

$$\| \sum_{i=1}^{k} a_i \mathcal{E}(s_i) \|_W = \begin{cases} \| a_1 \mathcal{E}(s_1) + a_2 \mathcal{E}(s_2) + a_3 \mathcal{E}(s_3) \|_W & \text{si } a_3 = \text{máx}\{a_j :\ 3 \leq j \leq k\}, \\ \| a_1 \mathcal{E}(s_1) + a_2 \mathcal{E}(s_2) + a_4 \mathcal{E}(s_4) \|_W & \text{si } a_4 = \text{máx}\{a_j :\ 3 \leq j \leq k\}, \\ \vdots & \\ \| a_1 \mathcal{E}(s_1) + a_2 \mathcal{E}(s_2) + a_k \mathcal{E}(s_k) \|_W & \text{si } a_k = \text{máx}\{a_j :\ 3 \leq j \leq k\}, \end{cases}$$

y, en consecuencia, se cumple la relación

$$\text{máx}\{a_i : i \leq k\} \leq \|\sum_{i=1}^{k} a_i \mathcal{E}(s_i)\|_W \leq 2\,\text{máx}\{a_i : i \leq k\}, \tag{4.3.9}$$

para toda $(a_i)_{i=1}^k \in [0,1]^k$.

Debido a las desigualdades (4.3.5), (4.3.7), (4.3.8) y (4.3.9) y a las identidades (4.3.3) y (4.3.4) se concluye que

$$\|\sum_{i=1}^{k} a_i e_i\|_8 \leq \|\sum_{i=1}^{k} a_i e_i\|_{2,2,8} \leq 2\|\sum_{i=1}^{k} a_i e_i\|_8$$

para cada $k \in \mathbb{N}$ y toda $(a_i)_{i=1}^k \in [-1,1]^k$, es decir, $((e_i)_{i\in\mathbb{N}}, \|\cdot\|_8)$ y $((e_i)_{i\in\mathbb{N}}, \|\cdot\|_{2,2,8})$ son equivalentes como sucesiones básicas.

Sabemos por el Lema 4.2.2 que $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión dispersa bajo la norma $\|\cdot\|_8$. Sin embargo, si consideramos los vectores $e_1 + e_2$ y $e_3 + e_4$ resulta que

$$\begin{aligned}
\|e_1 + e_2\|_{2,2,8} &= \lim_{Bl^2([M]^2,[M]^2)\ni\{s_1,s_2\}\to\infty} \|\mathcal{E}(s_1) + \mathcal{E}(s_2)\|_W \\
&= \lim_{Bl^2([M]^2,[M]^2)\ni S\to\infty} \frac{3}{2} \\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\|e_3 + e_4\|_{2,2,8} &= \lim_{Bl([M]^2,[M]^2,[M]^8,[M]^8)\ni\{s_1,s_2,s_3,s_4\}\to\infty} \|\mathcal{E}(s_3) + \mathcal{E}(s_4)\|_W \\
&= \lim_{Bl^2([M]^8,[M]^8)\ni\{t_1,t_2\}\to\infty} \|\mathcal{E}(t_1) + \mathcal{E}(t_2)\|_W \\
&= \lim_{Bl^2([M]^2,[M]^2)\ni T\to\infty} \text{máx}\{1,1\} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Entonces la sucesión $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ bajo la norma $\|\cdot\|_{2,2,8}$ no posee la propiedad de dispersión.

4.4 Modelo disperso por bloques de una partición especial infinita

En está sección vamos a describir otro tipo de modelo disperso (comparar con las Definiciones 4.1.1 y 4.2.1). Modelos más generales que estos, llamados "*strong asymptotic models*", fueron introducidos y estudiados en el artículo [18], en donde los autores emplearon matrices cuyas filas son sucesiones básicas de un mismo espacio de Banach y que denominan "*strong basic array*".

Definición 4.4.1. Dada una sucesión básica normalizada $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ y una partición $P = \{p_i : i \in \mathbb{N}\} \in \langle\omega\rangle^\omega$ de $\mathbb{N}$. Una base de Schauder $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ para el espacio de Banach $(Y, \|\cdot\|_Y)$ es un *P-modelo disperso* de $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ si existen una sucesión $\varepsilon_i \searrow 0$ tal que para toda $k \in \mathbb{N}$ siempre que $S = \{s_1, \ldots, s_k\} \in \langle P \setminus \{p_i\}_{i\leq k-1}\rangle^k$ se cumple la condición

$$\left| \| \sum_{i=1}^{k} a_i \mathcal{X}(s_i) \| - \| \sum_{i=1}^{k} a_i y_i \|_Y \right| < \varepsilon_{\text{mín}\{i : p_i \subseteq s_1\}},$$

para cada $(a_i)_{i=1}^k \in [-1, 1]^k$.

Modificando la demostración del Teorema 4.2.2 se justifica el adjetivo disperso en la definición anterior.

A este punto, el lector debe estar ya familiarizado con la técnica empleada para probar la existencia de los modelos dispersos y los modelos asintóticos por bloques expuestos en este texto. La demostración del siguiente teorema sigue la misma metodología gracias al Lema 3.3.4.

Teorema 4.4.2. *Si $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica normalizada en un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ y $Q \in \langle\omega\rangle^\omega \cap \mathsf{P}(\mathbb{N})$, entonces existen $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ y $P \in \langle Q\rangle^\omega \cap \mathsf{P}(M)$ tales que $(x_i)_{i\in M}$ genera un $P-$modelo disperso.*

Aunque esta última sección es muy breve nos ofrece nuevas líneas de investigación, las cuales no estuvieron contempladas en el objetivo de esta tesis.

Conclusiones

En esta tesis se introdujo la noción de oscilación bloque estable de una sucesión normalizada en un espacio de Banach, cuyo origen fue motivado por el concepto de oscilación estable y el importante papel que las subsucesiones bloque han desempeñado en el estudio de los espacios de Banach con una base de Schauder.

Se encontró una generalización del famoso Teorema de Ramsey por medio de la propiedad de Ramsey no nula y el concepto de familia de bloques generada por una sucesión finita de barreras, al cual denominamos Teorema de Ramsey sobre bloques de barreras. Dicho resultado nos permitió presentar la idea de oscilación bloque estable como una aplicación de los teoremas de tipo Ramsey al Análisis Funcional. De hecho, se estableció una equivalencia entre el Teorema de Ramsey, el Teorema de Ramsey sobre bloques de barreras, la existencia de sucesiones con la propiedad de oscilación bloque estable y otros resultados que se enuncian a continuación.

Teorema ★ . *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) *Teorema de Ramsey.*

(2) *Teorema de Ramsey para Analistas.*

(3) *Teorema de Ramsey sobre Barreras.*

(4) *Teorema de Ramsey sobre bloques de barreras: Sean* $k \in \mathbb{N}/1$ *y una sucesión de barreras* $(\mathcal{B}_i)_{i=1}^k$ *en* $\mathbb{N}$*. Para cualquier coloración* $\varphi : Bl(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_k) \longrightarrow \{1, \dots, q\}$*, con* $q \in \mathbb{N}$*, existen* $i \leq q$ *y* $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ *tal que* $Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_M, \dots, \mathcal{B}_k \restriction_M) \subseteq \varphi^{-1}(i)$*.*

(5) *Teorema de Ramsey sobre Bloques de Barreras para Analistas: Sean* (X, d) *un espacio métrico totalmente acotado,* $k \in \mathbb{N}/1$ *y* $(\mathcal{B}_i)_{i=1}^k$ *una sucesión de barreras en* $\mathbb{N}$*. Para toda coloración* $\varphi : Bl(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_k) \to X$ *y cada* $\varepsilon > 0$ *encontramos* $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ *tal que* $d(\varphi(S), \varphi(T)) < \varepsilon$ *si* $S, T \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_M, \dots, \mathcal{B}_k \restriction_M)$*.*

(6) *Sean* $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *una sucesión normalizada de un espacio de Banach* $(X, \|\cdot\|)$ *y* $k \in \mathbb{N}/1$*. Para cada sucesión de barreras* $(\mathcal{B}_i)_{i=1}^k$ *en* $\mathbb{N}$ *y cada* $\varepsilon > 0$*, podemos hallar* $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ *tal que* $(x_i)_{i\in M}$ *es* $((\mathcal{B}_i \restriction_M)_{i=1}^k, \varepsilon)-$*oscilación bloque estable.*

(7) *Sea* $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *una sucesión normalizada de un espacio de Banach* $(X, \|\cdot\|)$*. Para cada sucesión de barreras* $(\mathcal{B}_i)_{i=1}^k$ *en* $\mathbb{N}$ *podemos encontrar* $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ *tal que* $(x_i)_{i\in M}$ *es* $(\mathcal{B}_i \restriction_M)_{i=1}^k-$*oscilación bloque asintótica estable.*

(8) *Sea* $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *una sucesión normalizada de un espacio de Banach* $(X, \|\cdot\|)$*. Para cada sucesión de barreras* $(\mathcal{B}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *en* $\mathbb{N}$ *existe* $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ *tal que la subsucesión* $(x_i)_{i\in M}$ *es* $(\mathcal{B}_i \restriction_M)_{i\in\mathbb{N}}-$*oscilación bloque asintótica estable.*

Como el conjunto $[\mathbb{N}]^1$ es una barrera en $\mathbb{N}$ resulta que las definiciónes $(([\mathbb{N}]^1)_{i=1}^k, \varepsilon)-$oscilación bloque estable y $(k, \varepsilon)-$oscilación estable coinciden. En consecuencia el Teorema anterior generaliza la equivalencia entre el Teorema de Ramsey para $[\mathbb{N}]^k$ y la existencia de una subsucesión que es $(k, \varepsilon)-$oscilación estable para toda sucesión normalizada en un espacio de Banach.

El teorema de Brunel-Sucheston presentado en la primera sección del cuarto capítulo testifica que detrás de la existencia de los modelos dispersos se encuentran las $(k, \varepsilon)-$oscilaciones estables. Este hecho nos condujo a considerar modelos asintóticos relacionados con las oscilaciones bloque estables, es decir, cuyo comportamiento este determinado por bloques de barreras. Dando como resultado la introducción de la noción de modelo asintótico por bloques de una sucesión básica normalizada.

Definición 4.2.1. Sean $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión básica normalizada en un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|_X)$ y $(\mathcal{B}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de barreras en $\mathbb{N}$. Una base de Schauder $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ para un espacio de Banach $(Y, \|\cdot\|_Y)$ es un $(\mathcal{B}_i)_{i\in\mathbb{N}}-$*modelo asintótico por bloques* de $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ si existe $\varepsilon_i \searrow 0$ tal que para cada $k \in \mathbb{N}$ y cualquier $S = \{s_1, \ldots, s_k\} \in Bl(\mathcal{B}_1 \restriction_{\mathbb{N}/(k-1)}, \ldots, \mathcal{B}_k \restriction_{\mathbb{N}/(k-1)})$ se tiene que

$$\Big| \| \sum_{j=1}^{k} a_j \mathcal{X}(s_j) \|_X - \| \sum_{j=1}^{k} a_j y_j \|_Y \Big| < \varepsilon_{\mathrm{mín}(s_1)},$$

para toda $(a_i)_{i=1}^k \in [-1, 1]^k$.

Además, se probó la existencia de dichos modelos a través de un teorema similar al Teorema de Brunel-Sucheston que resultó ser equivalente a las afirmaciones enunciadas en el Teorema ★.

Teorema 4.2.3. *Para toda sucesión básica normalizada $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ y toda sucesión $(\mathcal{B}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de barreras en $\mathbb{N}$, existe $M \in [\mathbb{N}]^\omega$ tal que la subsucesión $(x_i)_{i\in M}$ induce una norma $|||\cdot|||$ en el espacio c_{00} tal que $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es un $(\mathcal{B}_i \restriction_M)_{i\in\mathbb{N}}$-modelo asintótico por bloques de $(x_i)_{i\in M}$.*

Nos gustaría resaltar que debido al resultado anterior es posible obtener una diversidad de modelos asintóticos por bloques de una misma sucesión básica usando diferentes sucesiones de barreras. Muestra de ello es el Ejemplo 4.3.1, donde se observó que los modelos obtenidos tienen normas distintas. Cabe mencionar que los modelos asintóticos por bloques incluyen a los modelos dispersos clásicos, lo cual convierte al Teorema de Brunel-Sucheston en un caso particular del Teorema 4.2.3. Se demostró, por contraejemplo, que los modelos asintóticos por bloques en general no son dispersos. Sin embargo, cuando la sucesión de barreras asociada a estos es constante se asegura que poseen la propiedad dispersión. También se mostró mediante un ejemplo que la dispersión entre modelos equivalentes no necesariamente se preserva.

Bibliografía

[1] S. A. Argyros and S. Todorcevic. *Ramsey Methods in Analysis.* Springer Science & Business Media, 2005.

[2] A. Brunel and L. Sucheston. "On B-convex Banach spaces". In: *Mathematical Systems Theory, Springer* 7.3 (1973), pp. 294–299.

[3] E. A. Calderón García. «Aplicaciones de Combinatoria Infinita a espacios de Banach». Tesis doct. Universidad Nacional Autónoma de México, mayo de 2016.

[4] E. A. Calderon-Garcia and S. Garcia-Ferreira. "Asymptotic models via Plegma families". In: *preprint arXiv:1806.08749* (2018).

[5] N. L. Carothers. *A short course on Banach space theory.* Vol. 64. Cambridge University Press, 2005.

[6] B. Cascales and G. Vera. "Norming sets and compactness". In: *The Rocky Mountain Journal of Mathematics* 25.3 (1995), pp. 919–925.

[7] K. Ciesielski. *Set Theory for the Working Mathematician.* Vol. 39. Cambridge University Press, 1997.

[8] J. B. Conway. *A course in Functional Analysis.* Vol. 96. Graduate Text in Mathematics, Springer-Verlag, 1985.

[9] C. A. Di Prisco y J. López-Abad. *Teoría de Ramsey y espacios de Banach.* Ediciones del Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas, 2006.

[10] J. Distel. *Sequences and series in Banach spaces.* Vol. 92. Graduated Text in Mathematics, Springer-Verlag, 1984.

[11] P. Enflo. "A counterexample to the approximation problem in Banach Spaces". In: *Acta Mathematica, Institut Mittag-Leffler* 130 (1973), pp. 309–317.

[12] R. Engelking. *General Topology.* Vol. 6. Sigma Series in Pure Mathematics, Heldermann Verlag, 1989.

[13] J. Farahat. "Espaces de Banach contenant ℓ^1, d'après H.P. Rosenthal". In: *Séminaire Analyse fonctionnelle (dit" Maurey-Schwartz")* (1974), pp. 1–6.

[14] T. Figiel and W. B. Johnson. "A uniformly convex Banach space which contains no ℓ_p". In: *Compositio Mathematica* 29.2 (1974), pp. 179–190.

[15] S. Garcia-Ferreira y A. C. Hernandez-Soto. «Estabilidad oscilatoria en espacios de Banach y Teoremas de tipo Ramsey». En: *Matemáticas y sus Aplicaciones, BUAP* (2020). En prensa.

[16] S. Garcia-Ferreira and A. C. Hernandez-Soto. *Ramsey Property and Block Oscillation Stability on Normalized Sequences in Banach Spaces.* Manuscrito en proceso.

[17] S. Guerre-Delabriere. *Classical sequences in Banach spaces.* Vol. 166. CRC Press, 1992.

[18] L. Halbeisen and E. Odell. "On Asymptotic models in Banach spaces". In: *Israel Journal of Mathematics* 139.1 (2004), pp. 253–291.

[19] N. Hindman. "Finite sums from sequences within cells of a partition of $\mathbb{N}$". In: *Journal of Combinatorial Theory, Series A* 17.1 (1974), pp. 1–11.

[20] W. Just and M. Weese. *Discovering modern Set Theory. I: The basics.* Vol. 8. Graduate studies in mathematics, American Mathematical Society, 1996.

[21] E. Kreyszig. *Introductory Functional Analysis with applications.* Vol. 1. Graduate studies in mathematics, New York: Wiley, 1978.

[22] J.L. Krivine. "Sous-espaces de dimension finie des espaces de Banach réticulés". In: *Annals of Mathematics, JSTOR* 104.1 (1976), pp. 1–29.

[23] J. Lopez-Abad and S. Todorcevic. "Pre-compact families of finite sets of integers and weakly null sequences in Banach spaces". In: *Topology and its Applications, Elsevier* 156.7 (2009), pp. 1396–1411.

[24] B. Maurey and H. P. Rosenthal. "Normalized weakly nullsequence with no unconditional sequence". In: *Studia Math* 61.1 (1977), pp. 77–98.

[25] K. R. Milliken. "Ramsey's theorem with sums or unions". In: *Journal of Combinatorial Theory, Series A* 18.3 (1975), pp. 276–290.

[26] C. S. J. Nash-Williams. "On well-quasi-ordering transfinite sequences". In: *In Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Cambridge University Press* 61.1 (1965), pp. 33–39.

[27] F. P. Ramsey. "On a problem of formal logic". In: *Classic Papers in Combinatorics, Springer* (2009), pp. 1–24.

[28] H. P. Rosenthal. "A characterization of Banach spaces containing ℓ_1". In: *Proceedings of the National Academy of Sciences* 71.6 (1974), pp. 2411–2413.

[29] Th. Schlumprecht. *Logic and Set Theory in Analysis Course Notes: Math 663-601, Fall 2006.* 2006. URL: http://www.math.tamu.edu/~schlump/publ.html.

[30] B. S. Tsirelson. "It is impossible to imbed ℓ_p or c_0 into an arbitrary Banach space". In: *Funktsional. Anal. i Prilozhen* 8 (1974), pp. 57–60.