Universidad Nacional Autónoma de México y Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas
UMSNH-UNAM

Estructuras + en funtores fibrados de biconjuntos e ideales en funtores de Green en biconjuntos

T E S I S

que para obtener el grado de

Doctor en Ciencias Matemáticas

presenta

José Miguel Calderón León

Asesor: Gerardo Raggi Cardenas

Asesor: Nadia Romero Romero

Morelia, Michoacán, México

Noviembre de 2023

Agradecimientos

Quiero expresar mi profundo agradecimiento a todas las personas e instituciones que hicieron posible la realización de esta tesis. Sin su apoyo, este trabajo no habría sido posible.
En primer lugar, quiero agradecer a mis directores de tesis, el Dr. Gerardo Raggi y la Dra. Romero, por su orientación, paciencia y dedicación a lo largo de todo el proceso de investigación. Su comprensión y empatía durante estos 4 años fueron fundamentales. Sus conocimientos e indicaciones no solo contribuyeron al desarrollo de este trabajo, sino también a mi crecimiento académico, profesional y personal.
También quiero agradecer al Dr. Serge Bouc por sus valiosos consejos.
Asimismo, mi reconocimiento al PCCM por brindarme las facilidades y recursos necesarios para llevar a cabo esta investigación.
No puedo dejar de mencionar a mis amigos y familiares, quienes me han brindado su apoyo incondicional durante todo el proceso. En especial, quiero destacar a mis padres, Ma Guadalupe y Miguel, y a mi hermana Míriam, quienes siempre estuvieron presentes. A mis grandes amigos Daniel Muñoz, Javier Vazquez y Carlos Quéchol, quienes me brindaron horas de relajación (o no tanto) en nuestras noches de juego y de los cuales sé que siempre puedo contar. Por último, a todas las personas que he conocido en estos 4 años en el CCM, los cuales me apoyaron de diversas maneras, como: Itzel Rosas, Karley Cardona, Benjamín García, Vaneza Bustos, Norberto Rivas, Yaki Angeles, Mario Jardon, Caren Hernández, Yesenia Villicaña, Nydia Veyna, Jorge Chapital, David Valencia y Donaji Arredondo. Sus palabras de aliento y comprensión fueron un motor fundamental para superar los momentos de dificultad.

A todas y cada una de las personas mencionadas y a aquellas que, por alguna razón, no figuran en estas líneas, mi más sincero agradecimiento.

¡Muchas gracias a todos!

Resumen:
En este trabajo está divido en 2 problemas. El primero de ellos es generalizar el método utilizado por Bouc en [7], donde estudió el funtor de Burnside con coeficientes en $\mathbb{Q}$, denotado por $\mathbb{Q}B$, el cual es un funtor de Green de biconjuntos tal que en cada una de sus evaluaciones es una $\mathbb{Q}$-álgebra conmutativa de dimensión finita semisimple que se escinde, al cual se le dio una caracterización de sus ideales. El segundo de los problemas es dar una generalización de las estructuras dadas en [4] por Boltje, Raggi y Valero para funtores de biconjuntos fibrados en lugar de funtores de biconjuntos, las estructuras que se darán deben de coincidir con las estructuras dadas en [4] cuando la fibra es el grupo trivial $\{\cdot\}$

Abstract:

Before delving into the work accomplished, it is important to note that it focuses on two fundamental problems. The first involves the generalization of the method employed by Bouc [7], where the Burnside functor with coefficients in $\mathbb{Q}$, denoted as $\mathbb{Q}B$, was explored. This Green functor of biconsets exhibits the property of being a commutative $\mathbb{Q}$-algebra of semisimple finite dimension that splits in each evaluation. A detailed characterization of its ideals has been provided.

The second addressed problem entails the generalization of the structures presented by Boltje, Raggi, and Valero in [4]. These structures, originally designed for functors of biconsets, are now extended to functors of fibrated biconsets. The essential condition is that the resulting structures match those provided in [4] when the fiber is the trivial group $\{\cdot\}$.

Palabras claves:

Funtores de biconjuntos, Funtores de Green, Ideales, Biconjuntos fibrados, construcciones más.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

En la década de los 90, Serge Bouc introduce y desarrolla la teoría de la categoría de biconjuntos y los funtores de biconjuntos (ver [7]). Algunas de estas definiciones y de los resultados expuestos en [7] serán necesarios para el desarrollo del trabajo realizado durante la tesis, varios de estos resultados se darán de manera más detallada. Una de estas definiciones es la categoría de biconjuntos, en la cual los morfismos entre objetos son las restricciones, inducciones, inflaciones, deflaciones, o una combinación lineal de composición de estas. Además, se analizarán los funtores que van de la categoría de biconjuntos a la categoría de R-módulos, la cual se denotará por R-Mod, donde R es un anillo conmutativo con unidad, los cuales son llamados funtores de biconjuntos. A varios de los ejemplos típicos de estos funtores se les puede dar una estructura de anillo en cada una de sus evaluaciones, algunos de los ejemplos más conocidos de funtores de biconjuntos son: El funtor de Burnside, el funtor de anillo de caracteres, el funtor del anillo de Green y el funtor de anillos con fuente trivial.

Un funtor F es de Green para un grupo de finito G si es un funtor de Mackey, con estructura multiplicativa en cada una de las evaluaciones $F(H)$, con H un subgrupo de G, compatible con la estructura de funtor de Mackey. En el contexto de los funtores de Mackey, los funtores de Green han sido ampliamente estudiados y se han encontrado muchos ejemplos y aplicaciones de ellos (ver por ejemplo Thévenaz [21] y Bouc [5]). En el contexto de categorías de funtores de biconjuntos, Bouc ha demostrado que si la clase de objetos en la categoría de biconjuntos es cerrada bajo productos directos, entonces la categoría de funtores de biconjuntos sobre ella tiene una estructura monoidal simétrica dada por el producto tensorial y el elemento de identidad es el funtor de Burnside. Entonces un funtor de Green de biconjuntos F, es un monoide en esta categoría. Es decir, F es un funtor de biconjuntos compatible con la estructura monoidal de la categoría de biconjuntos y la categoría de R-módulos, la cual será denotada por R-Mod. Esto significa que F está equipado con productos bilineales de $F(G) \times F(H)$ a $F(G \times H)$, para todos los grupos finitos, G y H, este producto es asociativo y funtorial, además tiene una elemento unidad. La característica de esta definición es lo que nos permite observar que muchos funtores de Green conocidos también son funtores de Green de biconjuntos.

Antes de hablar del trabajo realizado en esta tesis, debemos aclarar que este está divido en 2 problemas. El primero de ellos es generalizar el método utilizado por Bouc en [7], donde estudió el funtor de Burnside con coeficientes en $\mathbb{Q}$, denotado por $\mathbb{Q}B$, el cual es un funtor de Green de biconjuntos tal que en cada una de sus evaluaciones es una $\mathbb{Q}$-álgebra conmutativa de dimensión finita semisimple que se escinde, al cual se le dio una caracterización de sus ideales. El segundo de los problemas es dar una generalización de las estructuras dadas en [4] por Boltje, Raggi y Valero para funtores de biconjuntos fibrados en lugar de funtores de biconjuntos, las estructuras que se darán deben de coincidir con las estructuras dadas en [4] cuando la fibra es el grupo trivial $\{\cdot\}$.

En el Capítulo 3 se presentan generalizaciones de las técnicas utilizadas por Bouc en [7], para encontrar una caracterización de los ideales de cualquier funtor de Green de biconjuntos con características similares a $\mathbb{Q}B$. Esto significa que los funtores que consideramos son álgebras conmutativas de dimensión finita semisimples que se escinden para cada una de las evaluaciones. Si F es un funtor de Green de biconjuntos con las hipótesis anteriores, en la Sección 3.1, estudiaremos el efecto de los biconjuntos en cualquier idempotente primitivo de las evaluaciones y presentaremos la definición de MC-grupo, se trata de una generalización de un B-grupo que se definió para el funtor de Burnside en [7]. Un ideal de F es un F-submódulo del F-módulo F. En la Sección 3.2, se analiza la relación entre los ideales generados por los idempotentes primitivos de cualquier evaluación y cualquier ideal de F, podemos establecer un isomorfismo de retículas entre la retícula de ideales de F y la retícula de subconjuntos cerrados hacia arriba de los MC-grupos de F. En la sección final del capítulo, comparamos nuestra caracterización de los ideales con algunos ejemplos clásicos de funtores de Green de biconjuntos.

A partir del Capítulo 4, A será un grupo abeliano no necesariamente finito. El objetivo principal de este capítulo es dar dos construcciones para un funtor de biconjuntos A-fibrados, una es la construcción más abajo y otra es la construcción más arriba, estas construcciones coinciden con las construcciones más abajo y más arriba para funtores de biconjuntos (ver [3]). Para generar estas construcciones, es necesario tener una familia $\mathcal{G}$ de grupos finitos y una función $\mathcal{S}$ tal que, para todo $G,\ H \in \mathcal{G}$, los relacionamos con un conjunto $\mathcal{S}(G,H)$ de

$$\mathcal{M}^A(G,H) = \mathcal{M}(G,H) := \{(L,\varphi) \mid L \leqslant G \times H,\ \varphi \in Hom(L,A)\},$$

que satisfacen ciertos axiomas que están escritos al inicio de la Sección 4.2, los cuales son necesarios para generar la subcategoría $\mathcal{D}$ de la categoría de biconjuntos A-fibrados $\mathcal{C}^A$. En la Sección 4.1 recordamos y extendemos las definiciones básicas y los resultados para los biconjuntos fibrados y los funtores de biconjunto fibrados. En la Sección 4.2 se definen las construcciones más arriba o más abajo, para esto a la pareja $(\mathcal{G},\mathcal{S})$, se le asocia $(\mathcal{G},\mathcal{S}_+)$ y $(\mathcal{G},\mathcal{S}^+)$, con las cuales podemos construir las subcategorías $\mathcal{D}_+$ y $\mathcal{D}^+$ de $\mathcal{C}^A$. En las secciones 4.3 y 4.4 se describen las construcciones F_+ y F^+ para un funtor de biconjuntos A-fibrados F sobre $\mathcal{D}$, los cuales son funtores de biconjuntos fibrados sobre $\mathcal{D}_+$ y $\mathcal{D}^+$ respectivamente. En la Sección 4.5 se define el morfismo de marca, $F_+ \longrightarrow F^+$ el cual es una transformación natural. También se dan condiciones necesarias sobre el anillo R para que el morfismo de marcas sea inyectivo, o incluso biyectivo. En la Sección 4.6 se agrega la condición de que F tiene una estructura multiplicativa, más precisamente, que F es un funtor de Green fibrado sobre $\mathcal{D}$, entonces se puede demostrar que F_+ y F^+ heredan la estructura de funtor de Green fibrado sobre $\mathcal{D}_+$ y $\mathcal{D}^+$ respectivamente y además el morfismo de marca es multiplicativo. En la Sección 4.7 se define el anillo de caracteres como funtor de biconjunto fibrado y se calcula su construcción $-_+$, la cual es el funtor global de representaciones fibradas. Por último, en la Sección 4.8 se demuestra que el funtor relacionado con la construcción más abajo, el cual es denotado por $-_+$, es el adjunto izquierdo para un funtor restricción.

Capítulo 2

Preliminares

En esta sección daremos definiciones y estableceremos notación, así como enunciaremos resultados necesarios para desarrollar el trabajo que se realizará en esta tesis. Durante este capítulo fijaremos un anillo conmutativo con unidad denotado por R y todos los grupos que haremos referencia serán de orden finito.

2.1 Funtores de Green de biconjuntos

Primero nos centraremos en establecer notación y enunciar resultado relacionados con la teoría de conjuntos donde actúa un grupo.
Una acción (por la izquierda) de un grupo G en un conjunto X, es una aplicación $\phi : G \times X \longrightarrow X$ que cumple las siguientes condiciones:

- $\phi(gg', x) = \phi(g, \phi(g', x))$ para todo $g, g' \in G$ y $x \in X$.
- $\phi(1_G, x) = x$ para todo $x \in X$ y donde 1_G es el elemento identidad de G.

En este caso diremos que G actúa (por la izquierda) en X a través de ϕ y que X es un G-conjunto, de ahora en adelante se denotará $g \cdot x := \phi(g, x)$. Los morfismos de G-conjuntos son las funciones G-invariantes, de manera simétrica podemos definir que G actúa por la derecha en X. Denotaremos por ${}_G set$ la categoría que consta de los G-conjuntos izquierdos finitos y sus morfismos, esta categoría tiene como coproducto a la unión disjunta de conjuntos. Se definirá al grupo de Burnside de G, el cual es denotado por $B(G)$, como

$$B(G) := \frac{\langle [X] \mid X \text{ es un } G\text{-conjunto finito } \rangle_{\mathbb{Z}}}{\langle [X \sqcup Y] - [X] - [Y] \rangle},$$

donde $[X]$ es la clase de isomorfismo del G-conjunto X.
Dados G y H grupos, diremos que X es un (G, H)-biconjunto si G actúa por la izquierda en X y H actúa por la derecha en X y estas acciones son compatibles i.e. $(g \cdot x) \cdot h = g \cdot (x \cdot h)$ para todo $h \in H$, $g \in G$ y $x \in X$. A todo (G, H)-biconjunto se puede dar estructura de $G \times H$-conjunto y viceversa, con la identificación de las acciones de la siguiente: $(g, h) \cdot x = g \cdot x \cdot h^{-1}$. Por esta relación podemos definir la categoría de

los (G, H)-biconjuntos finitos como la categoría ${}_G set_H = {}_{G\times H} set$. Dados X un (G, H)-biconjunto y Y un (H, K)-biconjunto, se tiene que el conjunto $X \times Y$ es un H-conjunto vía la acción $h \cdot (x, y) = (xh^{-1}, hy)$, a la H-órbita de (x, y) la denotaremos por $(x,_H y)$. Al conjunto de las H-órbitas de $X \times Y$ lo denotaremos por $X \circ_H Y$, al cual llamaremos como producto tensorial de X con Y (sobre H), además el conjunto $X \circ_H Y$ es un (G, K)-biconjunto vía la acción $g \cdot (x,_H y) \cdot k = (gx,_H yk)$.

2.1.1 Ejemplo. Dado $\alpha : G \longrightarrow H$ morfismo de grupos, H es un (G, H)-biconjunto con la acción $g \cdot x \cdot h := \alpha(g)xh$ y un (H, G)-biconjunto con $h \cdot x \cdot g := hx\alpha(g)$ si $x, h \in H$ y $g \in G$. Los denotamos por ${}_{G^\alpha} H_H$ y ${}_H H_{{}^\alpha G}$ respectivamente, aunque frecuentemente, si es claro a través de que morfismo está dada la acción, no escribiremos el morfismo α.

Las llamadas operaciones de biconjuntos son casos particulares de los ejemplos anteriores. Si $G \leqslant H$ y $i : G \longrightarrow H$ es el morfismo inclusión. Se define:

- La restricción de H a G es, $Res_G^H := {}_{G^i} H_H$.
- La inducción de G a H es $Ind_G^H := {}_H H_{{}^i G}$.

Si $N \trianglelefteq G$ y $\pi : G \longrightarrow G/N$ es la proyección canónica, se define:

- La Deflación de G a G/N es, $Def_{G/N}^G := {}_{G/N} G/N_{{}^\pi G}$.
- la Inflación de G/N a G es, $Inf_{G/N}^G := {}_{G^\pi} G/N_{G/N}$.

Si $\phi : G \longrightarrow H$ es un isomorfismo de grupos, definimos:

- $Iso(\phi) := {}_{G^\phi} H_H$.

La categoría de biconjuntos sobre un anillo con unidad R, la cual denotaremos por $R\mathcal{C}$, tiene como objetos a todos los grupos finitos, y dados dos grupos finitos G y H, el conjunto $Hom_{R\mathcal{C}}(G, H)$ es $RB(H, G) := R \otimes_{\mathbb{Z}} B(H \times G)$. La composición de morfismos en $R\mathcal{C}$ es la inducida por el producto tensorial de biconjuntos, la cual la denotaremos por $\circ$.
Fijaremos una clase de grupos finitos $\mathcal{G}$, la cual no será vacía y será cerrada bajo subcocientes y productos cartesianos. Denotaremos por $R\mathcal{B}$ la subcategoría de $R\mathcal{C}$ que tiene como objetos a los elementos de $\mathcal{G}$, en particular $R\mathcal{B}$ es una subcategoría repleta de $R\mathcal{C}$ (Definición 4.1.7. de [7]). Un funtor de biconjuntos sobre $R\mathcal{B}$ o funtor de $R\mathcal{B}$-biconjuntos es un funtor R-lineal de $R\mathcal{B}$ a la categoría R-Módulos, denotada por R-Mod. Los funtores de biconjuntos sobre $R\mathcal{B}$ forma una categoría abeliana, donde los morfismos son las transformaciones naturales de funtores, a esta categoría la denotaremos por $\mathcal{F}_{B,R}$.
Un funtor de Green de $\mathcal{B}$-biconjuntos es definido como un monoide de la categoría $\mathcal{F}_{\mathcal{B},R}$ (Definición 8.5.1 en [7]). Esto es equivalente a la siguiente definición:

2.1.2 Definición. Un funtor de $R\mathcal{B}$-biconjuntos A es un funtor de Green de biconjuntos sobre $R\mathcal{B}$ si está equipado con un producto bilineal $A(G) \times A(H) \longrightarrow A(G \times H)$ denotado por $(a, b) \longmapsto a \times b$, para cualesquiera grupos G, H en $\mathcal{B}$, y un elemento $\xi_A \in A(1)$, que satisfacen las siguientes condiciones:

- Asociatividad. Sean G, H y K grupos en $\mathcal{B}$. Sí consideramos el isomorfismo canónico $\phi : G\times(H\times K) \longrightarrow (G\times H)\times K$, entonces para cualesquiera $a \in A(G)$, $b \in A(H)$ y $c \in A(K)$

$$(a \times b) \times c = A(Iso\phi)(a \times (b \times c)).$$

- Elemento identidad. Sea G un grupo de $\mathcal{B}$ y denotemos por $\lambda_G : 1 \times G \longrightarrow G$ y $\overline{\lambda}_G : G \times 1 \longrightarrow G$ los isomorfismos canónicos. Entonces para cualquier $a \in A(G)$

$$a = A(Iso(\lambda_G))(\xi_A \times a) = A(Iso(\overline{\lambda}_G))(a \times \xi_A).$$

- Funtoralidad. Si $\phi : G \longrightarrow G'$ y $\psi : H \longrightarrow H'$ son morfismos en $R\mathcal{B}$, entonces para cualesquiera $a \in A(G)$ y $b \in A(H)$

$$A(\phi \times \psi)(a \times b) = A(\phi)(a) \times A(\psi)(b).$$

Si A y C son funtores de Green de $R\mathcal{B}$-biconjuntos, un morfismo de funtores de Green de $R\mathcal{B}$-biconjuntos de A a C, es una transformación natural $f : A \longrightarrow C$ tal que $f_{H\times K}(a \times b) = f_H(a) \times f_K(b)$, para todo H y K elementos de $\mathcal{B}$ y para cualesquiera $a \in A(H)$, $b \in A(K)$, y $f_1(\xi_A) = \xi_C$.

En el Lema 4.2.3 de [17] se demuestra que esta definición es equivalente a la siguiente definición, como se verá en el lema 2.1.4.

2.1.3 Definición. Un funtor de $R\mathcal{B}$ de biconjuntos A, es un funtor de Green de biconjuntos sobre $R\mathcal{B}$, si para cada grupo H en $\mathcal{B}$, la evaluación $A(H)$ es una R-álgebra con unidad, que satisface las siguientes condiciones: Sean K y G grupos de $\mathcal{B}$ y sea $\phi : K \to G$ un morfismo de grupos, entonces:

- Para el (K, G)-biconjunto G, denotado por ${}_{K^\phi}G_G$, se tiene que el morfismo $A({}_{K^\phi}G_G)$ es un homomorfismo de anillos

- Para el (G, K)-biconjunto G, denotado por ${}_GG_{\phi K}$. El morfismo $A({}_GG_{\phi K})$ satisface las identidades de Frobenius, las cuales dicen que para todo $b \in A(G)$ y todo $a \in A(K)$,

$$A({}_GG_{\phi K})(a) \cdot b = A({}_GG_{\phi K})(a \cdot A({}_{K^\phi}G_G)(b))$$
$$b \cdot A({}_GG_{\phi K})(a) = A({}_GG_{\phi K})(A({}_{K^\phi}G_G)(b) \cdot a),$$

  donde $\cdot$ denota el producto en $A(G)$, respectivamente $A(K)$.

2.1.4 Lema (Lema 3 en [10])**.** *Las dos definiciones anteriores son equivalentes.*

Demostración. Si partimos de la Definición 2.1.2, le podemos dar una estructura de anillo a $A(H)$ de la manera:

$$a \cdot b = A\left(Iso^H_{\Delta(H)} \circ Res^{H\times H}_{\Delta(H)}\right)(a \times b),$$

donde a y b pertenecen a $A(H)$ y la unidad es $A(Inf_1^H)(\xi_A)$.
Por otro lado, si comenzamos con la Definición 2.1.3 el producto,

$$\begin{aligned} A(G) \times A(H) &\longrightarrow A(G \times H) \\ (a, b) &\longmapsto a \times b, \end{aligned}$$

el cual se define de la siguiente manera:

$$a \times b = A(Inf_G^{G\times H})(a) \cdot A(Inf_H^{G\times H})(b),$$

para $a \in A(G)$ y $b \in A(H)$, con el elemento identidad es la unidad de $A(1)$. ■

2.2 A-módulos

2.2.1 Definición (Definición 8.5.5 en [7])**.** Dado un funtor de Green de biconjuntos A, se define un A-módulo izquierdo como un funtor de biconjuntos M que cuenta con un producto bilineal

$$\times : A(G) \times M(H) \longrightarrow M(G \times H).$$

Para todo par de grupos G y H en $\mathcal{B}$, que satisface condiciones análogas a las dadas en la Definición 2,1,2. De manera similar, se define que es un A-módulo derecho.

Si M y N son A-módulos (izquierdos), un morfismo de A-módulos es un morfismo de funtores de biconjuntos $f : M \longrightarrow N$ tal que $f_{G\times H}(a \times m) = a \times f_H(m)$ para cualesquiera G, H en $\mathcal{B}$, $a \in A(G)$ y $m \in M(H)$. Con estos morfismos, los A-módulos forman una categoría abeliana, la cual se denotara por A-Mod.

2.2.2 Definición. Sea A un funtor de Green de biconjuntos sobre $R\mathcal{B}$. Un ideal izquierdo de A es un A-submódulo del A-módulo A. En otras palabras, es un subfuntor de biconjuntos I de A, tal que la imagen del producto

$$A(G) \times I(H) \longrightarrow A(G \times H)$$

está contenida en $I(G\times H)$, para cualesquiera G y H en $\mathcal{B}$. De manera similar podemos definir un ideal derecho de A. Un ideal bilateral de A es un ideal izquierdo que también es un ideal derecho de A, si I es un ideal bilateral de A, se denotará por $I \leqslant A$.

De la Proposición 8.6.1 de [7], o de la Proposición 2.11 de [18], se obtiene que un A-módulo, es un funtor R-lineal de la categoría $\mathcal{P}_A$ a R-Mod, donde la categoría $\mathcal{P}_A$ está definida de la siguiente manera.

2.2.3 Definición. Sea A un funtor de Green de $R\mathcal{B}$-biconjuntos sobre R. La categoría $\mathcal{P}_A$ se define de la siguiente manera:

- Los objetos de $\mathcal{P}_A$ son los grupos finitos en $\mathcal{B}$.
- Sean G y H grupos finitos en $\mathcal{B}$, entonces $Hom_{\mathcal{P}_A}(H, G) := A(G \times H)$.

- Sean H, G y K grupos finitos en $\mathcal{B}$. La composición de $\beta \in Hom_{\mathcal{P}_A}(H,G)$ y $\alpha \in Hom_{\mathcal{P}_A}(G,K)$ en $\mathcal{P}_A$ es:

$$\beta \circ \alpha = A(Def^{H\times\Delta(G)\times K}_{H\times K} \circ Res^{H\times G\times G\times K}_{H\times\Delta(G)\times K})(\beta \times \alpha).$$

- Para un grupo G en $\mathcal{B}$, el morfismo identidad 1_G de G en $\mathcal{P}_A$ es

$$1_G = A(Ind^{G\times G}_{\Delta(G)} \circ Inf^{\Delta(G)}_1)(\xi_A).$$

2.2.4 Observación. Sea F un A-módulo. Si $(I_j)_{j\in J}$ es un conjunto de A-submódulos de F, entonces la intersección $\cap_{j\in J} I_j$ es un A-submódulo de F cuya evaluación en un grupo G de $R\mathcal{B}$ es igual a

$$\left(\cap_{j\in J} I_j\right)(G) = \cap_{j\in J} I_j(G).$$

En particular, sea G un objeto de $\mathcal{B}$ y Γ_G un subconjunto de $F(G)$, el ideal F_{Γ_G} de F generado por Γ_G, es por definición la intersección de todos A-submódulos F' de F tales qué $\Gamma_G \subseteq F'(G)$. Si H es un objeto en $\mathcal{B}$, se tiene que

$$F_{\Gamma_G}(H) = \sum_{\gamma\in\Gamma_G} F\left(Hom_{R\mathcal{B}}(G,H)\right)(\gamma)$$

Demostración. Para un objeto H de $\mathcal{B}$, definimos el R-submódulo de $F(H)$, por

$$T(H) = \sum_{\gamma\in\Gamma_G} F\left(Hom_{\mathcal{P}_A}(G,H)\right)(\gamma).$$

No es difícil de ver que T es un subfuntor de F en $Fun(\mathcal{P}_A, R\text{-}Mod)$, es decir, T es un A-submódulo de F.
Por definición de F_{Γ_G}, tenemos que F_{Γ_G} es un A-submódulo de T, ya que $\Gamma_G \subseteq T(G)$. Por otro lado, si F' es un A-submódulo de F tal que $\Gamma_G \subseteq F'(G)$, entonces para cualquier H objeto en $\mathcal{B}$, $\alpha \in Hom_{\mathcal{P}_A}(G,H)$ y $\gamma \in \Gamma_G$, tenemos qué $F(\alpha)(\gamma) \in F'(H)$. Por lo tanto, T es un A-submódulo de F' y en consecuencia, T es un A-submódulo de F_{Γ_G}. ■

2.2.5 Lema. *Si $\alpha \in A(H\times K)$ y $\beta \in A(K\times G)$, entonces $\alpha\circ\beta$ es igual a*

$$A(Def^{H\times K\times G}_{H\times G})\left(A(Inf^{H\times K\times G}_{H\times K})(\alpha)\cdot A(Inf^{H\times K\times G}_{K\times G})(\beta)\right).$$

Demostración. Por el Lema 2.1.4, tenemos

$$\alpha\times\beta = A(Inf^{H\times K\times K\times G}_{H\times K})(\alpha)\cdot A(Inf^{H\times K\times K\times G}_{K\times G})(\beta),$$

por la relación 1.1.3 de [7], se tienen los siguientes isomorfismos de biconjuntos

$$Res^{H\times K\times K\times G}_{H\times\Delta(K)\times G} \circ Inf^{H\times K\times K\times G}_{H\times K} \cong Inf^{H\times\Delta(K)\times G}_{H\times\Delta(K)} \circ (H\times Iso(\varphi))$$

y

$$Res^{H\times K\times K\times G}_{H\times\Delta(K)\times G} \circ Inf^{H\times K\times K\times G}_{K\times G} \cong Inf^{H\times\Delta(K)\times G}_{\Delta(K)\times G} \circ (Iso(\varphi)\times G)$$

donde $\varphi : K \longrightarrow \Delta(K)$ es el isomorfismo natural. Por otro lado,

$$Inf_{H\times\Delta(K)}^{H\times\Delta(K)\times G} \circ (H \times Iso(\varphi)) \cong (H \times Iso(\varphi) \times G) \circ Inf_{H\times K}^{H\times K\times G}$$

y

$$Inf_{\Delta(K)\times G}^{H\times\Delta(K)\times G} \circ (Iso(\varphi) \times G) \cong (H \times Iso(\varphi) \times G) \circ Inf_{K\times G}^{H\times K\times G}.$$

Entonces $\alpha \circ \beta$ es igual a $A(Def_{H\times K}^{H\times\Delta(K)\times G})$ aplicado a

$$A(H \times Iso(\varphi) \times G) \left(A(Inf_{H\times K}^{H\times K\times G})(\alpha) \cdot A(Inf_{K\times G}^{H\times K\times G})(\beta) \right),$$

podemos notar que

$$(Def_{H\times K}^{H\times\Delta(K)\times G}) \circ (H \times Iso(\varphi) \times G) = Def_{H\times K}^{H\times K\times G}.$$

Por lo tanto,

$$\alpha \circ \beta = A(Def_{H\times G}^{H\times K\times G}) \left(A(Inf_{H\times K}^{H\times K\times G})(\alpha) \cdot A(Inf_{K\times G}^{H\times K\times G})(\beta) \right).$$

■

2.3 Ejemplos de funtores de Green de biconjuntos

En esta sección, revisaremos algunos ejemplos clásicos de funtores de Green de biconjuntos, los cuales revisaremos en la sección 3.3.

El Funtor de Burnside RB.

El funtor de Burnside sobre $R\mathcal{B}$ es definido como

$$RB = Hom_{R\mathcal{B}}(1, \_\,).$$

En otras palabras, RB es el funtor de Yoneda correspondiente al grupo trivial, el cual es un objeto de $\mathcal{B}$, ya que la clase de los objetos de $\mathcal{B}$ es cerrada bajo cocientes. Entonces, para G objeto de $\mathcal{B}$, el R-módulo $RB(G)$ es igual a $R \otimes_{\mathbb{Z}} B(G)$. Si H es otro objeto de $\mathcal{B}$, y U es un (H, G)-biconjunto finito en $Hom_{\mathcal{B}}(G, H)$, entonces el mapeo $RB(U) : RB(G) \longrightarrow RB(H)$ es inducido por la correspondencia que manda a un G-conjunto finito X al H-conjunto $U \circ_G X$. El producto cruz de conjuntos define un producto bilineal

$$RB(G) \times RB(H) \longrightarrow RB(G \times H)$$

que hace a RB un funtor de Green de biconjuntos.

2.3.1 Definición. La categoría de los RB-módulos es equivalente a la categoría de los funtores R-lineales de $\mathcal{P}_{RB}$ a la categoría de R-Mod. Estos funtores son llamados funtores de biconjuntos sobre R.

Funtor Monomial

El segundo ejemplo de un funtor de Green de biconjuntos es el funtor monomial introducido por Romero en [19]. Dress definió el anillo monomial de Burnside para un grupo finito en [15]. Para definirlo, daremos la siguiente definición.

2.3.2 Definición. Sea C un grupo abeliano y G un grupo finito. Un $(G\times C)$-conjunto C-libre con una cantidad finita de C-órbitas es llamado G-conjunto C-fibrado.

El anillo de Burnside monomial para G con coeficientes en C, denotado por $RB^C(G)$, es el subgrupo abeliano de $RB(G\times C)$ generado por los G-conjuntos C-fibrados. El funtor de Burnside C-monomial $RB^C : R\mathcal{C} \longrightarrow R\text{-}Mod$ es el funtor que envía a un grupo finito G al anillo $RB^C(G)$ y a un (G,H)-biconjunto finito U al morfismo:

$$\begin{aligned} RB^C(U) : RB^C(H) &\longrightarrow RB^C(G) \\ [X] &\longmapsto [U \circ_H X]_{C-f}, \end{aligned}$$

donde $[U \circ_H X]_{C-f}$ denota los elementos de $[U \circ_H X]$ donde C actúa de manera libre. Sean G y H grupos finitos. Si X es un G-conjunto C-fibrado y Y es un H-conjunto C-fibrado, entonces el conjunto $T\times Y$ es un C-conjunto con la acción $c\cdot(x,y) = (cx, c^{-1}y)$, donde $c\in C$ $(x,y)\in X\times Y$. A la C-órbita de (x,y) se denotará por $x\otimes y$, y al conjunto de todas las C-órbitas de $X\times Y$ se denotará por $X\otimes Y$. Además, se observa que $X\otimes Y$ es un $(G\times H\times C)$-conjunto con la acción definida por

$$\begin{aligned} (G\times H\times C)\times(X\otimes Y) &\longrightarrow X\otimes Y \\ ((g,h,c), x\otimes y) &\longmapsto cgx\otimes hy. \end{aligned}$$

Dado que X y Y son C-conjuntos libres con una cantidad finita de C-órbitas, se concluye que $X\otimes Y$ es un C-conjunto libre con una cantidad finita de C-órbitas, es decir, $X\otimes Y$ es un $(G\times H)$-conjunto C-fibrado. El funtor RB^C es un funtor de Green de biconjuntos con el siguiente producto bilineal: Dados G y H grupos finitos, se define el producto $\times$ en términos de los básicos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} RB^C(G)\times RB^C(H) &\longrightarrow RB^C(G\times H) \\ ([X],[Y]) &\longrightarrow [X\otimes Y] \end{aligned}$$

2.3.3 Definición. La categoría de los RB^C-módulos es equivalente a la categoría de los funtores R-lineales de $\mathcal{P}_{RB^C}$ a la categoría de R-Mod. Estos funtores se conocen como funtores de biconjuntos C-fibrados.

El Funtor de Burnside de rebanadas

El tercer ejemplo de un funtor de Green de biconjuntos que veremos será el funtor de Burnside de rebanadas, el cual fue estudiado en [8] y [22].

2.3.4 Definición. La categoría de morfismos de los G-conjunto, denotada por G-Mor, tiene como objetos a los morfismos de G-conjuntos y un morfismo de $f : A \longrightarrow B$ a $g : A' \longrightarrow B'$ es un par de morfismos de G-conjuntos $h : A \longrightarrow A'$ y $k : B \longrightarrow B'$ que hacen conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[d, "k"] \\ A' \arrow[r, "g"] & B'. \end{tikzcd} \tag{2.3.5}$$

La composición de los morfismos y los morfismos identidad en G-Mor son definidos de manera evidente. En particular, un morfismo (h, k) en G-Mor es un isomorfismo si y sólo si las funciones h y k son biyectivas. Notemos que la categoría G-Mor admite productos (inducidos por el producto de G-conjuntos),

2.3.6 Definición. Sea G un grupo finito. El grupo de Burnside de rebanadas $\Xi(G)$ de G es el grupo de Grothendieck de la categoría de G-Mor, este es definido como el cociente del grupo libre abeliano generado por las clases de isomorfismo $[X \xrightarrow{f} Y]$ de los morfismos de G-conjuntos finitos cociente por el subgrupo generado por los elementos de la forma

$$[X_1 \sqcup X_2 \xrightarrow{f_1 \sqcup f_2} Y] - [X_1 \xrightarrow{f_1} f_1(X_1)] - [X_2 \xrightarrow{f_2} f_2(X_2)],$$

donde $X_1 \sqcup X_2 \xrightarrow{f_1 \sqcup f_2} Y$ es el morfismo de G-conjunto donde $f_1 \sqcup f_2|_{X_1} = f_1$ y $f_1 \sqcup f_2|_{X_2} = f_2$.
El producto de morfismos induce una estructura de anillo conmutativo con unidad sobre $\Xi(G)$. El elemento identidad de la multiplicación es la imagen de la clase de isomorfismo de $[\bullet \longrightarrow \bullet]$, donde $\bullet$ denota al G-conjunto de cardinalidad 1. Para un morfismo de G-conjuntos $f : X \longrightarrow Y$, denotaremos por $\pi(f)$ la clase lateral en $\Xi(G)$ de la clase de isomorfismo de f.

2.3.7 Definición. El funtor Ξ es definido de la siguiente manera. En objetos, manda a un grupo G a $\Xi(G)$. En morfismos, para un (G, H)-biconjunto U, se define el morfismo

$$\begin{aligned} \Xi(U) : \Xi(G) &\longrightarrow \Xi(H) \\ (X \xrightarrow{f} Y) &\longmapsto (U \times_G X \xrightarrow{U \times_G f} U \times_G Y), \end{aligned}$$

donde $U \times_G X$ y $U \times_G Y$ son H-conjuntos de la manera natural, con la acción de H sobre U.

Sea $X \xrightarrow{f} Y$ un objeto en G-Mor y sea $Z \xrightarrow{g} W$ un objeto en H-Mor. Definiremos $X \times Z \xrightarrow{f \times g} Y \times W$ como el $G \times H$-morfismo, donde $X \times Z$, $Y \times W$ son $G \times H$-conjuntos de la manera natural y la función $X \times Z \xrightarrow{f \times g} Y \times W$ está definida por $(f \times g)(x, z) := (f(x), g(z))$, podemos extender esta definición a un producto bilineal,

$$\begin{aligned} \Xi(G) \times \Xi(H) &\longrightarrow \Xi(G \times H) \\ (X \xrightarrow{f} Y, Z \xrightarrow{g} W) &\longmapsto (X \times Z \xrightarrow{f \times g} Y \times W), \end{aligned}$$

este producto bilineal hace a un funtor de Green de biconjuntos.

Ahora daremos algunas definiciones que se nos serán de utilidad den la Sección 3.3.

2.3.8 Definición (Definición 3.1 de [8])**.** Sea G un grupo finito. Definimos una rebanada de G como una pareja (T, S) de subgrupos de G tales que $S \leqslant T$.

El conjunto de rebanadas de G es denotado por $\Pi(G)$. Dadas dos rebanadas (V, U) y (T, S) de G, diremos que (V, U) es cociente de (T, S), denotado por $(T, S) \twoheadrightarrow (V, U)$, si existe un homomorfismo de grupos sobreyectivo $\phi : T \longrightarrow V$ tal que $\phi(S) = U$. Si ϕ es un isomorfismo, diremos que (V, U) y (T, S) son isomorfas y que ϕ es un isomorfismo de rebanadas.
Si (T, S) es una rebanada de G, denotaremos a

$$\langle T, S\rangle_G = \pi(G/S \longrightarrow G/T)$$

el cual es un elemento de $\Xi(G)$.

2.3.9 Lema (Lema 3.4 de [8])**.** *Sea $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo de G-conjuntos, entonces en el grupo $\Xi(G)$,*

$$\pi(f) = \sum_{x \in [G \backslash X]} \langle G_{f(x)}, G_x \rangle,$$

donde $G_\bullet$ denota el estabilizador de $\bullet$.

Por lo tanto, el grupo $\Xi(G)$ es generado por los elementos de $\langle T, S\rangle_G$, donde (T, S) corre en $[\Pi(G)]$ que es un conjunto de representantes de las clases de conjugación de las rebanadas de G.

El Funtor trasladado

El último ejemplo de funtor de Green de biconjuntos que veremos será el funtor trasladado por un grupo finito K, el cual lo estudiaron en [7] y [18].
Sea K un grupo finito y un funtor de Green de biconjuntos A sobre $R\mathcal{B}$. El funtor A trasladado por K, denotado por A_K, lo podemos definir de la siguiente manera: La evaluación en un grupo finito G es

$$A_K(G) = A(G \times K).$$

Dados G, H grupos finitos. Para un (H, G)-biconjunto U, definimos el morfismo

$$A_K(U) : A_K(G) \longrightarrow A_K(H)$$

como el morfismo $A(U \times K)$, donde $U \times K$ es visto como un $(H \times K, G \times K)$-biconjunto de la manera natural i.e. donde K actúa en $U \times K$ por la multiplicación en la segunda componente, esta definición se puede extender de manera R-lineal a cualquier elemento

$\alpha \in RB(H,G)$. Con esta estructura A_K es un funtor de biconjuntos sobre $R\mathcal{B}$. Además, A_K es un funtor de Green, con el producto bilineal,

$$\times_{A_K} : A_K(G) \times A_K(H) \longrightarrow A_K(G \times H)$$

el cual está definido de la siguiente manera: Sea $\alpha \in A_K(G) = A(G \times K)$ y sea $\beta \in A_K(H) = A(H \times K)$, entonces $\alpha \times \beta \in A(G \times K \times H \times K)$, definimos

$$\alpha \times_{A_K} \beta = A(Iso(\delta) \circ Res_{\Delta}^{G\times K\times H\times K})(\alpha \times \beta),$$

donde $\Delta = \{(g,k,h,k)|g \in G, h \in H, k \in K\}$ y δ es el morfismo $\Delta \longrightarrow G \times H \times K$ que manda (g,k,h,k) a (g,h,k). Finalmente, el elemento identidad ξ_{A_K} es $A(Inf_1^K)(\xi_A)$.

Capítulo 3

Caracterización de los ideales para algunos funtores de Green de biconjuntos

3.1 Operaciones de biconjuntos aplicadas a idempotentes

Hipótesis: A lo largo de este capítulo, A es un funtor de Green de biconjuntos tal que cada evaluación $A(G)$ es una $\mathbb{K}$-álgebra conmutativa de dimensión finita semisimple que se escinde sobre $\mathbb{K}$, donde $\mathbb{K}$ un campo de característica 0.
Denotamos por E_G al único conjunto de idempotentes primitivos ortogonales de $A(G)$, el cual existe por las hipótesis anteriores.

3.1.1 Proposición. *Sea $f \in A(G)$-$\{0\}$ tal que para todo $v \in A(G)$, se tiene que $v \cdot f = \lambda_v f$ para algún $\lambda_v \in \mathbb{K}$, entonces existen $e \in E_G$ y $k \in \mathbb{K}$ tales que $f = ke$.*

Demostración. Sabemos que

$$f = \sum_{e \in E_G} k_e e,$$

con $k_e \in \mathbb{K}$. Sí $f = 0$, no hay nada que demostrar. Si $f \neq 0$, entonces existe $e \in E_G$ tal que $k_e \neq 0$, por hipótesis tenemos que

$$e \cdot f = \lambda_e f = k_e e \neq 0,$$

de donde se sigue que $\lambda_e \neq 0$, y $f = ke$, donde $k = \dfrac{k_e}{\lambda_e}$. Supongamos que existe otro $s \in E_G$ tal que $k_s \neq 0$, entonces $s \cdot f = \lambda_s f$ con $\lambda_s \neq 0$, por la ortogonalidad se tiene que

$$0 = (s \cdot e) \cdot f = s \cdot (e \cdot f) = s \cdot (\lambda_e f) = \lambda_s \lambda_e f,$$

entonces $\lambda_s \lambda_e = 0$, lo cual es una contradicción. Se concluye que $f = k_e e$. Además e y f son únicos si $f \neq 0$ ■

Dado que nuestro interés es estudiar los ideales generados por los idempotentes ortogonales y A es un funtor de Green de biconjuntos, por el Lema 2.3.26 de [7], es natural querer observar el efecto de las operaciones elementales (Ind, Res,Inf, Def e Iso) sobre los idempotentes del álgebra $A(G)$.

3.1.2 Teorema. *Sea G un grupo finito*

(a) Sean H un subgrupo de G y $e \in E_G$. Entonces

$$A(Res_H^G)(e) = \sum_{s \in \Omega_H} s,$$

donde Ω_H es un subconjunto de E_H.

(b) Sean H un subgrupo de G y $t \in E_H$. Entonces existen $e \in E_G$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ tales que

$$A(Ind_H^G)(t) = \lambda e.$$

(c) Sean N un grupo normal de G y $e \in E_{G/N}$. Entonces

$$A(Inf_{G/N}^G)(e) = \sum_{t \in \Omega_{G/N}} t,$$

donde $\Omega_{G/N}$ es un subconjunto de E_G.

(d) Sean N un subgrupo normal de G y $e \in E_G$. Entonces existen $\lambda \in \mathbb{K}$ y $t \in E_{G/N}$ tales que

$$A(Def_{G/N}^G)(e) = \lambda t.$$

(e) Si $\phi : G \longrightarrow G'$ es un isomorfismo de grupos y $e \in E_G$. Entonces

$$A(Iso(\phi))(e) = e'$$

para algún $e' \in E_{G'}$.

Demostración. (a) Observemos que $A(Res_K^G) : A(G) \longrightarrow A(H)$ es un homomorfismo de anillos. Se sigue que $A(Res_H^G)(e)$ es un idempotente de $A(H)$, por lo tanto, es una suma de algunos elementos de E_H.

(b) Sea $v \in A(G)$. Por las hipótesis sobre A, tenemos que:

$$A(Res_H^G)(v) = \sum_{s \in E_H} \lambda_s s,$$

con $\lambda_s \in \mathbb{K}$. Por las relaciones de Frobenius (Definición 2.1.3), se tiene que:

$$v \cdot A(Ind_H^G)(t) = A(Ind_H^G)(A(Res_H^G)(v) \cdot t) = \lambda_t A(Ind_H^G)(t),$$

y por la Proposición 3.1.1, se concluye que $A(Ind_H^G)(t) = \lambda e$.

(c) Ya que $A(Inf^G_{G/N})$ es un homomorfismo de anillos, tenemos que $A(Inf^G_{G/N})(e)$ es un idempotente de $A(G)$, en consecuencia es una suma de algunos elementos de E_G.

(d) Sea $v \in A(G/N)$, entonces por las relaciones de Frobenius (Definición 2.1.3), se sigue que

$$v \cdot A(Def^G_{G/N})(e) = A(Def^G_{G/N})(A(Inf^G_{G/N})(v) \cdot e)$$

ya que $A(Inf^G_{G/N})(v)$ es un elemento de $A(G)$, tenemos que $A(Inf^G_{G/N})(v)$ es una combinación lineal de algunos elementos de E_G, se sigue que

$$A(Inf^G_{G/N})(v) \cdot e = \alpha \cdot e$$

para algún $\alpha \in \mathbb{K}$. Por lo tanto,

$$v \cdot A(Def^G_{G/N})(e) = A(Def^G_{G/N})(A(Inf^G_{G/N})(v) \cdot e) = \alpha A(Def^G_{G/N})(e).$$

Por la proposición 3.1.1, existen $t \in E_{G/N}$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ tales que $A(Def^G_{G/N})(e) = \lambda t$.

(e) Notemos que $A(Iso(\phi))$ es un isomorfismo de anillos.

■

3.1.3 Definición. Sea H un elemento de $\mathcal{G}$. Definimos los conjuntos

$$\underline{E_H} = \{e \in E_H \mid A(Res^H_K)e = 0 \ \forall K \lneq H\}.$$
$$\underline{\underline{E_H}} = \{f \in E_H \mid A(Def^H_{H/N})f = 0 \ \forall \ N \trianglelefteq H, \ N \neq 1\}.$$

Diremos que H es un MC-grupo de A (o sólo MC-grupo si no hay riesgo de confusión) si $\underline{E_H} \cap \underline{\underline{E_H}} \neq \emptyset$.

3.1.4 Lema. *Sean G un grupo finito y $e_G \in E_G$. Sea H un subgrupo minimal de G con respecto a la propiedad $A(Res^G_H)(e_G) \neq 0$ (este subgrupo existe, ya que $A(Res^G_G)(e_G)$ es distinto a 0). Entonces existen $e_H \in \underline{E_H}$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, tales que $e_G = \alpha A(Ind^G_H)(e_H)$.*

Demostración. Ya que $A(Res^G_H)(e_G) \neq 0$, por (a) del Teorema 3.1.2 existe $e_H \in E_H$ tal que

$$e_H \cdot A(Res^G_H)(e_G) = e_H.$$

Más aún, si K es un subgrupo de H, tenemos

$$A(Res^H_K)(e_H) \cdot A(Res^G_K)(e_G) = A(Res^H_K)e_H.$$

Sí $K \neq H$, entonces $A(Res^G_K)(e_G) = 0$ y se sigue que $A(Res^H_K)(e_H) = 0$. Esto significa que $e_H \in \underline{E_H}$.
Ahora supongamos que $A(Ind^G_H)(e_H) = 0$. Por las fórmulas de Mackey (Relación 1.1.3 de [7]) tenemos

$$0 = A(Res^G_H \circ Ind^G_H)(e_H) = \sum_{x \in [H \backslash G/H]} A(Ind^H_{H \cap {}^xH} \circ Iso(\gamma_x) \circ Res^H_{H^x \cap H})(e_H),$$

donde γ_x es el isomorfismo conjugación por x de $H^x \cap H$ a $H \cap {}^xH$. Si $H^x \cap H$ es un subgrupo propio de H, entonces $A(Res^H_{H^x \cap H})e_H = 0$ y de esto sigue que la última ecuación es igual a

$$0 = \sum_{x \in [N_G(H)/H]} A(Iso(\gamma_x))(e_H).$$

Ya que $e_H \in E_H$, tenemos que $A(Iso(\gamma_x))(e_H) \in E_H$ para todo $x \in N_G(H)$, ya que $A(Iso(\gamma_x))$ es un homomorfismo de anillos sobre $A(H)$. Ahora multiplicamos por e_H,

$$\begin{aligned} 0 &= e_H \sum_{x \in [N_G(H)/H]} A(Iso(\gamma_x))(e_H) \\ &= |\{x \in [N_G(H)/H] \mid A(Iso(\gamma_x))(e_H) = e_H\}| \cdot e_H. \end{aligned}$$

Ya que el conjunto de la derecha es no vació, tenemos $e_H = 0$. Esta contradicción demuestra que $A(Ind^G_H)e_H \neq 0$. Ya que $e_H \cdot A(Res^G_H)(e_G) = e_H$, entonces por las identidades de Frobenius (Definición 2.1.3)

$$A(Ind^G_H)(e_H) \cdot e_G = A(Ind^G_H)(e_H \cdot A(Res^G_H)(e_G)) = A(Ind^G_H)(e_H) \neq 0.$$

Ahora, por el Teorema 3.1.2 (b), existe $\lambda \neq 0$, tal que

$$A(Ind^G_H)(e_H) = \lambda e_G.$$

Si $\alpha = 1/\lambda$ tenemos que $e_G = \alpha A(Ind^G_H)(e_H)$. ■

3.1.5 Lema. *Sean G un grupo finito y $e_G \in E_G$. Si N es un subgrupo normal de G maximal con respecto $A(Def^G_{G/N})(e_G) \neq 0$, entonces existen $e_{G/N} \in E_{G/N}$ y $\alpha \in \mathbb{K}$ con $\alpha \neq 0$, tal que $e_{G/N} = \alpha A(Def^G_{G/N})(e_G)$ y $e_G = e_G \cdot A(Inf^G_{G/N})(e_{G/N})$.*

Demostración. Sean $e_G \in E_G$ y N un subgrupo de G, maximal con respecto a la propiedad $A(Def^G_{G/N})e_G \neq 0$ (este subgrupo existe, ya que $A(Def^G_{G/1})e_G \neq 0$). Por el Teorema 3.1.2 (d), tenemos que

$$A(Def^G_{G/N})(e_G) = \lambda e_{G/N},$$

donde $e_{G/N} \in E_{G/N}$ y $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$, entonces $e_{G/N} = (1/\lambda)A(Def^G_{G/N})(e_G)$.
Por el otro lado, sabemos por el Teorema 3.1.2 (c) que

$$A(Inf^G_{G/N})(e_{G/N}) = \sum_{t \in \Omega} t,$$

donde Ω es un subconjunto de E_G. Ahora supongamos que $e_G \cdot A(Inf^G_{G/N})(e_{G/N}) = 0$, por las identidades de Frobenius (Definición 2.1.3)

$$\begin{aligned} 0 = A(Def^G_{G/N})\left(e_G \cdot A(Inf^G_{G/N})(e_{G/N})\right) &= A(Def^G_{G/N})(e_G) \cdot e_{G/N} \\ &= (\lambda e_{G/N}) \cdot e_{G/N} \\ &= \lambda e_{G/N}, \end{aligned}$$

esta contradicción, demuestra que $e_G \cdot A(Inf^G_{G/N})(e_{G/N}) \neq 0$. Esto significa que e_G es un elemento de Ω. Por lo tanto, $e_G \cdot A(Inf^G_{G/N})(e_{G/N}) = e_G$.
Sea M/N un subgrupo normal no trivial de G/N. Entonces

$$\begin{aligned} A(Def^{G/N}_{(G/N)/(M/N)})(e_{G/N}) &= A(Def^{G/N}_{(G/N)/(M/N)} \circ Def^G_{G/N})((1/\lambda)e_G) \\ &= 1/\lambda \cdot A(Def^G_{(G/N)/(M/N)})(e_G) \\ &= 1/\lambda \cdot A(Def^G_{G/M})(e_G) \\ &= 0, \end{aligned}$$

por lo tanto, $e_{G/N} \in \underline{\underline{E_{G/N}}}$. ■

3.1.6 Notación. Si G es un grupo finito, denotaremos $\mathbf{e_G}$ al ideal de A generado por $e_G \in E_G$.

3.1.7 Lema. *Sea G un grupo finito y sea $e_G \in E_G$, entonces existe un subgrupo H de G y existe un idempotente $e_H \in \underline{E_H}$, tal que $\boldsymbol{e_G} = \boldsymbol{e_H}$.*

Demostración. Sea $e_G \in E_G$. Por Lema 3.1.4, existe un subgrupo H de G, un elemento $e_H \in \underline{E_H}$ y un escalar $\alpha \in \mathbb{K}$, tales que

$$\begin{aligned} e_H \cdot A(Res^G_H)(e_G) &= e_H \\ \alpha \cdot A(Ind^G_H)(e_H) &= e_G. \end{aligned}$$

Lo que significa

$$e_H = e_H \cdot A(Res^G_H)(e_G) \in \mathbf{e_G}(H).$$

Se tiene que, $\mathbf{e_H}$ es un A-submódulo de $\mathbf{e_G}$. Por otro lado,

$$e_G = \alpha \cdot A(Ind^G_H)(e_H) \in \mathbf{e_H}(G),$$

entonces $\mathbf{e_G}$ es un A-submódulo de $\mathbf{e_H}$. Por lo tanto, $\mathbf{e_G} = \mathbf{e_H}$. ■

3.1.8 Lema. *Sean H un grupo finito y sea $e_H \in E_H$. Entonces existe un subgrupo normal N de H y un elemento $e_{H/N} \in \underline{\underline{E_{H/N}}}$, tales que $\boldsymbol{e}_H = \boldsymbol{e}_{H/N}$.*

Demostración. Por el lema 3.1.5, existe un subgrupo normal N de H, un idempotente $e_{H/N} \in \underline{\underline{E_{H/N}}}$ y un escalar $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$, tales que

$$\begin{aligned} e_H &= e_H \cdot A(Inf^H_{H/N})e_{H/N} \\ e_{H/N} &= \lambda A(Def^H_{H/N})e_H, \end{aligned}$$

lo que significa que $e_{H/N} \in \mathbf{e}_H(H/N)$. Por lo tanto, $\mathbf{e}_{H/N}$ es un subfuntor de $\mathbf{e}_H$ y el idempotente e_H es elemento de $\mathbf{e}_{H/N}(H)$, lo que implica que $\mathbf{e}_H$ es un subfuntor de $\mathbf{e}_{H/N}$. Por lo tanto, $\mathbf{e}_{H/N} = \mathbf{e}_H$. ■

3.1.9 Definición. Sea $F \in \mathcal{F}_{\mathcal{D},R}$. Diremos que un grupo finito H es un grupo minimal de F sí, $F(H) \neq 0$ y $F(K) = 0$ para todo grupo finito K con $|K| < |H|$.

3.1.10 Lema. *Sea F un ideal de A y sea H un grupo minimal de F. Entonces H es un MC-grupo.*

Demostración. Por hipótesis, se tiene que

$$F(H) = \sum_{e_H \in \Omega_{F,H}} \mathbb{K}e_H \neq 0$$

donde $\Omega_{F,H}$ es un subconjunto de E_H. Por lo tanto, existe $e_H \in E_H$ tal que e_H es elemento de $F(H)$. Sea N un subgrupo normal no trivial de H, se tiene que

$$A(Def^H_{H/N})e_H = F(Def^H_{H/N})e_H \in F(H/N),$$

como H es un grupo mínimo de F, se tiene que $F(H/N) = 0$. Por lo tanto,

$$A(Def^H_{H/N})e_H = 0,$$

lo que significa que $e_H \in \underline{\underline{E_H}}$. Por otro lado, dado cualquier subgrupo propio K de H, se tiene $A(Res^H_K)e_H \in F(K) = 0$. Por lo tanto, $A(Res^H_K)e_H = 0$, esto significa que $e_H \in \underline{E_H}$, lo que significa que el elemento e_H pertenece a $\underline{E_H} \cap \underline{\underline{E_H}}$, lo que implica que H es un MC-grupo. ∎

3.1.11 Lema. *Sean G un grupo finito y $e_G \in E_G$. Entonces existe un MC-grupo H y un idempotente e_H elemento de $\underline{E_H} \cap \underline{\underline{E_H}}$, tales que $\mathbf{e}_G = \mathbf{e}_H$.*

Demostración. Por el lema 3.1.7, existe un subgrupo $K \leqslant G$ y un idempotente $e_K \in \underline{E_K}$ tales que $\mathbf{e}_G = \mathbf{e}_K$. Por otro lado, por el lema 3.1.8, sabemos que existen $N \trianglelefteq K$, $e_{K/N} \in \underline{\underline{E_{K/N}}}$ y $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$, tales que $e_{K/N} = \lambda A(Def^K_{K/N})e_K$ y $\mathbf{e}_{K/N} = \mathbf{e}_K = \mathbf{e}_G$. Notemos que para todo $M/N < K/N$, se tiene que

$$\begin{aligned} A(Res^{K/N}_{M/N})e_{K/N} &= A(Res^{K/N}_{M/N})\lambda A(Def^K_{K/N})e_K \\ &= \lambda \cdot A(Res^{K/N}_{M/N} \circ Def^K_{K/N})e_K \\ &= \lambda A(Def^M_{M/N} \circ Res^K_M))e_K \\ &= 0, \end{aligned}$$

esta igualdad es una consecuencia de que $A(Res^K_M)e_K = 0$. Entonces el idempotente $e_{K/N}$ pertenece a $\underline{E_{K/N}} \cap \underline{\underline{E_{K/N}}}$.

∎

3.2 Caracterización de los ideales de un funtor de Green

,

3.2.1 Notación. Sea I un ideal de A. Definimos el conjunto $\mathcal{A}_I$ como

$$\mathcal{A}_I = \{(H, e_H) \mid H \text{ es un } MC\text{-grupo}, e_H \in \underline{E_H} \cap \underline{\underline{E_H}} \text{ y } e_H \in I(H)\}.$$

3.2.2 Lema. *Sea I un ideal de A. Entonces*

$$I = \sum_{(H,e_H)\in\mathcal{A}_I} \boldsymbol{e}_H.$$

Demostración. Por definición, para todo $e_H \in \mathcal{A}_I$ se cumple que $\mathbf{e}_H \leqslant I$. Por lo tanto, podemos decir que $\sum_{(H,e_H)\in\mathcal{A}_I} \mathbf{e}_H \leqslant I$. Por otra parte, según la hipótesis, se tiene que para todo grupo finito G se cumple que $I(G) = \sum_{e_G\in\Omega_{I,G}} \mathbb{K}e_G$, donde $\Omega_{I,G}$ es un subconjunto de E_G. Esto implica que $\mathbf{e}_G \leqslant I$ para todo $e_G \in \Omega_{I,G}$. Por el Lema 3.1.11, se tiene que para cualquier $e_G \in \Omega_{I,G}$ existe un MC-grupo K y un elemento $e_K \in \underline{E_K} \cap \underline{\underline{E_K}}$ tal que $\mathbf{e}_G = \mathbf{e}_K$, Por lo tanto, se tiene que $\mathbf{e}_K \leqslant I$, lo cual implica que $e_K \in I(K)$. De esta forma, se concluye que $(K, e_K) \in \mathcal{A}_I$. En consecuencia,

$$I(G) = \sum_{e_G\in\Omega_{I,G}} \mathbb{K}e_G = \sum_{e_G\in\Omega_{I,G}} \mathbf{e}_G(G) = \sum_{e_G\in\Omega_{I,G}} \mathbf{e}_K(G) \leqslant \sum_{(K,e_K)\in\mathcal{A}_I} \mathbf{e}_K(G),$$

es decir $I \leqslant \sum_{(K,e_K)\in\mathcal{A}_I} \mathbf{e}_K$. ∎

Definiremos a la clase $\mathcal{M}$ como

$$\mathcal{M} = \{(H, s) \mid H \text{ es un } MC\text{-grupo y } s \in \underline{E_H} \cap \underline{\underline{E_H}}\}.$$

3.2.3 Observación. Sea G un grupo finito y sea $e_G \in E_G$. Sabemos que las categorías A-Mod y $Fun(\mathcal{P}_A, R\text{-}Mod)$ son equivalentes. Recordemos la expresión

$$\mathbf{e}_G = \bigcap_{\substack{I \text{ ideal de } A\\ e_G\in I(G)}} I$$

entonces, tenemos que

$$\mathbf{e}_G = \bigcap_{\substack{I\in Fun(\mathcal{P}_A,R-Mod)\\ \mathbf{e}_G\subseteq I}} I.$$

Reproduciendo la prueba de la observación 3.2.9 de [7], se tiene que la evaluación $\mathbf{e}_G(H)$ es igual a $Hom_{\mathcal{P}_A}(H, G)e_G$.

3.2.4 Lema. *Sean K y H grupos finitos y $e_H \in E_H$ y $e_K \in E_K$. Se tiene que $\boldsymbol{e}_H \subseteq \boldsymbol{e}_K$ si y soló si existe $e_{H\times K} \in E_{H\times K}$ tal que*

$$e_H \cdot A(Def_H^{H\times K})\left(e_{H\times K} \cdot A(Inf_K^{H\times K})(e_K)\right) \neq 0.$$

Demostración. $\Rightarrow$] Por la observación 3.2.3, tenemos

$$e_H \in \mathbf{e_K}(H) = Hom_{\mathcal{P}_A}(K, H)e_K$$

donde $Hom_{\mathcal{P}_A}(K, H) = A(H \times K)$. Ahora, por la hipótesis sobre A, existe un idempotente $e_{H\times K} \in E_{H\times K}$ tal que

$$e_H \cdot (e_{H\times K} \circ e_K) \neq 0. \tag{3.2.5}$$

Por el Lema 2.2.5 con $G = 1$, tenemos

$$e_H \cdot A(Def_H^{H\times K})\left(e_{H\times K} \cdot A(Inf_K^{H\times K})(e_K)\right) \neq 0.$$

$\Leftarrow$] Por la proposición 8.6.1 de [7] y la Observación 3.2.9 de [7], tenemos $e_H \in \mathbf{e_K}(H)$. ∎

3.2.6 Definición. Definiremos una relación $\gg$ sobre $\mathcal{M}$, por $(H, e_H) \gg (K, e_K)$ si y soló si existe $e_{H\times K} \in E_{H\times K}$ tal que

$$e_H \cdot A(Def_H^{H\times K})\left(e_{H\times K} \cdot A(Inf_K^{H\times K})(e_K)\right) \neq 0.$$

Diremos que las parejas (H, e_H), $(K, e_K) \in \mathcal{M}$ son equivalentes si $\mathbf{e}_H \gg \mathbf{e}_K$ y $\mathbf{e}_K \gg \mathbf{e}_H$, lo cual lo denotaremos por $(H, e_H) \sim (K, e_K)$, por el Lema 3.2.4 se tiene que $(H, e_H) \sim (K, e_K)$ si y soló si $\mathbf{e}_H = \mathbf{e}_K$.
Notemos que esta relación es una relación de equivalencia. Denotaremos por $[H, e_H]$ la clase de equivalencia de $(H, e_H) \in \mathcal{M}$ y $[\mathcal{M}]$ como un conjunto de representantes de las clases de equivalencia de los elementos de $\mathcal{M}$. Entonces $([\mathcal{M}], \gg)$ es un copo (ver[12]).

3.2.7 Observación. Sea S un conjunto de representantes de las clases de isomorfismo de grupos finitos. Consideremos el conjunto $\mathcal{A} = \prod_{G\in S} \mathcal{P}(A(G))$, donde $\mathcal{P}(A(G))$ denota el conjunto potencia de $A(G)$. Definamos la función

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{M} &\longrightarrow \mathcal{A} \\ (H, e_H) &\longmapsto (\boldsymbol{e}_{\mathbf{H}}(G))_{G\in S} \end{aligned}$$

Sea (H, e_H), $(K, e_K) \in \mathcal{M}$. Se tiene que $(H, e_H) \sim (K, e_K)$ si y sólo si $\boldsymbol{e}_{\mathbf{H}} = \boldsymbol{e}_{\mathbf{K}}$, lo que significa que $\varphi((H, e_H)) = \varphi((K, e_K))$. Por lo tanto, la función $\varphi : [\mathcal{M}] \longrightarrow \mathcal{A}$ está bien definida. Ya que, si dos grupos G y H son isomorfos como grupos, entonces son isomorfos en $\mathcal{P}_A$ (ver Notación 4.1 de [18]), es fácil ver que si dos ideales coinciden en todos los elementos de S, entonces son iguales. Por lo tanto, φ es inyectiva, entonces, $[\mathcal{M}]$ es un conjunto.

Diremos que una subclase $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$ es cerrada si

$$\forall\ (H, e_H),\ (K, e_K) \in \mathcal{M},\ (H, e_H) \gg (K, e_K) \in \mathcal{N} \Rightarrow (H, e_H) \in \mathcal{N}.$$

Un subconjunto B de $[\mathcal{M}]$ es cerrado, si existe una subclase cerrada $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$ tal que $B = \mathcal{N} \cap [\mathcal{M}]$.

3.2.8 Teorema. *Sea $\mathcal{S}_A$ el conjunto de todos los ideales de A, ordenado por la inclusión, y Cl_A el conjunto de todos los subconjuntos cerrados de $[\mathcal{M}]$, ordenado por la inclusión. El mapeo*

$$\Theta : I \longmapsto \{(H, e) \in [\mathcal{M}] \mid e \in I(H)\}$$

es un isomorfismo de copos de $\mathcal{S}_A$ a Cl_A. El isomorfismo inverso está dado por

$$\begin{aligned} \Psi : Cl_A &\longrightarrow \mathcal{S}_A \\ B &\longmapsto \sum_{(H,e_H)\in B} \boldsymbol{e}_H. \end{aligned}$$

Demostración. Sea I un ideal de A, primero demostraremos que el conjunto

$$B = \{(H, e) \in [\mathcal{M}] \mid e \in I(H)\}$$

es cerrado. Sean (H, e_H), $(K, e_K) \in [\mathcal{M}]$, tales que $(H, e_H) \gg (K, e_K) \in B$, entonces $\mathbf{e}_H \subseteq \mathbf{e}_K \subseteq I$. Por lo tanto, $e_H \in I(H)$ i.e. $(H, e_H) \in B$. Ahora demostraremos que este es un morfismo de copos: Sean F y I ideales de A, tales que $F \subseteq I$, si $e \in F(H)$ entonces $e \in I(H)$. Además, el morfismo Ψ es claramente un morfismo de copos.
Por el lema 3.2.2 tenemos que

$$I = \sum_{(K,e_K)\in\mathcal{A}_I} \mathbf{e}_K.$$

Recordemos que $\mathbf{e}_K = \mathbf{e}_H$ si y soló si $(H, e_H) \sim (K, e_K)$, por lo tanto, tenemos que

$$\sum_{(K,e_K)\in\mathcal{A}_I} \mathbf{e}_K = \sum_{(K,e_K)\in[\mathcal{A}_I]} \mathbf{e}_K$$

donde $[\mathcal{A}_I] = \{(K, e_K) \in [\mathcal{M}] \mid (K, e_K) \in \mathcal{A}_I\} = \Theta(I)$, de ahí que $I = \Psi(\Theta(I))$.
Por el otro lado, sea B un conjunto cerrado de $[\mathcal{M}]$. Tenemos

$$\Theta(\Psi(B)) = \{(H, e_H) \in [\mathcal{M}] \mid e_H \in \sum_{(K,e_K)\in B} \mathbf{e}_K(H)\}$$

De manera clara se tiene que $B \subseteq \Theta(\Psi(B))$. Inversamente, dado $(H, e_H) \in \Theta(\Psi(B))$ se tiene que

$$e_H \in \sum_{(K,e_K)\in B} \mathbf{e}_K(H).$$

Entonces existe $(K, e_K) \in B$ tal que $e_H \cdot \mathbf{e}_K(H) \neq 0$, es decir, $e_H \in \mathbf{e}_K(H)$ y por el lema 3.2.4, se tiene que $(H, e_H) \gg (K, e_K)$, ya que B es un conjunto cerrado, $(H, e_H) \in B$. ■

Notemos que el copo Cl_A es un lattice, donde el join es la unión de conjuntos y el meet es la intersección de conjuntos.
Sea F, J F, $J \in \mathcal{S}_A$. Definimos la suma de los ideales F y J, dentada por $F + J$, como el funtor que evaluado en cualquier grupo finito G, es definido por

$$(F + J)(G) := F(G) + J(G),$$

y para un morfismo $\alpha \in Hom_{\mathcal{C}}(G, H)$, los elementos $a \in F(G)$ y $b \in J(G)$, definimos $(F + J)(\alpha)(a + b) := F(\alpha)(a) + J(\alpha)(b)$. Es fácil de demostrar que el funtor $F + J$ es un elemento de $\mathcal{S}_A$.

3.2.9 Corolario. *El lattice $\mathcal{S}_A$ es un lattice distributivo.*

Demostración. El lattice $\mathcal{S}_A$ es distributivo, ya que el lattice Cl_A es claramente distributivo, donde el join es la suma de ideales y el meet es la intersección de ideales. ■

3.3 Caracterización aplicada a algunos ejemplos de funtores de biconjuntos

En esta sección, se analizará el comportamiento de la relación $\gg$ en algunos ejemplos de funtores de Green de biconjuntos cuyas sus evaluaciones en cualquier grupo finito es una álgebra conmutativa de dimensión finita semisimple que se escinde. Si estos ejemplos ya tienen una caracterización de sus ideales, se comparará con la dada en este trabajo.

3.3.1 El funtor de Burnside

El primero de los ejemplos es el funtor de Burnside. Este funtor fue estudiado por Serge Bouc en [7]. Tenemos que $\mathbb{K}B(G) := \mathbb{K} \otimes_{\mathbb{Z}} B(G)$ es una $\mathbb{K}$ álgebra conmutativa de dimensión finita semisimple que se escinde, para cualquier campo $\mathbb{K}$ de característica 0. Entonces el funtor de Burnside satisface las hipótesis necesarias.

Daremos algunos resultados que nos serán útiles cuando se comparen la clasificación de los ideales

3.3.1 Teorema (Teorema 2.5.2 de [7])**.** *Sea G un grupo finito. Si H es un subgrupo de G, denotaremos por e_H^G al elemento de $\mathbb{K}B(G)$ definido de la siguiente manera:*

$$e_H^G = \frac{1}{|N_G(H)|} \sum_{K \leqslant H} |K|\mu(K,H)[G/K],$$

donde μ es la función de Möbius del copo que consta de los todos los subgrupos de G. Se tiene que $e_H^G = e_K^G$ si y sólo si H ay K son conjugados en G, y los elementos e_H^G donde H corre en un conjunto de representantes de las clases de conjugación de los subgrupos de G, denotado $[S(G)]$, es un conjunto de idempotentes ortogonales primitivos de la $\mathbb{K}$-álgebra $\mathbb{K}B(G)$.

Si G es un grupo finito y N es un subgrupo normal de G, se define $m_{G,N}$ como

$$m_{G,N} = \frac{1}{|G|} \sum_{XN=G} |X|\mu(X,G),$$

donde μ es la función de Möbius del copo de los subgrupos de G.

3.3.2 Definición (Definición 5.4.6. de [7])**.** Un grupo finito G es llamado B-grupo si para todo subgrupo normal no trivial N de G, la constante $m_{G,N}$ es igual a cero, o equivalentemente $B(Def^G_{G/N})(e_G^G) = 0$ en $\mathbb{K}B(G/N)$. La clase de todos los B-grupos es denotada por *B-grp*.

3.3.3 Proposición. *Sea G un grupo finito. Se tiene que G es un B-grupo si y sólo si G es un MC-grupo de $\mathbb{K}B$.*

Demostración. Si G es un B-grupo, tenemos que $B(Def^G_{G/N})(e_G^G) = 0$, para todo subgrupo normal N de G distinto al subgrupo trivial i.e. $e_G^G \in \underline{\underline{E_G}}$. Además, por la Proposición 5.4.5. de [7], G es un grupo minimal para el ideal generado por e_G^G, entonces

$e_G^G \in \underline{E_G}$. Por lo tanto, $e_G^G \in \underline{\underline{E_G}} \cap \underline{E_G}$, i.e. G es un MC-grupo de $\mathbb{K}B$ (Definición 3.1.3). Por otro lado, Si G es un MC-grupo, entonces existe $K \leqslant G$ tal que $e_K^G \in \underline{E_G} \cap \underline{\underline{E_G}}$. Si K fuera un subgrupo propio de G, por el Teorema 5.2.4 de [7], se tiene que

$$B(Res_K^G)(e_K^G) = e_K^K,$$

pero $e_K^G \in \underline{E_G}$, entonces $B(Res_K^G)(e_K^G) = 0$. Esta contradicción demuestra que $K = G$. i.e. $e_G^G \in \underline{E_G} \cap \underline{\underline{E_G}}$. Además tenemos que $B(Def_{G/N}^G)(e_G^G) = 0$ para cualquier $1 \neq N \trianglelefteq G$. Por lo tanto, G es un B-grupo. ■

3.3.4 Definición (Definición 5.4.13 de [7])**.** Definiremos la relación $\gg_B$ sobre B-grp, por $G \gg_B H$ si y sólo si H es isomorfo a un cociente de G.

Ahora demostraremos que la relación $\gg_B$ es equivalente a la relación $\gg$.

3.3.5 Lema. *Sean K y H dos B-grupos. Se tiene que $(K, e_K^K) \gg (H, e_H^H)$ si y sólo si $K \gg_B H$.*

Demostración. Por la proposición 5.4.8 de [7], $K \gg_B H$ si y sólo si $\mathbf{e_K} \subseteq \mathbf{e_H}$. Además, por el lema 3.2.4 esto es equivalente a $(K, e_K^K) \gg (H, e_H^H)$. ■

Ya que las relaciones $\gg_B$ y $\gg$ son equivalentes, Entonces el Teorema 5.4.14 de [7] es equivalente al teorema 3.2.8.

3.3.2 Funtor fibrado de p-biconjuntos

En esta subsección se presentará el segundo ejemplo de funtor de Green de biconjuntos, el cual es el funtor monomial de Burnside introducido en la Sección 2.3, considerado como un funtor de p-biconjuntos (donde p es un número primo), es decir, como un funtor de biconjuntos sobre la clase de p-grupos finitos. Entonces todos los grupos en esta subsección serán p-grupos finitos. Además, fijamos un campo $\mathbb{K}$ algebraicamente cerrado de característica $q \neq p$. Este funtor fue estudiado en [14] Olcay Coşkun y Deniz Yilmaz.
Estableceremos los siguientes parámetros. Para un grupo abeliano A, se denotará por $O(G) = O_A(G)$ la intersección de todos los núcleos de todos los homomorfismos de $G \longrightarrow A$. Asimismo, se denotará por $\xi_G(A)$ al conjunto de todos lo pares (H, h), donde $H \leqslant G$ y h corre en un conjunto de representantes de las clases laterales de $O_A(H)$ en H. El conjunto $\xi_G(A)$ es un G-conjunto vía la conjugación y denotaremos por $[H, h]_G$ la clase de conjugación de (H, h). Sea $\mathcal{M}_G(A) = \{(V, \lambda) \mid V \leqslant G,\ \lambda \in Hom_{grp}(V, A)\}$ Por el Lema 3.1 de [1], se tiene que $|\mathcal{M}_G(A)| = |\xi_G(A)|$ y por el Teorema 5.2 de [1], existe una correspondencia biyectiva entre el conjunto de las clases de conjugación de $\xi_G(A)$ y el conjunto de idempotentes primitivos de $\mathbb{K}B^A(G)$, donde la clase $[H, h]_G$ corresponde al idempotente $e_{H,h}^G$ dado por

$$e_{H,h}^G = \frac{1}{|N_G(H, h)|} \sum_{(V,\nu) \in \mathcal{M}_A(G)/G} |V| \mu_G\,(V, \nu; H, h)\,[V, \nu]_G,$$

donde $N_G(H,h)$ denota al G-estabilizador de la pareja (H,h) bajo la acción conjugación y donde la función

$$\mu_G\left(V,\nu;H,h\right)=\sum_{(V',\nu')\in[V,\nu]_G}\nu^{-1}\left(V\cap hO_A(H)\right)\mu(V',H)/|V'|,$$

es la función de Möbius monomial G-invariante y sumamos sobre todas parejas G-conjugadas a (V,ν).

3.3.6 Proposición (Proposición 7 de [14])**.** *Sean $N\trianglelefteq G$ grupos finitos. Entonces, para $(H,h)\in\xi_G(A)$, se tiene que*

$$Def^G_{G/N}e^G_{H,h}=m^G_{H,h}\cdot e^{G/N}_{HN/N,hN},$$

para alguna constante $m^G_{H,h}\in\mathbb{K}$.

Denotaremos por μ_n al grupo cíclico de orden p^n. Para un p-grupo P, denotaremos por $O_n(P)$ al grupo $O_{\mu_n}(P)$ y al funtor $\mathbb{K}B^{\mu_n}$ por $\mathbb{K}B^n$. Sea G un grupo finito, el subgrupo de Frattini será denotado por $\Phi(G)$.

3.3.7 Proposición (Lema 2 de [14])**.** *Para cualquier p-grupo G y un elemento $g\in G$, se tiene que*

$$Def^G_{G/\Phi(G)}e^G_{G,g}=\frac{|O_n(G)|}{|N_G(G,g)|}\cdot|G/\Phi(G)|\cdot e^{G/\Phi(G)}_{G/\Phi(G),g\Phi(G)}.$$

Sea G un p-grupo abeliano elemental de orden p^r, y h un elemento no trivial de G, sea $H=\langle h\rangle$ el subgrupo generado por h. Tenemos que

$$m_{H,g}=\begin{cases}\frac{1-p^{r-1}}{p} & si\ g=1,\\ \frac{1}{p} & g\neq 1,\ g\in H,\\ \frac{1-p^{r-2}}{p} & g\notin H.\end{cases}$$

Sea $\mathcal{I}=\{0\}\cup\{r\in\mathbb{N}\mid p^{r-1}\equiv 1(modq)\}$.

3.3.8 Teorema (Teorema 12 de [14])**.** *Sea F un ideal de $\mathbb{K}B^n$ y G un grupo minimal de F. Entonces,*

(i) El grupo G es un grupo abeliano elemental de orden p^r para algún $r\in\mathcal{I}$.

(ii) El espacio $\mathbb{K}$-vectorial $F(G)$ es 1-dimensional, generado por $e^G_{G,1}$.

(iii) El ideal F es generado por $e^G_{G,1}$.

3.3.9 Proposición. *Sea G un p-grupo de orden p^r. Entonces el grupo G es un MC-grupo de $\mathbb{K}B^n$ si y sólo si es un grupo abeliano elemental y $p^{r-1}=1$ (mod q).*

Demostración. Primero supongamos que G es un MC-grupo de $\mathbb{K}B^n$. Entonces existe un idempotente $e^G_{H,h} \in \underline{E_G} \cap \underline{\underline{E_G}}$, si $H \lneq G$, por ele Teorema 3.1.2, tenemos que

$$e^H_{H,h} \cdot Res^G_H e^G_{H,h} \neq 0.$$

Esta es una contradicción, entonces $H = G$ i.e. $e^G_{H,h} = e^G_{G,g}$. Ahora, consideramos el subgrupo $\Phi(G) \trianglelefteq G$. Por el Lema 3.3.7

$$Def^G_{G/\Phi(G)} e^G_{G,g} = \frac{|O_n(G)|}{|N_G(G,g)|} \cdot |G/\Phi(G)| \cdot e^{G/\Phi(G)}_{G/\Phi(G),g\Phi(G)} \neq 0,$$

entonces $\Phi(G) = \{1\}$, por lo tanto G es un grupo abeliano elemental. Si $g \neq 1$, tenemos

$$Def^G_{G/\langle g\rangle} e^G_{G,g} = \frac{1}{p} e^{G/\langle g\rangle}_{G/\langle g\rangle, g\langle g\rangle} \neq 0,$$

en consecuencia $g = 1$, y

$$Def^G_{G/N} e^G_{G,1} = \frac{1 - p^{r-1}}{p} e^{G/N}_{G/N,N} = 0.$$

Esto significa que $p^{r-1} = 1 \pmod q$. Por otro lado, si suponemos que G es un grupo abeliano elemental de y $p^{r-1} = 1 \pmod q$. Entonces por la Proposición 3.3.6 y la Proposición 3.3.7, $e^G_{G,1} \in \underline{E_G} \cap \underline{\underline{E_G}}$. ■

Sean K y H p-grupos abelianos elementales de orden p^{r_K} y p^{r_H} respectivamente y $r_K, r_H \in \mathcal{I}$. Por el Corolario 13 de [14] el ideal generado por $e^K_{K,1}$ está contenido en ideal generado por $e^H_{H,1}$ si y sólo si $r_H \leqslant r_K$. Esto significa que $(K, e^K_{K,1}) \gg (H, e^H_{H,1})$ si y sólo si $r_H \leqslant r_K$. Una de las consecuencias es que la clasificación dada en el Teorema 3.2.8 es igual a la clasificación dada en el Corolario 13 de [14].

3.3.3 El funtor de Burnside de rebanadas

El tercer ejemplo que estudiaremos es el funtor de Burnside de rebanadas. Este funtor ha sido estudiado por Serge Bouc en [8] y por Ibrahima Tounkara en [22]. La definición del funtor se encuentra en la subsección 2.3. En el Corolario 4.7 de [8], Bouc demostró que para todo grupo finito G, se tiene que $\mathbb{Q}\Xi(G) := \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \Xi(G)$ (Definición 2.3.6) es una $\mathbb{Q}$-álgebra conmutativa de dimensión finita semisimple, escindida.
Por el Teorema 4.6 de [8], el grupo $\Xi(G)$ es libre con base

$$\{\langle T, S\rangle_G \in \Xi(G) | (T, S) \in [\Pi(G)]\},$$

donde $[\Pi(G)]$ es un conjunto de representantes de las clases de conjugación de las rebanadas de G (Definición 2.3.8).

3.3.10 Notación. Para una rebanada (T, S) del grupo G, definimos

$$\xi^G_{T,S} := \frac{1}{|N_G(T,S)|} \sum_{U \leqslant S \leqslant V \leqslant T} |U| \mu(U,S)\mu(V,T)\langle U, V\rangle_G$$

donde μ es la función de Möbius del copo de los subgrupos de G y donde $N_G(T, S)$ es igual a $N_G(T) \cap N_G(S)$.

3.3.11 Proposición (Teorema 5.2 de [8])**.** *Sea G un grupo finito. Entonces los elementos $\xi^G_{T,S}$, para $(T,S) \in [\Pi(G)]$ son los idempotentes primitivos de $\mathbb{Q}\Xi(G)$.*

3.3.12 Proposición (Proposición 4.4 de [22])**.** *Sea N un subgrupo normal de G. Entonces*

$$Def^G_{G/N}\xi^G_{G,S} = m_{G,S,N}\xi^{G/N}_{G/N,SN/N},$$

donde

$$m_{G,S,N} = \frac{[N_G(SN) : SN]}{|N_G(S)|} \sum_{\substack{U \leqslant S \leqslant V \leqslant T \\ VN=G \\ UN=SN}} |U|\mu(U,S)\mu(V,T).$$

3.3.13 Definición (Definición 7.5. de [22])**.** Una rebanada (T,S) de T es llamada una T-rebanada (sobre $\mathbb{K}$) si para cualquier subgrupo normal no-trivial N de T, la constante $m_{T,S,N}$ es igual a cero.

3.3.14 Proposición. *Sea G un grupo finito. Se tiene que G es un MC-grupo de $\mathbb{Q}\Xi$ si y sólo si existe una T-rebanada (G,S) de G.*

Demostración. Primero, supongamos que G es un MC-grupo de $\mathbb{Q}\Xi$. Entonces existe un idempotente $\xi^G_{T,S} \in \mathbb{Q}\Xi(G)$ tal que $\mathbb{Q}\Xi(Res^G_H)(\xi^G_{T,S}) = 0$ para todo $H \lneq G$, y $\mathbb{Q}\Xi(Def^G_{G/N})(\xi^G_{T,S}) = 0$ para todo $1 \neq N \trianglelefteq G$. Si $T \neq G$, por la Proposición 4.1 de [22], tenemos que

$$\mathbb{Q}\Xi(Res^G_T)(\xi^G_{T,S}) = \sum_{\substack{(T,S')\in[\Pi(T)] \\ (T,S')=_G(T,S)}} \xi^T_{(T,S')} \neq 0,$$

esta contradicción nos demuestra que $T = G$. Ya que $\mathbb{Q}\Xi(Def^G_{G/N})(\xi^G_{G,S}) = 0$ para todo subgrupo normal no-trivial N de G y la Proposición 4.4 de [22], tenemos que (G,S) es una T-rebanada. Por otro lado, supongamos que existe una T-rebanada (G,S) de G. Por la Proposición 4.4 de [22], tenemos

$$\mathbb{Q}\Xi(Def^G_{G/N})(\xi^G_{G,S}) = 0$$

para todo $1 \neq N \trianglelefteq G$ y la Proposición 4.1 de [22], tenemos que

$$\mathbb{Q}\Xi(Res^G_H)(\xi^G_{G,S}) = 0$$

para $H \lneq G$. Por lo tanto, G es un MC-grupo de $\mathbb{Q}\Xi$. ■

3.3.15 Proposición. *Sean (T,S) y (V,U) dos rebanadas. Entonces $(V,U) \twoheadrightarrow (T,S)$ (ver Subsección 2.3) si y solo si $(V,\xi^V_{V,U}) \gg (T,\xi^T_{T,S})$ (Definición 3.2.6).*

Demostración. Por el Teorema 7.1 de [22], se tiene que $(V,U) \twoheadrightarrow (T,S)$ si y sólo si $\langle\xi^V_{V,U}\rangle \subseteq \langle\xi^T_{T,S}\rangle$, y por el Lema 3.2.4, $\langle\xi^V_{V,U}\rangle \subseteq \langle\xi^T_{T,S}\rangle$ si y sólo si $(V,\xi^V_{V,U} \gg (T,\xi^T_{T,S})$. ■

Definamos a **T**-rebanada como el conjunto de todas las T-rebanadas de $\mathbb{Q}\Xi$ y denotaremos [**T**-slice] un conjunto de representantes de las clases de isomorfismo de las **T**-rebanadas, se tiene que ([**T**-slice], $\twoheadrightarrow$) es un copo .
Por la Proposición 3.3.14, Proposición 3.3.15, Proposición 8.8 en [22] y el Teorema 3.2.8, se tiene que el copo de los ideales de $\mathbb{Q}\Xi$ es isomorfo como copo al conjunto de los subconjuntos cerrados de [**T**-slice].

3.3.4 El funtor $\mathbb{K}B_K$

Ahora veremos el funtor de Burnside trasladado, $\mathbb{K}B_K$ donde K es un grupo finito y $\mathbb{K}$ es un campo de característica 0. Este ejemplo fue estudiado en [9] por Serge Bouc. Se definió este funtor en la subsección 2.3.

3.3.16 Definición (Definición 3.1 de [9])**.**

- Para un grupo finito K, denotaremos a $grp_{\Downarrow K}$ como la siguiente categoría:
  - Los objetos son los grupos finitos sobre K i.e. las parejas (L, ϕ), donde L es un grupo finito y $\phi : L \longrightarrow K$ es un homomorfismo de grupos.
  - Un morfismo $f : (L, \phi) \longrightarrow (L', \phi')$ de grupos sobre K en la categoría $grp_{\Downarrow K}$ es un homomorfismo de grupos $f : L \longrightarrow L'$ tal que existe un automorfismo interno i de K tal que $i \circ \phi = \phi' \circ f$.
  - La composición de morfismos en la categoría $grp_{\Downarrow K}$ es la composición de homomorfismos de grupos y la identidad de (L, ϕ) es el homomorfismo identidad de L.
- Si (L, ϕ) y (L', ϕ') son grupos sobre K, diremos que (L', ϕ') es un cociente de (L, ϕ), y lo denotaremos $(L, \phi) \twoheadrightarrow (L', \phi')$, si existe $f \in Hom_{grp_{\Downarrow K}}((L, \phi), (L', \phi'))$ tal que $f : L \longrightarrow L'$ es un homomorfismo sobreyectivo. En este caso, diremos que f es un morfismo sobreyectivo de (L, ϕ) a (L', ϕ').

3.3.17 Notación. Sea (L, ϕ) un grupo sobre K, denotaremos por L_ϕ el subgrupo de $L \times K$ definido por

$$L_\phi := \{(l, \phi(l)) \mid l \in L\}.$$

3.3.18 Notación. Sea (L, ϕ) un grupo sobre K. Denotaremos por $\mathbf{e}_{L,\phi}$ el ideal $\mathbb{K}B_K$ generado por $e_{L_\phi}^{L\times K} \in \mathbb{K}B_K(L)$.

3.3.19 Corolario (Corolario 3.5 de [9])**.** *Sean G un grupo finito y L un subgrupo de $G \times K$. Entonces el ideal de $\mathbb{K}B_K$ generado por $e_L^{G\times K}$ es igual al ideal de $\mathbb{K}B_K$ generado por $e_{L_{p_2}}^{L\times K}$.*

3.3.20 Definición (Definición 4.3. de [9])**.** Sea (L, ϕ) un grupo sobre K. Diremos que (L, ϕ) es un B_K-grupo, o un B-grupo relativo a K, si $m_{L,N} = 0$ para todo subgrupo normal no trivial N de L contenido en $Ker\phi$.

3.3.21 Notación. Sea (L, φ) un subgrupo sobre K. Si Q es un subgrupo normal de L, contenido en $Ker\varphi$, y maximal con la propiedad $m_{L,Q} \neq 0$, denotaremos por $\beta_K(L, \varphi)$ al cociente $(L/Q, \varphi/Q)$ de (L, φ).

3.3.22 Corolario (Corolario 4.9 de [9])**.** *Sea (L, φ) un grupo sobre K.*

1. *$\beta_K(L, \varphi)$ está bien definido salvo isomorfismo en $grp_{\Downarrow K}$.*
2. *$\beta_K(L, \varphi)$ es un B_K-grupo, el cual es un cociente de (L, φ).*

3. *Si* (P,ψ) *es un* B_K*-grupo, cociente de* (L,φ)*, entonces* (P,ψ) *es un cociente de* $\beta_K(L,\varphi)$*.*

4. $\boldsymbol{e}_{L,\varphi} = \boldsymbol{e}_{\beta_K(L,\varphi)}$*.*

3.3.23 Lema (Lema 5.5 de [9])**.** *Sean* (L,φ) *un* B_K*-grupo y* (M,ψ) *un grupo sobre* K*. Entonces,* $\mathbf{e}_{M,\psi} \subseteq \mathbf{e}_{L,\varphi}$ *si y soló si* $(M,\psi) \twoheadrightarrow (L,\varphi)$*.*

3.3.24 Notación. Fijaremos un conjunto $\mathcal{S}_K$ de representantes de las clases de isomorfismo de los objetos de la categoría $grp_{\Downarrow K}$ Además definimos $\mathcal{B}_K$-gr como el subconjunto de $\mathcal{S}_K$ que consiste de los B_K-grupos.

3.3.25 Teorema (Teorema 5.7 de [9])**.** *Sea* $\mathcal{I}_{\mathbb{K}B_K}$ *el lattice de los ideales de* $\mathbb{K}B_K$*, ordenado por la inclusión de ideales, y* $\mathcal{C}l_{\mathcal{B}_K\text{-}gr}$ *es el lattice de los conjuntos cerrados de* $\mathcal{B}_K$*-gr, ordenado por la inclusión de subconjuntos. Entonces el mapeo*

$$I \in \mathcal{I}_{\mathbb{K}B_K} \longmapsto \mathcal{P}_I := \{(L,\varphi) \in \mathcal{B}_K\text{-}gr \mid \boldsymbol{e}_{(L,\varphi)} \subseteq I\}$$

es un isomorfismo de lattices de $\mathcal{I}_{\mathbb{K}B_K}$ *a* $\mathcal{C}l_{\mathcal{B}_K\text{-}gr}$*. El isomorfismo inverso es*

$$\mathcal{P} \in \mathcal{C}l_{\mathcal{B}_K\text{-}gr} \longmapsto I_{\mathcal{P}} = \sum_{(L,\varphi)\in\mathcal{P}} \boldsymbol{e}_{(L,\varphi)},$$

en particular $\mathcal{I}_{\mathbb{K}B_K}$ *es completamente distributiva.*

3.3.26 Proposición. *Sea* L *un grupo finito. Entonces* L *es un* MC*-grupo de* $\mathbb{K}B_K$ *si y sólo si existe algún* $X \leqslant L \times K$ *tal que* $p_1(X) = L$*,* $k_1(X) \cap N \neq 1$ *para todo* $1 \neq N \trianglelefteq L$ *y* (X, p_2) *es un* B_K*-grupo.*

Demostración. Supongamos que L es un MC-grupo para $\mathbb{K}B_K$. Entonces existe un elemento $e_X^{L\times K} \in \mathbb{K}B_K(L)$ tal que

$$\begin{aligned}\mathbb{K}B_K(Res^L_H)(e_X^{L\times K}) &= 0,\\ \mathbb{K}B_K(Def^L_{L/N})(e_X^{L\times K}) &= 0,\end{aligned}$$

para todo $H \lneq L$ y $1 \neq N \trianglelefteq L$. Sí $p_1(X) \neq L$. Por el Teorema 5.2.4 [7], tenemos que

$$\mathbb{K}B_K(Res^L_{p_1(X)})(e_X^{L\times K}) = \mathbb{K}B(Res^{L\times K}_{p_1(X)\times K})(e_X^{L\times K}) \neq 0,$$

esta contradicción demuestra que $p_1(X) = L$. Más aún, si existe $1 \neq N \trianglelefteq L$ tal que $k_1(X) \cap N = 1$, entonces por el Lema 2.2 de [9] existe un escalar $\lambda \neq 0$ en $\mathbb{K}$, que satisface

$$\mathbb{K}B_K(Def^L_{L/N})(e_X^{L\times K}) = \lambda m_{X,X\cap(N\times 1)} e_X^{(L/N)\times K}, \tag{3.3.27}$$

además, tenemos que $m_{X,X\cap(N\times1)} = m_{X,1} = 1$ y $X \cap (N \times 1) = (k_1(X) \cap N) \times 1$. Por lo tanto, $\mathbb{K}B_K(Def^G_{L/N})(e_X^{L\times K}) \neq 0$, Esta es una contradicción, en consecuencia $k_1(X) \cap N \neq 1$ para todo $1 \neq N \trianglelefteq L$. Finalmente, sea $1 \neq N \trianglelefteq X$ tal que N es un subgrupo de $Ker(p_2) = k_1(X) \times 1$, entonces $N = M \times 1$, para algún $1 \neq M \trianglelefteq L$ y

$$m_{X_{p_2},N\times 1} = m_{X,N} = m_{X,M\times 1},$$

la primera ecuación es por la Definición 2.1 de [7] y por la ecuación 3.3.27, se tiene que $m_{X,M\times 1}=0$. Entonces (X,p_2) es un B_K-grupo.
Ahora supongamos que existe un subgrupo X de $L\times K$ con $p_1(X)=L$, tal que $k_1(X)\cap N\neq 1$ para todo $1\neq N\trianglelefteq L$ y (X,p_2) es un B_K-grupo. Por el Teorema 5.2.4 de [7], se tiene que

$$\mathbb{K}B_K(Res^L_H)(e^{L\times K}_X)=0,$$

para todo H subgrupo propio de L. Además, por el Lema 2.2 de [9],

$$\mathbb{K}B_K(Def^L_{L/N})(e^{L\times K}_X)=\lambda m_{X,X\cap(N\times 1)}e^{L/N\times K}_{\overline{X}},$$

notemos que $X\cap(N\times 1)=(k_1(X)\cap N)\times 1$. Más aún,

$$m_{X,X\cap(N\times 1)}=m_{X,(k_1(X)\cap N)\times 1}=m_{X_{p_2},(N\times 1)\times 1}=0$$

Ya que (X,p_2) es un B_K-grupo, entonces $\mathbb{K}B_K(Def^L_{L/N})(e^{L\times K}_X)=0$. Por lo tanto, L es un MC-grupo de $\mathbb{K}B_K$. ∎

3.3.28 Corolario. *Sea L un grupo finito. Si $(L\times K,p_2)$ es un B_K-grupo, donde p_2 es la segunda proyección, entonces L es un MC-grupo de $\mathbb{K}B_K$.*

3.3.29 Proposición. *Sean $(L,e^{L\times K}_X)$ y $(H,e^{H\times K}_Y)$ elementos de $\mathcal{M}$, tales que $p_1(X)=L$, $k_1(X)\cap N\neq 1$ para todo $1\neq N\trianglelefteq L$ y $p_1(Y)=H$, $k_1(Y)\cap M\neq 1$ para todo $1\neq M\trianglelefteq H$ y (X,p_2) es un B_K-grupo. Entonces $\mathbf{e}_{Y_{p_2}}\gg\mathbf{e}_{X_{p_2}}$ si y sólo si $(Y,p_2)\twoheadrightarrow(X,p_2)$.*

Demostración. Tenemos que $e^{L\times K}_X\gg e^{H\times K}_Y$ si y sólo si $\mathbf{e}_{Y,p_2}\subseteq\mathbf{e}_{X,p_2}$. Por el otro lado, por el Teorema 5.3 de se tiene que [9], $\mathbf{e}_{Y,p_2}\subseteq\mathbf{e}_{X,p_2}$ si y sólo si

$$(Y,p_2)\twoheadrightarrow(X,p_2).$$

∎

3.3.30 Teorema. *Sea $\mathcal{B}_K$-gr el subconjunto de $\mathcal{S}_K$ que consiste de los B_K-grupos, ordenados por $\twoheadrightarrow$ y sea $([\mathcal{M}],\gg)$ el copo como en la Definición 3.2.6. Entonces el mapeo*

$$\begin{aligned}\rho:[\mathcal{M}]&\longrightarrow\mathcal{B}_K\text{-}gr\\(H,e^{H\times K}_T)&\longmapsto\overline{\beta_K(T,p_2)},\end{aligned}$$

donde $\overline{\beta_K(T,p_2)}$ es el representante de la clase de isomorfismo de $\beta_K(T,p_2)$ en $\mathcal{S}_K$, es un isomorfismo de copos.

Demostración. Primero demostraremos que ρ está bien definido: Sea $(H,e^{H\times K}_T)$ y $(L,e^{L\times K}_J)$ en $\mathcal{M}$ tales que $(H,e^{H\times K}_T)\sim(L,e^{L\times K}_J)$. Entonces, el ideal generado por $e^{H\times K}_T$, el cual es denotado como $\mathbf{e}^{\mathbf{H\times K}}_{\mathbf{T}}$, es igual al ideal generado por $e^{L\times K}_J$, el cual es denotado por $\mathbf{e}^{\mathbf{L\times K}}_{\mathbf{J}}$. Por el corolario 3.3.22, se tiene

$$\mathbf{e}_{\beta_K(T,p2)}=\mathbf{e}^{\mathbf{H\times K}}_{\mathbf{T}}=\mathbf{e}^{\mathbf{L\times K}}_{\mathbf{J}}=\mathbf{e}_{\beta_K(J,p_2)}.$$

Entonces, por el Lema 3.3.23, $\beta_K(T, p_2) \cong \beta_K(J, p_2)$. Por lo tanto, ρ está bien definido. Ahora demostraremos que ρ es un isomorfismo de copos: Sean $(H, e_T^{H\times K})$ y $(L, e_J^{L\times K})$ en $[\mathcal{M}]$ tales que $(H, e_T^{H\times K}) \gg (L, e_J^{L\times K})$, esto significa que

$$\mathbf{e_T^{H\times K}} \subseteq \mathbf{e_J^{L\times K}}.$$

Por el corolario 3.3.22 y el Lema 3.3.23 tenemos que $\beta_K(T, p_2) \twoheadrightarrow \beta_K(J, p_2)$.
Por último demostraremos que ρ es una biyección:

- Inyectividad. Sean dos elementos $(H, e_T^{H\times K})$ y $(L, e_J^{L\times K})$ de $\mathcal{M}$, tales que

$$\rho((H, e_T^{H\times K})) = \rho((L, e_J^{L\times K})).$$

  Lo que significa que $\beta_K(T, p_2) \cong \beta_K(J, p_2)$. Por el Corolario 3.3.22 y el Lema 3.3.23 se tiene que

$$\mathbf{e_T^{H\times K}} = \mathbf{e_J^{L\times K}}.$$

  Por lo tanto, $(H, e_T^{H\times K}) \sim (L, e_J^{L\times K})$ i.e. ρ es inyectiva.

- Sobreyectividad. Sea $(T, \varphi) \in B_K$-gr. Por el Lema 3.1.11, existe un MC-grupo H y $e_J^{H\times K} \in \underline{E_H} \cap \underline{\underline{E_H}}$ tales que

$$\mathbf{e_J^{H\times K}} = \mathbf{e_{T_\varphi}^{H\times K}}.$$

  Además, por el Corolario 3.3.19 y el Corolario 3.3.22 se tiene que

$$\mathbf{e}_{\beta_k(J,p_2)} = \mathbf{e_{J_{p_2}}^{J\times\ K}} = \mathbf{e_J^{H\times\ K}} = \mathbf{e_{T_\varphi}^{T\times\ K}},$$

  entonces $\beta_K(J, p_2) \cong (T, \varphi)$. Por lo tanto, $\rho((H, e_J^{H\times K})) = (T, \varphi)$ i.e. ρ es sobreyectiva.

■

Preguntas abiertas

Unas preguntas que surge de manera natural serían:

- ¿Se pueden clasificar los ideales con una menor cantidad que los MC-grupos?
- Es posible quitar algunas de las hipótesis sobre el funtor de Green de biconjuntos A y dar una clasificación de los ideales.

Capítulo 4

Construcciones + para funtores fibrados

En este capítulo, se tratará de trasladar las construcciones dadas en el artículo "The $-_+$ and $-^+$ constructions for biset functors"[4], escrito por Robert Boltje, Gerardo Raggi Cárdenas y Luis Valero Elizondo, para los funtores de biconjuntos fibrados.
A partir de este capítulo, A será un grupo abeliano y $\mathcal{G}$ será una clase de grupos finitos.

4.1 Preliminares de funtores biconjuntos fibrados

Continuamos con la teoría de los funtores de biconjuntos fibrados, que ya fue introducida en la sección 2.3.

Dados dos grupos finitos G y H, diremos que un conjunto U es un (G, H)-biconjunto A-fibrado si es un $G \times H$-conjunto A-fibrado. Los (G, H)-biconjuntos A-fibrados, junto con las funciones $(G \times H \times A)$-invariantes, forman la categoría de los (G, H)-biconjuntos A-fibrados, que denotaremos por ${}_G set_H^A$. El grupo de Burnside de los (G, H)-biconjunto A-fibrados se define como $B^A(G, H) := B^A(G \times H)$ donde $B^A(G \times H)$ es el anillo de Burnside monomial del grupo $G \times H$.

4.1.1 Definición (El producto tensorial de biconjuntos A-fibrados)**.** Dados un objeto $X \in {}_G set_H^A$ y otro objeto $Y \in {}_H set_K^A$, el conjunto $X \times Y$ es un $(H \times A)$-conjunto bajo la acción $(h, a)(x, y) := (axh^{-1}, ha^{-1}y)$. Las $H \times A$-órbitas de $X \times Y$, donde A actúa de manera libre, se denotara como $X \otimes_{AH} Y$. Sea $(x, y) \in X \times Y$, si su $(H \times A)$-órbita es un elemento de $X \otimes_{AH} Y$, se denotará como $x \otimes y$. El conjunto $X \otimes_{AH} Y$ es un (G, K)-biconjunto A-fibrado bajo la acción $ga(x \otimes y)k = gax \otimes yk$.

La categoría $\mathcal{P}_{RB^A}$ se denotará por $R\mathcal{C}^A$ y la llamaremos la categoría de biconjuntos A-fibrados. A continuación, recordemos cómo se define esta categoría.

- Los objetos son los grupos finitos.
- Dados dos grupos finitos G y H, se define $Hom_{R\mathcal{C}^A}(G, H) := RB^A(H \times G)$.

- La composición: Sea $T \in RB^A(G \times H)$ y sea $Y \in RB^A(H \times K)$, no es difícil de ver que la composición $T \circ Y$ en $R\mathcal{C}^A$ es la extensión R-lineal del producto tensorial de biconjuntos $\otimes_{AH}$.
- El elemento identidad de $Hom_{R\mathcal{C}^A}(G, G)$ es la clase de isomorfismo del (G, G)-biconjunto A-fibrado $G \times A$.

Recordemos que los funtores fibrados son los funtores R-lineales de la categoría $R\mathcal{C}^A$ a la categoría de los R-Mod.
Dado X un G-conjunto A-fibrado, se dice que X es transitivo si G actúa de manera transitiva en el conjunto de las A-órbitas de X, el cual será denotado por X/A. Se define la pareja estabilizadora de $x \in X$ como (G_x, ϕ_x), donde $G_x \leqslant G$ es el estabilizador de la A-órbita de x y $\phi_x : G_x \longrightarrow A$ es el homomorfismo de grupos definido por la ecuación $gx = \phi_x(g)x$ para todo $g \in G_x$.

4.1.2 Definición. Sea G grupo finito en $\mathcal{G}$, denotaremos por

$$\mathcal{M}(G) = \{(U, \phi) \mid U \leqslant G, \phi : U \longrightarrow A \text{ es un morfismo de grupos}\}.$$

El grupo G actúa en $\mathcal{M}(G)$ a través de la conjugación. Dados dos elementos (U, ϕ) (V, ψ) de $\mathcal{M}(G)$, diremos que $(U, \phi) \leqslant (V, \psi)$ si $U \leqslant V$ y $\phi = \psi|_U$, con este orden parcial, el conjunto $\mathcal{M}(G)$ tiene una estructura de copo. Si H es otro grupo finito, denotaremos por $\mathcal{M}(G, H) := \mathcal{M}(G \times H)$.

4.1.3 Notación. Sea G un grupo finito y $(U, \phi) \in \mathcal{M}(G)$. Definimos al G-conjunto A-fibrado transitivo

$$\frac{G}{U, \phi} := \frac{G \times A}{\{(u, \phi(u)) \mid u \in U\}}.$$

Ahora, si X es un G-conjunto A-fibrado transitivo, entonces para todo $x \in X$ se tiene el siguiente isomorfismo de G-conjuntos A-fibrados

$$X \cong \frac{G}{G_x, \phi_x}.$$

4.1.4 Proposición (Proposición 1 de [15])**.** *Como grupo abeliano, se tiene la siguiente igualdad*

$$B^A(G) = \bigoplus_{(H,\phi) \in [\mathcal{M}(G)/G]} \mathbb{Z}\left[\frac{G}{H, \phi}\right],$$

donde $[\mathcal{M}(G)/G]$ *es un conjunto de representantes de las clases de* G*-conjugación de* $\mathcal{M}(G)$.

Las operaciones elementales tienen las siguientes expresiones.

$$Res^G_K = \left[\frac{K \times G}{\Delta(K), 1}\right] \qquad \text{y} \qquad Ind^G_K = \left[\frac{G \times K}{\Delta(K), 1}\right].$$

Sean $N \trianglelefteq G$ y $\pi : G \longrightarrow G/N$ la proyección canónica, se tiene

$$Def^G_{G/N} = \left[\frac{G/N \times G}{{}^{(\pi,1)}\Delta(G), 1}\right] \qquad \text{y} \qquad Inf^G_{G/N} = \left[\frac{G \times G/N}{{}^{(1,\pi)}\Delta(G), 1}\right],$$

donde ${}^{(\pi,1)}\Delta(G) := \{(gN, g) \mid g \in G\}$ y ${}^{(1,\pi)}\Delta(G) := \{(g, gN) \mid g \in G\}$. Finalmente, si $f : H \longrightarrow G$ es un isomorfismo de grupos, se tiene

$$Iso(f) = \left[\frac{G \times H}{{}^{(f,1)}\Delta(H), 1}\right].$$

Ahora daremos definiciones necesarias para describir el producto de dos biconjuntos A-fibrados transitivos. Sean G, H grupos finitos y sea $(U, \varphi) \in \mathcal{M}(G\times H)$. Denotaremos por

$$p_1 : G \times H \longrightarrow G \quad \text{y} \quad p_2 : G \times H \longrightarrow H$$

la primera y la segunda proyección respectivamente. Además, denotaremos a

$$k_1(U) = \{g \in G \mid (g, 1) \in U\} \quad \text{y} \quad k_2(U) = \{h \in H \mid (1, h) \in U\}.$$

y definimos las funciones

$$\begin{aligned} \varphi_1 : k_1(U) &\longrightarrow A \\ g &\longmapsto \varphi((g,1)) \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} \varphi_2 : k_2(U) &\longrightarrow A, \\ h &\longmapsto \varphi((1,h))^{-1}. \end{aligned}$$

Sea K un grupo finito y sea V un subgrupo de $H \times K$, definimos a

$$U * V := \{(g, k) \in G \times K \mid \exists h \in H \ : \ (g, h) \in U, (h, k) \in V\},$$

el cual es un subgrupo de $G \times K$. Más aún, si $(V, \psi) \in \mathcal{M}(H \times K)$ con

$$\varphi_2|_{k_2(U)\cup k_1(V)} = \psi_1|_{k_2(U)\cup k_1(V)},$$

entonces definimos el homomorfismo $\varphi * \psi \in Hom(U * V, A)$ por

$$(\varphi * \psi)(g, k) := \varphi(g, h)\psi(h, k),$$

donde $h \in H$ es escogido tal que $(g, h) \in U$ y $(h, k) \in V$. Si las condiciones anteriores se satisfacen, definimos

$$(U, \phi) * (V, \psi) := (U * V, \phi * \psi). \tag{4.1.5}$$

Sí $L \leqslant H$ y $T \leqslant G$, definimos

$$\begin{aligned} U * L :&= \{g \in G \mid \exists l \in L \ : \ (g, l) \in U\} \\ T * U :&= \{h \in H \mid \exists t \in T \ : \ (t, h) \in U\}, \end{aligned}$$

los cuales son subgrupos de G y H respectivamente.

4.1.6 Teorema (Corolario 2.5 de [3]). *Para* $(U,\varphi) \in \mathcal{M}(G\times H)$ *y* $(V,\psi) \in \mathcal{M}(H\times K)$ *tenemos*

$$\left[\frac{G\times H}{U,\varphi}\right] \otimes_{AH} \left[\frac{H\times K}{V,\psi}\right] = \sum_{\substack{t\in[p_2(U)\backslash H/p_1(V)] \\ \varphi_2|_{H_t} = {}^t\psi_2|_{H_t}}} \left[\frac{G\times K}{U *^{(t,1)} V, \varphi *^{(t,1)} \psi}\right]$$

donde $H_t = k_2(U) \cap {}^t k_1(V)$.

De manera similar que en los biconjuntos las operaciones elementales de biconjuntos fibrados toman relevancia al tener una descomposición en operaciones de los biconjuntos fibrados.

4.1.7 Teorema (Proposición 2.8 de [3]). *Sea* $(U,\varphi) \in \mathcal{M}(G\times H)$ *denotaremos a* $P := p_1(U)$, $Q := p_2(U)$, $K := ker(\varphi_1)$ *y* $L := ker(\varphi_2)$. *Entonces* $K \trianglelefteq P$, $L \trianglelefteq Q$, $K \times L \trianglelefteq U$, *y*

$$\left[\frac{G\times H}{U,\varphi}\right] = Ind_P^G \otimes_{AP} Inf_{AP/K}^P \otimes_{AP/K} \left[\frac{P/K\times Q/L}{U/(K\times L),\overline{\varphi}}\right] \otimes_{AQ/L} Def_{Q/L}^Q \otimes_{AQ} Res_Q^H,$$

donde $\overline{\varphi} : U/(K\times L) \longrightarrow A$ *es inducido por* φ *y* $U/(K\times L)$ *es visto como subgrupo de* $P/K\times Q/L$ *vía el isomorfismo canónico* $(P\times Q)/(K\times L) \cong P/K\times Q/L$.

4.1.8 Lema. *Sean* G, H *y* K *grupos finitos. Sea* U *un* (G,H)*-biconjunto* A*-fibrado y sea* V *un* (H,K)*-biconjunto* A*-fibrado*

$$((G\times K)_{u\otimes v}, \phi_{u\otimes v}) = ((G\times H)_u, \phi_u) * ((H\times K)_v, \phi_v),$$

para todo $u\otimes v \in U\otimes_{AH} V$.

Demostración.

- Primero se demostrará que $(G\times K)_{u\otimes v} = (G\times H)_u * (H\times K)_v$. Sea $(g,k) \in (G\times K)_{u\otimes v}$, entonces $(g,k)\cdot(u\otimes v) = (gu\otimes vk^{-1}) = (u\otimes v)$, entonces existen $h\in H$ y $a\in A$ tales que $(gua^{-1}h^{-1}, havk^{-1}) = (u,v)$, esto significa que $(g,h)\in(G\times H)_{ua^{-1}} = (G\times H)_u$ y $(h,k)\in(H\times K)_{av} = (H\times K)_v$, por lo tanto, $(g,k)\in(G\times H)_u * (H\times K)_v$ i.e. $(G\times K)_{u\otimes v} \subseteq (G\times H)_u * (H\times K)_v$. Para demostrar la otra contención tomemos a (g,k) en $(G\times H)_u * (H\times K)_v$, entonces existe $h\in H$ tal que, $(g,h)\in(G\times H)_u$ y $(h,k)\in(H\times K)_v$, de donde tenemos que

$$(g,k)\cdot(u\otimes v) = (gu\otimes uk^{-1}) = (guh^{-1}\otimes hvk^{-1}) = (au\otimes a'u) = aa'\cdot(u\otimes v),$$

con a y a' en A, por lo tanto $(g,k)\in(G\times K)_{u\otimes v}$.

- Por demostrar que $\phi_{u\otimes v} = \phi_u * \phi_v$.
Primero demostremos que $\phi_{u,2} = \phi_{v,1}$ en $k_2((G\times H)_u)\cap k_1((H\times K)_v)$, sea $h\in k_2((G\times H)_u)\cap k_1((H\times K)_v)$, entonces $uh^{-1} = au$ y $hv = a'v$ para algunos a, $a'\in A$, entonces $u\otimes v = uh^{-1}\otimes hv = aa'\cdot(u\otimes v)$, y como $U\otimes_{AH} V$ tiene A-órbitas regulares tenemos que $a' = a^{-1}$.
Sea $(g,k)\in(G\times K)_{u\otimes v}$, entonces existe $h\in H$ tal que $(g,h)\in(G\times H)_u$ y $(h,k)\in(H\times K)_v$. Sea $a\phi_u(g,h)$ y $a' = \phi_v(h,k)$. Tenemos que

$$(g,k)\cdot(u\otimes v) = gu\otimes uk^{-1} = guh^{-1}\otimes hvk^{-1} = au\otimes a'u = aa'\cdot(u\otimes v).$$

Por lo tanto $\phi_{u\otimes v}(g,k) = \phi_u * \phi_v(g,k)$.

■

4.2 Construcción de las categorías $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}_+$ y $\mathcal{D}^+$

En esta sección, se construirá subcategorías de la categoría de biconjuntos fibrados. Para ello estableceremos axiomas que se deben de cumplir para que estas construcciones sean categorías. Otros axiomas nos garantizan la existencia de ciertas operaciones elementales de biconjuntos fibrados en las flechas de dichas categorías.
A partir de esta sección, $\mathcal{G}$ será una clase de grupos finitos y se dará una relación $\mathcal{S}$ tal que para cualquier par de grupos finitos G y H, $\mathcal{S}(G,H)$ es un subconjunto de $\mathcal{M}(G,H)$.
Dado G en $\mathcal{G}$, definiremos

$$\Sigma_{\mathcal{G}}(G) := \{H \leqslant G \mid H \in \mathcal{G}\}.$$

Ahora daremos los axiomas anteriormente mencionados, los cuales están basados en los axiomas dados en [4]. Estos axiomas serán necesarios para definir las construcciones $-_+$ y $-^+$ de una subcategoría de la categoría de biconjuntos A-fibrados.

(i) Para cualquier $G \in \mathcal{G}$, se tiene que $(\Delta(G), 1)$ es elemento de $\mathcal{S}(G,G)$.

(ii) Para cualesquiera G y H en $\mathcal{G}$, el conjunto $\mathcal{S}(G,H)$ es cerrado bajo conjugaciones.

(iii) Para cualesquiera G, H y K en $\mathcal{G}$, para todo $(V,\phi) \in \mathcal{S}(G,H)$ y $(U,\psi) \in \mathcal{S}(H,K)$ tales que

$$\phi_2|_{k_2(V)\cap k_1(U)} = \psi_1|_{k_2(V)\cap k_1(U)},$$

se tiene que $(V * U, \phi * \psi)$ es elemento de $\mathcal{S}(G,K)$.

(iv) Dados G y H elementos de $\mathcal{G}$. Para cualesquiera $(D,\Phi) \in \mathcal{S}(G,H)$, $K \in \sum_{\mathcal{G}}(H)$, tenemos que $D * K \in \mathcal{G}$ y $(D * \Delta(K), \Phi * 1) \in \mathcal{S}(D * K, K)$.

(v) Para todo $G \in \mathcal{G}$ y $H \in \sum_{\mathcal{G}}(G)$, se tiene que $(\Delta(H), 1) \in \mathcal{S}(G,H)$.

(vi) Para todo $G \in \mathcal{G}$ y $H \in \sum_{\mathcal{G}}(G)$, se tiene que $(\Delta(H), 1) \in \mathcal{S}(H,G)$.

(vii) Dados G y H elementos de $\mathcal{G}$ y $(D,\Phi) \in \mathcal{S}(G,H)$, tenemos que $p_2(D) \in \mathcal{G}$, y para cualquier $K \in \sum_{\mathcal{G}}(p_2(D))$, se tiene $D * K \in \mathcal{G}$ y $(D * \Delta(K), \Phi * 1) \in \mathcal{S}(D * K, K)$.

($viii$) Dados G y H elementos de $\mathcal{G}$ y $(D,\Phi) \in \mathcal{S}(G,H)$, tenemos que $p_1(D) \in \mathcal{G}$, y para cualquier $K \in \sum_{\mathcal{G}}(p_1(D))$, se tiene $K * D \in \mathcal{G}$ y $(\Delta(K) * D, 1 * \Phi) \in \mathcal{S}(K, K * D)$.

Además, diremos que la pareja $(\mathcal{G}, \mathcal{S})$ cumple la condición k_2, si para cualesquiera G y H grupos de $\mathcal{G}$ y para todo $(D,\phi) \in \mathcal{S}(G,H)$, se tiene que $k_2(D) = \{1\}$.

4.2.1 Observación. Supongamos que $(\mathcal{G}, \mathcal{S})$ satisfacen del axioma (i) al (iii) y adicionalmente satisface el axioma (iv) o (vii). Entonces, para todo $G \in \mathcal{G}$, $H \in \sum_{\mathcal{G}}(G)$ y $g \in G$, se tiene que ${}^gH \in \mathcal{G}$ y el elemento $({}^{(g,1)}\Delta(H), {}^{(g,1)}1)$ pertenece a $\mathcal{S}({}^gH.H)$.

Demostración. Por los axiomas (i) y (ii) se tiene que ${}^{(g,1)}(\Delta(G), 1) \in \mathcal{S}(G, G)$, por el axioma (iv) o (vii), se tiene que

$$^{(g,1)}\Delta(G) * H = {}^{g}H \in \mathcal{G},$$

además

$$(^{(g,1)}\Delta(G) * H, ^{(g,1)} 1 * 1) = (^{(g,1)}\Delta(H), ^{(g,1)} 1) \in \mathcal{S}(^{g}H, G).$$

■

De ahora en adelante, si $(\mathcal{G}, \mathcal{S})$ satisfacen los axiomas (i), (ii) y (iii). Definiremos la subcategoría $\mathcal{D}:= \mathcal{C}^A(\mathcal{G}, \mathcal{S})$ de $\mathcal{C}^A$, la cual tiene como objetos a los elementos de $\mathcal{G}$ y para cualesquiera G, H elementos de $\mathcal{G}$, definimos

$$Hom_{\mathcal{D}}(H, G) = R \otimes_{\mathbb{Z}} \left\langle \left[\frac{G \times H}{(U, \phi)} \right] \mid (U, \phi) \in \mathcal{S}(G, H) \right\rangle_{\mathbb{Z}} \subseteq RB^A(G, H).$$

Notemos que por el axioma (i), el elemento $\left[\frac{G\times G}{(\Delta(G),1)}\right]$ pertenece a $Hom_{\mathcal{D}}(G, G)$, el cual es el morfismo identidad de G y por los axiomas (ii) y (iii) y el Teorema 4.1.6, se tiene que $\mathcal{D}$ es cerrada bajo la composición de $\mathcal{C}^A$.

4.2.2 Definición. Sean G y H elementos de $\mathcal{G}$. Definiremos a

$$\mathcal{S}_+(G, H) = \{(D, \phi) \in \mathcal{M}(G \times H) \mid p_1(D) \in \mathcal{G}, \quad (D, \phi) \in \mathcal{S}(p_1(D), H)\}.$$

Ahora demostraremos que $(\mathcal{G}, \mathcal{S}_+)$ satisface los axiomas (i), (ii) y (iii): Sean G, H y K elementos de $\mathcal{G}$.

(i) Se tiene que $(\Delta(G), 1) \in \mathcal{S}_+(G, G)$, ya que $p_1(\Delta(G)) = G$ es un elemento de $\mathcal{G}$ y $(\Delta(G), 1) \in \mathcal{S}(p_1(\Delta(G)), G)$.

(ii) Sean $(D, \phi) \in \mathcal{S}_+(G, H)$ y $(g, h) \in G \times H$. Por definición de $\mathcal{S}_+$ se tiene que $p_1(D) \in \mathcal{G}$ y $(D, \phi) \in \mathcal{S}(p_1(D), H)$, por lo tanto ${}^{(1,h)}(D, \phi) \in \mathcal{S}(p_1(D), H)$.
Ahora por la observación 4.2.1 tenemos:
${}^{g}p_1(D) = p_1(^{(g,h)}D) \in \mathcal{G}$ y
${}^{(g,1)}(\Delta(p_1(D)), 1) \in \mathcal{S}(^{g}p_1(D), p_1(D))$, por lo tanto,

$$^{(g,1)}(\Delta(p_1(D)), 1) * {}^{(1,h)}(D, \phi) \in \mathcal{S}(^{g}p_1(D), H).$$

Ahora notemos

$$^{(g,1)}\Delta(p_1(D)) * {}^{(1,h)}D = {}^{(g,h)}D.$$

Sea $(l, s) \in D$, tenemos que

$$(^{(g,1)}1 *^{(1,h)} \phi)(^{g}l, {}^{h}s) = {}^{(g,1)}1((^{g}l, l))^{(1,h)}\phi((l, {}^{h}s)) = \phi(l, s).$$

Por lo tanto, ${}^{(g,h)}(D, \phi) \in \mathcal{S}(^{g}p_1(D), H)$, lo cual significa que ${}^{(g,h)}(D, \phi) \in \mathcal{S}_+(G, H)$

(iii) Sean $(D,\phi) \in \mathcal{S}_+(G,H)$ y $(T,\psi) \in \mathcal{S}_+(H,K)$ tales que $\phi_2 = \psi_1$ en $k_2(D) \cap k_1(T)$, por definición de $\mathcal{S}_+$ se tiene que:

- $p_1(T)$ y $p_1(D)$ son elementos de $\mathcal{G}$.
- $(D,\phi) \in \mathcal{S}(p_1(D),H)$ y $(T,\psi) \in \mathcal{S}(p_1(T),K)$.

Ya que la pareja $(\mathcal{G},\mathcal{S})$ satisface el axioma (iv) de 4.2, tenemos los siguientes resultados:

- $p_1(D*T) = D*p_1(T) \in \mathcal{G}$
- $(D,\phi)*(\Delta(p_1(T)),1) \in \mathcal{S}(p_1(D*T),p_1(T))$.

Por lo tanto,

$$((D,\phi)*(\Delta(p_1(T)),1))*(T,\psi) = (D*T,\phi*\psi) \in \mathcal{S}(p_1(D*T),K).$$

En conclusión, la pareja $(\mathcal{G},\mathcal{S}_+)$ satisface los axiomas (i), (ii) y (iii). Por lo tanto, podemos definir la subcategoría $\mathcal{D}_+ = \mathcal{C}^A(\mathcal{G},\mathcal{S}_+)$ de $R\mathcal{C}^A$, de manera similar a como se definió a la subcategoría $\mathcal{D}$.

4.2.3 Observación. Sea $(D,\phi) \in \mathcal{S}_+(G,H)$, entonces $p_1(D) \in \mathcal{G}$, y $(D,\phi) \in \mathcal{S}(p_1(D),H)$, por definición $(D,\phi) \in \mathcal{S}_+(p_1(D),H)$.
Ahora, por el axioma (i) tenemos que $(\Delta(p_1(D)),1) \in \mathcal{S}(p_1(D),p_1(D))$, lo que implica que $(\Delta(p_1(D)),1) \in \mathcal{S}_+(G,p_1(D))$, por lo tanto,

$$\left[\frac{G\times H}{(D,\phi)}\right] = \left[\frac{G\times p_1(D)}{(\Delta(p_1(D)),1)}\right] \otimes_{Ap_1(D)} \left[\frac{p_1(D)\times H}{(D,\phi)}\right]$$

en la categoría $\mathcal{D}_+$.

4.2.4 Proposición. *Supongamos que $(\mathcal{G},\mathcal{S})$ satisface del axioma (i) al (iv).*

(a) Dados G y H elementos de $\mathcal{G}$ y $(D,\phi) \in \mathcal{M}(G,H)$, entonces $(D,\phi) \in \mathcal{S}_+(G,H)$ si y soló si, para todo $K \in \sum_{\mathcal{G}}(H)$ tenemos $D*K \in \mathcal{G}$ y $(D,\phi)*(\Delta(K),1) \in \mathcal{S}(D*K,K)$

(b) $(\mathcal{G},\mathcal{S}_+)$ satisface del axioma (i) al (v).

(c) Tenemos que $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}_+$ y las categorías son iguales si y soló si, $(\mathcal{G},\mathcal{S})$ satisface el axioma (v) de 4.2.

(d) Sean G, H elementos de $\mathcal{G}$ y $(D,\phi) \in \mathcal{M}(G\times H)$ con $p_1(D) = G$, se tiene que $(D,\phi) \in \mathcal{S}(G,H)$ si y soló si, $(D,\phi) \in \mathcal{S}_+(G,H)$. En particular, $\mathcal{D}_+$ contiene a las operaciones elementales Res, Inf o Def si y soló si $\mathcal{D}$ ya las tiene.

Demostración. (a) $\Rightarrow$] Supongamos que $(D,\phi) \in \mathcal{S}_+(G,H)$. Entonces $p_1(D) \in \mathcal{G}$ y $(D,\phi) \in \mathcal{S}(p_1(D),H)$ y por el axioma (iv) tenemos que para todo $K \in \sum_{\mathcal{G}}(H)$, se tiene $D*K \in \mathcal{G}$ y $(D*\Delta(K),\phi*1) \in \mathcal{S}(D*K,K)$, en particular
$\Leftarrow$] Usando la propiedad con $K = H$, se tiene que $D*H = p_1(D) \in \mathcal{G}$ y

$$(D*\Delta(H),\phi*1) = (D,\phi) \in \mathcal{S}(D*H,H) = \mathcal{S}(p_1(D),H).$$

Por lo tanto, $(D,\phi) \in \mathcal{S}_+(G,H)$.

(b) Ya demostramos que $(\mathcal{G}, \mathcal{S}_+)$ satisfacen los axiomas (i), (ii) y (iii). Ahora demostraremos que satisface los axiomas (iv) y (v):
Axioma (iv); Sean G, H en $\mathcal{G}$ y $(D, \phi) \in \mathcal{S}_+(G, H)$. Por definición de $\mathcal{S}_+$ se tiene que $p_1(D) \in \mathcal{G}$ y $(D, \phi) \in \mathcal{S}_+(p_1(D), H)$, sea $K \in \sum_{\mathcal{G}}(H)$, ya que $(\mathcal{G}, \mathcal{S})$ cumple con el Axioma (iv) tenemos que:

- $D * K = p_1(D * \Delta(K)) \in \mathcal{G}$,
- $(D * \Delta(K), \phi * 1) \in \mathcal{S}(p_1(D * \Delta(K)), K)$.

Por lo tanto, $(D * \Delta(K), \phi * 1) \in \mathcal{S}_+(D * K, K)$.
Axioma (v). Sea $H \in \mathcal{G}$, tenemos que $(\Delta(H), 1) \in \mathbb{S}(H, H)$ y $p_1(\Delta(H)) = H$, entonces $(\Delta(H), 1) \in \mathbb{S}_+(H, H)$.

(c) Sean G, H en $\mathcal{G}$ y $(D, \phi) \in \mathcal{S}(G, H)$, por el axioma (iv), $D * H = p_1(D)$ es elemento de $\mathcal{G}$ y $(D, \phi) \in \mathcal{S}(p_1(D), H)$. Por lo tanto $(D, \phi) \in \mathcal{S}_+(G, H)$ es decir, $\mathcal{S}(G, H)$ está contenido en $\mathcal{S}_+(G, H)$, en consecuencia, $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}_+$. Además, si $\mathcal{D} = \mathcal{D}_+$, lo que significa que $\mathcal{S}(G, H) = \mathcal{S}_+(G, H)$, para cualesquiera G y H grupos en $\mathcal{G}$, y ya que $(\mathcal{G}, \mathcal{S}_+)$ satisface el axioma (v), también lo hace $(\mathcal{G}, \mathcal{S})$. Por otro lado, si $(\mathcal{G}, \mathcal{S})$ satisface el axioma (v). Tenemos que para todo $(D, \phi) \in \mathcal{S}_+(G, H)$, es decir $p_1(D) \in \mathcal{G}$ y $(D, \phi) \in \mathcal{S}(p_1(D), H)$ y por el Axioma (v), se tiene $(\Delta(p_1(D)), 1) \in \mathcal{S}(G, p_1(D))$, entonces

$$(\Delta(p_1(D)), 1) * (D, \phi) = (D, \phi) \in \mathcal{S}(G, H).$$

Por lo tanto, $\mathcal{S}(G, H)_+ \subseteq \mathcal{S}(G, H)$, lo que implica que $\mathcal{D}_+ \subseteq \mathcal{D}$.

(d) Es una consecuencia directa de la definición.

■

4.3 La construcción $_-{}_+$ para funtores de biconjuntos A-fibrados

A la categoría de funtores R-lineales de $\mathcal{D}$ a R-Mod, se le llama categoría de los funtores de biconjuntos A-fibrados sobre la categoría $\mathcal{D}$, la cual se denotará por $\mathcal{F}^A_{\mathcal{D},R}$:.
Sean $F \in \mathcal{F}^A_{\mathcal{D},R}$ y X un G-conjunto A-fibrado, denotaremos como G_x el estabilizador de la A-órbita del elemento $x \in X$.

4.3.1 Definición. Una sección de F sobre X, es una función

$$s : X \longrightarrow \bigoplus_{x \in [X/A]} F(G_x),$$

tal que $s(x) \in F(G_x)$ para todo $x \in X$, donde $[X/A]$ es un conjunto de representantes de las A-órbitas de X.

El conjunto de las secciones de F sobre X forma un R-módulo, con las operaciones puntuales, y $G \times A$ actúa de manera R-lineal en el conjunto de las secciones de F sobre X, con la acción $(g, a) \cdot s(x) = {}^g s(g^{-1}ax) = F(Iso(C_g))(s(g^{-1}ax))$, donde el mapeo $C_g : G_{g^{-1}x} \longrightarrow G_x$ es la conjugación. Una sección s se llama (G, A)-invariante si $(g, a) \cdot s = s$ para todo $(g, a) \in G \times A$.

4.3.1 La construcción del funtor $\Gamma_F(U) : \Gamma_F(G) \longrightarrow \Gamma_F(H)$

4.3.2 Definición. Sean $G \in \mathcal{G}$ y $F \in \mathcal{F}^A_{\mathcal{D},R}$. Se denotará por $\Gamma_F(G)$ a la categoría cuyo objetos son las parejas (X, s) donde X es un G-conjunto A-fibrado tal que $G_x \in \mathcal{G}$ para todo $x \in X$ y s es una sección (G, A)-invariante de F sobre X. Dados (X, s) y (Y, t) objetos de $\Gamma_F(G)$, una flecha $\alpha : (X, s) \longrightarrow (Y, t)$ es un morfismo de G-conjuntos A-fibrados $\alpha : X \longrightarrow Y$ tal que $G_x = G_{\alpha(x)}$ y $t(\alpha(x)) = s(x)$ para todo $x \in X$. La composición en $\Gamma_F(G)$ es la composición de los morfismos de G-conjuntos A-fibrados, y las flechas identidad son los morfismos identidad.

Sean G y H elementos de $\mathcal{G}$, $F \in \mathcal{F}^A_{\mathcal{D},R}$ y sea U un (G, H)-biconjunto A-fibrado tal que $((G \times H)_u, \phi_u) \in \mathcal{S}_+(G, H)$ para todo $u \in U$.

4.3.3 Definición. Sea U un (G, H)-biconjunto con las anteriores propiedades, se definirá el siguiente funtor

$$\Gamma_F(U) : \Gamma_F(H) \longrightarrow \Gamma_F(G)$$

como el mapeo que manda a un elemento (X, s) de $\Gamma_F(H)$ al elemento $(U \otimes_{AH} X, U(s))$ de $\Gamma_F(G)$, donde

$$U(s)(u \otimes_{AH} x) = F\left(\left[\frac{G_{u\otimes_{AH}x} \times H_x}{((G \times H_x)_u, \phi_{u,x})}\right]\right)(s(x)),$$

con $((G \times H_x)_u, \phi_{u.x}) = ((G \times H)_u), \phi_u) * (\Delta(H_x), 1)$. Dado un morfismo

$$\alpha : (X, s) \longrightarrow (Y, t)$$

en $\Gamma_F(H)$. Definimos $\Gamma_F(U)(\alpha) = U \otimes_{AH} \alpha$.

Ahora demostraremos que la definición anterior está bien definida.

Demostración. Primero demostraremos que F se puede evaluar en este biconjunto A-fibrado: Sea $(X, s) \in \Gamma_F(H)$, por la Definición 4.3.2, tenemos que, $H_x \in \mathcal{G}$ para todo $x \in X$, y por las propiedades de U, tenemos que $((G \times H)_u, \phi_u) \in \mathcal{S}_+(G.H)$, lo que significa $p_1((G \times H)_u) \in \mathcal{G}$, por el axioma (iv) tenemos:

- $(G \times H)_u * H_x = G_{u\otimes x} \in \mathcal{G}$.
- $((G \times H)_u, \phi_u) * (\Delta(H_x), 1) = ((G \times H_x)_u, \phi_{u,x}) \in \mathcal{S}(G_{u\otimes x}, H_x)$.

Por lo tanto, la evaluación de F en $(G_{u\otimes_{AH}x} \times H_x)/\left(((G \times H_x)_u, \phi_{u,x}\right)$ tiene sentido. Ahora demostraremos que no depende de los representantes de la clase $u \otimes_{AH} x$: Sean $h \in H$ y $g \in G$, se tiene que

$$\begin{aligned}
G_{ua^{-1}h^{-1}\otimes_{AH}hax} &= G_{u\otimes_{AH}x}, \\
H_{hax} &= {}^hH_{ax} = {}^hH_x = H_{hx}, \\
(G \times H)_{ua^{-1}h^{-1}} &= {}^{(1,h)}(G \times H)_{ua^{-1}} = {}^{(1,h)}(G \times H)_u,
\end{aligned}$$

en consecuencia

$$U(s)(u^{-1}a^{-1}h^{-1}\otimes_{AH} hax) = F\left(\left[\frac{G_{ua^{-1}h^{-1}\otimes_{AH}hax}\times H_{hax}}{((G\times H_{hax})_{u(ha)^{-1}},\phi_{ua^{-1}h^{-1},hax})}\right]\right)(s(hax)),$$

ya que

$$\begin{aligned}(G\times H_{hax})_{u(ha)^{-1}} &= (G\times H)_{ua^{-1}h^{-1}} * \Delta(H_{hax})\\ &= (G\times H)_{uh^{-1}} * \Delta(H_{hx})\\ &= {}^{(1,h)}(G\times H)_u * {}^{(h,h)}\Delta(H_x),\end{aligned}$$

ahora, se demostrará que lo anterior es igual a

$$(G\times H)_u * \Delta(H_x) * \{(h^{-1}h'h, h') \mid h'\in H_{hx}\}.$$

Sea $(g',h')\in (G\times H)_{uh^{-1}} * \Delta(H_{hx})$, esto significa que:

- $(g', h^{-1}h'h)\in (G\times H)_u$.
- $(h^{-1}h'h, h^{-1}h'h)\in \Delta(H_x)$
- $(h^{-1}h'h, h')\in \{(h^{-1}h'h, h') \mid h'\in H_{hx}\}$,

por lo tanto, $(g',h')\in (G\times H)_u * \Delta(H_x) * \{(h^{-1}h'h, h') \mid h'\in H_{hx}\}$.
Ahora, sea $(g',h')\in (G\times H)_u * \Delta(H_x) * \{(h^{-1}h'h, h') \mid h'\in H_{hx}\}$, lo que implica que $(g', h^{-1}h'h)\in (G\times H)_u$, es equivalente a $(g',h')\in (G\times H)_{uh^{-1}}$, ya que $h'\in H_{hx}$, lo que significa $(g',h')\in (G\times H)_{uh^{-1}} * \Delta(H_{hx})$. Por lo tanto,

$$(G\times H_{hax})_{u(ha)^{-1}} = (G\times H)_u * \Delta(H_x) * \{(h^{-1}h'h, h') \mid h'\in H_{hx}\}.$$

Sea $(g',h')\in (G\times H_{hax})_{u(ha)^{-1}}$, entonces

$$\begin{aligned}\phi_{ua^{-1}h^{-1},hax}(g',h') &= \phi_{ua^{-1}h^{-1}}(g',h')\cdot 1((h',h'))\\ &= \phi_{u(ha)^{-1}}(g',h').\end{aligned}$$

Por otro lado, sí $1 : {}^{(h^{-1},1)}\Delta(H_{hx}) :\longrightarrow A$, es el morfismo constante de grupos; tenemos,

$$\begin{aligned}\phi_{u.x} * 1((g'.h')) &= \phi_{u,x}((g', h^{-1}h'h))\cdot 1((h^{-1}h'h, h'))\\ &= \phi_{u,x}((g', h^{-1}h'h))\\ &= \phi_u((g', h^{-1}h'h)).\end{aligned}$$

Ahora, notemos que, ya que $(g', h^{-1}h'h)\in (G\times H)_u$, si $a' = \phi_u(g', h^{-1}h'h)$, tenemos que $(g', h^{-1}h'h)u = a'u$, entonces

$$a'uh^{-1} = (g'uh^{-1}(h')^{-1}h)h^{-1} = g'uh^{-1}(h')^{-1},$$

y $a' = \phi_{uh^{-1}}(g',h')$. Por lo tanto,

$$\phi_{ua^{-1}h^{-1},hax} = \phi_{u.x} * 1.$$

De donde se concluye:

$$\begin{aligned}U(s)(ua^{-1}h^{-1}\otimes_{AH} hax) &= F\left(\left[\frac{G_{u\otimes_{AH}x}\times H_x}{((G\times H_x)_u,\phi_{u,x})}\right]\otimes_{AH_x}\left[\frac{H_x\times H_{hx}}{({}^{(h^{-1},1)}\Delta(H_{hx}),1)}\right]\right)(s(hax))\\ &= F\left(\left[\frac{G_{u\otimes_{AH}x}\times H_x}{((G\times H_x)_u,\phi_{u,x})}\right]\right)({}^{h}s(ax))\\ &= F\left(\left[\frac{G_{u\otimes_{AH}x}\times H_x}{((G\times H_x)_u,\phi_{u,x})}\right]\right)s(x).\end{aligned}$$

Lo que significa que no depende de los representantes de la órbita $u\otimes_{AH}x$.
Ahora demostraremos que $U(s)$ es (G,A)-invariante: Sean $g\in G$ y $a\in A$, entonces

$$(g,a)\cdot U(s)(u\otimes x) = {}^{g}U(s)(g^{-1}au\otimes x)$$

es igual a

$$F\left(\left[\frac{G_{u\otimes x}\times G_{g^{-1}au\otimes x}}{({}^{(g,1)}\Delta(G_{g^{-1}u\otimes x}),1)}\right]\otimes_{AH_x}\left[\frac{G_{g^{-1}au\otimes x}\times H_x}{((G\times H)_{g^{-1}au},\phi_{g^{-1}au,x})}\right]\right)(s(x)),$$

podemos hacer notar que

- $G_{g^{-1}au\otimes x} = G_{g^{-1}u\otimes x} = {}^{(g^{-1},1)}(G\times H)_u$,
- $(G\times H_x)_{g^{-1}u} = {}^{(g^{-1},1)}(G\times H_x)_u$,
- ${}^{(g,1)}\Delta(G_{g^{-1}u\otimes x})*(G\times H_x)_{g^{-1}u} = {}^{(g,1)}\Delta(G_{g^{-1}u\otimes x})*^{(g^{-1},1)}(G\times H_x)_u = (G\times H_x)_u$.

Dado $(g',h')\in(G\times H_x)_u$, se tiene que

$$\begin{aligned}1*\phi_{g^{-1}au,x}((g',h')) &= 1((g',g^{-1}g'g))\cdot\phi_{g^{-1}au,x}((g^{-1}g'g,h'))\\ &= \phi_{g^{-1}au}((g^{-1}g'g,h')),\end{aligned}$$

con

$$(g^{-1}g'g,h')\cdot g^{-1}u = g^{-1}g'g(g^{-1}u)(h')^{-1} = g^{-1}a'u = a'g^{-1}u$$

donde $a'=\phi_u((g',h'))$, por lo tanto $1*\phi_{g^{-1}au,x}=\phi_{u,x}$. Así que

$$\begin{aligned}(g,a)\cdot U(s)(u\otimes x) &= {}^{g}U(s)(g^{-1}au\otimes x)\\ &= F\left(\left[\frac{G_{u\otimes x}\times H_x}{((G\times H_x)_u,\phi_{u,x})}\right]\right)(s(x)).\end{aligned}$$

Por lo tanto, $U(s)$ es una sección (G,A)-invariante.
Ahora demostraremos que $\Gamma_F(U)=U\otimes_{AH}\alpha$ es un morfismo de $(U\otimes_{AH}X,U(s))$ a $(U\otimes_{AH}Y,U(t))$ en $\Gamma_F(G)$. Ya que $H_x=H_{\alpha(x)}$, se tiene

$$G_{u\otimes\alpha(x)} = (G\times H)_u * H_{\alpha(x)} = (G\times H)_u * H_x = G_{u\otimes x},$$

entonces

$$\begin{aligned} U(t)(u \otimes \alpha(x)) &= F\left(\left[\frac{G_{u\otimes\alpha(x)} \times H_{\alpha(x)}}{(G \times H_{\alpha(x)})_u, \phi_{u,\alpha(x)}}\right]\right)(t(\alpha(x))) \\ &= F\left(\left[\frac{G_{u\otimes x} \times H_x}{(G \times H_x)_u, \phi_{u,x}}\right]\right)(s(x)) \\ &= U(s)(u \otimes x). \end{aligned}$$

Además, $\Gamma_F(U)$ preserva la composición y la identidad, ya que $U \otimes \_$ lo hace. Por lo tanto, el funtor $\Gamma_F(U)$ está bien definido. ■

4.3.4 Proposición. *Dados G, H y K grupos finitos de $\mathcal{G}$. Sean U un (G, H)-biconjunto A-fibrado tal que $((G \times H)_u, \phi_u) \in \mathcal{S}_+(G.H)$ para todo $u \in U$ y V un (H, K)-biconjunto A-fibrado tal que $((H \times K)_v, \phi_v) \in \mathcal{S}_+(H, K)$ para todo $v \in V$. Se tiene que los funtores $\Gamma_F(U \otimes_{AH} V)$ y $\Gamma_F(U) \circ \Gamma_F(V)$ son naturalmente isomorfos.*

Demostración. Sean $u \in U$ y $v \in V$. Por el Lema 4.1.8, tenemos que

$$((G \times K)_{u\otimes v}, \phi_{u\otimes v}) = ((G \times H)_u, \phi_u) * ((H \times K)_v, \phi_v). \tag{4.3.5}$$

Por lo tanto, $((G \times K)_{u\times v}, \phi_{u\otimes v}) \in \mathcal{S}_+(G.K)$.
Sea (X, s) un objeto de $\Gamma_F(K)$. Ahora demostraremos que los siguientes elementos $((U \otimes_{AH} V) \otimes_{AK} X, (U \otimes V)(s))$ y $(U \otimes_{AH} (V \otimes_{AK} X), U(V(s)))$ son isomorfos en la categoría $\Gamma_F(G)$. Sea

$$\begin{aligned} \alpha : (U \otimes_{AH} V) \otimes_{AK} X &\longrightarrow U \otimes_{AH} (V \otimes_{AK} X) \\ (u \otimes v) \otimes x &\longmapsto u \otimes (v \otimes x) \end{aligned}$$

el isomorfismo natural, como α es un isomorfismo, tenemos $G_{(u\otimes v)\otimes x} = G_{u\otimes(v\otimes x)}$. Se tiene

$$(U \otimes_{AH} V)(s)((u \otimes v) \otimes x) = F\left(\left[\frac{G_{(u\otimes v)\otimes x \times K_x}}{(G \times K_x)_{(u\otimes v)\otimes x}, \phi_{(u\otimes v),x}}\right]\right)(s(x))$$

y

$$\begin{aligned} U(V(s))(u \otimes (v \otimes x)) &= F\left(\left[\frac{G_{u\otimes(v\otimes x)} \times H_{v\otimes x}}{(G \times H_{v\otimes x})_u, \phi_{u,v\otimes x}}\right]\right)(V(s)(x)) \\ &= F\left(\left[\frac{G_{u\otimes(v\otimes x)} \times H_{v\otimes x}}{(G \times H_{v\otimes x})_u, \phi_{u,v\otimes x}}\right] \otimes_{AH_{v\otimes x}} \left[\frac{H_{v\otimes x} \times K_x}{(H \times K_x)_v, \phi_{v,x}}\right]\right)(s(x)). \end{aligned}$$

Además, se tiene las siguientes igualdades

- $(H \times K_x)_v = (H \times K)_v * \Delta(K_x)$,
- $H_{v\otimes x} = (H \times K)_v * K_x$,

por lo tanto, $p_1((H \times K_x)_v) = H_{v\otimes x}$. Por la fórmula de Mackey, tenemos que

$$U(V(s))(u \otimes (v \otimes x)) = F\left(\left[\frac{G_{u\otimes(v\otimes x)} \times K_x}{((G \times H_{v\otimes x})_u, \phi_{u,v\otimes x}) * ((H \times K_x)_v, \phi_{v,x})}\right]\right)(s(x)).$$

Recordemos

- $(G \times K_x)_{u\otimes v} = (G \times K)_{u\otimes v} * \Delta(K_x) = (G \times H)_u * (H \times K)_v * \Delta(K_x)$.
- $(G \times H_{v\otimes x})_u = (G \times H)_u * \Delta(H_{v\otimes x})$.
- $$\begin{aligned}(G \times H_{v\otimes x})_u * (H \times K_x)_v &= (G \times H)_u * \Delta(H_{v\otimes x}) * (H \times K_x)_v \\ &= (G \times H)_u * \Delta(p_1((H \times K_x)_v)) * (H \times K_x)_v \\ &= (G \times H)_u * (H \times K_x)_v \\ &= (G \times H)_u * (H \times K)_v * \Delta(K_x) \\ &= (G \times K_x)_{u\otimes v}.\end{aligned}$$
- Respecto a las funciones, se tiene que
$$\phi_{u\otimes v,x} = \phi_{u\otimes v} * 1 = \phi_{u\otimes v} = \phi_u * \phi_v,$$
por el otro lado
$$\phi_{u,v*x} * \phi_{v,x} = (\phi_u * 1) * (\phi_v * 1) = \phi_u * \phi_v.$$

Por lo tanto, $U(V(s)) = (U \otimes_{AH} V)(s)$.

■

4.3.6 Definición. Para $G \in \mathcal{G}$ y $F \in \mathcal{F}^A_{D,R}$. Definimos las siguientes dos operaciones en la categoría $\Gamma_F(G)$.

(a) Dados dos objetos (X, s) y (Y, t) en $\Gamma_F(G)$, su coproducto $(X, s) \sqcup (Y, t)$ se define como $(X \sqcup Y, s \sqcup t)$, donde $X \sqcup Y$ es la unión disjunta de X con Y y $s \sqcup t$ es la sección sobre $X \sqcup Y$ la cual se define en X como s y en Y como t. Esta construcción junto con las obvias inclusiones de X y Y también es un coproducto de la categoría $\Gamma_F(G)$.

(b) Dados dos objetos (X, s) y (X, t) con el mismo G-conjunto A-fibrado subyacente X, tenemos un objeto $(X, s + t)$, donde $s + t$ es la suma puntual de las dos secciones s y t.

4.3.7 Definición. Sea $G \in \mathcal{G}$ y $F \in \mathcal{F}^A_{D,R}$. Definimos $F_+(G)$ como el grupo abeliano libre generado por las clases de isomorfismo de objetos (X, s) de $\Gamma_F(G)$ y denotaremos por $\{X, s\}$ a su clase, cociente el subgrupo generado por los elementos de la forma

$$\{X \sqcup Y, s \sqcup t\} - \{X, s\} - \{Y, t\} \text{ y } \{X, s + r\} - \{X, s\} - \{X, r\} \tag{4.3.8}$$

donde (X, s), (X, r), (Y, t) son objetos de $\Gamma_F(G)$. Denotaremos la clase de $\{X, s\}$ en $F_+(G)$ por $[X, s]_G$.

Notemos que por la primera relación, las clases de los elementos $(\frac{G\times A}{H,\phi}, s)$, donde $H \in \sum_{\mathcal{G}}(G)$, $\phi : H \longrightarrow A$ y s es una sección (G,A)-invariante de F sobre el G-conjunto A-fibrado $\frac{G\times A}{H,\phi}$, forman un conjunto de generadores del grupo abeliano $F_+(G)$.
Para cualquier $x \in F(H)$, existe una única sección (G,A)-invariante s_x de F sobre $\frac{G\times A}{H,\phi}$ con $s_x((H,\phi)) = x$, se denotará la clase $\{\frac{G\times A}{H,\phi}, s_x\}$ por $[H,\phi,x]_G \in F_+(G)$.

4.3.9 Teorema. *Sean R un anillo conmutativo y $(\mathcal{G},\mathcal{S})$ satisface los axiomas del (i) al (iv), denotaremos $\mathcal{D} := \mathcal{C}^A(\mathcal{G},\mathcal{S})$ y $\mathcal{D}_+ := \mathcal{C}^A(\mathcal{G},\mathcal{S}_+)$ y sea $F \in \mathcal{F}^A_{\mathcal{D},R}$ un funtor de biconjuntos de $\mathcal{D}$ sobre R.*

(a) El mapeo que manda a un grupo finito G al R-módulo $F_+(G)$ y que manda un elemento $[U] \in B^A(G,H)$, donde U es un (G,H)-biconjunto finito A-fibrado tal que todas sus parejas estabilizadoras son elementos de $\mathcal{S}_+(G,H)$, al mapeo R-lineal inducido por el funtor $\Gamma_F([U]) : \Gamma_F(H) \longrightarrow \Gamma_F(G)$, el cual es denotado por $F_+([U]) : F_+(H) \longrightarrow F_+(G)$, genera un funtor de biconjuntos A-fibrados $F_+ \in \mathcal{F}^A_{\mathcal{D}_+,R}$.

(b) La asociación $F \longrightarrow F_+$ define un funtor R-lineal $\text{-}_+ : \mathcal{F}^A_{\mathcal{D},R} \longrightarrow \mathcal{F}^A_{\mathcal{D}_+,R}$.

Demostración. (a) Primero demostraremos que dados U y V dos (G,H)-biconjuntos A-fibrados isomorfos tales que todos los estabilizadores de las A-órbitas pertenecen a $\mathcal{S}_+(G,H)$, entonces los funtores $\Gamma_F(U)$ y $\Gamma_F(V)$ son naturalmente isomorfos. Sea $\rho : U \longrightarrow V$ un isomorfismo de (G,H)-biconjuntos, por la Definición 4.3.3, sólo tenemos que notar que para todo H-conjunto A-fibrado X,

- El morfismo $\rho \otimes_{AH} 1 : U \otimes_{AH} X \longrightarrow V \otimes_{AH} X$ es un isomorfismo de G-conjuntos, por lo tanto $G_{u\otimes_{AH}x} = G_{\rho(u)\otimes_{AH}x}$.
- Para cualquier elemento $u \otimes_A x \in U \otimes_A X$, se tiene que

$$\begin{aligned} U(s)(u\otimes_{AH} x) &= F\left(\left[\frac{G_{u\otimes_{AH}x}\times H_x}{((G\times H_x)_u, \phi_{u,x})}\right]\right)(s(x)) \\ &= F\left(\left[\frac{G_{\rho(u)\otimes_{AH}x}\times H_x}{((G\times H_x)_{\rho(u)}, \phi_{\rho(u),x})}\right]\right)(s(x)) \\ &= V(s)(\rho(u)\otimes_{AH} x) \end{aligned}$$

  la última igualdad es una consecuencia de que

$$\begin{aligned} ((G\times H_x)_u, \phi_{u.x}) &= ((G\times H)_u), \phi_u) * (\Delta(H_x),1)) \\ &= ((G\times H)_{\rho(u)}, \phi_{\rho(u)}) * (\Delta(H_x),1) \\ &= ((G\times H_x)_{\rho(u)}, \phi_{\rho(u).x}). \end{aligned}$$

- Dado un morfismo $\alpha : (X,s) \longrightarrow (Y,t)$ en $\Gamma_F(H)$. Por definición se tiene que $\Gamma_F(U)(\alpha) = U \otimes_{AH} \alpha$, entonces

$$\begin{aligned} \rho\otimes_{AH} 1\,(U\otimes_{AH}\alpha(u\otimes_{AH} x)) &= \rho\otimes_{AH} 1(u\otimes_A \alpha(x)) \\ &= \rho(u)\otimes_{AH}\alpha(x) \\ &= V\otimes_A \alpha(\rho(u)\otimes_{AH} x). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\Gamma_F(U)$ y $\Gamma_F(V)$ son naturalmente isomorfos. El funtor $\Gamma_F(U)$ se puede extender a un homomorfismo de grupos bien definido $f_{[u]}$, del grupo abeliano libre asociado a $\Gamma_F(H)$ al grupo abeliano libre asociado a $\Gamma_F(G)$, además notemos que $f_{[U]}\left((X \sqcup Y, s \sqcup t) - (X,s) - (Y,t)\right)$ es igual a

$$(U \otimes_{AH} (X \sqcup Y), U(s \sqcup t)) - (U \otimes_{AH} X, U(s)) - (U \otimes_{AH} Y, U(t)),$$

lo cual es isomorfo a

$$((U \otimes_{AH} X) \sqcup (U \otimes_{AH} Y), U(s) \sqcup U(t)) - (U \otimes_{AH} X, U(s)) - (U \otimes_{AH} Y, U(t)).$$

Entonces el $f_{[U]}$ induce un homomorfismo de R-módulos

$$F_+([U]) : F_+(H) \longrightarrow F_+(G),$$

no es difícil demostrar que $f_{[U \sqcup V]} = f_{[U]} + f_{[V]}$. Por lo tanto, se puede definir un homomorfismo de grupos $F_+ : B^A(G,H) \longrightarrow Hom_R(F_+(H), F_+(G))$, más aún, por la Proposición 4.3.4 se obtiene que F_+ pertenece a $\mathcal{F}^A_{\mathcal{D}_+,R}$.

(b) Sea $\varphi : F \longrightarrow F'$ un morfismo entre F, F' en la categoría $\mathcal{F}^A_{D,R}$. Para todo grupo finito G, tenemos un funtor inducido por un mapeo $\Gamma_F(G) \longrightarrow \Gamma_{F'}(G)$ el cual manda un elemento $(X,s) \in \Gamma_F(G)$ a $(X, \varphi(s))$ donde $\varphi(s)(x) := \varphi_{G_x}(s(x))$, este funtor induce un mapeo R-lineal de $F_+(G)$ a $F'_+(G)$. Ahora demostremos que esta construcción respeta la composición: Sea $F'' \in \mathcal{F}^A_{D,R}$ y $\tau : F' \longrightarrow F''$ un morfismo en $\mathcal{F}^A_{D,R}$, entonces

$$\begin{aligned}(\tau \circ \varphi)(s)(x) &= (\tau \circ \varphi)_{G_x}(s(x)) = \tau_{G_x}\left(\varphi_{G_x}(s(x))\right) \\ &= \tau_{G_x}(\varphi(s)(x)) = \tau(\varphi(s))(x).\end{aligned}$$

Por otro lado, si tomamos el morfismo identidad $Id : F \longrightarrow F$ en $\mathcal{F}^A_{D,R}$, tememos que el mapeo anterior manda a un elemento $(X,s) \in \Gamma_F(G)$ al elemento $(X, Id(s))$, donde $Id(s)(x) = Id_{G_x}(s(x)) = s(x)$ para todo $x \in X$. Por lo tanto, se tiene $(X, Id(s)) = (X,s)$, esto significa que este mapeo respeta la composición y manda la identidad a la identidad y es R-lineal.

■

Dados G, H elementos de $\mathcal{G}$, y sean U un (G,H)-biconjunto A-fibrado con las parejas estabilizadoras en $S_+(G,H)$ y dados $K \in \sum_{\mathcal{G}}(H)$ y $a \in F(K)$. Entonces,

$$\begin{aligned}F_+([U])([K,\psi,a]_H) &= F_+([U])\left(\left\{\frac{H \times A}{(K,\psi)}, s_a\right\}\right) \\ &= \left\{U \otimes_{AH} \frac{H \times A}{(K,\psi)}, U(s_a)\right\},\end{aligned}$$

por el Teorema 4.3.9, lo anterior es igual a

$$\sum_{(u \otimes_{AH} hK) \in [G \setminus U \otimes_{AH} (H/K,\psi)/A]} \left\{\left[\frac{G \times H_{hK}}{G_{[u \otimes_{AH} hK]}, \phi_{u \otimes_{AH} hK}}\right], U(s_a)\right\},$$

donde $[G \setminus U \otimes_{AH} (H/K,\psi)/A]$ es un conjunto de representantes de las (G,A)-órbitas de $U \otimes_{AH} H/K, \psi$. Ahora notemos que:

- $H_{hK} = {}^hK$.
- $\phi_{[u\otimes_{AH}hK]} = \phi_u * {}^h\psi$, esta afirmación se sigue del Lema 4.3.4.
- Por definición

$$\begin{aligned} U(s_a)(u \otimes_{AH} hK) &= F\left(\left[\frac{G_{u\otimes_{AH}hK} \times {}^hK}{((G \times {}^hK)_U, \phi_{u,hK}}\right]\right) s_a(hK) \\ &= F\left(\left[\frac{G_{u\otimes_{AH}hK} \times {}^hK}{(G \times {}^hK)_U, \phi_{u,hK}}\right]\right) ({}^ha). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $F_+([U])([K,\psi,a]_H)$ es igual a

$$\sum_{(u\otimes_{AH}hK)\in[G\backslash U\otimes_{AH}(H\times A/(K,\psi))/A]} [G_{u\otimes_{AH}hk}, \phi_u * {}^h\psi, F\left(\frac{G_{u\otimes_{AH}hK} \times {}^hK}{(G \times {}^hK)_u, \phi_{u,hK}}\right) ({}^ha)]_G. \tag{4.3.10}$$

En particular, si $(D,\phi) \in S_+(G,H)$, tenemos

$$F_+\left(\left[\frac{G \times H}{(D,\phi)}\right]\right)([K,\psi,a]) = \sum_{\substack{h\in[p_2(D)\backslash H/K] \\ \phi_2|_{X_h}={}^h\psi_2|_{X_h}}} \left[D * {}^hK, \phi * {}^h\psi, F\left(\left[\frac{D * {}^hK \times {}^hK}{(D * \Delta({}^hK), \phi)}\right]\right)({}^ha)\right]_G, \tag{4.3.11}$$

donde $[p_2(D)\backslash H/K]$ es un conjunto de representantes de las clases dobles y $X_h := p_2(D) \cap {}^hK$. Ahora daremos esta fórmula para los biconjuntos A-fibrados elementales

- Sean $G \in \mathcal{G}$, $H \in \sum_{\mathcal{G}}(G)$, $K \in \sum_{\mathcal{G}}(H)$, $\psi : K \longrightarrow A$ un morfismo de grupos y sea $a \in F(K)$, entonces

$$F_+(Res^G_H)([K,\psi,a]_G) = \sum_{\substack{g\in[H\backslash G/K] \\ {}^g\psi|_{H\cap {}^gK}=1}} [H \cap {}^gK, 1 * {}^g\psi, F(Res^{{}^gK}_{H\cap {}^gK})({}^ga)]_H.$$

- Sean $G \in \mathcal{G}$, $H \in \sum_{\mathcal{G}}(G)$, $K \in \sum_{\mathcal{G}}(H)$, $\psi : K \longrightarrow A$ un morfismo de grupos y $a \in F(K)$, entonces

$$F_+(Ind^G_H)([K,\psi,a]_H) = [K,\psi,a]_G.$$

- Sea $G \in \mathcal{G}$ y sea $N \trianglelefteq G$ tal que $G/N \in \mathcal{G}$, definamos a ${}^{(1,\pi)}\Delta(G) := \{(g, gN) \mid g \in G\}$. Dados $N \trianglelefteq K \leqslant G$ tal que $K/N \in \mathcal{G}$ y $\psi : K/N \longrightarrow A$ un homomorfismo de grupos y $a \in F(K/N)$, se tiene que

$$F_+(Inf^G_{G/N})([K/N,\psi,a]_{G/N}) = [K, \overline{\psi}, F(Inf^K_{K/N})(a)]_G,$$

donde $\overline{\psi} : K \longrightarrow A$ es la función inducida por ψ.

- Sean $G \in \mathcal{G}$ y sea $N \trianglelefteq G$ tal que $G/N \in \mathcal{G}$, definamos a ${}^{(\pi,1)}\Delta(G) := \{(g, gN) \mid g \in G\}$. Dados $K \in \sum_{\mathcal{G}}(G)$ y $a \in F(K)$, se tiene que

$$F_+(Def^G_{G/N})([K,\psi,a]_G) = \left[KN/N, 1 * \psi, F\left(Iso^{KN/N}_{K/K\cap N} Def^K_{K/K\cap N}\right)(a)\right]_{G/N}.$$

4.3.2 Estructura multiplicativa de F_+

Sea $(\mathcal{G}, \mathcal{S})$ tales que satisfacen del axioma (i) al (iv), podemos definir la categoría $\mathcal{D} := \mathcal{C}^A(\mathcal{G}, \mathcal{S})$ y sean $F \in \mathcal{F}^A_{D,R}$, tal que $F(G)$ tiene estructura multiplicativa para todo $G \in \mathcal{G}$. Al grupo $F_+(G)$ se le puede dar estructura multiplicativa dada por

$$[X, s]_G \cdot [Y, t]_G := [X \otimes Y, s \otimes t]_G,$$

donde

$$\begin{aligned} s \otimes t : X \otimes Y &\longrightarrow \coprod_{x \otimes y \in [(X \otimes Y)/A]} F(G_{x \otimes y}) \\ x \otimes y &\longmapsto F(Res^{G_x}_{G_{x\otimes y}})(s(x)) \cdot F(Res^{G_y}_{G_{x\otimes y}})(t(y)), \end{aligned}$$

con (X, s), $(Y, t) \in \Gamma_F(G)$ Al trasladar la definición a los elementos básicos, tenemos que $[H, \phi, x]_G \cdot [K, \psi, y]_G$ es igual a

$$\sum_{g \in [H \backslash G/K]} [H \cap {}^gK, \phi \cdot {}^g\psi, F(Res^H_{H \cap {}^gK})(x) \cdot F(Res^{{}^gK}_{H \cap {}^gK})({}^gy)]_G.$$

Ahora, se demostrará que esta definición tiene sentido:

- Primero demostremos que $s \otimes t$ está bien definida. Para $a \in A$, se tiene $s \otimes t(xa^{-1} \otimes ay)$ es igual a

$$\begin{aligned} &F(Res^{G_{xa^{-1}}}_{G_{xa^{-1} \otimes hay}})(s(xa^{-1})) \cdot F(Res^{G_{ay}}_{G_{xa^{-1} \otimes ay}})(t(ay)) \\ &= F(Res^{G_x}_{G_{x\otimes y}})(s(xa^{-1})) \cdot F(Res^{G_y}_{G_{x\otimes y}})(t(ay)) \\ &= F(Res^{G_x}_{G_{x\otimes y}})(s(x)) \cdot F(Res^{G_y}_{G_{x\otimes y}})(t(y)) \\ &= s \otimes t(x \otimes y). \end{aligned}$$

- Al ser s y t secciones A-invariantes, tenemos que esta definición no depende del conjunto de representantes $[(X \otimes Y)/A]$.

- El producto no depende de los representantes de la clase. Sean (X, s), (X', s'), (Y, t), $(Y', t') \in \Gamma_F(G)$; tales que, $\{X, s\} = \{X', s'\}$ y $\{Y, t\} = \{Y', t'\}$, entonces existen morfismos $\alpha : (X, s) \longrightarrow (X', s')$ y $\beta : (Y, t) \longrightarrow (Y', t')$ que son isomorfismos en $\Gamma_F(G)$, es decir, $G_x = G_{\alpha(x)}$, $G_y = G_{\beta(y)}$, $s(x) = s'(\alpha(x))$ y $t(y) = t'(\beta(y))$ para todo $x \in X$ y $y \in Y$.

  Definimos

$$\begin{aligned} \rho : X \otimes Y &\longmapsto X' \otimes Y' \\ x \otimes y &\longrightarrow \alpha(x) \otimes \beta(y), \end{aligned}$$

  notemos que ρ es biyectiva, ya que α y β lo son.
  Ahora demostraremos que ρ está bien definida. Sean $x \in X$, $y \in Y$ y $a \in A$, tenemos

$$\begin{aligned} \rho(xa^{-1} \otimes ay) &= \alpha(xa^{-1}) \otimes \beta(ax) \\ &= \alpha(x)a^{-1} \otimes a\beta(y) \\ &= \alpha(x) \otimes \beta(y) \\ &= \rho(x \otimes y). \end{aligned}$$

Para demostrar que ρ es un morfismo de G-conjuntos A-fibrados, se tiene que para todo $g \in G$ y $a \in A$:

$$\begin{aligned}\rho((g,a)\cdot(x\otimes y)) &= \rho(gax \otimes gy)\\ &= \alpha(gax)\otimes\beta(gy)\\ &= ga\alpha(x)\otimes g\beta(y)\\ &= (g,a)\cdot\rho(x\otimes y).\end{aligned}$$

Sean $x \in X$, $y \in Y$, tenemos

$$\begin{aligned}(s'\otimes t')(\rho(x\otimes y)) &= (s'\otimes t')(\alpha(x)\otimes\beta(y))\\ &= F(Res^{G_{\alpha(x)}}_{G_{\alpha(x)\otimes\beta(y)}})(s'(\alpha(x))\cdot F(Res^{G_{\beta(y)}}_{G_{\alpha(x)\otimes\beta(y)}})(t'(\beta(y))\\ &= F(Res^{G_x}_{G_{x\otimes y}})(s'(\alpha(x))\cdot F(Res^{G_y}_{G_{x\otimes y}})(t'(\beta(y))\\ &= F(Res^{G_x}_{G_{x\otimes y}})(s(x))\cdot F(Res^{G_y}_{G_{x\otimes y}})(t(y))\\ &= (s\otimes t)(x\otimes y).\end{aligned}$$

Por lo tanto, ρ es un isomorfismo en $\Gamma_F(G)$, entonces $[X\otimes Y, s\otimes t] = [X'\otimes Y', s'\otimes t']$.

- Ahora demostraremos que el producto es cero sobre el cociente de $F_+(G)$. Sean (X,s), (Y,f), (Y,t), $(Z,r) \in \Gamma_F(G)$.

  - $$\begin{aligned}(X,s)\cdot(Y\sqcup Z, t\sqcup r) &= (X\otimes(Y\sqcup Z), s\otimes(t\sqcup r))\\ &= ((X\otimes Y)\sqcup(X\otimes Z),(s\otimes t)\sqcup(s\otimes r))\\ &= (X\otimes Y, s\otimes t) + (X\otimes Z, s\otimes r).\end{aligned}$$

  - $$\begin{aligned}(X,s)\cdot(Y,t+f) &= (X\otimes Y, s\otimes(t+f))\\ &= (X\otimes Y,(s\otimes t)+(s\otimes f))\\ &= (X\otimes Y, s\otimes t) + (X\otimes Y, s\otimes f).\end{aligned}$$

Por lo tanto, el producto está bien definido.

4.4 La construcción $\_^{+}$ para funtores de biconjuntos A-fibrados

4.4.1 Definición. Sea $(\mathcal{G},\mathcal{S})$ una pareja que cumplen los axiomas del (i) al (iii) de 4.2. Dados G y H en $\mathcal{G}$, definiremos a

$$\mathcal{S}^{+}(G,H) = \{(D,\phi)\in\mathcal{M}(G\times H) \mid p_1(D)\in\mathcal{G}, p_2(D)\in\mathcal{G} \text{ y } (D,\phi)\in\mathcal{S}(p_1(D),p_2(D))\}.$$

4.4.2 Proposición. *Supongamos que $(\mathcal{G},\mathcal{S})$ satisfacen del axioma (i) al (iii) de 4.2, adicionalmente satisface los axiomas (vii) y $(viii)$, además $\mathcal{G}$ es cerrado bajo intersecciones, entonces:*

(a) Para todo G, H en $\mathcal{G}$ y todo $(D,\phi) \in \mathcal{M}(G \times H)$, las siguientes proposiciones son equivalentes:

(i) $(D,\phi) \in \mathcal{S}^{+}(G,H)$.

(ii) $p_2(D) \in \mathcal{G}$ *y para todo* $L \in \sum_{\mathcal{G}}(p_2(D))$ *se tiene que el subgrupo* $D * L \in \mathcal{G}$ *y el producto* $(D,\phi) * (\Delta(L),1) \in \mathcal{S}(D * L, L)$.

(iii) $p_1(D) \in \mathcal{G}$ *y para todo* $K \in \sum_{\mathcal{G}}(p_1(D))$*, se tiene que* $K * D \in \mathcal{G}$ *y el producto* $(\Delta(K),1) * (D,\phi) \in \mathcal{S}(K, K * D)$.

En particular, $\mathcal{S}(G,H) \subseteq \mathcal{S}^{+}(G,H)$ *para todo* G *y* H *en* $\mathcal{G}$.

(b) $(\mathcal{G},\mathcal{S}^{+})$ *satisfacen los axiomas* (i), (ii), (iii), (v), (vi), (vii) *y* $(viii)$.

(c) Se tiene que $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}^{+} := \mathcal{C}^{A}(\mathcal{G},\mathcal{S}^{+})$ *y la igualdad se da si y soló si* $(\mathcal{G},\mathcal{S})$ *satisface los axiomas* (v) *y* (vi)*. En particular, por el inciso* (b)*, se tiene que* $(\mathcal{D}^{+})^{+} = \mathcal{D}^{+}$.

(d) Sean G, H *en* $\mathcal{G}$*, y* $(D,\phi) \in \mathcal{M}(G \times H)$ *tal que* $p_1(D) = G$ *y* $p_2(D) = H$*. Entonces* $(D,\phi) \in \mathcal{S}(G,H)$ *si y solό si* $(D,\phi) \in \mathcal{S}^{+}(G,H)$*, en particular* $\mathcal{D}^{+}$ *contiene inflaciones o deflaciones, si y solό si* $\mathcal{D}$ *las contiene.*

Demostración. (a)

- Primero demostraremos que (i) implica (ii):
  Supongamos que $(D,\phi) \in \mathcal{S}^{+}(G,H)$, entonces por definición $p_2(D),\ p_1(D) \in \mathcal{G}$ y $(D,\phi) \in \mathcal{S}(p_1(D), p_2(D))$. Además, $(\mathcal{G},\mathcal{S})$ satisface el axioma (vii), por lo tanto, se tiene que para todo subgrupo $L \in \sum_{\mathcal{G}}(p_2(D))$, $D * L \in \mathcal{G}$ y el producto $(D,\phi) * (\Delta(L),1) \in \mathcal{S}(D * L, L)$. Por lo tanto, se cumple (ii).

- Ahora demostraremos que (ii) implica (i): Supongamos que (D,ϕ) cumple (ii), en consecuencia $p_2(D) \in \mathcal{G}$, $D * p_2(D) = p_1(D) \in \mathcal{G}$, más aún, se tiene que el producto $(D,\phi) * (\Delta(p_2(D)),1) = (D,\phi) \in \mathcal{S}(p_1(D), p_2(D))$, por lo tanto (D,ϕ) es elemento de $\mathcal{S}^{+}(G,H)$.

- Ahora demostraremos que (i) implica (iii): Por definición $p_2(D),\ p_1(D) \in \mathcal{G}$ y $(D,\phi) \in \mathcal{S}(p_1(D), p_2(D))$. Dado K en $\sum_{\mathcal{G}}(p_1(D)$, por el axioma $(viii)$ de $(\mathcal{G},\mathcal{S})$, se tiene $K * D \in \mathcal{G}$ y

$$(\Delta(K),1) * (D,\phi) \in \mathcal{S}(K, K * D).$$

- Ahora demostraremos que (iii) implica (i):
  Por hipótesis, $p_1(D) * D = p_2(D) \in \mathcal{G}$, y

$$(\Delta(p_1(D)),1) * (D,\phi) = (D,\phi) \in \mathcal{S}(p_1(D), p_2(D)),$$

  por lo tanto $(D,\phi) \in \mathcal{S}^{+}(G,H)$.

(b) Demostraremos cada uno de los axiomas

- Axioma (i): Sea $G \in \mathcal{G}$, notemos que $p_1(\Delta(G)) = p_2(\Delta(G)) = G$, y como $(\mathcal{G},\mathcal{S})$ cumple el axioma (i), tenemos que $(\Delta(G),1) \in \mathcal{S}(G,G) = \mathcal{S}(p_1(\Delta(G)), p_2(\Delta(G))$, por lo tanto, $(\Delta(G),1) \in \mathcal{S}^{+}(G,G)$ i.e. $(\mathcal{G},\mathcal{S}^{+})$ satisface el axioma (i).

- Axioma (ii) Sean $(D,\phi)\in\mathcal{S}^{+}(G,H)$ y $(g,h)\in G\times H$, por definición de $\mathcal{S}^{+}$; tenemos que, $p_1(D)$ y $p_2(D)$ son elementos de $\mathcal{G}$, y ya que $(\mathcal{G},\mathcal{S})$ satisface el axioma (vii) y la observación 4.2.1, se tiene ${}^{g}p_1(D)$ y ${}^{h}p_2(D)$ son elemento de $\mathcal{G}$. Ahora, notemos que ${}^{(g,1)}(\Delta(G),1)\in\mathcal{S}(G,G)$, y ya que $p_1(D)\in\sum_{\mathcal{G}}(p_2({}^{(g,1)}\Delta(G))$, podemos usar el axioma (vii) de $(\mathcal{G},\mathcal{S})$, lo cual nos dice que

$$ {}^{(g,1)}(\Delta(p_1(D)),1)={}^{(g,1)}(\Delta(G),1)*(\Delta(p_1(D)),1)\in\mathcal{S}({}^{g}p_1(D),p_1(D)). $$

  Por otro lado, ${}^{(1,h)}(\Delta(H),1)\in\mathcal{S}(H,H)$ y ${}^{h}p_2(D)\in\sum_{\mathcal{G}}(p_2({}^{(1,h)}\Delta(H)))$, usando el axioma (vii) de $(\mathcal{G},\mathcal{S})$, se tiene que

$$ {}^{(1,h)}(\Delta(p_2(D)),1)={}^{(1,h)}(\Delta(H),1)*(\Delta({}^{h}p_2(D)),1)\in\mathcal{S}(p_2(D),{}^{h}p_2(D)), $$

  y ya que ${}^{(1,h)}\Delta(H)*{}^{h}p_2(D)=p_2(D)$. Se tiene que,

$$ {}^{(g,h)}(D,\phi)={}^{(g,1)}(\Delta(p_1(D)),1)*(D,\phi)*{}^{(1,h)}(\Delta(p_2(D)),1)\in\mathcal{S}({}^{g}p_1(D),{}^{h}p_2(D)), $$

  además, $p_1({}^{(g,h)}D)={}^{g}p_1(D)$ y $p_2({}^{(g,h)}D)={}^{h}p_2(D)$. Por lo tanto, se tiene que ${}^{(g,h)}(D,\phi)\in\mathcal{S}^{+}(G,H)$.

- Axioma (iii): Sean $(D,\phi)\in\mathcal{S}^{+}(G,H)$ y $(T,\psi)\in\mathcal{S}^{+}(H,K)$ tales que

$$ \psi_1|_{k_1(T)\cap k_2(T)}=\phi_2|_{k_1(T)\cap k_2(T)}. $$

  Por hipótesis, $p_1(D)$, $p_2(D)$, $p_1(T)$, $p_2(T)\in\mathcal{G}$, y $(D,\phi)\in S(p_1(D),p_2(D))$ y $(T,\psi)\in S(p_1(T),p_2(T))$, por el axioma (vii) de $(\mathcal{G},\mathcal{S})$, se tiene que $\Delta(p_2(D))*p_1(T)=p_2(D)\cap p_1(T)\in\sum_{\mathcal{G}}p_2(D)$. Además, $D*(p_2(D)\cap p_1(T))=p_1(D*T)\in\mathcal{G}$ y

$$ (D,\phi)*(\Delta(p_1(T)\cap p_2(D)),1)\in\mathcal{S}(p_1(D*T),p_1(T)\cap p_2(D)). $$

  Por otro lado, $p_2(D)\cap p_1(T)\in\sum_{\mathcal{G}}p_1(T)$, y por axioma $(viii)$ de $(\mathcal{G},\mathcal{S})$, se tiene que $(p_1(T)\cap p_2(D))*T=p_2(D*T)\in\mathcal{G}$, y

$$ (\Delta(p_1(T)\cap p_2(D)),1)*(T,\psi)\in\mathcal{S}(p_1(T)\cap p_2(D),p_2(D*T)). $$

  En consecuencia

$$ (D,\phi)*(\Delta(p_1(T)\cap p_2(D)),1)*(\Delta(p_1(T)\cap p_2(D)),1)*(T,\psi) $$

  es elemento de $\mathcal{S}(p_1(D,*T),p_2(D*T))$. Además

$$ (D,\phi)*(\Delta(p_1(T)\cap p_2(D)),1)*(\Delta(p_1(T)\cap p_2(D)),1)*(T,\psi)=(D,\phi)*(T,\psi). $$

  Por lo tanto, $(D,\phi)*(T,\phi)\in\mathcal{S}^{+}(G,K)$.

- Axioma (v): Sean $G\in\mathcal{G}$ y $H\in\sum_{\mathcal{G}}G$, tenemos que $(\Delta(H),1)\in S(H,H)$ y $p_i(\Delta(H))=H\in\mathcal{G}$ con $i=1,2$, en consecuencia, se tiene $(\Delta(H),1)\in\mathcal{S}(p_1(H),p_2(H))$. Además, notemos que $(\Delta(H),1)\in\mathcal{M}(G,H)$, por lo tanto $(\Delta(H),1)\in\mathcal{S}^{+}(G,H)$.

- Axioma (vi). Sean $G\in\mathcal{G}$ y $H\in\sum_{\mathcal{G}}G$, por el punto anterior y el hecho de que $(\Delta(H),1)\in\mathcal{M}(H,G)$, se tiene que $(\Delta(H),1)\in\mathcal{S}^{+}(H,G)$.

- Axioma (vii). Sean G, H elemento de $\mathcal{G}$ y $(D,\phi) \in \mathcal{S}^+(G,H)$, por definición $p_i(D) \in \mathcal{G}$ para $i = 1,2$, y $(D,\phi) \in \mathcal{S}(p_1(D), p_2(D))$. Sea $K \in \sum_{\mathcal{G}} p_2(D)$, entonces por el axioma (vii) de $(\mathcal{G},\mathcal{S})$, tenemos que $D * K \in \mathcal{G}$, además

$$(D,\phi) * (\Delta(K), 1) \in \mathcal{S}(D * K, K).$$

Notemos que $p_1(D * \Delta(K)) = D * K$ y $p_2(D * \Delta(K)) = K$, por lo tanto,

$$(D,\phi) * (\Delta(K), 1) \in \mathcal{S}^+(D * K, K).$$

- Axioma $(viii)$. Sean G, H elemento de $\mathcal{G}$ y $(D,\phi) \in \mathcal{S}^+(G,H)$, por definición $p_i(D) \in \mathcal{G}$ para $i = 1,2$, y $(D,\phi) \in \mathcal{S}(p_1(D), p_2(D))$. Sea $K \in \sum_{\mathcal{G}} p_1(D)$, entonces por el axioma $(viii)$ de $(\mathcal{G},\mathcal{S})$, tenemos que $K * D \in \mathcal{G}$, además

$$(\Delta(K), 1) * (D,\phi) \in \mathcal{S}(K, K * D).$$

Notemos que $p_2(\Delta(K) * D) = K * D$ y $p_1(\Delta(K) * D) = K$, por lo tanto

$$(D,\phi) * (\Delta(K), 1) \in \mathcal{S}^+(K, K * D).$$

(c) Primero supongamos que $\mathcal{D} = \mathcal{D}^+$. Entonces $(\mathcal{G},\mathcal{S}) = (\mathcal{G},\mathcal{S}^+)$ y por el inciso (b) tenemos que $(\mathcal{G},\mathcal{S}^+)$ satisface los axiomas (v) y (vi) de 4.2, por lo tanto $(\mathcal{G},\mathcal{S})$ también lo hace.
Ahora supongamos que $(\mathcal{G},\mathcal{S})$ satisface los axiomas (v) y (vi). Sean G, H elementos de $\mathcal{G}$ y $(D,\phi) \in \mathcal{S}(G,H)$, entonces por el axioma (vii), tenemos que $p_2(D) \in \mathcal{G}$, por el axioma (vi) de $(\mathcal{G},\mathcal{S})$ tenemos que $(\Delta(p_2(D), 1) \in \mathcal{S}(H, p_2(D))$, por lo tanto

$$(D,\phi) * (\Delta(p_2(D)), 1) = (D,\phi) \in \mathcal{S}(G, p_2(D)),$$

además, por el axioma $(viii)$ y el (v) de 4.2, tenemos que $p_1(D) \in \mathcal{G}$ y $(\Delta(p_1(D), 1)$ es elemento de $\mathcal{S}(p_1(D), G)$, entonces

$$(\Delta(p_1(D)), 1) * (D,\phi) = (D,\phi) \in \mathcal{S}(p_1(D), p_2(D)).$$

Por lo tanto, $(D,\phi) \in \mathcal{S}^+(G,H)$. Lo que implica que $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}^+$.
Sea $(D,\phi) \in \mathcal{S}^+(G,H)$, por el axioma (v) de $(\mathcal{G},\mathcal{S})$, tenemos que $(\Delta(p_1(D)), 1)$ es un elemento de $\mathcal{S}(G, p_1(D))$ y por axioma (vi) de $(\mathcal{G},\mathcal{S})$, se tiene que $\Delta(p_2(D)), 1)$ es un elemento de $\mathcal{S}(p_2(D), H)$, entonces

$$(\Delta(p_1(D)), 1) * (D,\phi) * (\Delta(p_2(D)), 1) = (D,\phi) \in \mathcal{S}(G,H),$$

esto implica que $\mathcal{D}^+ \subseteq \mathcal{D}$. Por lo tanto, $\mathcal{D} = \mathcal{D}^+$.

(d) Es directo de la definición de $\mathcal{S}^+(G,H)$.

■

Para definir la construcción más arriba de un funtor fibrado evaluado en un grupo finito G, definiremos el siguiente subconjunto de $\mathcal{G}$:

$$\mathcal{M}'(G) := \{(H,\phi) \mid H \leqslant G,\ H \in \mathcal{G} \text{ y } \phi \in Hom(H,A)\}.$$

Dados U un (G,H)-biconjunto A-fibrado, $u \in U$ y $K \leqslant p_1((G \times H)_u)$. Definimos

$$K^u := \{h \in H \mid \text{ existe } k \in K \text{ tal que } (k,h) \in (G \times H)_u\}. \tag{4.4.3}$$

En el caso $A = 1$, esta notación ha sido introducido en [6] por Serge Bouc.

4.4.4 Observación. Sean G, H grupos finitos, además $(K,\alpha) \in \mathcal{M}(\mathcal{G})$. Si U es un (G,H)-biconjunto A-fibrado y $g \in G$, tenemos:

(a) Si $[A \setminus U/H]$ es un conjunto de representantes de (A,H)-órbitas de U. Entonces el conjunto $\{gu \mid u \in [A \setminus U/H]\}$ también es un conjunto de representantes de las (A,H)-órbitas de U.

(b) $K \leqslant p_1((G\times H)_u)$ si y sólo si ${}^gK \leqslant p_1((G\times H)_{gu})$.

(c) Para $u \in U$ y $(K^u,\lambda) \in \mathcal{M}(H)$. La función $\phi_{u,2}$ es igual a λ en $k_2((G\times H)_u)\cap K^u$ si y sólo si la función $\phi_{gu,2}$ es igual a λ en $k_2((G\times H)_{gu})\cap({}^gK)^{gu}$.

(d) Para $u \in U$ y $(K^u,\lambda) \in \mathcal{M}(H)$. Tenemos que $\phi_u * \lambda = \alpha$ si y sólo si $\phi_{gu} * \lambda = {}^g\alpha$.

4.4.5 Definición. Sea $F \in \mathcal{F}^A_{\mathcal{D},R}$, podemos definir un funtor $F^+ \in \mathcal{F}^A_{\mathcal{D}^+,R}$. El cual está definido en objetos de la siguiente manera: Para $G \in \mathcal{G}$, definimos a $F^+(G)$ como el conjunto de los elementos $(x_{(K,\lambda)})_{(K,\lambda)\in\mathcal{M}'(G)} \in \bigoplus_{(K,\lambda)\in\mathcal{M}'(G)} F(K)$ tales que

$$ {}^gx_{(K,\lambda)} := F(Iso_K^{{}^gK})(x_{(K,\lambda)}) = x_{({}^gK,{}^g\lambda)} $$

para todo $(K,\lambda) \in \mathcal{M}'(G)$. No es difícil de verificar que

$$ F^+(G) \leqslant \bigoplus_{(K,\lambda)\in\mathcal{M}'(G)} F(K). $$

Para definir el funtor F^+ en un morfismo basta tomar a G, $H \in \mathcal{G}$ y un (G,H)-biconjunto A-fibrado U tal que todas sus parejas estabilizadoras $((G\times H)_u,\phi_u) \in \mathcal{S}^+(G,H)$. Definamos

$$ \begin{aligned} F^+([U]) = F^+(U) : F^+(H) &\longrightarrow F^+(G) \\ (x_{L,\lambda})_{(L,\lambda)\in\mathcal{M}'(H)} &\longmapsto (y_{(K,\alpha)})_{(K,\alpha)\in\mathcal{M}'(G)} \end{aligned} \tag{4.4.6} $$

donde

$$ y_{(K,\alpha)} = \sum_{\substack{u\in[A\setminus U/H] \\ K\leqslant p_1(G\times H)_u) \\ \phi_{u,2}|_{W_{u,K}}=\lambda|_{W_{u,K}} \\ \phi_u*\lambda=\alpha}} F\left(\left[\frac{K\times K^u}{(K\times H)_u,\phi_u}\right]\right)(x_{(K^u,\lambda)}), $$

y $[A\backslash U/H]$ es un conjunto de representantes de las (A,H)-órbitas de U y definimos a $W_{u,K} = k_2((G\times H)_u)\cap K^u)$. Ahora demostraremos que F^+ está bien definido:

- Sea $K \in \mathcal{G}$, por el Axioma $(viii)$ de $(\mathcal{G},\mathcal{S})$ se tiene que

  $$ \Delta(K) * (G\times H)_u = (K\times H)_u \in \mathcal{G} $$

  y $(\Delta(K),1) * ((G\times H)_u,\phi_u) = ((K\times H)_u,\phi_u) \in \mathcal{S}(K,K^u)$. Entonces a F lo podemos evaluar en $\left[\dfrac{K\times K^u}{(K\times H)_u,\phi_u}\right]$.

- La expresión en (4.4.6) no depende del conjunto de representantes $[A\backslash U/H]$. Dados $a \in A$, $h \in H$ y $u \in U$, tenemos:

  1. $K^{auh} = K * (G\times H)_{auh} = K * (G\times H)_u^{(1,h)} = (K^u)^h$

2.

$$\begin{aligned}((K\times H)_{uh},\phi_{uh}) &= (\Delta(K),1)*((G\times H)_u,\phi_u)^{(1,h)}\\ &= ((K\times H)_u,\phi_u)^{(1,h)}.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$F\left(\left[\frac{K\times K^{auh}}{(K\times H)_{auh},\phi_{auh}}\right]\right)(x_{K^{auh}}) = F\left(\left[\frac{K\times K^{u}}{(K\times H)_{u},\phi_{u}}\right]\right)(x_{K^{u}}),$$

es decir, no depende del conjunto de representantes de las (A,H)-órbitas de U.

- No depende del representante de la clase de isomorfismo de $[U]$.
Sea V un (G,H)-biconjunto A-fibrado isomorfo a U, entonces existe un isomorfismo $\psi : U \longrightarrow V$ en ${}_G set_H^A$. Por lo tanto,
  - $((G\times H)_u,\phi_u) = ((G\times H)_{\psi(u)},\phi_{\psi(u)})$.
  - $K^u = K^{\psi(u)}$.
  - $((K\times H)_u,\phi_u) = ((K\times H)_{\psi(u)},\phi_{\psi(u)})$.
  - El conjunto $\{\psi(u)\in V \mid u\in[A\setminus U/H]\}$ es un conjunto de representantes de las (A,H)-órbitas de V.

Se sigue que

$$F^+(U)\left((x_{(L,\alpha)})_{(L,\alpha)\in\mathcal{M}'(H)}\right) = F^+(V)\left((x_{(L,\alpha)})_{(L,\alpha)\in\mathcal{M}'(H)}\right).$$

- Ahora, demostraremos que $(y_{(L,\alpha)})_{(L,\alpha)\in\mathcal{M}'(G)} = F^+(U)((x_{(K,\lambda)})_{(K,\lambda)\in\mathcal{M}'(K)})$ es un elemento de $F^+(G)$. Tenemos que ${}^g y_{(L,\alpha)}$ es igual a

$$\sum_{\substack{u\in[A\backslash U/H]\\ K\leqslant p_1(G\times H)_u)\\ \phi_{u,2}|_{W_{u,K}}=\lambda|_{W_{u,K}}\\ \phi_u*\lambda=\alpha}} F\left(\left[\frac{{}^gK\times K}{{}^{(g,1)}\Delta(K),1}\right]*\left[\frac{K\times K^u}{(K\times H)_u,\phi_u}\right]\right)(x_{(K^u,\lambda)}),$$

donde $W_{u,K}=k_2((G\times H)_u)\cap K^u$. Notemos que $K^u=({}^gK)^{gu}$,

$$({}^{(g,1)}\Delta(K),1)*((K\times H)_u,\phi_u) = (({}^gK\times H)_{gu},\phi_{gu}).$$

Por la Observación 4.4.4, tenemos ${}^g y_{(K,\alpha)}$ es igual a

$$\sum_{\substack{gu\in[A\backslash U/H]\\ {}^gK\leqslant p_1(G\times H)_{gu})\\ \phi_{gu,2}|_{W_{gu,{}^gK}}=\lambda|_{W_{gu,{}^gK}}\\ \phi_{gu}*\lambda={}^g\alpha}} F\left(\left[\frac{{}^gK\times({}^gK)^{gu}}{({}^gK\times H)_{gu},\phi_{gu}}\right]\right)(x_{({}^gK)^{gu},\lambda)}),$$

y esto es igual a $y_{({}^gK,{}^g\alpha)}$.
Notemos que si $\mathcal{D}$ cumple la condición k_2, ver la sección 4.2, la condición $\phi_{u,2}|_{W_{u,K}}$ es igual a $\lambda|_{W_{u,K}}$ en la definición de $y_{(K,\alpha)}$ es trivial, ya que $W_{u,K}=1_H$. Claramente, $F^+([U])$ es un homomorfismo de R-módulos. Ya que la suma en (4.4.6) es aditiva en $[U]$, se puede inducir un homomorfismo de grupos

$$F^+ : B^A(G,H) \longrightarrow Hom_R(F^+(H),F^+(G)).$$

4.4.7 Lema. *Sea U un (G,H)-biconjunto A-fibrado y sea V un (H,K)-biconjunto A-fibrado. Para $u\otimes v\in U\otimes_{AH} V$ y $L\leqslant G$.*

(a) Tenemos $(L^u)^v = L^{u\otimes v}$.

(b) Supongamos que U es libre por la derecha, entonces $L\leqslant p_1((G\times K)_{u\otimes v})$ si y sólo si $L\leqslant p_1((G\times H)_u)$ y $L^u\leqslant p_1((H\times K)_v)$.

El el caso $A=1$, el inciso (a) fue demostrado por S. Bouc y J. Thévenaz en [11].

Demostración. ▪ Primero demostraremos que $(L^u)^v = L^{u\otimes v}$. Por definición tenemos que

$$\begin{aligned}L^{u\otimes v} &= \{k\in K \mid \exists\, l\in L : (l,k)\in (L\times K)_{u\otimes v}\}.\\ (L^u)^v &= \{k\in K \mid \exists\, h\in L^u : (h,k)\in (L^u\times K)_v\}\\ &= \{k\in K \mid \exists\, h\in H \textbf{ y } l\in L : (l,h)\in (L\times H)_u \textbf{ y } (h,k)\in (L^u\times K)_v\}.\end{aligned}$$

Sea $k\in (L^u)^v$, entonces existen $h\in H$ y $l\in L$ tales que $(l,h)\in (L\times H)_v$ y $(h,k)\in (L^u\times K)_v$, por lo tanto

$$\begin{aligned}(l,k)\cdot(u\otimes v) &= (l,k)(uh^{-1}\otimes hv) = luh^{-1}\otimes hvk^{-1}\\ &= au\otimes a'u = (aa')\cdot(u\otimes v),\end{aligned}$$

donde $a,a'\in A$, esto significa que $(l,k)\in (L\times K)_{u\otimes v}$, por lo tanto $(L^u)^v\subseteq L^{u\otimes v}$. Por otro lado, sea $k\in (L)^{u\otimes v}$, entonces existe $l\in L$ tal que $(l,k)\in (L\times K)_{u\otimes v}$, es decir

$$(l,k)\cdot(u\otimes v) = a'u\otimes v,$$

para algún $a'\in A$, entonces existen $h\in H$ y $a\in A$ tales que

$$\begin{aligned}luh^{-1} &= a'au\\ hvk^{-1} &= av.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(l,h)\in (L\times H)_u$, esto significa que $h\in L^u$, y $(h,k)\in (L^u\times K)_v$, entonces $k\in (L^u)^v$. De donde concluimos $L^{u\otimes v} = (L^u)^v$.

▪ Primero supongamos que $L\leqslant p_1((G\times K)_{u\otimes v})$. Entonces, para todo $l\in L$, existe $k\in K$, tal que $(l,k)\in (G\times K)_{u\otimes v}$, esto significa que

$$(l,k)\cdot(u\otimes v) = (lu\otimes vk^{-1}) = au\otimes v$$

para algún $a\in A$, esto significa que existen $h\in H$ y $b\in A$ tales que

$$\begin{aligned}luh^{-1} &= abu\\ hvk^{-1} &= av.\end{aligned}$$

Entonces, para todo $l\in L$, existe $h\in H$ tal que $(l,h)\in (L\times H)_u$, es decir, L es subgrupo de $p_1((G\times H)_u)$. Además, para todo $h\in L^u$, existe $l\in L$ tal que $(l,h)\in (L\times H)_u$, para l existen $h'\in H$ y $k\in K$ tales que $(l,h')\in (G\times H)_u$ y $(h',k)\in (H\times K)_v$, notemos que $(1,h'h^{-1})\in k_2((G\times H)_u) = \{1\}$, entonces $h=h'$, por lo tanto $(h,k)\in (H\times K)_v$, entonces $L^u\leqslant p_1(H\times K)_v$.

Ahora supongamos que $L\leqslant p_1((G\times H)_u)$ y $L^u\leqslant p_1((H\times K)_v)$. Sea $l\in L$, entonces existe $h \in H$, tal que $(l,h) \in (L \times H)_u$, es decir, $h \in L^u$, por lo tanto existe $k \in K$ tal que $(h,k) \in (L^u \times K)_v$, esto implica que

$$\begin{aligned}(l,k)\cdot(u\otimes v) &= lu \otimes vk^{-1} = luh^{-1} \otimes hvk^{-1}\\ &= au \otimes bv = ab\cdot(u\otimes v)\end{aligned}$$

donde $a, b \in A$, por lo tanto $(l,k) \in (G \times K)_{u\otimes v}$. Se concluye que L es un subgrupo de $p_1((G \times K)_{u\otimes v})$.

■

4.4.8 Teorema. *Sea $(\mathcal{G},\mathcal{S})$ tales que satisfacen los axiomas (i), (ii), (iii), (vii) y $(viii)$, además supongamos que satisface la condición $k_2(D)$, definimos $\mathcal{D} := \mathcal{C}^A(\mathcal{G},\mathcal{S})$ y $\mathcal{D}^+ := \mathcal{C}^A(\mathcal{G},\mathcal{S}^+)$. Entonces la Definición 4.4.5 se extiende a un funtor R-lineal, $-^+ : \mathcal{F}_{\mathcal{D},\mathcal{R}} \longrightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{D}^+,\mathcal{R}}$.*

Demostración. Sea $G, H, K \in \mathcal{G}$, y sea U un (G,H)-biconjunto A-fibrado, tal que todas sus parejas estabilizadoras son elementos de $\mathcal{S}^+(G,H)$, y sea V un (H,K)-biconjunto A-fibrado, tal que todas sus parejas estabilizadoras son elementos de $\mathcal{S}^+(H,K)$, Ahora demostraremos que

$$F^+(U \otimes_{AH} V) = F^+(U) \circ F^+(V) = F^+(K) \longrightarrow F^+(G).$$

Sea $c = (c_{(N,\beta)})_{(N,\beta)\in\mathcal{M}'(K)} \in F^+(K)$. Entonces, para todo $(L,\lambda) \in \mathcal{M}'(G)$, la (L,λ)-componente de $F^+(U \otimes_{AH} V)(c)$ es igual a

$$\sum_{\substack{u\otimes v\in[A\backslash U\otimes_{AH}V/K]\\ L\leqslant p_1((G\times K)_{u\otimes v})\\ \phi_u*\beta=\lambda}} F\left(\left[\frac{L\otimes L^{u\otimes v}}{(L\times K)_{u\otimes v},\phi_{u\otimes v}}\right]\right)\left(c_{(L^{u\otimes v},\beta)}\right).$$

Por otro lado, definamos a $b := (b_{(M,\alpha)})_{(M,\alpha)\in\mathcal{M}'(H)} = F^+(V)(c)$, entonces

$$b_{(M,\alpha)} = \sum_{\substack{v\in[A\backslash V/K]\\ M\leqslant p_1((H\times K)_v)\\ \phi_v*\psi=\alpha}} F^+\left(\left[\frac{M\times M^v}{(M\times K)_v,\phi_v}\right]\right)\left(c_{(M^v,\psi)}\right).$$

y definamos a $a = (a_{(L,\lambda)})_{(L,\lambda)\in\mathcal{M}'(G)} = F^+(U)(b)$, donde la su (L,λ)-componente es igual a

$$a_{(L,\lambda)} = \sum_{\substack{u\in[A\backslash U/H]\\ L\leqslant p_1((G\times H)_u)\\ \phi_u*\alpha=\lambda}} F\left(\left[\frac{L\times L^u}{(L\times H)_u,\phi_u}\right]\right)\left(b_{(L^u,\alpha)}\right) \tag{4.4.9}$$

esta es igual a

$$\sum_{\substack{u\in[A\backslash U/H]\\ L\leqslant p_1((G\times H)_u)\\ \phi_v*\psi=\alpha\\ v\in[A\backslash V/K]\\ L^u\leqslant p_1((H\times K)_v)\\ \phi_u*\alpha=\lambda}} F\left(\left[\frac{L\times L^u}{(L\times H)_u,\phi_u}\right]\otimes_{AL^u}\left[\frac{L^u\times(L^u)^v}{(L^u\times K)_v,\phi_v}\right]\right)\left(c_{((L^u)^v,\psi)}\right),$$

notemos que:

- $p_2((L\times H)_u) = L^u = p_1((L^u\times K)_v)$,
- $\phi_u = \phi_v$ en $k_2((L\times H)_u)\cap k_1((L^u\times H)_v) = \{1\}$.

Por la fórmula de Mackey, se tiene

$$\left[\frac{L\times L^u}{(L\times H)_u,\phi_u}\right]\otimes_{AL^u}\left[\frac{L^u\times (L^u)^v}{(L^u\times K)_v,\phi_v}\right] = \left[\frac{L\times L^{u\otimes v}}{((G\times H)_u,\phi_u)*(L^u\times K)_v,\phi_v)}\right].$$

Ahora, por el Lema 4.4.7, tenemos que (4.4.9) es igual a

$$\sum_{\substack{v\in[A\backslash V/K]\\ u\in[A\backslash U/H]\\ L\leqslant p_1((G\times K)_{u\otimes v})\\ \phi_v*\psi=\alpha\\ \phi_u*\alpha=\lambda}} F\left(\left[\frac{L\times L^{u\otimes v}}{((G\times H)_u,\phi_u)*(L^u\times K)_v,\phi_v)}\right]\right)\left(c_{(L^{u\otimes v},\psi)}\right).$$

Ya que U es libre por la derecha, tenemos que para cualquier conjunto de representantes $[A\backslash U/H]$ y $[A\backslash V/K]$, tenemos que el conjunto $\{u\otimes v \mid u\in[A\backslash U/H] \text{ and } v\in[A\backslash V/K]\}$ es un conjunto de representantes de $A\backslash(U\otimes_{AH}V)/K$. Más aún, por el Lema 4.1.8, se tiene que

$$a_{(L,\lambda)} = \sum_{\substack{u\otimes v\in[A\backslash(U\otimes_{AH}V)/K]\\ L\leqslant p_1((G\times K)_{u\otimes v})\\ \phi_v*\psi=\alpha\\ \phi_u*\alpha=\lambda}} F\left(\left[\frac{L\times L^{u\otimes v}}{(L\times K)_{u\otimes v},\phi_{u\otimes v}}\right]\right)\left(c_{(L^{u\otimes v},\phi_{u\otimes v})}\right),$$

Ya que α no aparece en la suma, se puede remplazar las condiciones $\phi_v*\psi=\alpha$ y $\phi_u*\alpha=\lambda$ por $\phi_u*\phi_v*\psi=\lambda$, y por el Lema 4.1.8, tenemos $\phi_u*\phi_v=\phi_{u\otimes v}$. Por lo tanto,

$$F^+(U\otimes_{AH}V)(c) = F^+(U)\circ F^+(V)(c).$$

Además, por definición F^+ manda el morfismo identidad al morfismo identidad y es R-lineal. ■

4.5 El morfismo de marcas

Sea $(\mathcal{G},\mathcal{S})$ tales que satisface los axiomas (i)-(iv), (vi), (vii) y $(viii)$ y la condición k_2. Definimos $\mathcal{D}:=\mathcal{C}^A(\mathcal{G},\mathcal{S})$, $\mathcal{D}_+:=\mathcal{C}^A(\mathcal{G},\mathcal{S}_+)$ y $\mathcal{D}^+:=\mathcal{C}^A(\mathcal{G},\mathcal{S}^+)$.
Por las Proposiciones 4.4.2 (c) y 4.2.4 (c) tenemos que $\mathcal{D}^+=\mathcal{D}_+=\mathcal{E}$, sea $F\in\mathcal{F}^A_{\mathcal{E},R}$. Ahora definiremos el siguiente mapeo R-lineal, $m_{F,G}:F_+(G)\longrightarrow F^+(G)$ el cual manda una clase $[X,s]_G\in F_+(G)$ a un elemento $(a_{L,\lambda})_{(L,\lambda)\in\mathcal{M}'(G)}\in F^+(G)$ con

$$a_{L,\lambda} = \sum_{\substack{x\in[X/A]\\ (L,\lambda)\leqslant(G_x.\phi_x)}} F\left(Res^{G_x}_L\right)(s(x))$$

donde $[X/A]$ es un conjunto de representantes de las A-órbitas de X. No es difícil ver que no depende del representante de la clase $[X,s]_G$.

4.5.1 Teorema. *Sea $(\mathcal{G},\mathcal{S})$ tales que satisfacen los axiomas del (i) al (iv), (vi), (vii) y $(viii)$, además la condición k_2. Sean $G,H\in\mathcal{G}$ y U un (G,H)-biconjunto A-fibrado tal que todas sus parejas estabilizadoras están en $\mathcal{S}^+(G,H)=\mathcal{S}_+(G,H)$. Entonces, para todo funtor $F\in\mathcal{F}^A_{\mathcal{D},R}$, tenemos que el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} F_+(H) \arrow[r, "m_{F,H}"] \arrow[d, "F_+([U])"'] & F^+(H) \arrow[d, "F^+([U])"] \\ F_+(G) \arrow[r, "m_{F,G}"'] & F^+(G) \end{tikzcd} \tag{4.5.2}$$

conmuta.

Demostración. Sean $[X,s]_G\in F_+(G)$ y $(L,\alpha)\in\mathcal{M}'(G)$. Por definición, la (L,α)-componente de $m_{F,G}(F_+(U)([X,s]_G))$ es igual a

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{u\otimes x\in[U\otimes_{AH}X/A]\\ (L,\alpha)\leqslant(G_{u\otimes x},\phi_{u\otimes x})}} F(Res_L^{G_{u\otimes x}})(U(s)(u\otimes x))\\
=&\sum_{\substack{u\otimes x\in[U\otimes_{AH}X]\\ (L,\alpha)\leqslant(G_{u\otimes x},\phi_{u\otimes x})}} F\left(\left[\frac{L\times G_{u\otimes x}}{\Delta(L),1}\right]\otimes_{AG_{u\otimes x}}\left[\frac{G_{u\otimes x}\times H_x}{(G\times H_x)_u,\phi_{u,x}}\right]\right)(s(x))\\
=&\sum_{\substack{u\otimes x\in[U\otimes_{AH}X]\\ (L,\alpha)\leqslant(G_{u\otimes x},\phi_{u\otimes x})}} F\left(\left[\frac{L\times H_x}{(L\times H_x)_u,\phi_{u,x}}\right]\right)(s(x)).
\end{aligned}$$

Por otro lado, si se denota a $(a_{(K,\lambda)})_{(K,\lambda)\in\mathcal{M}'(G)}:=m_{F,G}([X,s]_G)$ y a

$$b:=(b_{(L,\alpha)})_{(L,\alpha)\in\mathcal{M}(G)}:=F^+([U])(m_{F,G}([X,s]_G)),$$

entonces la (L,α)-componente de b es igual a

$$\begin{aligned}
b_{(L,\alpha)}=&\sum_{\substack{u\in[A\backslash U/H]\\ L\leqslant p_1((G\times H)_u)\\ \phi_u*\lambda=\alpha}} F\left(\left[\frac{L\times L^u}{(L\times H)_u,\phi_u}\right]\right)\left(a_{(L^u,\lambda)}\right)\\
=&\sum_{\substack{u\in[A\backslash U/H]\\ L\leqslant p_1((G\times H)_u)\\ \phi_u*\lambda=\alpha}} F\left(\left[\frac{L\times L^u}{(L\times H)_u,\phi_u}\right]\right)\left(\sum_{\substack{x\in[X/A]\\ (L^u,\lambda)\leqslant(H_x,\phi_x)}} F(Res_{L^u}^{H_x})(s(x))\right)\\
=&\sum_{\substack{u\in[A\backslash U/H]\\ x\in[X/A]\\ L\leqslant p_1((G\times H)_u)\\ \phi_u*\lambda=\alpha\\ (L^u,\lambda)\leqslant(H_x,\phi_x)}} F\left(\left[\frac{L\times L^u}{(L\times H)_u,\phi_u)}\right]\otimes_{AL^u}\left[\frac{L^u\times H_x}{\Delta(L^u),1}\right]\right)(s(x)),
\end{aligned}$$

por el Lema 4.4.7, esto es igual

$$=\sum_{\substack{u\in[A\backslash U/H]\\ x\in[X/A]\\ \phi_u*\lambda=\alpha\\ (L^u,\lambda)\leqslant(H_x,\phi_x)\\ L\leqslant G_{u\otimes x}}} F\left(\left[\frac{L\times L^u}{(L\times H)_u,\phi_u)}\right]\otimes_{AL^u}\left[\frac{L^u\times H_x}{\Delta(L^u),1}\right]\right)(s(x)).$$

Ya que U es libre por la derecha (propiedad k_2), el conjunto

$$\{u \otimes x \in U \otimes_{AH} \mid x \in [X/A] \text{ y } u \in [A \backslash U/H]\}$$

es un conjunto de representantes de las A-órbitas de $U \otimes_{AH} X$, y podemos remplazar las condiciones $\phi_u * \lambda = \alpha$ y $(L^u, \lambda) \leqslant (H_x, \phi_x)$ por

$$(L, \phi_u * \lambda) = (L, \alpha) \leqslant (G_{u \otimes x}, \phi_u * \phi_x) = (G_{u \otimes x}, \phi_{u \otimes x}).$$

Se hace notar que $p_1((G \times H_x)_u) = G_{u \otimes x}$ y

$$\begin{aligned}(\Delta(L), 1) * ((G \times H_x)_u, \phi_{u,x}) &= ((L \times H_x)_u, \phi_{u,x}) \\ &= ((L \times H)_u, \phi_u) * (\Delta(L^u), 1).\end{aligned}$$

Por lo tanto, la (L, α)-coordenada de $F^+([U])\,(m_{F,G}([X, s]_G))$ es igual a la (L, α)-coordenada de $m_{F,G}(F^+([U])([X, s]_G))$, lo que significa que el diagrama conmuta. ■

La siguiente definición es algo cercano al inverso del morfismo de marcas.

4.5.3 Definición. Supongamos que la pareja $(\mathcal{G}, \mathcal{S})$ satisfacen del axioma (i) al (iv), además los axiomas (vi), (vii) y $(viii)$ en 4.2 y denotemos $\mathcal{D} := \mathcal{C}^A(\mathcal{G}, \mathcal{S})$. Sea $F \in \mathcal{F}^A_{\mathcal{D},R}$ y $G \in \mathcal{G}$. Definamos el mapeo $n_{F,G} : F^+(G) \longrightarrow F_+(G)$ por $n_{F,G}\left((a_{K,\lambda,})_{(K,\lambda) \in \mathcal{M}'(G)}\right)$ es igual

$$\sum_{\substack{(L,\psi),\ (K,\lambda) \in \mathcal{M}'(G) \\ (L,\psi) \leqslant (K,\lambda)}} |L| \mu((L, \psi), (K, \lambda))[L, \psi, Res^K_L a_{(K,\lambda)}]_G,$$

donde, μ denota la función de Möbius del copo $\mathcal{M}'(G)$.

4.5.4 Proposición. *Sean $(\mathcal{G}, \mathcal{S})$, $\mathcal{D}$, F y G como en la definición 4.5.3. Entonces $n_{F,G} \circ m_{F,G} = |G| \cdot Id_{F_+(G)}$ y $m_{F,G} \circ n_{F,G} = |G| \cdot Id_{F^+(G)}$.*

Demostración. Sea $[X, s]_G \in F_+(G)$, por un lado, tenemos que la evaluación $n_{F,G}(m_{F,G}([X, s]_G))$ es igual a

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{(L,\psi),\ (K,\lambda) \in \mathcal{M}'(G) \\ (L,\psi) \leqslant (K,\lambda)}} |L| \mu((L, \psi), (K, \lambda))[L, \psi, Res^K_L (m_{F,G}([X, s]_G))_{(K,\lambda)}]_G \\ = &\sum_{\substack{(L,\psi),\ (K,\lambda) \in \mathcal{M}'(G) \\ (L,\psi) \leqslant (K,\lambda) \\ x \in [X/A] \\ (K,\lambda) \leqslant (G_x, \phi_x)}} |L| \mu((L, \psi), (K, \lambda)) \left[L, \psi, Res^K_L \left(F(Res^{G_x}_K)(s(x))\right)\right]_G\end{aligned}$$

y esto es igual a

$$\sum_{\substack{(L,\psi),\ (K,\lambda) \in \mathcal{M}'(G) \\ (L,\psi) \leqslant (K,\lambda)}} |L| \sum_{\substack{x \in [X/A] \\ (L,\psi) \leqslant (K,\lambda) \leqslant (G_x, \phi_x)}} \mu((L, \psi), (K, \lambda))[L, \psi, F(Res^{G_x}_L)(s(x))]_G,$$

donde $(m_{F,G}([X,s]_G))_{(K,\lambda)}$ denota la (K,λ)-componente de $m_{F,G}([X,s]_G)$. Por las propiedades estándar de la función de Möbius μ, la última ecuación es igual

$$\begin{aligned} n_{F,G}(m_{F,G}([X,s]_G)) &= \sum_{(L,\psi),\in\mathcal{M}'(G)} \sum_{\substack{x\in[X/A]\\(L,\psi)=(G_x,\phi_x)}} |G_x|[G_x,\phi_x,F(Res^{G_x}_{G_x})(s(x))]_G \\ &= |G| \sum_{x\in[G\backslash X/A]} [G_x,\phi_x,s(x)]_G \\ &= |G|[X,s]_G \end{aligned}$$

ya que

$$|\{y\in[X/A] \mid [G_y,\phi_y,s(y)]_G=[G_x,\phi_x,s(x)]_G\}| = |G|/|G_x|.$$

La segunda igualdad se da por una adaptación de la prueba de la Proposición 2.4 de [2]. Para cualquier $(a_{(K,\lambda)})_{(K,\lambda)\in\mathcal{M}'(G)}\in F^+(G)$, tenemos $n_{F,G}((a_{(K,\lambda)})_{(K,\lambda)\in\mathcal{M}'(G)})$ es igual a

$$\sum_{\substack{(L,\psi),\ (K,\lambda)\in\mathcal{M}'(G)\\(L,\psi)\leqslant(K,\lambda)}} |L|\mu((L,\psi),(K,\lambda))[L,\psi,F(Res^K_L)(a_{(K,\lambda)})]_G.$$

Se sigue que, $m_{F,G}\left(n_{F,G}((a_{(K,\lambda)})_{(K,\lambda)\in\mathcal{M}'(G)})\right)$ es igual a

$$\sum_{\substack{(L,\psi),\ (K,\lambda)\in\mathcal{M}'(G)\\(L,\psi)\leqslant(K,\lambda)}} |L|\mu((L,\psi),(K,\lambda))m_{F,G}([L,\psi,F(Res^K_L)(a_{(K,\lambda)})]_G).$$

Notemos que $m_{F,G}([L,\psi,F(Res^K_L)(a_{(K,\lambda)})]=(b^{(L,\psi)}_{T,\alpha})_{(T,\alpha)\in\mathcal{M}'(G)}$, donde

$$b^{(L,\psi)}_{T,\alpha} = \sum_{\substack{gL\in[G/L]\\(T,\alpha)\neq^g(L,\psi)}} F(Res^{gL}_T\circ Res^{gK}_{gL})(^g a_{K,\lambda}).$$

Entonces, la (T,α)- componente de $m_{F,G}\left(n_{F,G}((a_{(K,\lambda)})_{(K,\lambda)\in\mathcal{M}'(G)})\right)$ es igual a

$$\sum_{g\in G}\sum_{(T^g,\alpha^g)\leqslant(L,\psi)} \frac{|L|}{|L|} \sum_{(L,\psi)\leqslant(K,\lambda)} \mu((L,\psi),(K,\lambda))F(Res^{gK}_T)(^g(a_{K,\lambda})).$$

Por la inversión de Möbius [Proposición 2 de la sección 3 de [20]] esta suma se colapsa a $^g a_{T^g,\alpha^g}=a_{T,\alpha}$. Por lo tanto, la (T,α)-componente de $m_{F,G}\left(n_{F,G}((a_{(K,\lambda)})_{(K,\lambda)\in\mathcal{M}'(G)})\right)$ es $|G|a_{T,\alpha}$. ■

4.5.5 Corolario. *Sean $(\mathcal{G},\mathcal{S})$, $\mathcal{D}$, F y G como en la Definición 4.5.3. Si $|G|$ es invertible en R, entonces $m_{F,G}$ y $|G|^{-1}n_{F,G}$ son inversos entre sí.*

4.5.6 Corolario. *Sean $(\mathcal{G},\mathcal{S})$, $\mathcal{D}$, F y G como en la Definición 4.5.3. Si la $|G|$-torsión de $F_+(G)$ es trivial, entonces $m_{F,G}$ es inyectiva.*

4.6 Funtores de Green fibrados

Esta sección está dedicada a estudiar los funtores de más abajo y más arriba. A lo largo de esta sección, la clase $\mathcal{G}$ está cerrada bajo el producto directo, denotaremos a la categoría $\mathcal{D} := \mathcal{C}^A(\mathcal{G}, \mathcal{S})$ y consideremos la subcategoría de funtores de biconjuntos A-fibrados sobre $\mathcal{D}$, la cual se denotará como $\mathcal{F}^A_{\mathcal{D},R}$ que consta de los funtores de de Green de biconjuntos A-fibrados (Definición 4.6.1). Para $\psi : G \longrightarrow H$ un isomorfismo de grupos, se define

$$Iso(\psi)^A := \left[\frac{H \times G}{{}_{(\psi,1)}\Delta(G), 1}\right].$$

4.6.1 Definición. Se dice que $F \in \mathcal{F}^A_{\mathcal{D},R}$ es un funtor de Green de biconjuntos A-fibrados de $\mathcal{D}$ sobre R si es un funtor de biconjuntos A-fibrados equipado con un producto bilineal

$$\begin{aligned} \times : F(G) \times F(H) &\longrightarrow F(G \times H) \\ (c, d) &\longmapsto (c \times d), \end{aligned}$$

para todo G, $H \in \mathcal{G}$ y un elemento $\mathcal{E}_F \in F(1)$ que satisfacen las siguientes condiciones:

- Asociatividad: Sean G, H y K grupos finitos de $\mathcal{G}$ y sea $\alpha : G\times(H\times K) \longrightarrow (G\times H)\times K$ el isomorfismo canónico. Entonces, para todo $x \in F(G)$, $y \in F(H)$ y $z \in F(K)$, se tiene que

$$(x \times y) \times z = F(Iso(\alpha)^A)(x \times (y \times z)).$$

- Elemento identidad: Sea G un grupo finito en $\mathcal{G}$, denotaremos por $\rho_G : 1 \times G \longrightarrow G$ y $\lambda_G : G \times 1 \longrightarrow G$ a los isomorfismos canónicos. Entonces se tiene que para todo $x \in F(G)$

$$x = F(Iso(\rho_G)^A)(\mathcal{E}_F \times x) = F(Iso(\lambda_G))(x \times \mathcal{E}_F).$$

- Funtorialidad: Si $\phi : G \longrightarrow H$ y $\psi : G' \longrightarrow H'$ son morfismos en $\mathcal{D}$, entonces para cualquier $x \in F(G)$ y $y \in F(H)$ se cumple que

$$F(\phi \otimes_A \psi)(x \times y) = F(\phi)(x) \times F(\psi)(y).$$

Sean $F_1, F_2 \in \mathcal{F}^A_{\mathcal{D},R}$ funtores de Green de biconjuntos A-fibrados de $\mathcal{D}$ sobre R. Un morfismo de funtores de Green de biconjuntos A-fibrados entre F_1 y F_2 es una transformación natural $\eta : F_1 \longrightarrow F_2$ en la categoría $\mathcal{F}^A_{\mathcal{D},R}$ con las propiedades adicional que

$$\begin{tikzcd} F_1(G) \times F_1(H) \arrow[r, "\eta_G \times \eta_H"'] \arrow[d, "\times"'] & F_2(G) \times F_2(H) \arrow[d, "\times"] \\ F_1(G \times H) \arrow[r, "\eta_{G\times H}"'] & F_2(G \times H) \end{tikzcd}$$

conmuta para todo G, H en $\mathcal{G}$ y $\eta(\mathcal{E}_{F_1}) = \mathcal{E}_{F_2}$.

Denotaremos la categoría de los funtores de Green de biconjuntos A-fibrados de $\mathcal{D}$ sobre R por $\mathcal{F}^{A,\mu}_{D,R}$.

4.6.2 Observación. Sean G y H grupos finitos. Para todo G-conjunto A-fibrado X y para todo H-conjunto A-fibrado, tenemos que $(G\times H)_{x\otimes y} = G_x \times H_y$, para todo $x\otimes y \in X\otimes_A Y$.

El siguiente lema demuestra que las construcciones F_+ y F^+ preservan la propiedad de ser un funtor de Green de biconjuntos fibrados.

4.6.3 Lema. *Sea $(\mathcal{G},\mathcal{S})$ que satisface los axiomas (i)- (iii), (iv) y (vi) en 4.2, definimos a $\mathcal{D}=\mathcal{C}^A(\mathcal{G},\mathcal{S})$, $\mathcal{D}_+=\mathcal{C}^A(\mathcal{G},\mathcal{S}_+)$. Para todo $F\in\mathcal{F}^{A,\mu}_{\mathcal{D},R}$, entonces $F_+\in\mathcal{F}^{A,\mu}_{\mathcal{D}_+,R}$.*

Demostración. Definiremos el producto bilineal para F_+. Sean G, H elementos de $\mathcal{G}$, definimos a

$$\begin{aligned}\times : F_+(G)\times F_+(H) &\longrightarrow F_+(G\times H)\\ ([X,s]_G,[Y,t]_H) &\longmapsto [X\otimes_A Y, s\times t]_{G\times H},\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}s\times t : X\otimes_A Y &\longrightarrow \coprod_{x\otimes y\in[X\otimes Y/A]} F((G\times H)_{x\otimes y})\\ x\otimes y &\longmapsto s(x)\times t(y).\end{aligned}$$

Ya que s y t son secciones A-invariantes, se tiene que $s\times t$ está bien definida, y definimos al elemento identidad como $\mathcal{E}_{F_+}=[1,s_{\mathcal{E}_F}]\in F_+(1)$. Ahora demostraremos que este producto bilineal y el elemento $\mathcal{E}_{F_+}$ cumplen las propiedades de la definición 4.6.1:
Asociatividad: Sea G, H, K elementos de $\mathcal{G}$ y sea

$$\alpha : G\times(H\times K)\longrightarrow (G\times H)\times K$$

el isomorfismo natural. Para todo $[X,s]_G\in F_+(G)$, $[Y,t]_H\in F_+(H)$ y $[Z,r]_K\in F_+(K)$, tenemos

$$F_+(Iso(\alpha)^A)\,([X,s]_G\times([Y,t]_H\times[Z,r]_K))$$

es igual a

$$[Iso(\alpha)^A\otimes_{G\times(H\times K)} X\otimes_A(Y\otimes_A Z), Iso(\alpha)^A(s\times(t\times r))]_{(G\times H)\times K}.$$

Es importante destacar que existe un isomorfismo de biconjuntos A-fibrado entre

$$Iso(\alpha)^A\otimes_{(G\times H)\times K} X\otimes_A(Y\otimes_A Z)\cong(X\otimes_A Y)\otimes_A Z. \tag{4.6.4}$$

Dado que $Iso(\alpha)^A$ es $G\times(H\times K)$-transitivo, cualquier elemento del $(G\times H)\times K$-conjunto $Iso(\alpha)^A\otimes_{A(G\times(H\times K))}(X\otimes_A(Y\otimes_A Z))$ puede ser expresado como $1\otimes(x\otimes(y\otimes z))$, para algunos $x\in X$, $y\in Y$ y $z\in Z$. En este caso, se tiene

$$Iso(\alpha)^A(s\times(t\times r))(1\otimes(x\otimes(y\otimes z)))$$

es igual a

$$F\left(\left[\frac{((G\times H)\times K)_{x\otimes(y\otimes z)}\times(G\times(H\times K))_{(x\otimes y)\otimes z}}{{}^{(\alpha,1)}\Delta(G\times(H\times K))_{(x\otimes y)\otimes z}),1}\right]\right)(s(x)\times(t(y)\times r(z))),$$

por la asociatividad de $\times$ de F, esto es igual a

$$(s \times (t \times r))(x \otimes (y \otimes z)).$$

Elemento identidad: Sea $[X, s]_G \in F_+(G)$, tenemos un isomorfismo natural de G-conjuntos A-fibrados entre

$$1 \otimes_A X \cong X \cong X \otimes_A 1.$$

Sean $\lambda_G : 1 \times G \longrightarrow G$ y $\rho_G : G \times 1 \longrightarrow G$ los isomorfismos naturales, tenemos que

$$\begin{aligned}
(Iso(\lambda_G)^A(s_{\mathcal{E}_F} \times s))(1 \otimes x) &= F\left(\left[\frac{G \times (1 \times G)}{{}^{(\lambda_G,1)}\Delta(1 \times G), 1}\right]\right)((s_{\mathcal{E}_F} \times s)(1 \times x)) \\
&= F\left(\left[\frac{G \times (1 \times G)}{{}^{(\lambda_G,1)}\Delta(1 \times G), 1}\right]\right)(\mathcal{E}_F \times s(x)) \\
&= s(x),
\end{aligned}$$

entonces

$$F_+(Iso(\lambda_G)^A)(\mathcal{E}_{F_+} \times [X, s]_G) = [X, s]_G.$$

De manera similar podemos demostrar que

$$F_+(Iso(\rho_G)^A)([X, s]_G \times \mathcal{E}_{F_+}) = [X, s]_G.$$

Por lo tanto, ε_{F_+} es el elemento identidad.
Funtorialidad: Sea U un (G', G) -biconjunto A-fibrado y sea V un (H', H)-biconjunto A-fibrado tales que todas sus parejas estabilizadoras son elemento de $\mathcal{S}_+$. Para $[X, s]_G \in F_+(G)$ y $[Y, t]_H \in F_+(H)$, tenemos que

$$\begin{aligned}
F_+(U \otimes_A V)([X, s]_G \times [Y, t]_H) &= F_+(U \otimes_A V)([X \otimes_A Y, s \times t]_{G \times H}) \\
&= [(U \otimes_A V) \otimes_{AGH} (X \otimes_A Y), (U \otimes_A V)(s \times t)]_{G' \times H'}.
\end{aligned}$$

Por el otro lado

$$\begin{aligned}
F_+(U)([X, t]_G) \times F_+(V)([Y, t]_H) &= [U \otimes_{AG} X, U(s)]_{G'} \times [V \otimes_{AH} Y, V(t)]_{H'} \\
&= [(U \otimes_{AG} X) \otimes_A (V \otimes_{AH} Y), U(s) \times V(t)]_{G' \times H'}.
\end{aligned}$$

Notemos que el mapa

$$\begin{aligned}
(U \otimes_A V) \otimes_{AGH} (X \otimes_A Y) &\longrightarrow (U \otimes_{AG} X) \otimes_A (V \otimes_{AH} Y) \\
(u \otimes v) \otimes_{AGH} (x \otimes y) &\longmapsto (u \otimes_{AG} x) \otimes (v \otimes_{AH} y),
\end{aligned}$$

es un isomorfismo de (G', H')-biconjuntos A-fibrados. Ahora, Se demostrará que

$$(U(s) \times V(t))((u \otimes_{AH} x) \otimes (v \otimes_{AH} y)) = U(s)(u \otimes_{AH} x) \times V(t)(v \otimes_{AH} y).$$

Primero, tenemos que $U(s)(u \otimes_{AH} x) \times V(t)(v \otimes_{AH} y)$ es igual a

$$F\left(\left[\frac{G'_{u \otimes_{AG} x} \times G_x}{(G' \times G_x)_u, \phi_u}\right]\right)(s(x)) \times F\left(\left[\frac{H'_{v \otimes_{AH} y} \times H_y}{(H' \times H_y)_v, \phi_v}\right]\right)(t(y)).$$

Por otro lado, tenemos

$$(U \otimes_A V)(s \times t)((u \otimes v) \otimes_{AGH} (x \otimes y))$$

que es igual a

$$F\left(\left[\frac{(G' \times H')_{(u\otimes v)\otimes_{AGH}(x\otimes y)} \times (G \times H)_{x\otimes y}}{((G' \times H') \times (G \times H)_{x\otimes y})_{u\otimes v}, \phi_{u\otimes v}}\right]\right)(s(x) \times t(y)).$$

Esto es debido a que

$$\left[\frac{G'_{u\otimes_{AG}x} \times G_x}{(G' \times G_x)_u, \phi_u}\right] \otimes_A \left[\frac{H'_{v\otimes_{AH}y} \times H_y}{(H' \times H_y)_v, \phi_v}\right]$$

es isomorfo a

$$\left[\frac{(G' \times H')_{(u\otimes v)\otimes_{AGH}(x\otimes y)} \times (G \times H)_{x\otimes y}}{((G' \times H') \times (G \times H)_{x\otimes y})_{u\otimes v}, \phi_{u\otimes v}}\right].$$

Debido a la funtorialidad de F, se sigue la funtorialidad de F_+.

■

Sean G y H grupos finitos y sea $D \leqslant G \times H$. Se define a

$$p(D) = p_1(D) \times p_2(D),$$

usaremos esta notación en el siguiente lema

4.6.5 Lema. *Sea $(\mathcal{G}, \mathcal{S})$ una pareja que satisface los Axiomas (i)-(iii), (vii) y (viii) en 4.2, y la condición k_2, denotemos a $\mathcal{D} = \mathcal{C}^A(\mathcal{G}, \mathcal{S})$, $\mathcal{D}^+ = \mathcal{C}^A(\mathcal{G}, \mathcal{S}^+)$. Sí $F \in \mathcal{F}^{A,\mu}_{D,R}$, entonces $F^+ \in \mathcal{F}^{A,\mu}_{D^+,R}$.*

Demostración. Definiremos el producto bilineal de F^+. Sean G, H elementos de $\mathcal{G}$, definimos el producto bilineal

$$\times : F^+(G) \times F^+(H) \longrightarrow F^+(G \times H)$$
$$((a_{L,\lambda})_{(L,\lambda)\in\mathcal{M}'(G)}, (b_{K,\beta})_{(K,\beta)\in\mathcal{M}'(H)}) \longrightarrow (c_{T,\alpha})_{(T,\alpha)\in\mathcal{M}'(G\times H)}$$

donde

$$c_{T,\alpha} = \begin{cases} F(Res_T^{p(T)})(a_{p_1(T),\lambda} \times b_{p_2(T),\beta}) & \text{si } \alpha = \lambda \times \beta \\ 0 & \text{de otro modo.} \end{cases}$$

Definimos al elemento identidad como $\varepsilon_F \in F^+(1)$. Ahora demostraremos que este producto bilineal y el elemento identidad cumplen las condiciones de la Definición 4.6.1.
Asociatividad : Sean G, H, K elementos de $\mathcal{G}$ y sea

$$\Phi : (G \times H) \times K \longrightarrow G \times (H \times K)$$

el isomorfismo canónico. Dados los siguientes elementos $x = (x_{L,\lambda})_{(L,\lambda)\in\mathcal{M}'(G)} \in F^+(G)$, $y = (y_{I,\gamma})_{(I,\gamma)\in\mathcal{M}'(H)} \in F^+(H)$ y $z = (z_{J,\beta})_{(J,\beta)\in\mathcal{M}'(K)} \in F^+(K)$, se define

$$(b_{T,\tau})_{(T,\tau)\in\mathcal{M}'(H\times K)} = y \times z$$

con

$$b_{T,\tau} = F(Res_T^{p(T)})(y_{(p_1(T),\gamma)} \times z_{(p_2(T),\beta)})$$

si $\tau = \gamma \times \beta$ para algún $\beta \in p_2(T)^*$, $\gamma \in p_1(T)^*$ y 0 de otra manera. Ahora, se define

$$a := (a_{Q,t})_{(Q,t)\in\mathcal{M}(G\times(H\times K))} = x \times b$$

con

$$\begin{aligned} a_{Q,t} &= F(Res_Q^{p(Q)})(x_{p_1(Q),\lambda} \times b_{p_2(Q),\tau}) \quad (\text{ con } t = \lambda \times \tau) \\ &= F(Res_Q^{p(Q)})(x_{p_1(Q),\lambda}) \times F(Res_{p_2(Q)}^{p_{1,2}(Q)\times p_{2,2}(Q)})(y_{p_{1,2}(Q),\gamma} \times z_{p_{1,2}(Q),\beta}) \end{aligned}$$

esto es igual a

$$\begin{aligned} &F(Res_Q^{p(Q)} \circ Res_{p_1(Q)\times p_2(Q)}^{p_1(Q)\times(p_{1,2}(Q)\times p_{2,2}(Q))})(x_{p_1(Q),\lambda} \times (y_{p_{1,2}(Q),\gamma} \times z_{p_{1,2}(Q),\beta})) \\ &= F(Res_Q^{p_1(Q)\times(p_{1,2}(Q))\times p_{2,2}(Q))})(x_{p_1(Q),\lambda} \times (y_{p_{1,2}(Q),\gamma} \times z_{p_{1,2}(Q),\beta})) \end{aligned}$$

donde se denota a $p_{1,2}(Q) := p_1(p_2(Q)) \leqslant H$ y $p_{2,2}(Q) := p_2(p_2(Q)) \leqslant K$. También se define

$$c = (c_{\overline{Q},\bar{t}})_{(\overline{Q},\bar{t})\in\mathcal{M}((G\times H)\times K)} := F^+(Iso(\Phi)^A)((x \times y) \times z)$$

donde $\overline{Q} = \Phi(Q)$ y $\bar{t} = t \circ \Phi$ para $(Q,t) \in \mathcal{M}(G \times (H \times K))$. Se tiene que, $c_{\overline{Q},\bar{t}}$ es igual a

$$F(Iso(\Phi)^A \circ Res_Q^{p_1(Q)\times(p_{1,2}(Q)\times p_{2,2}(Q))})((x_{p_1(Q),\lambda} \times y_{p_{1,2}(Q),\gamma}) \times z_{p_{1,2}(Q),\beta}),$$

por la asociatividad del producto bilineal de F, esto es igual a la $(\overline{Q},\bar{t})$-coordenada del elemento $x \times (y \times z)$.

Elemento identidad: Sean $\lambda_G : 1\times G \longrightarrow G$ y $\rho_G : G\times 1 \longrightarrow G$ los isomorfismos canónicos. Para $y = (y_{I,\beta})_{(I,\beta)\in\mathcal{M}'(G)} \in F^+(G)$, se denota

$$(b_{K,\alpha})_{(K,\alpha)\in\mathcal{M}'(G)} = F^+(Iso(\lambda_G)^A)(\xi_{F^+} \times y)$$

donde

$$b_{K,\alpha} = \sum_{\substack{u\in[A\backslash Iso\lambda_G^A/1\times G] \\ K\leqslant p_1((G\times(1\times G))_u) \\ \alpha=1\cdot\beta}} F\left(\left[\frac{K\times K^u}{(K\times(1\times G))_u, \phi_u}\right]\right)((\xi_F \times y)_{(K^u,\beta)}).$$

Por el producto bilineal $\times$ de F^+, tenemos $(\xi_F \times y)_{(K^u,\beta)} \neq 0$ si $K^u = 1 \times I$ para algún $I \in \sum_{\mathcal{G}} G$, se sigue que $K = I$, entonces

$$\begin{aligned} b_{K,\alpha} &= F\left(\left[\frac{K\times(1\times K)}{{}^{(\lambda_G,1)}\Delta(1\times K), 1}\right]\right)(\xi_F \times y_{K,\alpha}) \\ &= y_{K,\alpha}. \end{aligned}$$

De forma similar, se puede demostrar que $F^+(Iso\rho_G^A)(y \times \xi_{F^+}) = y$.

Funtorialidad: Sea U un (G',G) -biconjunto A-fibrado y sea V un (H',H)-biconjunto A-fibrado tales que todas sus parejas estabilizadoras son elementos de $\mathcal{S}^+(G,G')$ y $\mathcal{S}^+(H,H')$

respectivamente. Para $x = (x_{K,\alpha})_{(K,\alpha)\in\mathcal{M}'(G)} \in F^+(G)$ y $y = (y_{I,\beta})_{(I,\beta)\in\mathcal{M}'(H)} \in F^+(H)$, se denota

$$b = (b_{L,\delta})_{(L,\delta)\in\mathcal{M}'(G'\times H')} := F^+(U \otimes_A V)(x \times y),$$

donde la componente $b_{L,\delta}$ es igual a

$$\sum_{\substack{u\otimes v\in[A\backslash U\otimes V/G\times H]\\ L\leqslant p_1((G'\times H')\times(G\times H))_{u\otimes v}\\ \phi_{u\otimes v}*s=\delta}} F\left[\left(\frac{L\times L^{u\otimes v}}{(L\times(G\times H))_{u\otimes v},\phi_{u\otimes v}}\right)\right]((x\times y)_{(L^{u\otimes v},s)}).$$

Por la definición del producto bilineal de F^+, se tiene que $((x\times y)_{(L^{u\otimes v},s)}) \neq 0$ si y sólo si $(p_1(L^{u\otimes v}),\lambda) \in \mathcal{M}'(G)$ y $(p_2(L^{u\otimes v}),\beta) \in \mathcal{M}'(H)$ tales que $s = \lambda\times\beta$. Entonces $b_{(L,\delta)}$ es igual a

$$\sum F\left[\left(\frac{L\times L^{u\otimes v}}{(L\times(G\times H))_{u\otimes v},\phi_{u\otimes v}}\right)\circ Res^{p(L^{u\otimes v})}_{L^{u\otimes v}}\right](x_{p_1(L^{u\otimes v}),\lambda}\times y_{p_2(L^{u\otimes v}),\beta}),$$

donde la suma corre sobre $u\otimes v \in [A\backslash U\otimes V/G\times H]$, $L \leqslant p_1\left(((G'\times H')\times(G\times H))_{u\otimes v}\right)$ y $\phi_{u\otimes v} * (\lambda\times\beta) = \delta$. Más aún, por la acción de $U\otimes_A V$, se tiene $p_1(L^{u\otimes v}) = p_1(L)^u$ y $p_2(L^{u\otimes v}) = p_2(L)^v$.

Por otro lado, se define

$$a := (a_{N,t})_{(N,t)\in\mathcal{M}'(G')} = F^+(U)(x)$$

y

$$z := (z_{W,s})_{(W,s)\in\mathcal{M}'(H')} := F^+(U)(x),$$

entonces (L,δ)-coordinada de $F^+(U)(x)\times F^+(V)(y)$ es igual a

$$F(Res^{p_1(L)\times p_2(L)}_{L})(a_{p_1(L),t}\times z_{p_2(L),s})$$

con $\delta = t\times s$, donde

$$a_{(p_1(L),t)} = \sum_{\substack{u\in[A\backslash U/G]\\ p_1(L)\leqslant p_1((G'\times G)_u)\\ \phi_u*\kappa=\lambda}} F\left(\left[\frac{p_1(L)\times p_1(L)^u}{(p_1(L)\times G)_u,\phi_u}\right]\right)(x_{p_1(L)^u,\lambda})$$

y

$$z_{p_2(L),s} = \sum_{\substack{v\in[A\backslash V/H]\\ p_2(L)\leqslant p_1((H'\times H)_v)\\ \phi_v*\beta=\gamma}} F\left(\left[\frac{p_2(L)\times p_2(L)^v}{(p_2(L)\times H)_v,\phi_v}\right]\right)(y_{p_2(L)^v,\gamma}).$$

Ahora, notemos que

$$\left[\frac{p_1(L)\times p_1(L)^u}{(p_1(L)\times G)_u,\phi_u}\right]\otimes\left[\frac{p_2(L)\times p_2(L)^v}{(p_2(L)\times H)_v,\phi_v}\right]$$

es igual a

$$\left[\frac{L\times L^{u\otimes v}}{(L\times(G\times H))_{u\otimes v},\phi_{u\otimes v}}\right]\circ Res^{p(L^{u\otimes v})}_{L^{u\otimes v}}$$

Por la demostración del Teorema 4.4.8 y la funtorialidad del producto bilineal $\times$ de F, se tiene que la (L,δ)-coordenada de $F^+(U)(x)\times F^+(V)(y)$ es igual a la (L,λ)-coordenada de $F^+(U\otimes_A V)(x\times y)$. ∎

4.6.6 Teorema. *Sea* $(\mathcal{G},\mathcal{S})$ *una pareja que satisface los Axiomas* (i)*–*(iii) *en 4.2 y definamos* $\mathcal{D} := \mathcal{C}^A(\mathcal{G},\mathcal{S})$*. Además, sea* $F \in \mathcal{F}_{D,R}^{A,\mu}$*.*

(a) Supongamos que la pareja $(\mathcal{G},\mathcal{S})$ *también satisface los axiomas* (iv) *y* (vi) *en 4.2, y definiremos a* $\mathcal{D}_+ = \mathcal{C}^A(\mathcal{G},\mathcal{S}_+)$*. Entonces* $F_+ \in \mathcal{F}_{\mathcal{D}_+,R}^{A,\mu}$ *y se obtiene un funtor*

$$-_+ : \mathcal{F}_{\mathcal{D},R}^{A,\mu} \longrightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{D}_+,R}^{A,\mu}.$$

(b) Supongamos que la pareja $(\mathcal{G},\mathcal{S})$ *también satisface los axiomas* (vii) *y* $(viii)$ *en 4.2, así como la condición* k_2 *y denotaremos* $\mathcal{D}^+ = \mathcal{C}^A(\mathcal{G},\mathcal{S}^+)$*. Entonces* $F^+ \in \mathcal{F}_{\mathcal{D}^+,R}^{A,\mu}$ *y se obtiene un funtor*

$$-^+ : \mathcal{F}_{\mathcal{D},R}^{A,\mu} \longrightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{D}^+,R}^{A,\mu}.$$

(c) Si la pareja $(\mathcal{G},\mathcal{S})$ *también satisface los Axiomas* (iv)*,* (vi)*,* (vii) *y* $(viii)$ *en 4.2, así como la condición* k_2*. Entonces el morfismo de marcas*

$$m_F : F_+ \longrightarrow F^+$$

es un morfismo en la categoría $F_{\mathcal{E},R}^{A,\mu}$*, donde* $\mathcal{E} = \mathcal{D}_+ = \mathcal{D}^+$*.*

Demostración. Tenemos que el inciso (a) y (b) son consecuencia del Lema 4.6.3 y del Lema 4.6.5. Ahora, demostraremos el inciso (c). Sea $G, H \in \mathcal{G}$, se necesita demostrar que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
F_+(G)\times F_+(H) \arrow[r, "m_{F,G}\times m_{F,H}"'] \arrow[d, "\times"'] & F^+(G)\times F^+(H) \arrow[d, "\times"] \\
F_+(G\times H) \arrow[r, "m_{F,G\times H}"'] & F^+(G\times H).
\end{tikzcd}$$

Sea $[X,s]_G \in F_+(G)$ y sea $[Y,t]_H \in F_+(H)$. Primero, la (T,α)-coordenada de la evaluación $m_{F,G\times H}([X\otimes_A Y, s\times t]_{G\times H})$ es igual a

$$\sum_{\substack{x\otimes y\in[X\otimes Y]\\ (T\alpha)\leqslant(G_x\times H_y,\phi_x\times\phi_y)}} F(Res_T^{G_x\times H_y})(s(x)\times t(y))$$

Por otro lado, la (T,α)-coordenada de $m_{F,G}([X,s]_G)\times m_{F,H}([Y,t]_H)$ es igual a

$$F(Res_T^{p_1(T)\times p_2(T)})(m_{F,G}([X,s]_G)_{(p_1(T),\lambda)}\times m_{F,H}([Y,t]_H)_{(p_2(T),\beta)})$$

donde $\alpha = \lambda\times\beta$, $m_{F,G}([X,s]_G)_{(p_1(T),\lambda)}$ es la $(p_1(T),\lambda)$-coordenada de $m_{F,G}([X,s]_G)$ y la $m_{F,H}([Y,t]_H)_{(p_2(T),\beta)}$ es la $(p_2(T),\beta)$-coordenada de $m_{F,H}([Y,t]_H)$, por la definición del morfismo de marcas, esta es iguala a

$$\sum_{\substack{x\in[X]\\ y\in[Y]\\ (p_1(T),\lambda)\leqslant(G_x,\phi_x)\\ (p_2(T),\beta)\leqslant(H_y,\phi_y)}} F(Res_T^{G_x\times H_y})(s(x)\times t(y)),$$

se tiene que el conjunto $\{x\otimes y \in X\otimes_A Y \mid x\in[X] \text{ and } y\in[Y]\}$ es un conjunto de representantes de las clases dobles $A\backslash X\otimes_A Y/G\times H$, entonces la (T,α)-coordenada de

$m_{F,G}([X,s]_G) \times m_{F,H}([Y,t]_H)$ es igual a la (T,α)-coordenada de $m_{F,G\times H}([X \otimes_A Y, s \times t])$. Además, notemos que

$$\begin{aligned} m_{F,1}(\mathcal{E}_{F_+}) &= m_{F,1}([1, s_{\mathcal{E}_F}]) \\ &= \sum_{\substack{x\in 1 \\ (1,1)\leqslant(1_x,\phi_x)}} F(Res_1^{1_x})(s_{\mathcal{E}_F}(x)) \\ &= F(Res_1^1)(s_{\mathcal{E}_F}(1)) \\ &= \mathcal{E}_F, \end{aligned}$$

por lo tanto, m_F manda el elemento identidad de F_+ al elemento identidad de F^+. Entonces el morfismo de marcas m_F es un morfismo en la categoría $F^{A,\mu}_{\mathcal{E},R}$. ∎

4.6.1 Estructura multiplicativa de $F^+(G)$

4.6.7 Teorema. *Sea la pareja $(\mathcal{G},\mathcal{S})$ tal que satisfacen del axioma (i) al (iii), definamos $\mathcal{D} := \mathcal{C}^A(\mathcal{G},\mathcal{S})$, $\mathcal{D}^+ := \mathcal{C}^A(\mathcal{G},\mathcal{S}^+)$ y sea $F \in \mathcal{F}^A_{\mathcal{D},R}$ tal que $F(G)$ tiene estructura multiplicativa para todo $G \in \mathcal{G}$. Si $(\mathcal{G},\mathcal{S})$ también satisface los axiomas (vii) y $(viii)$, y la condición k_2. Entonces $F^+(G)$ tiene estructura multiplicativa para todo $G \in \mathcal{G}$.*

Demostración. Para todo $G \in \mathcal{G}$ le daremos estructura multiplicativa a $F^+(G)$, la cual será entrada por entrada.

∎

4.7 Ejemplo de las construcciones +

En esta sección daremos la definición de dos funtores de biconjuntos fibrados y cuál es la relación entre ellos referente a la construcción $-_+$ anteriormente definida. El primero de estos funtores es el funtor de caracteres al cual se le dio estructura de funtor de biconjuntos fibrados en la sección 11B. de [3] y el segundo es el funtor global de representaciones fibradas, el cual está inspirado en el funtor global de representaciones.

4.7.1 El funtor $\mathbb{K}R_{\mathbb{C}}$

Sea $A = \mathbb{C}^\times$. Para un grupo finito G, denotaremos por $R_{\mathbb{C}}(G)$ el anillo de caracteres de los $\mathbb{C}[G]$-módulos. Se puede definir el mapeo linealización

$$\begin{aligned} lin_G : B^{\mathbb{C}^\times}(G) &\longrightarrow R_{\mathbb{C}}(G) \\ [H,\phi]_G &\longmapsto Ind_H^G(\phi). \end{aligned}$$

Por el teorema de inducción de Brauer, este morfismo es sobreyectivo. Del Teorema 1,1 de [7] y el Corolario 2.5 de [3]

$$lin_{G\times H}([X]) \otimes_{\mathbb{C}H} lin_{H\times K}([Y]) = lin_{G\times K}([X \otimes_{\mathbb{C}H} Y])$$

en $R_{\mathbb{C}}(G\times K)$. En consecuencia, la relación $G \longrightarrow R_{\mathbb{C}}(G)$, define un funtor de biconjuntos $\mathbb{C}^\times$-fibrados, denotado por $R_{\mathbb{C}}$, el cual manda a un elemento básico $\left[\frac{G\times H}{U,\phi}\right]$ de $B^{\mathbb{C}^\times}(G,H)$ al mapeo

$$R_{\mathbb{C}}\left(\left[\frac{G\times H}{U,\phi}\right]\right): R_{\mathbb{C}}(H) \longrightarrow R_{\mathbb{C}}(G)$$
$$[M] \longmapsto [Ind_U^{G\times H}(\mathbb{C}_\phi)\otimes_{\mathbb{C}H} M],$$

donde $\mathbb{C}_\phi$ es el conjunto $\mathbb{C}$ donde U actúa por la derecha a través de ϕ.

4.7.2 El funtor global de representaciones fibradas

Ahora daremos la definición del funtor global de representaciones fibrado, es importante recalcar que el anillo global de representaciones está definido en [16] y se le dio estructura de funtor de biconjuntos en [13]. El funtor que definiremos no corresponde como tal con el funtor global de representaciones visto como el funtor de biconjuntos fibrados, pero está altamente inspirado en él, si se hace una analogía, sería como el funtor de Burnside y el funtor de Burnside fibrado.

4.7.1 Definición. Dados G un grupo y X un G-conjunto, se dice que un $\mathbb{C}G$-módulo V es X-graduado si

$$V=\bigoplus_{x\in X} V_x,$$

donde cada V_x es un $\mathbb{C}$-subespacio vectorial tal que $gV_x = V_{gx}$, para todo $g\in G$ y $x\in X$.

4.7.2 Definición. Se define como $\aleph$ la categoría cuyos objetos son de la forma (X,V), donde X es un G-conjunto A-fibrado y V es un $\mathbb{C}G$-módulo X/A-graduado, aquí, X/A es el conjunto de las A-órbitas de X. Si X y Y son G-conjuntos A-fibrados isomorfos, y V es un $\mathbb{C}G$-módulo X/A-graduado y W es un $\mathbb{C}G$-módulo Y/A-graduado que son isomorfos, entonces (X,V) y (Y,W) representan el mismo objeto en $\aleph$. Si (X,V) y (Y,W) son objetos de $\aleph$ un morfismo de (X,V) a (Y,W) es un par de la forma (f,α) donde $f: X\longrightarrow Y$ es un morfismo de G-conjuntos A-fibrados y $\alpha : V\longmapsto W$ es un morfismo de $\mathbb{C}G$-módulos, además, f y α son compatibles, lo que quiere decir que $\alpha(V_x)\subseteq W_{f(x)}$ para todo $x\in X/A$. La composición en esta categoría está definida como la composición entrada por entrada y la flecha identidad de un elemento (X,V) es $(1_X,1_V)$ donde 1_X es la función identidad de del G-conjuntos A-fibrados X y 1_V es la función identidad el $\mathbb{C}G$-módulo V.

La categoría $\aleph$ tiene un coproducto definido de la siguiente manera

$$(X,V)\oplus(Y,W)=(X\sqcup Y, V\oplus W),$$

donde $\sqcup$ es la unión disjunta de conjuntos y $\oplus$ es la suma directa de módulos. Definimos a $T(G)$ como el grupo de Grothendieck de la categoría $\aleph$. Se define el anillo global de representaciones A-fibradas del grupo G como

$$\eth^A(G)=\frac{T(G)}{\langle [X,V\oplus W]-[X,V]-[X,W]\rangle}$$

donde X es un G-conjunto A-fibrado y V, W son $\mathbb{C}G$-módulos X/A graduados. Al grupo $\eth(G)$ se le puede dar estructura multiplicativa de la siguiente forma

$$[X,V]\cdot[Y,W]:=[X\otimes_A Y, V\otimes_{\mathbb{C}} W].$$

4.7.3 Definición. Sean $(\mathcal{G}, \mathcal{S})$ como anteriormente los definimos tales que cumple del axioma (i) al (iii). Definimos el funtor de representaciones globales A-fibradas, el cual lo denotaremos por ∂^A, de la siguiente manera: Dado un grupo $G \in \mathcal{G}$ lo mandamos al anillo global de representaciones A-fibradas $\partial^A(G)$ y dados G, H elementos de $\mathcal{G}$, U un (G, H)-biconjunto A-fibrado elemento de $Hom_{\mathcal{D}}(H, G)$, definimos el mapeo

$$\begin{aligned} \partial^A(U) : \partial^A(H) &\longrightarrow \partial^A(G) \\ [X, V] &\longmapsto [U \otimes_{AH} X, \mathbb{C}U \otimes_{\mathbb{C}AH} V], \end{aligned}$$

donde A actúa de manera trivial en V.

El funtor anterior está bien definido, ya que el producto tensorial de biconjuntos A-fibrados respeta las clases de isomorfismo de los biconjuntos A -fibrados y la suma directa también respeta las clases de isomorfismo de los módulos. Si $V = \oplus_{x \in X/A} V_x$ se tiene que

$$\mathbb{C}U \otimes_{\mathbb{C}AH} V \cong \bigoplus_{u \otimes x \in U \otimes_{AH} X} u \otimes V_x.$$

donde $u \otimes V_x := \{u \otimes v_x \mid v_x \in V_x\}$, el cual es un subespacio vectorial sobre $\mathbb{C}$.
Ahora calcularemos la construcción $-_+$ de $R_{\mathbb{C}}$. Primero tenemos que encontrar la secciones de $R_{\mathbb{C}}$ sobre $\mathbb{C}^\times$ que sean $(\mathbb{C}^\times, G)$-invariantes.
Sea X un G-conjunto A-fibrado tal que G_x es un elemento de $\mathcal{G}$ para todo $x \in X$, Entonces una sección de $R_{\mathbb{C}}$ sobre X es una función

$$s : X \longrightarrow \bigoplus_{x \in [X/A]} R_{\mathbb{C}}(G_x)$$

tal que $s(x) \in R_{\mathbb{C}}(G_x)$ para todo $x \in X$.
Los elementos básicos de $R_{\mathbb{C},+}^{\mathbb{C}^\times}(G)$ son de la forma $[X, s]_G$, donde X es un G-conjunto $\mathbb{C}^\times$-fibrado transitivo, tales que G_x es un elemento de $\mathcal{G}$ y s es una sección $R_{\mathbb{C}}^{\mathbb{C}^\times}$ sobre X tal que es $\mathbb{C}^\times \times G$-invariante, es decir, ${}^g s(ax) = s(x)$ para todo $(a, g) \in \mathbb{C}^\times \times G$. Definamos el $\mathbb{C}G$-módulo

$$V_s = Ind_{G_x}^G s(x) = \bigoplus_{g \in [G/G_x]} g \otimes s(x).$$

A la pareja $[X, s]_G$ le podemos asociar a la pareja $[X, V_s]$ en $\partial^A(G)$.

4.7.4 Proposición. *La construcción $-_+$ del funtor de biconjuntos fibrado $R_{\mathbb{C}}^{\mathbb{C}^\times}$, el cual denotada como $R_{\mathbb{C},+}^{\mathbb{C}^\times}$, es el funtor del anillo de representaciones global $\mathbb{C}^\times$-fibrado $\partial^{\mathbb{C}^\times}$.*

Demostración. Dado un (G, H)-biconjunto $\mathbb{C}^\times$-fibrado U tal que todas sus parejas estabilizadoras son elementos de $\mathcal{S}(G, H)$, se define el morfismo

$$\begin{aligned} R_{\mathbb{C},+}([U]) : R_{\mathbb{C},+}(H) &\longrightarrow R_{\mathbb{C},+}(G) \\ [X, s]_H &\longrightarrow [U \otimes_{\mathbb{C}^\times H} X, U(s)]_G \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} U(s)(u \otimes x) &= R_{\mathbb{C}} \left(\frac{G_{u \otimes x} \times H_x}{(G \times H_x)_u, \phi_u} \right) (s(x)) \\ &= [Ind_{(G \times H_x)_u}^{G_{u \otimes x} \times H_x} (\mathbb{C}_{\phi_u}) \otimes_{\mathbb{C}^\times H_x} s(x)], \end{aligned}$$

con

$$Ind_{(G\times H_x)_u}^{G_{u\otimes x}\times H_x}(\mathbb{C}_{\phi_u}) = \mathbb{C}\left[\frac{G_{u\otimes x}\times H_x}{(G\times H_x)_u, \phi_u}\right],$$

entonces

$$\begin{aligned}
V_{U(s)} &= \bigoplus_{u\otimes x\in[U\otimes_{\mathbb{C}^\times H} X/\mathbb{C}^\times]} \mathbb{C}\left[\frac{G_{u\otimes x}\times H_x}{(G\times H_x)_u, \phi_u}\right] \otimes_{H_x} s(x) \\
&= \bigoplus_{u\otimes x\in[U\otimes_{\mathbb{C}^\times H} X/\mathbb{C}^\times]} u\otimes_{H_x} s(x) \\
&= \bigoplus_{u\otimes x\in[(U/\mathbb{C}^\times)\otimes_H (X/\mathbb{C}^\times)]} u\otimes_{H_x} s(x).
\end{aligned}$$

Por otro lado, se tiene

$$\mathbb{C}U\otimes_{\mathbb{C}^\times H} V_s = \mathbb{C}U\otimes_{\mathbb{C}^\times H} \bigoplus_{x\in[X/A]} s(x),$$

por la Definición 3.1 de [13], se tiene

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}U\otimes_{\mathbb{C}^\times H} V_s &= \bigoplus_{u\otimes x\in[U\otimes_{\mathbb{C}^\times H}(X/\mathbb{C}^\times)]} u\otimes s(x) \\
&= \bigoplus_{u\otimes x\in[(U/\mathbb{C}^\times)\otimes_H (X/\mathbb{C}^\times)]} u\otimes s(x)
\end{aligned}$$

Ahora definamos el mapeo

$$\begin{aligned}
R_{\mathbb{C},+}^{\mathbb{C}^\times}(G) &\longrightarrow \eth^{\mathbb{C}^\times}(G) \\
[X,s]_G &\longmapsto [X,V_s]_G.
\end{aligned}$$

Por las observaciones anteriores, este mapeo se puede extender a una transformación natural y por la definición de los funtores $R_{\mathbb{C},+}^{\mathbb{C}^\times}$ y $\eth^{\mathbb{C}^\times}$ este mapeo es inyectiva y sobreyectiva en cada una de las evaluaciones. Por lo tanto, el funtor $R_{\mathbb{C},+}^{\mathbb{C}^\times}$ es isomorfo a $\eth^{\mathbb{C}^\times}$.

∎

4.8 Adjunciones

En esta sección demostraremos que el funtor $-_+$ tiene un adjunto. Primero lugar, fijaremos un anillo conmutativo con unidad R y una pareja $(\mathcal{G},\mathcal{S})$ como se definió previamente, que además satisface del axioma (i) al (iv) en 4.2. Definiremos a $\mathcal{D} = \mathcal{C}^A(\mathcal{G},\mathcal{S})$.

4.8.1 Definición. Para G, H en $\mathcal{G}$, definimos:

$$\mathcal{S}_-(G,H) = \{(D,\phi)\in\mathcal{S}(G,H) \mid p_1(D) = G\}.$$

4.8.2 Notación. Sea G un grupo finito y sea H un subgrupo de G. Si $\phi : H \longrightarrow A$ es un homomorfismo de grupos, definimos

$$Res^G_{H,\phi} := \left[\frac{H \times G}{\Delta(H), \phi}\right] \qquad \text{y} \qquad Ind^G_{H,\phi} := \left[\frac{G \times H}{\Delta(H), \phi}\right].$$

Si $\alpha : G \longrightarrow A$ es un morfismo de grupos, definimos a

$$tw_\alpha := \left[\frac{G \times G}{\Delta(G), \alpha}\right], \tag{4.8.3}$$

donde $\alpha : \Delta(G) \longrightarrow A$ definida por, $\alpha((g, g)) = \alpha(g)$.

4.8.4 Lema. *Con las hipótesis anteriores sobre $(\mathcal{G}, \mathcal{S})$ tenemos que la pareja $(\mathcal{G}, \mathcal{S}_-)$ satisface del axioma (i) al (iv) de 4.2. Además, $(\mathcal{D}_-)_+ = \mathcal{D}_+$.*

Demostración. Utilizando la definición de $\mathcal{S}_-$, y los primeros 3 axiomas de $(\mathcal{G}, \mathcal{S})$ y la fórmula de Mackey. Se puede demostrar que $(\mathcal{G}, \mathcal{S}_-)$ satisface los primeros 3 axiomas de 4.2.
Axioma (iv): Dados G y H elementos de $\mathcal{G}$, para todo $(D, \phi) \in \mathcal{S}_-(G, H)$, esto significa que $(D, \phi) \in \mathcal{S}(G, H)$ y $p_1(D) = G$. Además, por el axioma (iv) de $(\mathcal{G}, \mathcal{S})$, se cumple que para todo $K \in \sum_{\mathcal{G}}(H)$, $D * K \in \mathcal{G}$ y $(D * \Delta(K), \phi * 1) \in \mathcal{S}(D * K, K)$, donde $p_1(D * \Delta(K)) = D * K$. En consecuencia, $(D * \Delta(K), \phi * 1) \in \mathcal{S}_-(D * K, K)$. Podemos crear una nueva categoría $\mathcal{D}_- := \mathcal{C}^A(\mathcal{G}, \mathcal{S}_-)$.
Por la definición de $\mathcal{S}_-$, se tiene que $(\mathcal{D}_-)_+ \subseteq \mathcal{D}_+$. Por otro lado, sea $(D, \phi) \in \mathcal{S}_+(G, H)$, entonces $p_1(D) \in \mathcal{G}$ y $(D, \phi) \in \mathcal{S}(p_1(D), H)$, es decir, $(D, \phi) \in \mathcal{S}_-(p_1(D), H)$, por lo tanto, $(D, \phi) \in (\mathcal{S}_-)_+(G, H)$. Entonces $(\mathcal{D}_-)_+ = \mathcal{D}_+$. ■

Podemos hacer notar que $\mathcal{D}_- := \mathcal{C}^A(\mathcal{S}_-, \mathcal{G}) \subseteq \mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}_+$. Dado un funtor $F \in \mathcal{F}^A_{\mathcal{D}_-,R}$ y un grupo $G \in \mathcal{G}$, definamos el mapeo

$$\begin{aligned} \eta_{F,G} : F(G) &\longrightarrow Res^{\mathcal{D}_+}_{\mathcal{D}_-}(F_+(G)) \\ a &\longmapsto [G, 1, a]_G, \end{aligned}$$

denotaremos a $\eta_F := (\eta_{F,G})_{G \in \mathcal{G}}$.

4.8.5 Lema. *Supongamos que $(\mathcal{G}, \mathcal{S})$ satisface las hipótesis anteriores y el axioma (vi) de 4.2. Se tiene que el funtor $-_+ : \mathcal{F}^A_{\mathcal{D}_-,R} \longrightarrow \mathcal{F}^A_{\mathcal{D}_+,R}$ es el adjunto izquierdo del funtor restricción $Res^{\mathcal{D}_+}_{\mathcal{D}_-} : \mathcal{F}^A_{\mathcal{D}_+,R} \longrightarrow \mathcal{F}^A_{\mathcal{D}_-,R}$.*

Demostración. Sean $F \in \mathcal{F}^A_{\mathcal{D}_-,R}$ y $M \in \mathcal{F}^A_{\mathcal{D}_+,R}$. Demostraremos que la aplicación

$$\begin{aligned} Hom_{\mathcal{D}_+}(F_+, M) &\longrightarrow Hom_{\mathcal{D}_-}(F, Res^{\mathcal{D}_+}_{\mathcal{D}_-}(M)) \\ \varphi &\longmapsto \varphi \circ \eta_F \end{aligned}$$

es un isomorfismo. Primero demostraremos que la aplicación está bien definida, es decir, que $\varphi \circ \eta_F$ es una transformación natural de F a $Res^{\mathcal{D}_+}_{\mathcal{D}_-} M$. Sean G, H grupos finitos en $\mathcal{G}$ y $(D, \phi) \in S_-(G, H)$, tenemos que demostrar que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} F(H) \arrow[r, "\varphi_H \circ \eta_{F,H}"] \arrow[d, "F(X)"'] & M(H) \arrow[d, "Res^{\mathcal{D}_+}_{\mathcal{D}_-} M(X)"] \\ F(G) \arrow[r, "\varphi_G \circ \eta_{F,G}"'] & M(G). \end{tikzcd}$$

Para $a \in F(H)$ y $X = \dfrac{G \times H}{D, \phi}$ un morfismo en $\mathcal{D}_-$, se tiene $D * H = G$, además por la definición de η_F se necesita que $\phi{*}1$ esté bien definida, tenemos $\phi{*}1(g) = \phi(g,h)1(h) = \phi(g,h)$ para todo $h \in H$ tal que $(g,h) \in D$, entonces ϕ sólo depende de la primera coordenada de los elementos de D. Por el camino superior del diagrama anterior, se tiene

$$\begin{aligned}
M(X)\varphi_H(\eta_{F,H}(a)) &= M(X)\varphi_H([H,1,a]_H) \\
&= M(tw_{\phi_1})M\left(\left[\frac{G \times H}{D,1}\right]\right)(\varphi_H([H,1,a]_H)) \\
&= M(tw_{\phi_1})\left[\varphi_G(F_+\left(\left[\frac{G \times H}{D,1}\right]\right)([H,1,a]_H))\right] \\
&= M(tw_{\phi_1})([G,1,F\left(\left[\frac{G \times H}{D,1}\right]\right)(a)]_G).
\end{aligned}$$

Por el otro lado

$$\begin{aligned}
\varphi_G \circ \eta_{F,G}(F(X)(a)) &= [G,\phi,F(X)(a)]_G \\
&= \varphi_G\left(F_+(tw_{\phi_1})([G,1,F\left(\left[\frac{G \times H}{D,1}\right]\right)(a)]_G\right) \\
&= M(tw_{\phi_1})(\varphi_G([G,1,F\left(\left[\frac{G \times H}{D,1}\right]\right)(a)]_G).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\varphi \circ \eta_F$ es una transformación natural.
Ahora demostraremos que la aplicación es inyectiva. Sean φ, $\varphi' \in Hom_{\mathcal{D}_+}(F_+, M)$ tales que $\varphi \circ \eta_F = \varphi' \circ \eta_F$. Dado un grupo finito $G \in \mathcal{G}$, y un elemento básico de $[H,\psi,a]_G$ de $F_+(G)$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\varphi_G([H,\psi,a]_G) &= \varphi(Ind^G_{H,\psi}[H,1,a]_H) \\
&= \varphi_G(Ind^G_{H,\psi} \circ \eta_{F,H}(a)) \\
&= M(Ind^G_{H,\psi})\,(\varphi_H(\eta_{F,H}(a))) \\
&= M(Ind^G_{H,\psi})\,(\varphi'_H(\eta_{F,H}(a))) \\
&= \varphi'_G([H,\psi,a]_G).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\varphi = \varphi'$, es decir, el morfismo anterior es inyectivo.
Ahora demostraremos que el morfismo es sobreyectivo. Dado un $\psi \in Hom_{\mathcal{D}_-}(F, Res^{\mathcal{D}_+}_{\mathcal{D}_-}(M))$. Para todo $G \in \mathcal{G}$ consideremos la función

$$\begin{aligned}
\varphi_G : F_+(G) &\longrightarrow M(G) \\
[X,s]_G &\longmapsto \sum_{x \in [G \backslash X/A]} M(Ind^G_{G_x,\phi_x})\,(\psi_{G_x}\,(s(x)))\,.
\end{aligned}$$

Lo primero que haremos notar es que esta definición no depende del conjunto de representantes $[G\backslash X/A]$, ya que si tomas otro representante de la (G,A)-órbita de x, su estabilizador es un G-conjugado de G_x, y por el hecho de que s es una sección (G,A)-invariante, se tendría los mismos sumandos. Además, podemos hacer notar que para los elementos $[X,s]_G$. $[Y,t]_G$, $[W,r+s]_G$ de $\Gamma_F(G)$, se tiene

$$\varphi_G([X \sqcup, Y, s+t]_G) = \sum_{z \in [G \backslash X \sqcup Y/A]} M(Ind^G_{G_z,\phi_z})\,(\psi_{G_z}\,((s+t)\,(z)))$$

es igual a

$$\sum_{z\in[G\backslash X/A]} M(Ind^G_{G_x,\phi_z})(\psi_{G_z}(s(z))) + \sum_{z\in[G\backslash Y/A]} M(Ind^G_{G_z,\phi_z})(\psi_{G_z}(t(z))).$$

Por lo tanto, $\varphi_G([X\sqcup, Y, s+t] = \varphi_G([X,s]_G)+\varphi_G([Y,t]_G)$, ya que $M(Ind^G_{H,\phi})$ es una función R-lineal, se tiene que

$$\begin{aligned}\varphi_G([W, r+s]_G) &= \sum_{w\in[G\backslash W/A]} M(Ind^G_{G_w,\phi_w})\,(\psi_{G_w}((r+s)(w)))\\ &= \sum_{w\in[G\backslash W/A]} M(Ind^G_{G_w,\phi_w})(\psi_{G_w}(s(w))) + M(Ind^G_{G_w,\phi_w})(\psi_{G_w}(s(w)))\\ &= \varphi_G([W,r]_G)+\varphi_G([W,s]_G),\end{aligned}$$

en consecuencia la función φ_G está bien definido en $F_+(G)$.
Ahora notemos que para todo $G\in\mathcal{G}$ y para todo $a\in F(G)$.

$$\begin{aligned}\varphi_G(\eta_{F,G}(a)) &= \varphi_G([G,1,a]_G)\\ &= \varphi_G(Ind^G_{G,1})(\psi(a))\\ &= \psi(a).\end{aligned}$$

Por último demostraremos que el morfismo $\varphi := (\varphi_G)_{G\in\mathcal{G}}$ es un elemento de $Hom_{\mathcal{D}_+}(F_+, M)$. Dados G, H grupos finitos y sea $X := \left[\dfrac{G\times H}{D,\phi}\right]$ un elemento de $Hom_{\mathcal{D}_-}(H,G)$, tenemos que demostrar que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} F_+(H) \arrow[r, "\varphi_H"] \arrow[d, "F_+(X)"'] & M(H) \arrow[d, "M(X)"] \\ F_+(G) \arrow[r, "\varphi_G"'] & M(G) \end{tikzcd}$$

Dado un elemento $[K,f,a]_H\in F_+(H)$, por un lado, tenemos que

$$\varphi_H(F_+(X)([K,f,a]_H)) = \sum_{h\in[p_2(D)\backslash H/K]} \varphi_G([D*{}^hK, \phi*{}^hf, b_h]_G),$$

donde (ver la ecuación 4.3.11)

$$b_h = F\left(\left[\frac{D*{}^hK\times{}^hK}{D*\Delta({}^hK),\phi}\right]\right)({}^ha).$$

Por lo tanto,

$$\varphi_H(F_+(X)([K,f,a]_H)) = \sum_{h\in[p_2(D)\backslash H/K]} M(Ind^G_{D*{}^hK,\phi*{}^hf})(\psi_{D*{}^hK}(b_h)),$$

usando el hecho de que ψ es una transformación natural, tenemos que

$$\begin{aligned}\varphi_H(F_+(X)([K,f,a]_H)) &= \sum_{h\in[p_2(D)\backslash H/K]} M\left(Ind^G_{D*{}^hK,\phi*{}^hf}\otimes\left[\frac{D*{}^hK\times{}^hK}{D*\Delta({}^hK),\phi}\right]\right)(\psi_{{}^hK}({}^ha))\\ &= \sum_{h\in[p_2(D)\backslash H/K]} M(\left(\left[\frac{G\times{}^hK}{D*\Delta({}^hK),\phi*{}^hf}\right]\right)(\psi_{{}^hK}({}^ha)).\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} M(X)(\varphi_H([K,f,a]_H)) &= M(X)\left(M(Ind^G_{K,f})(\psi_K(a))\right) \\ &= \sum_{h\in[p_2(D)\backslash H/K]} M\left(\left[\frac{G\times {}^hK}{D*\Delta({}^hK),\phi * {}^hf}\right]\right)({}^h\psi_K(a)), \end{aligned}$$

ya que ψ es una transformación natural se tiene qué ${}^h\psi_K(a) = \psi_K({}^ha)$. Por lo tanto, φ es una transformación natural, de donde se concluye que

$$Hom_{\mathcal{D}_+}(F_+, M) \cong Hom_{\mathcal{D}_-}(F, Res^{\mathcal{D}_+}_{\mathcal{D}_-}(M).$$

■

Preguntas abiertas

Una duda que surge de manera natural es: ¿El funtor $-^+$ tiene un funtor adjunto?
En el caso de biconjuntos, fue demostrado por Boltje, Raggi y Valero en [4], que el funtor $-^+$ sí tiene un funtor adjunto.

Bibliografía

[1] Laurence Barker. Fibred permutation sets and the idempotents and units of monomial Burnside rings. *Journal of Algebra*, 281(2):535–566, 2004. 25

[2] Robert Boltje. A general theory of canonical induction formulae. *Journal of Algebra*, 206(1):293–343, 1998. 61

[3] Robert Boltje and Olcay Coşkun. Fibered biset functors. *Advances in Mathematics*, 339:540–598, 2018. 3, 36, 69

[4] Robert Boltje, Gerardo Raggi-Cárdenas, and Luis Valero-Elizondo. The $-_+$ and $-^+$ constructions for biset functors. *Journal of Algebra*, 523:241–273, 2019. ii, 3, 33, 37, 76

[5] Serge Bouc. *Green functors and G-sets*. 1997. 2

[6] Serge Bouc. The functor of units of burnside rings for p-groups. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 82(3):583–615, 2007. 53

[7] Serge Bouc. *Biset functors for finite groups*. Springer, 2010. ii, 2, 3, 6, 8, 9, 13, 16, 17, 21, 24, 25, 30, 31, 69

[8] Serge Bouc. The slice Burnside ring and the section Burnside ring of a finite group. *Compositio Mathematica*, 148(3):868–906, 2012. 11, 13, 27, 28

[9] Serge Bouc. Relative B-groups. *Documenta Mathematica*, 24:2431–2462, 2019. 29, 30, 31

[10] Serge Bouc and Nadia Romero. The center of a Green biset functor. *Pacific Journal of Mathematics*, 303(2):459–490, 2020. 7

[11] Serge Bouc and Jacques Thévenaz. A sectional characterization of the Dade group. 2008. 56

[12] Nicolas Bourbaki. *Theory of sets*. Springer, 2004. 22

[13] Karley Tatiana Cardona Echenique et al. El funtor global de representaciones como funtor de biconjuntos de Green. 2016. 70, 72

[14] Olcay Coşkun and Deniz Yılmaz. Fibered p-biset functor structure of the fibered Burnside rings. *Algebras and Representation Theory*, 22(1):21–41, 2019. 25, 26, 27

[15] Andreas Dress. The ring of monomial representations I. Structure theory. *Journal of Algebra*, 18:137–157, 1971. 11, 34

[16] Alberto G Raggi-Cárdenas and Luis Valero-Elizondo. Global representation rings. *Journal of Algebra*, 441:426–440, 2015. 70

[17] Nadia Romero. *Funtores de Mackey.* Tesis de doctorado, UNAM, 2011. 7

[18] Nadia Romero. Simple modules over Green biset functors. *Journal of Algebra*, 367:203–221, 2012. 8, 13, 22

[19] Nadia Romero. On fibred biset functors with fibres of order prime and four. *Journal of Algebra*, 387:185–194, 2013. 11

[20] Gian-Carlo Rota. On the foundations of combinatorial theory I. Theory of Möbius functions. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete*, 2(4):340–368, 1964. 61

[21] Jacques Thévenaz. G-algebras and modular representation theory. Technical report, Clarendon Press, 1995. 2

[22] Ibrahima Tounkara. The ideals of the slice Burnside p-biset functor. *Journal of Algebra*, 495:81–113, 2018. 11, 27, 28