

Universidad Michoacana de San
Nicolás de Hidalgo

Instituto de Física y Matemáticas

Condiciones de frontera absorbentes
para las ecuaciones de Maxwell en un
fondo curvo

Tesis que para obtener el título de:

MAESTRO EN FÍSICA

presenta:

ESTEFANÍA RUIZ VARGAS

Asesor de tesis:

Dr. Olivier Sarbach

Morelia, Mich., Septiembre 2008

Índice general

1. Introducción	3
2. Descomposición multipolar	5
2.1. Ecuaciones radiales	5
2.2. Soluciones exactas para el fondo plano	12
2.3. Correcciones a las soluciones exactas debido a la curvatura . .	15
2.4. Condición de frontera para Φ y γ	20
2.5. Condiciones de frontera para $F_{\mu\nu}$	25
2.6. Resumen	31
3. El problema de valores iniciales y de contorno	33
3.1. Teoría de Semigrupos	33
3.2. Demostración para el problema en una dimension	41
3.2.1. Condición de Sommerfeld	41
3.2.2. Condiciones de frontera absorbentes	51
3.3. Demostración para la ecuación de onda en tres dimensiones .	62
4. Conclusiones	73

Capítulo 1

Introducción

A menudo uno desea resolver ecuaciones en un dominio infinito, como por ejemplo problemas de astrofísica, sismología, aerodinámica, y en especial el problema que estamos considerando en esta tesis. Para resolverlos numéricamente es necesario considerar en un dominio finito, para esto introduciremos una frontera artificial e imponemos condiciones para simular un dominio infinito, en especial pediremos que la reflexión sea cero o decaiga muy rápidamente cuando r se hace muy grande, estas condiciones serán las condiciones absorbentes las cuales ya han sido analizadas anteriormente en varios artículos [7, 4, 1, 3, 2, 5] para el caso de las ecuaciones de Einstein, y pueden tener aplicaciones en dinámica de fluidos, acústica, etc. El caso de las condiciones de frontera absorbentes para las ecuaciones de Maxwell en un fondo curvo aún no ha sido analizado, y ese será el tema de esta tesis

así que en esta tesis analizamos las ecuaciones de Maxwell en un fondo curvo, para hacer una simplificación del problema tomamos el caso de una métrica esféricamente simétrica arbitraria. Entonces consideramos una frontera artificial esféricamente simétrica y tomamos una fuente de soporte compacto, por ejemplo podemos considerar el caso de una fuente localizada como sería una antena a lo largo de la cual se tiene una corriente. Primero construimos soluciones exactas para el fondo plano y después obtenemos las correcciones a dichas soluciones inducidas por la curvatura.

Para obtener un único problema de Cauchy es necesario imponer condiciones de frontera, las cuales deberán de formar un problema de valores iniciales bien planteado, dichas condiciones de frontera serán las condiciones absorbentes

de las que hablamos anteriormente.

La tesis esta compuesta de la siguiente manera:

En el primer capítulo tomamos las ecuaciones de Maxwell en un fondo curvo esféricamente simétrico y hacemos una decomposición en armónicos esféricos de forma que vamos a reducir nuestro problema a una serie de problemas radiales los cuales tendrán la forma de ecuaciones de onda, después encontraremos la solución exacta para estos problemas radiales en el caso plano, así como las correcciones inducidas por la curvatura, finalmente introducimos las condiciones de frontera absorbentes para los problemas radiales y vemos en efecto si el coeficiente de reflexión es cero o muy pequeño.

En el segundo capítulo analizaremos si el problema de Cauchy dado por la ecuación de onda y las condiciones de frontera que impusimos esta bien planteado, para esto introduciremos algunas definiciones y teoremas de la teoría de semigrupos los cuales usaremos para demostrar el resultado en una dimension, y después generalizar este resultado al problema en tres dimensiones.

Capítulo 2

Descomposición multipolar

En este capítulo vamos a analizar las ecuaciones de Maxwell en el caso de una métrica esféricamente simétrica arbitraria haciendo una descomposición en armónicos esféricos, con lo que reduciremos el problema a ecuaciones que toman de una ecuación de onda, para la cual encontraremos soluciones exactas en un fondo plano así como las correcciones al introducir curvatura. Por ultimo analizaremos condiciones de frontera absorbentes para los coeficientes dados por la descomposición en armónicos esféricos y terminaremos por escribir estas condiciones de frontera en términos del tensor electromagnético $F_{\mu\nu}$.

2.1. Ecuaciones radiales

Tenemos las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla^\mu F_{\mu\nu} = -J_\nu, \quad (2.1)$$

$$\nabla_{[\sigma} F_{\mu\nu]} = 0, \quad (2.2)$$

donde $F_{\mu\nu}$ es el tensor electromagnético:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

J_ν es el cuadvivector de corriente y ∇_σ denota la derivada covariante dada por:

$$\begin{aligned} \nabla_\sigma T_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} &= \frac{\partial T_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r}}{\partial x^\sigma} + \Gamma_{\sigma \varrho}^{\alpha_1} T_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\varrho \alpha_2 \dots \alpha_r} + \dots + \Gamma_{\sigma \varrho}^{\alpha_s} T_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_{r-1} \varrho} \\ &- \Gamma_{\sigma \beta_1}^\lambda T_{\lambda \beta_2 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} - \dots - \Gamma_{\sigma \beta_s}^\lambda T_{\beta_1 \dots \beta_{s-1} \lambda}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} \end{aligned}$$

para un tensor T arbitrario del tipo (r, s) y donde Γ son los símbolos de Christoffel con respecto a la métrica g .

Queremos escribir las ecuaciones de Maxwell para una métrica esféricamente simétrica arbitraria :

$$ds^2 = \tilde{g}_{ab} dx^a dx^b + r^2 \hat{g}_{AB} dx^A dx^B$$

donde

$$\begin{aligned} \hat{g}_{AB} dx^A dx^B &= d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\varphi^2 \quad y \\ \tilde{g}_{ab} dx^a dx^b &= \tilde{g}_{tt} dt^2 + 2\tilde{g}_{t\rho} dt d\rho + \tilde{g}_{\rho\rho} d\rho^2 \end{aligned}$$

es una métrica pseudo-Riemanniana de signatura cero y $r = r(t, \rho)$ es una función positiva, representando el radio geométrico.

Es conveniente introducir el cuadvivector potencial $\mathbf{A} = (\phi, \vec{A})$, ya que de esta forma las ecuaciones homogéneas (2.2) se satisfacen trivialmente puesto que

$$\nabla_{[\sigma} F_{\mu\nu]} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_{[\sigma} F_{\mu\nu]} = 0$$

ya que todos los símbolos de Christoffel se cancelan, así que usando $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ nos queda

$$\begin{aligned} \partial_\sigma F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\sigma} + \partial_\nu F_{\sigma\mu} &= \partial_\sigma (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) + \partial_\mu (\partial_\nu A_\sigma - \partial_\sigma A_\nu) \\ &+ \partial_\nu (\partial_\sigma A_\mu - \partial_\mu A_\sigma) = 0 \end{aligned}$$

pues $\partial_\kappa \partial_\rho A_\delta = \partial_\rho \partial_\kappa A_\delta$. Así que basta trabajar ahora solo con la ecuación (2.1).

Como estamos considerando el caso de una métrica esféricamente simétrica es conveniente introducir los armónicos esféricos

$$Y_\ell^m(\theta, \varphi) = N e^{im\varphi} P_\ell^m(\cos \theta),$$

Donde Y_ℓ^m son los armónicos esféricos de grado ℓ y orden m , P_ℓ^m son los polinomios asociados de Legendre, los cuales podemos expresar usando la fórmula de Rodrigues $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]$, N es una constante de normalización y θ y φ representan las variables angulares.

Usando el hecho que funciones armónicas esféricas forman una base ortonormal de $L^2(S^2)$, y que $\widehat{\nabla}_B Y$ y $S_B := \widehat{\varepsilon}_B^C \widehat{\nabla}_C Y$ forman una base ortogonal de funciones vectoriales sobre S^2 , hacemos una descomposición en armónicos esféricos para el cuadvectores potencial como:

$$\begin{aligned} A_a &= \frac{1}{r} \alpha_a(t, r) Y(\theta, \varphi) \\ A_B &= \beta(t, r) \widehat{\nabla}_B Y(\theta, \varphi) + \gamma(t, r) S_B(\theta, \varphi) \\ J_a &= \frac{1}{r} j_a(t, r) Y(\theta, \varphi) \\ J_A &= \mu \widehat{\nabla}_A Y + \nu \widehat{\varepsilon}_A^B \widehat{\nabla}_B Y \end{aligned} \quad (2.3)$$

donde las letras minúsculas a indican las componentes radiales y las mayúsculas A las angulares, el tensor $\widehat{\varepsilon}_{AB}$ esta dado por $\widehat{\varepsilon}_{AB} = \sqrt{|\widehat{g}|} \varepsilon_{AB}$ con $\varepsilon_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, y por ultimo $\widehat{\nabla}_A A^B = \partial_A A^B + \widehat{\Gamma}_{AC}^B A^C$.

Buscamos $\nabla_\mu A_\nu = \partial_\mu A_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma A_\sigma$, pero conocemos los símbolos de Christoffel para una métrica esféricamente simétrica:

$$\begin{aligned} \Gamma_{ab}^d &= \widetilde{\Gamma}_{ab}^d \\ \Gamma_{aB}^d &= \Gamma_{ab}^D = 0 \\ \Gamma_{AB}^d &= -r \widetilde{\nabla}^d r \cdot \widehat{g}_{AB} \\ \Gamma_{aB}^D &= \delta_B^D \frac{\widetilde{\nabla}_a r}{r} \\ \Gamma_{AB}^D &= \widehat{\Gamma}_{AB}^D \end{aligned}$$

así que

$$\begin{aligned} \nabla_a A_b &= \partial_a A_b - \Gamma_{ab}^d A_d - \Gamma_{ab}^D A_D = \widetilde{\nabla}_a A_b \\ \nabla_a A_B &= \partial_a A_B - \Gamma_{aB}^d A_d - \Gamma_{aB}^D A_D = \partial_a A_b - \delta_B^D \frac{\widetilde{\nabla}_a r}{r} A_D \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla_A A_b &= \partial_A A_b - \Gamma_{Ab}^d A_d - \Gamma_{Ab}^D A_D = \partial_A A_B - \delta_A^D \frac{\tilde{\nabla}_b r}{r} A_D \\ \nabla_A A_B &= \partial_A A_B - \Gamma_{AB}^d A_d - \Gamma_{AB}^D A_D = \partial_A A_B + r \tilde{\nabla}^d r \cdot \hat{g}_{AB} A_d - \hat{\Gamma}_{AB}^D A_D \\ &= \hat{\nabla}_A A_B + r \tilde{\nabla}^d r \cdot \hat{g}_{AB} A_d\end{aligned}$$

Si introducimos (2.3) en las expresiones para $\nabla_\mu A_\nu$ nos queda :

$$\begin{aligned}\nabla_a A_b &= \tilde{\nabla}_a \left(\frac{\alpha_b}{r} \right) Y \\ \nabla_a A_B &= r \tilde{\nabla}_a \left(\frac{\beta}{r} \right) \hat{\nabla}_B Y + r \tilde{\nabla}_a \left(\frac{\gamma}{r} \right) S_B \\ \nabla_A A_b &= \frac{1}{r} (\alpha_b - r_b \beta) \hat{\nabla}_A Y - \frac{r_b}{r} \gamma S_A \\ \nabla_A A_B &= \beta \hat{\nabla}_A \hat{\nabla}_B Y + r^d \alpha_d \hat{g}_{AB} Y + \gamma \hat{\nabla}_A S_B\end{aligned}$$

donde definimos $r_b = \tilde{\nabla}_b r$.

Podemos calcular ahora el tensor electromagnético $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$

$$\begin{aligned}F_{ab} &= 2\tilde{\nabla}_{[a} \left(\frac{\alpha_{b]}{r} \right) Y \\ F_{AB} &= 2\gamma \hat{\nabla}_{[A} S_{B]} \\ F_{aB} &= \left[r \tilde{\nabla}_a \left(\frac{\beta}{r} \right) - \frac{1}{r} (\alpha_a - r_a \beta) \right] \hat{\nabla}_B Y + \left[r \tilde{\nabla}_a \left(\frac{\beta}{r} \right) + \frac{r_a}{r} \gamma \right] S_B \\ &= \left[\tilde{\nabla}_a \beta - \frac{\alpha_a}{r} \right] \hat{\nabla}_B Y + \tilde{\nabla}_a \gamma \cdot S_B\end{aligned}$$

Si definimos $\hat{\alpha}_a := \alpha_a - r \tilde{\nabla}_a \beta$, entonces el tensor $F_{\mu\nu}$ se ve como:

$$F_{ab} = 2\tilde{\nabla}_{[a} \left(\frac{\hat{\alpha}_{b]}}{r} \right) Y \quad (2.4)$$

$$F_{AB} = 2\gamma \widehat{\nabla}_{[A} S_{B]} \quad (2.5)$$

$$F_{aB} = \frac{1}{r} \widehat{\alpha}_a \widehat{\nabla}_B Y + \widetilde{\nabla}_a \gamma \cdot S_B \quad (2.6)$$

Reescribimos las ecuaciones de Maxwell (2.1) usando la descomposición (2.3) y $\nabla_\mu F^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} F^{\mu\nu})$.

Veamos primero la componente radial de J :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{r} j^b Y &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} F^{\mu b}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_A (\sqrt{-g} F^{Ab}) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_a (\sqrt{-g} F^{ab}) \\ &= \frac{1}{r^2 \text{sen}\theta \sqrt{-\widetilde{g}}} \left[\partial_A \left\{ r^2 \text{sen}\theta \sqrt{-\widetilde{g}} \left(\frac{1}{r^3} \alpha^b \widehat{\nabla}^A Y - \frac{1}{r^2} \widetilde{\nabla}^b \gamma \cdot S^A \right) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \partial_a \left(2r^2 \text{sen}\theta \sqrt{-\widetilde{g}} \widetilde{\nabla}^{[a} \frac{\widehat{\alpha}^b]}{r} \right) Y \right] \\ &= \frac{\widehat{\alpha}^b}{r^3 \text{sen}\theta} \partial_A (\text{sen}\theta \widehat{\nabla}^A Y) - \frac{\widetilde{\nabla}^b \gamma}{r^2 \text{sen}\theta} \partial_A (\text{sen}\theta S^A) + \frac{2}{r^2} \widetilde{\nabla}_a \left(r^2 \widetilde{\nabla}^{[a} \frac{\widehat{\alpha}^b]}{r} \right) Y \\ &= \frac{1}{r^2} \widetilde{\nabla}_a \left[r^2 \widetilde{\nabla}^a \left(\frac{\widehat{\alpha}^b}{r} \right) - r^2 \widetilde{\nabla}^b \left(\frac{\widehat{\alpha}^a}{r} \right) \right] Y - \frac{l(l+1)}{r^3} \widehat{\alpha}^b Y \end{aligned}$$

donde usamos $\widehat{\nabla}_A \widehat{\nabla}^A Y = -l(l+1)Y$ y $\widehat{\nabla}^A S_A = 0$

Notamos que al introducir el campo escalar $\Phi = r^2 \widetilde{\varepsilon}_{ab} \widetilde{\nabla}^a \left(\frac{\widehat{\alpha}^b}{r} \right)$:

$$\left[r^2 \widetilde{\nabla}^a \left(\frac{\widehat{\alpha}^b}{r} \right) - r^2 \widetilde{\nabla}^b \left(\frac{\widehat{\alpha}^a}{r} \right) \right] = -r^2 \widetilde{\varepsilon}^{ab} \widetilde{\varepsilon}_{cd} \widetilde{\nabla}^c \left(\frac{\widehat{\alpha}^d}{r} \right) = -\widetilde{\varepsilon}^{ab} \Phi$$

donde usamos $\widetilde{\varepsilon}^{ab} \widetilde{\varepsilon}_{cd} = \delta_d^a \delta_c^b - \delta_c^a \delta_d^b$.

Así que la ecuación queda como

$$-\widetilde{\nabla}_a (\widetilde{\varepsilon}^{ab} \Phi) - \frac{l(l+1)}{r} \widehat{\alpha}^b = -r j^b \quad (2.7)$$

Pero sabemos que $\tilde{\varepsilon}_{cb}\tilde{\varepsilon}^{ab} = -\delta_c^a$, aplicando $\tilde{\nabla}^c\tilde{\varepsilon}_{cb}$ a la ecuación (2.7):

$$\tilde{\nabla}^c\tilde{\nabla}_c\Phi + l(l+1)\tilde{\varepsilon}_{cb}\tilde{\nabla}^c\left(\frac{\hat{\alpha}^b}{r}\right) = -\tilde{\nabla}^c(r\tilde{\varepsilon}_{cb}j^b)$$

es decir nos queda la ecuación para Φ :

$$-\tilde{\nabla}^c\tilde{\nabla}_c\Phi + \frac{l(l+1)}{r^2}\Phi = \tilde{\varepsilon}_{cb}\tilde{\nabla}^c(rj^b) \quad (2.8)$$

Veamos ahora la componente angular de J :

$$\begin{aligned} -\mu\hat{\nabla}^BY - \nu S^B &= \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}F^{\mu B}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_A(\sqrt{-g}F^{AB}) + \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_a(\sqrt{-g}F^{aB}) \\ &= \frac{1}{r^2\text{sen}\theta\sqrt{-\tilde{g}}}\left[\partial_A(\text{sen}\theta\sqrt{-\tilde{g}} \cdot 2\gamma\hat{\nabla}^{[A}S^B]) \right. \\ &\quad \left. + \partial_a\left\{r^2\text{sen}\theta\sqrt{-\tilde{g}}\left(-\frac{1}{r^3}\hat{\alpha}^a\hat{\nabla}^BY + \frac{1}{r^2}\tilde{\nabla}^a\gamma \cdot S^B\right)\right\}\right] \\ &= \frac{1}{r^2}\hat{\nabla}_A(2\gamma\hat{\nabla}^{[A}S^B]) + \tilde{\nabla}_a\left(-\frac{1}{r}\alpha^a\hat{\nabla}^BY + \tilde{\nabla}^a\gamma \cdot S^B\right) \end{aligned}$$

usando ahora $2\hat{\nabla}_A\hat{\nabla}^{[A}S^B] = -l(l+1)S^B$ tenemos las siguientes ecuaciones para μ y ν :

$$\mu = \tilde{\nabla}_a\left(\frac{\hat{\alpha}^a}{r}\right) \quad (2.9)$$

$$-\nu = \tilde{\nabla}^a\tilde{\nabla}_a\gamma - \frac{l(l+1)\gamma}{r^2} \quad (2.10)$$

Mientras que la ecuación de Maxwell (2.2) se satisface trivialmente.

Notamos que obtenemos ecuaciones de onda tanto para el sector par como para el impar, para explicar porque este era el resultado esperado analizamos la dualidad de las ecuaciones de Maxwell.

Supongamos ahora las fuentes iguales a cero, es decir:

$$\nabla^\mu F_{\mu\nu} = 0 \quad (2.11)$$

$$\nabla_{[\sigma} F_{\mu\nu]} = 0 \quad (2.12)$$

en este caso las ecuaciones de Maxwell tienen una simetría particular. Definimos el dual del tensor electromagnético como:

$$F_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu}^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \quad (2.13)$$

el cual satisface también las ecuaciones de Maxwell (2.11,2.12). Como consecuencia de (2.13) en la ausencia de fuentes tenemos la dualidad de Dirac ($E \mapsto B$, $B \mapsto -E$).

En nuestro caso teníamos que las componentes del tensor electromagnético están dadas por (2.4,2.5,2.6). Usando la dualidad nos queda para (2.5):

$$\tilde{F}_{AB} = 2\tilde{\gamma}\hat{\nabla}_{[A}S_{B]}$$

donde esperamos que $\tilde{\gamma}$ satisfaga una ecuación de onda así como lo hace γ en la ecuación (2.9).

Por otro lado

$$\tilde{F}_{AB} = \frac{1}{2} \varepsilon_{AB}^{ab} F_{ab} = \frac{r^2}{2} \widehat{\varepsilon}_{AB} \tilde{\varepsilon}^{ab} 2\tilde{\nabla}_{[a} \left(\frac{\hat{\alpha}_{b]}{r} \right) Y$$

pero $\hat{\nabla}_{[A}S_{B]} = \frac{1}{2} \hat{\varepsilon}_{AB} \hat{\varepsilon}^{CD} \hat{\nabla}_C S_D = \frac{l(l+1)}{2} \hat{\varepsilon}_{AB} Y$ Así que:

$$\tilde{F}_{AB} = \frac{2r^2}{l(l+1)} \tilde{\nabla}_{[a} \left(\frac{\hat{\alpha}_{b]}{r} \right) \hat{\nabla}_{[A}S_{B]} = 2\tilde{\gamma}\hat{\nabla}_{[A}S_{B]}$$

por lo tanto

$$\tilde{\gamma} = \frac{r^2 \tilde{\varepsilon}^{ab}}{2l(l+1)} 2\tilde{\nabla}_{[a} \left(\frac{\hat{\alpha}_{b]}{r} \right)$$

Usando el campo escalar que habíamos definido $\Phi = r^2 \tilde{\varepsilon}_{ab} \tilde{\nabla}^a \left(\frac{\hat{\alpha}^b}{r} \right)$ nos queda:

$$\tilde{\gamma} = \frac{\Phi}{l(l+1)}$$

Como Φ satisface una ecuación de onda entonces $\tilde{\gamma}$ también lo hace, así como esperabamos, en la siguiente sección veremos la forma de las soluciones para la ecuación de onda.

2.2. Soluciones exactas para el fondo plano

Tenemos que γ y Φ satisfacen ecuaciones de onda, si estamos en un fondo plano entonces las ecuaciones son de la forma:

$$\left(\partial_t^2 - \partial_r^2 + \frac{l(l+1)}{r^2} \right) \gamma_l = 0 \quad (2.14)$$

así que tendremos una solución para cada l .

Veamos el caso para $l = 0$, corresponde a una ecuación de la forma

$$(\partial_t^2 - \partial_r^2) \gamma_0 = 0$$

cuya solución es una superposición de funciones de $(r+t)$ y $(r-t)$:

$$\gamma_0 = F_{\searrow}(r+t) + F_{\nearrow}(r-t)$$

Buscamos construir las soluciones para l arbitrario a partir de γ_0 , para esto introducimos los operadores:

$$a_l = \partial_r + \frac{l}{r}$$

$$a_l^\dagger = -\partial_r + \frac{l}{r}$$

Lema 1. *Los operadores a_l y a_l^\dagger satisfacen*

$$a_{l+1} a_{l+1}^\dagger = a_l^\dagger a_l = -\partial_r^2 + \frac{l(l+1)}{r^2}$$

Demostración

$$\begin{aligned}
a_l^\dagger a_l &= \left(-\partial_r + \frac{l}{r}\right) \left(\partial_r + \frac{l}{r}\right) = -\partial_r^2 - \partial_r \left(\frac{l}{r} \cdot\right) + \frac{l}{r} \partial_r + \frac{l^2}{r^2} \\
&= -\partial_r^2 - \frac{l}{r} \partial_r + \frac{l}{r^2} + \frac{l}{r} \partial_r + \frac{l^2}{r^2} = -\partial_r^2 + \frac{l(l+1)}{r^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{l+1} a_{l+1}^\dagger &= \left(\partial_r + \frac{l+1}{r}\right) \left(-\partial_r + \frac{l+1}{r}\right) = -\partial_r^2 + \partial_r \left(\frac{l+1}{r} \cdot\right) - \frac{l+1}{r} \partial_r + \frac{(l+1)^2}{r^2} \\
&= -\partial_r^2 - \frac{l+1}{r} \partial_r - \frac{l+1}{r^2} - \frac{l+1}{r} \partial_r + \frac{(l+1)^2}{r^2} = -\partial_r^2 + \frac{l(l+1)}{r^2}
\end{aligned}$$

por lo tanto $a_{l+1} a_{l+1}^\dagger = a_l^\dagger a_l = -\partial_r^2 + \frac{l(l+1)}{r^2}$. \square

Ahora podemos reescribir la ecuación (2.14) en función de los nuevos operadores como:

$$\left(\partial_t^2 + a_l^\dagger a_l\right) \gamma_l = 0$$

aplicando el operador a_{l+1}^\dagger :

$$\left(\partial_t^2 + a_{l+1}^\dagger a_{l+1}\right) a_{l+1}^\dagger \gamma_l = 0$$

así que $a_{l+1}^\dagger \gamma_l = \gamma_{l+1}$ es solución para $l+1$:

$$\gamma_{l+1} = a_{l+1}^\dagger \gamma_l = a_{l+1}^\dagger a_l^\dagger \gamma_{l-1} = a_{l+1}^\dagger a_l^\dagger \dots a_1^\dagger \gamma_0 \quad (2.15)$$

Lema 2. γ_l *satisface:*

$$\gamma_l = (-1)^l r^l \left(\frac{d}{dr} \frac{1}{r}\right)^l \gamma_0 = \sum_{j=0}^l (-1)^j \frac{(2l-j)!}{(l-j)! j!} (2r)^{j-l} \cdot [F_{\setminus}^j(t+r) + F_{\succ}^j(r-t)]$$

Demostración Notemos primero que

$$a_l^\dagger = -\partial_r + \frac{l}{r} = -r^l r^{-l} \partial_r - r^l (-l) r^{-l-1} = -r^l \partial_r (r^{-l})$$

y escribimos $\gamma_0 = F_{\setminus}(t+r) + F_{\nearrow}(r-t)$

Ahora hagamos la demostración de la primera igualdad por inducción sobre l :

$l = 1$:

De (2.15) tenemos que

$$\gamma_1 = a_1^\dagger \gamma_0 = -r \partial_r (r^{-1}) \gamma_0$$

supongamos cierto para l .

$l + 1$:

$$\begin{aligned} \gamma_{l+1} &= a_{l+1}^\dagger \gamma_l = -r^{l+1} \partial_r (r^{-l-1}) (-1)^l r^l (\partial_r r^{-1})^l \gamma_0 \\ &= (-1)^{l+1} r^{l+1} (\partial_r r^{-1}) \cdot (\partial_r r^{-1})^l \gamma_0 \\ &= (-1)^{l+1} r^{l+1} (\partial_r r^{-1})^{l+1} \gamma_0 \end{aligned}$$

y queda demostrado que $\gamma_l = (-1)^l r^l \left(\frac{d}{dr} \frac{1}{r}\right)^l \gamma_0$

Veamos ahora la demostración de la segunda igualdad también por inducción sobre l :

$l = 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^1 (-1)^j \frac{(2-j)!}{(1-j)! j!} (2r)^{j-1} \gamma_0^j &= \frac{1}{r} \gamma_0 - \partial_r \gamma_0 = -\partial_r \gamma_0 + \frac{1}{r} \gamma_0 \\ &= -r (\partial_r r^{-1}) \gamma_0 = \gamma_1 \end{aligned}$$

supongamos cierto para l .

$l + 1$:

$$\begin{aligned} \gamma_{l+1} &= a_{l+1}^\dagger \gamma_l = \left(-\partial_r + \frac{l+1}{r}\right) \sum_{j=0}^l (-1)^j \frac{(2l-j)!}{(l-j)! j!} (2r)^{j-l} \cdot \gamma_0^j \\ &= -\sum_{j=0}^l (-1)^j \frac{(2l-j)!}{(l-j)! j!} \partial_r [(2r)^{j-l} \gamma_0^j] + \sum_{j=0}^l (-1)^j \frac{(2l-j)!}{(l-j)! j!} (l+1) \frac{(2r)^{j-l}}{r} \gamma_0^j \end{aligned}$$

al hacer los cálculos llegamos en efecto a que

$$\gamma_{l+1} = \sum_{j=0}^{l+1} (-1)^j \frac{(2l+2-j)!}{(l+1-j)! j!} (2r)^{j-l-1} \cdot \gamma_0^j$$

y el lema queda demostrado. \square

Tenemos la forma de las soluciones para el caso plano, y en la siguiente sección veremos que pasa en el caso de un espacio-tiempo curvo.

2.3. Correcciones a las soluciones exactas debido a la curvatura

En la sección anterior encontramos soluciones exactas para el caso plano, en esta sección consideraremos la ecuación de onda en la region de campos débiles de un espacio-tiempo asintóticamente plano, en este caso en una primera aproximación podemos asumir que el espacio tiempo esta descrito por el exterior de una métrica de Schwarzschild

$$\tilde{g}_{ab}dx^a dx^b = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dT^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r^2}} \quad (2.16)$$

En coordenadas de Eddington-Finkelstein (t,r) donde $T = t + 4M - 2M \log\left(\frac{1}{2M} - 1\right)$, la métrica se escribe como

$$\tilde{g} = -dt^2 + dr^2 + \frac{2M}{r}(dt - dr)^2$$

usando esta métrica

$$\begin{aligned} -\tilde{\nabla}^a \tilde{\nabla}_a \phi &= -\frac{1}{\sqrt{-\tilde{g}}} \partial_a \left(\sqrt{-\tilde{g}} \cdot \tilde{g}^{ab} \partial_b \phi \right) \\ &= \partial_t^2 \phi - \partial_r^2 \phi + \frac{2M}{r} \left[\partial_t^2 \phi + 2\partial_t \partial_r \phi - \frac{1}{r} \partial_t \phi + \partial_r^2 \phi - \frac{1}{r} \partial_r \phi \right] \end{aligned}$$

Habíamos obtenido que los coeficientes Φ y γ satisfacían ecuaciones de onda de la forma

$$-\tilde{\nabla}^a \tilde{\nabla}_a \phi + \frac{l(l+1)}{r^2} \phi = 0 \quad (2.17)$$

La ecuación (2.17) implica

$$\left[\partial_t^2 - \partial_r^2 + \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \phi = -\frac{2M}{r} \left[(\partial_t + \partial_r)^2 \phi - \frac{1}{r} (\partial_t + \partial_r) \phi \right] \quad (2.18)$$

2.3. CORRECCIONES A LAS SOLUCIONES EXACTAS DEBIDO A LA CURVATURA 16

donde notamos que si consideramos soluciones salientes entonces el lado derecho de la ecuación nos dará una cantidad pequeña pues sabemos que $(\partial_t + \partial_r)\phi(r-t) = 0$. Mientras que si hubiéramos hecho una expansión para la métrica de Schwarzschild dada en (2.16), tendríamos algo de la forma

$$\begin{aligned} -\tilde{\nabla}^a \tilde{\nabla}_a \phi &= \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} \partial_T^2 - \partial_r \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \partial_r \\ &= \partial_T^2 - \partial_r^2 + \frac{2M}{r} \left(\partial_T^2 + \partial_r^2 - \frac{2M}{r^2} \partial_r \right) + O \left[\left(\frac{2M}{r} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

lo cual no nos da necesariamente una cantidad pequeña al considerar soluciones salientes, debido a que nosotros buscamos una solución que sea la suma de las soluciones del caso plano ($M=0$) mas correcciones pequeñas, sera conveniente entonces usar las coordenadas de Eddington-Finkelstein y por lo tanto la ecuación (2.18). Otra razón por la cual preferimos usar estas coordenadas viene de un análisis de convergencia de la solución dada por Bardeen y Press [8].

Supongamos $\frac{M}{r} \ll 1$, es decir la region de campos débiles. Para $M = 0$ la ecuación (2.18) se reduce a la ecuación de onda en un espacio plano para el cual sabíamos que las soluciones salientes son de la forma

$$\gamma_{\gamma l}^0(t, r) = a_l^\dagger a_{l-1}^\dagger \dots a_1^\dagger \gamma_0(r-t)$$

Si $M > 0$ usaremos el Ansatz

$$\gamma_{\gamma l}(t, r) = \gamma_{\gamma l}^0(t, r) + \frac{2M}{R} \gamma_{\gamma l}^1(t, r) + O \left[\left(\frac{2M}{r} \right)^2 \right]$$

donde consideramos $R \approx r$, al introducir el ansatz en (2.18) nos queda

$$\begin{aligned} \frac{2M}{R} \left[\partial_t^2 - \partial_r^2 + \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \gamma_{\gamma l}^1(t, r) &= -\frac{2M}{r} \left[(\partial_t + \partial_r)^2 \gamma_{\gamma l}^0(t, r) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{r} (\partial_t + \partial_r) \gamma_{\gamma l}^0(t, r) \right] \end{aligned}$$

donde despreciamos las correcciones de orden cuadrático $O \left(\frac{2M}{r} \right)^2$.

Lema 3.

$$\left[\partial_t^2 - \partial_r^2 + \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \gamma_{\not\lambda}^1(t, r) = -\frac{R}{r^3} \sum_{j=0}^l (-1)^j \frac{(2l-j)!}{(l-j)!j!} [(l+1-j)^2 - 1] (2r)^{j-l} \gamma_0^{(j)}(r-t) \quad (2.19)$$

Demostración: Del lema (2) sabemos que

$$\gamma_{\not\lambda}^0(t, r) = \sum_{j=0}^l (-1)^j \frac{(2l-j)!}{(l-j)!j!} (2r)^{j-l} \gamma_0^{(j)}(r-t)$$

de (2.19)

$$\begin{aligned} \left[\partial_t^2 - \partial_r^2 + \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \gamma_{\not\lambda}^1(t, r) &= -\frac{R}{r} \left[(\partial_t + \partial_r)^2 \gamma_{\not\lambda}^0(t, r) - \frac{1}{r} (\partial_t + \partial_r) \gamma_{\not\lambda}^0(t, r) \right] \\ &= -\frac{R}{r} \sum_{j=0}^l (-1)^j \frac{(2l-j)!}{(l-j)!j!} \left[(\partial_t + \partial_r)^2 (2r)^{j-l} \gamma_0^{(j)}(r-t) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{r} (\partial_t + \partial_r) (2r)^{j-l} \gamma_0^{(j)}(r-t) \right] \\ &= -\frac{R}{r} \sum_{j=0}^l (-1)^j \frac{(2l-j)!}{(l-j)!j!} \left[\gamma_0^{(j)}(r-t) \partial_r^2 (2r)^{j-l} \right. \\ &\quad \left. w - \frac{1}{r} \gamma_0^{(j)}(r-t) \partial_r (2r)^{j-l} \right] \\ &= -\frac{R}{r^3} \sum_{j=0}^l (-1)^j \frac{(2l-j)!}{(l-j)!j!} [(l+1-j)^2 - 1] (2r)^{j-l} \gamma_0^{(j)}(r-t) \end{aligned}$$

lo que queríamos demostrar. \square

Escribimos la solución a la ecuación (2.19) como la suma de dos términos

$$\gamma_{\not\lambda}^1(t, r) = \gamma_l^{curv}(t, r) + \gamma_l^{backscatter}(t, r)$$

2.3. CORRECCIONES A LAS SOLUCIONES EXACTAS DEBIDO A LA CURVATURA 18

Lema 4. [1] *Las soluciones de la ecuación (2.19) van como*

$$\gamma_{\mathcal{L}}^1(t, r) = \gamma_l^{curv}(t, r) + \gamma_l^{backscatter}(t, r)$$

donde el primer término satisface el principio de Huygens y el segundo término lo viola.

Los términos están dados por

$$\gamma_l^{curv}(t, r) = R \sum_{j=0}^l (-1)^j \frac{(2l-j)!}{(l-j)!j!} (2r)^{j-l} c_j \gamma_0^{(j+1)}(r-t)$$

donde los coeficientes c_j están dados por

$$c_l = c_{l-1} = c_{l-2} = 0, \quad c_{j-1} = c_j - \frac{2(l-j)}{2l-j} \frac{(l-j)^2 - 1}{j(j+1)(2l+1-j)}, \quad j = l-2, l-3, \dots, 1$$

y el segundo término sera

$$\begin{aligned} \gamma_l^{backscatter}(t, r) &= R(1 - \delta_l) \frac{(2l)!}{(l+1)!} \frac{l^2 - 1}{(2r)^{l+1}} \gamma_0(r-t) \\ &\quad + R(1 - \delta_l) \int_{r-t}^{\infty} K_l(t, r, x) \gamma_0(x) dx \end{aligned}$$

$$\text{donde } \delta_l = \begin{cases} 1 & l = 0 \\ 0 & l \geq 1 \end{cases} \quad y$$

$$K_l(t, r, x) = a_l^\dagger a_{l-1}^\dagger \dots a_1^\dagger \frac{1}{(t+r+x)^2} = \frac{1}{(2r)^{2+l}} \sum_{j=0}^l \frac{(2l-j)!}{(l-j)!} (j+1) z^{-2-j} \Big|_{z=\frac{t+r+x}{2r}}$$

es decir las soluciones salientes tendrán la forma:

$$\begin{aligned} \gamma_{\mathcal{L}}^1(t, r) &= \sum_{j=0}^l (-1)^j \frac{(2l-j)!}{(l-j)!j!} (2r)^{j-l} \left[\gamma_0^{(j)}(r-t) + 2M c_j \gamma_0^{(j+1)}(r-t) \right] \\ &\quad + \frac{2M}{R} \gamma_l^{backscatter}(t, r) + O\left(\frac{2M}{R}\right)^2 \end{aligned}$$

Notemos que esta solución no es única puesto que podemos añadir una solución arbitraria homogénea de la ecuación (2.19), al pedir las siguientes condiciones

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \gamma_{\mathcal{L}}^1(cte + r, r) = 0$$

2.3. CORRECCIONES A LAS SOLUCIONES EXACTAS DEBIDO A LA CURVATURA 19

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \gamma_{\nearrow 1}^1(cte - r, r) = 0$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \gamma_{\nearrow 1}^1(t, cte) = 0$$

la solución estará determinada de forma única.

Veamos primero que el caso $l = 0$ se cumple trivialmente pues $\gamma_{\nearrow 0}^1(t, r) = 0$ y nos queda simplemente la solución que teníamos para el caso plano.

Veamos el caso $l = 1$, del lema (4) tenemos que los coeficientes $c_1 = c_0 = 0$, por lo que $\gamma_t^{curv}(t, r) = 0$, entonces

$$\gamma_{\nearrow 1}^1(t, r) = \gamma_1^{backscatter}(t, r) = \frac{R}{r} \int_{r-t}^{\infty} \frac{t + 3r + x}{(t + r + x)^3} \gamma_0(x) dx$$

Queremos ver que se satisface la ecuación (2.19), es decir, que

$$\left[\partial_t^2 - \partial_r^2 + \frac{2}{r^2} \right] \frac{1}{r} \int_{r-t}^{\infty} \frac{t + 3r + x}{(t + r + x)^3} \gamma_0(x) dx = -\frac{3}{r^4} \gamma_0(r - t) \quad (2.20)$$

Para esto vemos primero que

$$\left[\partial_t^2 - \partial_r^2 + \frac{2}{r^2} \right] K_1(t, r, x) = \left[\partial_t^2 - \partial_r^2 + \frac{2}{r^2} \right] \frac{t + 3r + x}{r(t + r + x)^3} = 0$$

Así que

$$\begin{aligned} \left[\partial_t^2 - \partial_r^2 + \frac{2}{r^2} \right] \int_{r-t}^{\infty} K_1(t, r, x) \gamma_0(x) dx &= \int_{r-t}^{\infty} \left[\partial_t^2 - \partial_r^2 + \frac{2}{r^2} \right] K_1(r, t, x) \cdot \gamma_0 dx \\ &+ 2(\partial_t + \partial_r) K_1(t, r, x) \gamma_0|_{x=r-t} \\ &= 2(\partial_t + \partial_r) \frac{t + 3r + x}{r(t + r + x)^3} \gamma_0(x) dx \\ &= -\frac{3}{r^4} \gamma_0(r - t) \end{aligned}$$

Y en efecto se satisface la ecuación (2.20).

2.4. Condición de frontera para Φ y γ

Queremos encontrar condiciones de frontera que sean absorbentes y que la reflexión espuria sea lo mas pequeña posible, en esta sección analizamos las condiciones de frontera [1, 2, 3] dadas por

$$b^{L+1}\gamma|_{r=R} := [r^2(\partial_t + \partial_r)]^{L+1} \gamma|_{r=R} = 0 \quad (2.21)$$

Tenemos ya la forma de las soluciones dadas en la sección anterior, estas condiciones serán exactas para soluciones salientes con $l \leq L$ (ver lema 5 abajo), pero para $l \geq L$ tendremos que considerar la superposición de soluciones salientes y entrantes $\gamma = \gamma_{\nearrow} + \kappa\gamma_{\searrow}$ donde κ sera un coeficiente que nos dará la amplitud de la reflexión. Para determinar la forma explicita de este coeficiente consideraremos radiación monocromática.

Empezaremos por analizar las condiciones de frontera:

$$b^{L+1}\gamma|_{r=R} := [r^2(\partial_t + \partial_r)]^{L+1} \gamma|_{r=R} = 0 \quad (2.22)$$

donde $b = r^2(\partial_t + \partial_r)$.

Lema 5. *El operador b satisface las siguientes relaciones*

$$b^m \gamma_{\searrow l} = \frac{(l+m)!}{(l-m)!} r^m \sum_{j=0}^{l+m} (-1)^{j+m} \frac{(2l-j)!}{(l+m-j)!j!} (2r)^{j-l} F_{\searrow l}^{(j)}(r+t)$$

para $m = 0, 1, 2, \dots, l$

$$b^m \gamma_{\searrow l} = (-1)^l r^m \sum_{j=0}^{l-m-1} \frac{(l+m)!}{(2l+1-j)!} \frac{(m-l-1)!}{(m-l-j-1)!j!} (2r)^{l+1+j} F_{\searrow l}^{(j)}(r+t)$$

para $m = l+1, l+2, \dots$

$$b^m \gamma_{\nearrow l} = r^m \sum_{j=0}^{l-m} (-1)^{j+m} \frac{(2l-j)!}{(l-m-j)!j!} (2r)^{j-l} F_{\nearrow l}^{(j)}(r-t)$$

para $m = 0, 1, 2, \dots, l$

$$b^m \gamma_{\nearrow l} = 0$$

para $m = l+1, l+2, \dots$

Demostración: Por inducción. \square

$L = 0$: (condición de Sommerfeld)

$$(\partial_t + \partial_r)\gamma|_{r=R} = 0 \quad (2.23)$$

o $l = 0$: consideramos la onda saliente $\gamma_0 = F_{\nearrow}(r-t)$ entonces la condición de frontera (2.23) se cumple trivialmente.

o $l = 1$: consideramos la onda saliente $\gamma_1 = -F'_{\nearrow}(r-t) + \frac{1}{r}F_{\nearrow}(r-t)$ entonces la condición de frontera (2.23) no se cumple pues:

$$(\partial_t + \partial_r) \left[-F'_{\nearrow}(r-t) + \frac{1}{r}F_{\nearrow}(r-t) \right]_{r=R} = -\frac{1}{r^2}F_{\nearrow}(r-t)|_{r=R} \neq 0$$

por lo que consideramos la superposición con una onda entrante:

$$\gamma_1 = -F'_{\nearrow}(r-t) + \frac{1}{r}F_{\nearrow}(r-t) + \kappa \left[-F'_{\searrow}(r+t) + \frac{1}{r}F_{\searrow}(r+t) \right]$$

donde κ es un coeficiente que denota la amplitud de reflexión, veamos si ahora la condición de frontera (2.23) se cumple:

$$(\partial_t + \partial_r)\gamma|_{r=R} = -\frac{1}{R^2}F_{\nearrow}(R-t) + \kappa \left[-2\frac{\partial F'_{\searrow}(r+t)}{\partial(r+t)} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial F_{\searrow}(r+t)}{\partial(r+t)} - \frac{1}{r^2}F_{\searrow}(r+t) \right]_{r=R}$$

Si consideramos ondas planas de la forma $F_{\nearrow}(r-t) = e^{ik(r-t)}$, y $F_{\searrow}(r+t) = e^{-ik(r+t)}$ entonces $(\partial_t + \partial_r)\gamma|_{r=R} = 0$ implica que :

$$\kappa = \frac{e^{2ikR}}{2k^2R^2 - 2ikR - 1}$$

Y notamos que el coeficiente de reflexión:

$$|\kappa| = \sqrt{\frac{1}{4(kR)^4 + 1}} \leq 1$$

va como $\frac{1}{(kR)^2}$ para (kR) grande.

$L = 1$:

$$r^2(\partial_t + \partial_r)r^2(\partial_t + \partial_r)\gamma|_{r=R} = 0 \quad (2.24)$$

o $l = 0$: consideramos la onda saliente $\gamma_0 = F_{\nearrow}(r-t)$ entonces la condición de frontera (2.24) se cumple trivialmente pues $(\partial_t + \partial_r)F_{\nearrow}(r-t)|_{r=R} = 0$.

o $l = 1$: consideramos la onda saliente $\gamma_1 = -F'_{\nearrow}(r-t) + \frac{1}{r}F_{\nearrow}(r-t)$ entonces la condición de frontera (2.24) se cumple pues:

$$\begin{aligned} (\partial_t + \partial_r)r^2(\partial_t + \partial_r) \left[-F'_{\nearrow}(r-t) + \frac{1}{r}F_{\nearrow}(r-t) \right]_{r=R} &= -(\partial_t + \partial_r)F_{\nearrow}(r-t)|_{r=R} \\ &= 0 \end{aligned}$$

o $l = 2$: consideramos la onda saliente $\gamma_2 = F''_{\nearrow}(r-t) - \frac{3}{r}F'_{\nearrow}(r-t) + \frac{3}{r^2}F_{\nearrow}(r-t)$ entonces la condición de frontera (2.24) no se cumple pues:

$$\begin{aligned} r^2(\partial_t + \partial_r)r^2(\partial_t + \partial_r)\gamma_2|_{r=R} &= r^2(\partial_t + \partial_r) \left[-\frac{6}{r}F_{\nearrow}(r-t) + 3F_{\nearrow}(r-t) \right] \\ &= 6F_{\nearrow}(R-t) \neq 0 \end{aligned}$$

por lo que consideramos la superposición con una onda entrante:

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= F''_{\nearrow}(r-t) - \frac{3}{r}F'_{\nearrow}(r-t) + \frac{3}{r^2}F_{\nearrow}(r-t) \\ &+ \kappa \left[F''_{\searrow}(r+t) - \frac{3}{r}F'_{\searrow}(r+t) + \frac{3}{r^2}F_{\searrow}(r+t) \right] \end{aligned}$$

y veamos si ahora la condición de frontera (2.24) se cumple, considerando de nuevo ondas planas de la forma $F_{\nearrow}(r-t) = e^{ik(r-t)}$ y $F_{\searrow}(r+t) = e^{-ik(r+t)}$ entonces $r^2(\partial_t + \partial_r)r^2(\partial_t + \partial_r)\gamma_2|_{r=R} = 0$ implica que :

$$\kappa = \frac{-6e^{2ikR}}{4(kR)^4 - i8(kR)^3 - 12(kR)^2 + 12i(kR) + 6}$$

Y notamos que el coeficiente de reflexión es:

$$|\kappa| = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{8}{9}(kR)^6 + \frac{4}{9}(kR)^8}}$$

que es proporcional a $\frac{1}{(kR)^4}$ para kR grande.

o l general: consideramos la superposición $\gamma_l = \gamma_{\nearrow} + \gamma_{\nwarrow}$ de ondas salientes γ_{\nearrow} y entrantes γ_{\nwarrow} , usando el lema (5):

$$\kappa = \begin{cases} 0 & l \leq L \\ -\frac{(l-2)!}{(l+2)!} e^{2ikR} \frac{\sum_{j=0}^{l-2} (-1)^{j+2} \frac{(2l-j)!}{(l-2-j)!j!} j^j (2)^{j-l} (kR)^j}{\sum_{j=0}^{l+2} (-1)^{j+2} \frac{(2l-j)!}{(l-2-j)!j!} (-i)^j (2)^{j-l} (kR)^j} & l > L \end{cases} \quad (2.25)$$

así que notamos que las condiciones de frontera serán perfectamente absorbentes para $l \leq L$ y para $l > L$ tenemos que κ va como $\frac{1}{(kR)^4}$.

Al considerar las correcciones dadas por la curvatura, tenemos ahora las soluciones dadas por el lema 4. Notemos que si despreciamos los términos del backscatter así como términos de orden cuadrático o mayor en $(\frac{M}{R})$, entonces nuestras condiciones de frontera serán perfectamente absorbentes para ondas salientes con número de momento angular $l \leq L$, por un argumento igual al que hicimos en esta sección. Si ahora consideráramos los efectos del backscatter entonces las condiciones de frontera ya no serían perfectamente absorbentes para onda con $l \leq L$, pero en este caso la reflexión espuria es muy pequeña [1, 3].

Ilustremos este caso considerando el caso $L = 1$, del lema 4 tenemos que las soluciones salientes para $l = 1$ serán de la forma:

$$\gamma_{\nearrow 1}(t, r) = \frac{1}{r} \gamma_0(r-t) - \gamma'_0(r-t) + \frac{M}{r} \int_{r-t}^{\infty} \frac{t+3r+x}{(t+r+x)^3} \gamma_0(x) dx$$

Sabemos que

$$r^2(\partial_t + \partial_r)r^2(\partial_t + \partial_r) \left[\frac{1}{r} \gamma_0(r-t) - \gamma'_0(r-t) \right] = 0$$

pero

$$r^2(\partial_t + \partial_r)r^2(\partial_t + \partial_r) \frac{M}{r} \int_{r-t}^{\infty} \frac{t+3r+x}{(t+r+x)^3} \gamma_0(x) dx \neq 0$$

por lo que la condición de frontera ya no es perfectamente absorbente para $l = L = 1$.

Al igual como hicimos antes deberemos de considerar la superposición de una onda saliente y entrante:

$$\gamma_1(t, r) = \gamma_{\nearrow 1}(t, r) + \kappa \gamma_{\nwarrow 1}(t, r)$$

Así que aplicando la condición de frontera tenemos que:

$$\begin{aligned} 0 &= \kappa r^2 (\partial_t + \partial_r) r^2 (\partial_t + \partial_r) \left[\frac{1}{r} \gamma_0(r+t) - \gamma_0'(r+t) \right] \\ &\quad + r^2 (\partial_t + \partial_r) r^2 (\partial_t + \partial_r) \frac{M}{r} \int_{r-t}^{\infty} \frac{t+3r+x}{(t+r+x)^3} \gamma_0(x) dx \Big|_{r=R} \end{aligned}$$

donde continuamos despreciando los términos de orden $\left(\frac{M}{r}\right)^2$ lo que implica que

$$\kappa = -\frac{3M}{2r^4 \gamma_{\nwarrow 0}'''(r+t)} \int_0^{\infty} \frac{\gamma_0(r-t+2ry)}{(1+y)^5} dy \Big|_{r=R}$$

Considerando ondas monocromáticas $\gamma_{\nwarrow 0}(r+t) = e^{-ik(r+t)}$, y $\gamma_{\nearrow 0}(r-t) = e^{ik(r-t)}$ e introduciendo las funciones

$$C_n(z) = \int_0^{\infty} \frac{\cos(2zy)}{(1+y)^n} dy, \quad S_n(z) = \int_0^{\infty} \frac{\sen(2zy)}{(1+y)^n} dy$$

tendremos que el coeficiente de reflexión sera:

$$|\kappa| = \frac{3M}{2R(KR)^3} \sqrt{C_5^2(KR) + S_5^2(KR)} + O\left(\frac{M}{R}\right)^2$$

Por ultimo queremos ver como se comporta el coeficiente de reflexión para KR muy grande, para esto notamos que

$$S_n(z) = \frac{1}{2z} + O\left(\frac{1}{z^3}\right), \quad C_n(z) = O\left(\frac{1}{z^2}\right)$$

así que para $z = KR$ grande tendremos que

$$|\kappa| = \frac{3M}{4R(KR)^4} \ll 1$$

que sera muy pequeño, recordemos que asumimos $KM \ll 1$ y $KR \ll 1$, lo que implica que $M \ll \lambda \ll R$.

2.5. Condiciones de frontera para $F_{\mu\nu}$

Tenemos ya las condiciones de frontera para Φ y γ dadas en la sección anterior, queremos ahora escribir las condiciones absorbentes correspondientes para el tensor electromagnético $F_{\mu\nu}$. Para esto haremos una elección de vectores base, los cuales formarán una tetrad de Newman-Penrose en términos de la cual reescribiremos $F_{\mu\nu}$ para encontrar las nuevas condiciones de frontera.

En el caso curvo para una métrica esféricamente simétrica arbitraria :

$$ds^2 = \tilde{g}_{ab}dx^a dx^b + r^2 \hat{g}_{ab}dx^A dx^B$$

Tomemos la normal a la superficie dada por $r = R$

$$r_a := \tilde{\nabla}_a r$$

y el vector tangente

$$t^a := -\tilde{\varepsilon}^{ab}r_b$$

Veamos que propiedades cumplen:

Notemos que en el caso de Minkowski $\tilde{g}_{ab}dx^a dx^b = -dt^2 + dr^2$, estos vectores son de la forma

$$(r_a) = (0, 1), \quad (t^a) = (1, 0)$$

Por otro lado satisfacen:

$$t^a r_a = -\tilde{\varepsilon}^{ab}r_b r_a = 0$$

y sus normas están dadas por:

$$\tilde{g}_{ab}t^a t^b = \tilde{g}_{ab}\tilde{\varepsilon}^{ac}\tilde{\varepsilon}^{bd}r_c r_d = -\tilde{g}^{cd}r_c r_d =: -N$$

Definimos ahora los siguientes vectores nulos:

$$\begin{aligned} K^a &:= \frac{1}{N}(t^a + r^a) \\ L^a &:= t^a - r^a \\ Q^a &:= \frac{1}{r}\widehat{Q}^a = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{i}{r\text{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\phi} \end{aligned}$$

los cuales satisfacen

$$K^a L_a = \frac{1}{N}(-N - N) = -2 \quad (2.26)$$

$$Q^a \overline{Q}_a = \frac{1}{r}r + \frac{i}{r\text{sen}\theta}(-ir\text{sen}\theta) = 2 \quad (2.27)$$

y el resto de los productos son cero. Por otro lado también satisfacen:

$$\widetilde{g}_{ab} = -K_{(a}L_{b)} \quad (2.28)$$

$$\widetilde{\varepsilon}_{ab} = K_{[a}L_{b]} \quad (2.29)$$

$$r^2 \widehat{g}_{AB} = Q_{(A}\overline{Q}_{B)} \quad (2.30)$$

$$r^2 \widehat{\varepsilon}_{AB} = iQ_{[A}\overline{Q}_{B]} \quad (2.31)$$

Así que tenemos una tetrada de Newman-Penrose adaptada a la simetría esférica y la frontera dada por los vectores nulos $K^a, L^a, Q^a, \overline{Q}^a$, tomaremos estos vectores como una base.

Por ejemplo para el caso de Eddington-Finkelstein

$$\widetilde{g} = -dt^2 + dr^2 + \frac{2M}{r}(dt - dr)^2$$

tenemos que

$$r_r = \widetilde{\nabla}_r r = 1, \quad r_t = \widetilde{\nabla}_t r = 0$$

usando

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} -1 + \frac{2M}{r} & -\frac{2M}{r} \\ -\frac{2M}{r} & 1 + \frac{2M}{r} \end{pmatrix}, \quad g^{ab} = \begin{pmatrix} -1 - \frac{2M}{r} & -\frac{2M}{r} \\ -\frac{2M}{r} & 1 - \frac{2M}{r} \end{pmatrix}$$

tenemos que

$$r^r = 1 - \frac{2M}{r}, \quad r^t = -\frac{2M}{r}$$

de la misma forma

$$t^r = -\varepsilon^{rr}r_r - \varepsilon^{rt}r_t = 0, \quad t^t = -\varepsilon^{tr}r_r - \varepsilon^{tt}r_t = 1$$

y

$$N = \tilde{g}^{ab}r_ar_b = \tilde{g}^{rr} = 1 - \frac{2M}{r}$$

por lo tanto

$$K^a\partial_a = \partial_t + \partial_r, \quad L^a\partial_a = \left(1 + \frac{2M}{r}\right)\partial_t - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\partial_r$$

para las coordenadas de Eddington-Finkelstein.

Escribimos ahora el tensor electromagnético en términos de la base:

$$F_{\mu\nu} = \phi_0 K_{[\mu}L_{\nu]} + (\phi_1 K_{[\mu}Q_{\nu]} + c.c) + (\phi_2 L_{[\mu}Q_{\nu]} + c.c) + \phi_3 iQ_{[\mu}\bar{Q}_{\nu]}$$

donde $c.c$ indica el complejo conjugado, ϕ_0, ϕ_3 son reales y ϕ_1, ϕ_2 son complejos.

Usando las propiedades (2.26) a (2.31), podemos encontrar los coeficientes ϕ_0, \dots, ϕ_4 en función de las componentes $F_{\mu\nu}$ dadas por (2.4) a (2.6):

$$\phi_0 = \frac{1}{2}L^\mu K^\nu F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}L^{[a}K^{b]}F_{ab} = -\tilde{\varepsilon}^{ab}\tilde{\nabla}_{[a}\left(\frac{\hat{\alpha}_{b]}}{r}\right)Y = -\frac{\Phi}{r^2}Y$$

usando $\Phi = r^2\tilde{\varepsilon}_{ab}\tilde{\nabla}^a\left(\frac{\hat{\alpha}^b}{r}\right)$.

$$\phi_3 = -\frac{i}{2}\bar{Q}^\mu Q^\nu F_{\mu\nu} = \frac{i}{2}Q^{[A}\bar{Q}^{B]}F_{AB} = \frac{\hat{\varepsilon}^{AB}}{r^2}\gamma\hat{\nabla}_{[A}S_{B]} = \hat{\varepsilon}^{AB}\hat{\varepsilon}_{AB}\frac{l(l+1)}{2}\frac{\gamma}{r^2}Y = \frac{l(l+1)}{r^2}\gamma Y$$

usando $\hat{\nabla}_{[A}S_{B]} = \frac{l(l+1)}{2}\hat{\varepsilon}_{AB}Y$.

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= -\frac{1}{2}L^\mu \bar{Q}^\nu F_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}L^a \bar{Q}^B F_{aB} = -\frac{1}{2r}L^a \hat{\alpha}_a \bar{Q}^B \hat{\nabla}_B Y - \frac{1}{2}L^a \tilde{\nabla}_a \gamma \cdot \bar{Q}^B S_B \\
&= \frac{1}{2r^2} \left(-L^a \hat{\alpha}_a + irL^a \tilde{\nabla}_a \gamma \right) \bar{Q}^A \hat{\nabla}_A Y \\
&= \frac{1}{2r^2} \left(\frac{r}{l(l+1)} L^a \tilde{\nabla}_b (\tilde{\varepsilon}_a^b \Phi) + irL^a \tilde{\nabla}_a \gamma \right) \bar{Q}^A \hat{\nabla}_A Y \\
&= \frac{1}{2r} \left(\frac{1}{l(l+1)} L^a \tilde{\nabla}_a \Phi + iL^a \tilde{\nabla}_a \gamma \right) \bar{Q}^A \hat{\nabla}_A Y
\end{aligned}$$

donde $Q_A := r\hat{Q}_A$ y $Q^A = \frac{1}{r}\hat{Q}^A$, usando la ecuación radial (2.7) para $\hat{\alpha}$ en ausencia de fuentes y :

$$\bar{Q}^B S_B = \frac{i}{2r} \bar{Q}^B \left(\bar{Q}_B \hat{Q}^C - \hat{Q}_B \bar{Q}^C \right) \hat{\nabla}_C Y = -\frac{i}{r} \bar{Q}^C \hat{\nabla}_C Y \quad (2.32)$$

$$L^a \tilde{\varepsilon}_a^b = \frac{1}{2}L^a (K_a L^b - L_b K^a) = -L^b$$

Y por ultimo

$$\begin{aligned}
\phi_2 &= -\frac{1}{2}K^\mu \bar{Q}^\nu F_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}K^a \bar{Q}^B F_{aB} \\
&= \frac{1}{2r} \left(-\frac{1}{l(l+1)} K^a \tilde{\nabla}_a \Phi + iK^a \tilde{\nabla}_a \gamma \right) \bar{Q}^A \hat{\nabla}_A Y
\end{aligned}$$

usando (2.32) y

$$K^a \tilde{\varepsilon}_a^b = \frac{1}{2}K^a (K_a L^b - L_b K^a) = K^a$$

Teorema 1. *Teorema de Peeling (espacio plano):*

Considere una solución de onda salientes sobre las geodésicas salientes $t - r = \text{cte}$ en un fondo plano con $l \geq 1$ arbitrario, entonces los coeficientes $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3$ decaen como:

$$\phi_1 = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad \phi_0 = O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad \phi_3 = O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad \phi_2 = O\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

Demostración:

Tenemos que en el espacio plano los coeficientes son:

$$\phi_0 = \frac{\Phi}{r^2} Y$$

$$\phi_3 = \frac{l(l+1)}{r^2} \gamma Y$$

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{1}{2r} \left(\frac{1}{l(l+1)} L^a \tilde{\nabla}_a \Phi + i L^a \tilde{\nabla}_a \gamma \right) \bar{Q}^A \hat{\nabla}_A Y \\ &= \frac{1}{2r} \left(\frac{1}{l(l+1)} (\partial_t - \partial_r) \Phi + i (\partial_t - \partial_r) \gamma \right) \bar{Q}^A \hat{\nabla}_A Y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_2 &= \frac{1}{2r} \left(-\frac{1}{l(l+1)} K^a \tilde{\nabla}_a \Phi + i K^a \tilde{\nabla}_a \gamma \right) \bar{Q}^A \hat{\nabla}_A Y \\ &= \frac{1}{2r} \left(-\frac{1}{l(l+1)} (\partial_t + \partial_r) \Phi + i (\partial_t + \partial_r) \gamma \right) \bar{Q}^A \hat{\nabla}_A Y \end{aligned}$$

Recordemos que del lema 2 tenemos la forma de la solución de ondas salientes en el espacio plano:

$$\begin{aligned} \gamma_{\nearrow l} &= \sum_{j=0}^l (-1)^j \frac{(2l-j)!}{(l-j)! j!} (2r)^{j-l} F_{\nearrow}^j(r-t) \\ &= (-1)^l F_{\nearrow}^l(r-t) + \left[(-1)^{l-1} \frac{(l+1)l}{2} \right] \frac{1}{r} F_{\nearrow}^{l-1}(r-t) + \dots \end{aligned}$$

Como tanto Φ como γ son soluciones de la ecuación de onda en el espacio plano ambas tendrán esta forma.

Notemos ahora que

$$(\partial_t + \partial_r) F_{\nearrow}(r-t) = 0$$

por lo que al aplicar $(\partial_t + \partial_r)$ a γ y Φ , los únicos términos distintos de cero serán aquellos en los que derivemos los factores r^k , de la forma explícita de la solución vemos que la primer derivada distinta de cero sera $\partial_r \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2}$, y las otras derivadas darán términos de orden menor, por lo que concluimos

que $\phi_2 = O\left(\frac{1}{r} \cdot \frac{1}{r^2}\right) = O\left(\frac{1}{r^3}\right)$.

Por otro lado

$$(\partial_t - \partial_r)F_{\nearrow}(r-t) = -2F'_{\nearrow}(r-t)$$

así que al aplicar $(\partial_t - \partial_r)$ a γ y Φ , aparte de los términos dados por las derivadas de los factores r^k , los cuales a orden mayor nos darán un factor $\frac{1}{r^2}$ como ya vimos, tendremos también términos debidos a las otras derivadas, de las cuales el término de orden mayor sera $(\partial_t - \partial_r)(-1)^l F_{\nearrow}^l(r-t) = 2(-1)^{l+1} F_{\nearrow}^{l+1}(r-t) = O(1)$, por lo que concluimos que $\phi_1 = O\left(\frac{1}{r} \cdot 1\right) = O\left(\frac{1}{r}\right)$.

Por último debido a la forma de las soluciones notamos que los coeficientes ϕ_0 y ϕ_3 en efecto decaen con orden $O\left(\frac{1}{r^2}\right)$. \square

Queremos encontrar unas condiciones de frontera que se reduzcan a las condiciones para Φ y γ que analizamos anteriormente en la sección 2.4 para el caso plano, y estas serán:

$$\left[r^2 K^a \tilde{\nabla}_a \right]^L (r^3 \phi_2)|_{r=R} = 0 \quad (2.33)$$

Veamos que en efecto estas son las condiciones de frontera que buscamos:

Para $L = 0$ la condición de frontera (2.33) es:

$$\left[r^2 K^a \tilde{\nabla}_a \right]^0 (r^3 \phi_2)|_{r=R} = (r^3 \phi_2)|_{r=R} = 0$$

es decir $\phi_2|_{r=R} = 0$, de la forma explícita de ϕ_2 :

$$K^a \tilde{\nabla}_a \Phi|_{r=R} = 0, \quad K^a \tilde{\nabla}_a \gamma|_{r=R} = 0$$

Que es la condición de Sommerfeld para Φ y γ , así como buscábamos.

Para L general, queremos una ecuación de la forma

$$\left[r^2 K^a \tilde{\nabla}_a \right]^{L+1} \Phi|_{r=R} = 0 \quad (2.34)$$

tanto para Φ como para γ .

Notemos que

$$r^3\phi_2 = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{l(l+1)} \left(r^2 K^a \tilde{\nabla}_a \Phi \right) + i \left(r^2 K^a \tilde{\nabla}_a \gamma \right) \right] \overline{Q}^A \widehat{\nabla}_A Y$$

Al aplicar el operador $\left[r^2 K^a \tilde{\nabla}_a \right]^L$ a $r^3\phi_2$ obtenemos la condición (2.34) que buscábamos.

Así que la condición de frontera (2.33) es la correcta.

Notemos por ultimo que en el caso de Eddington-Finkelstein la condición de frontera se reduce a la condición que teníamos para el caso plano

$$\left[r^2 K^a \tilde{\nabla}_a \right]^{L+1} = \left[r^2 (\partial_t + \partial_r) \right]^{L+1}$$

2.6. Resumen

En este capítulo analizamos las ecuaciones de Maxwell sobre un dominio finito

$$\begin{aligned} \nabla^\mu F_{\mu\nu} &= -J_\nu, \\ \nabla_{[\sigma} F_{\mu\nu]} &= 0, \end{aligned}$$

en el caso de una métrica esféricamente simétrica arbitraria

$$g = \tilde{g}_{ab} dx^a dx^b + r^2 \widehat{g}_{AB} dx^A dx^B$$

Al hacer una descomposición en armónicos esféricos del cuadripotencial A

$$A_a = \frac{1}{r} \alpha_a(t, r) Y(\theta, \varphi)$$

$$A_B = \beta(t, r) \widehat{\nabla}_B Y(\theta, \varphi) + \gamma(t, r) S_B(\theta, \varphi)$$

llegamos a que los coeficientes γ y $\Phi = r^2 \tilde{\varepsilon}_{ab} \tilde{\nabla}^a \left(\frac{\widehat{\alpha}^b}{r} \right)$ satisfacen ecuaciones de onda de la forma

$$\tilde{\nabla}^a \tilde{\nabla}_a \gamma - \frac{l(l+1)\gamma}{r^2} = 0$$

Encontramos la forma de la solución para el caso plano

$$\gamma_l = (-1)^l r^l \left(\frac{d}{dr} \frac{1}{r} \right)^l \gamma_0 = \sum_{j=0}^l (-1)^j \frac{(2l-j)!}{(l-j)! j!} (2r)^{j-l} \cdot [F_{\setminus}^j(t+r) + F_{\nearrow}^j(r-t)]$$

y las correcciones debidas a la curvatura dadas por

$$\begin{aligned} \gamma_{\nearrow l}(t, r) &= \sum_{j=0}^l (-1)^j \frac{(2l-j)!}{(l-j)! j!} (2r)^{j-l} \left[\gamma_0^{(j)}(r-t) + 2M c_j \gamma_0^{(j+1)}(r-t) \right] \\ &\quad + \frac{2M}{R} \gamma_l^{backscatter}(t, r) + O\left(\frac{2M}{R}\right)^2 \end{aligned}$$

donde $\gamma_l^{backscatter}(t, r)$ esta dado en el lema 4.

Después introducimos las condiciones de frontera absorbentes para Φ y γ

$$b^{L+1} \gamma|_{r=R} := [r^2(\partial_t + \partial_r)]^{L+1} \gamma|_{r=R} = 0$$

Y por ultimo las condiciones de frontera para $F_{\mu\nu}$ que buscamos son

$$\left[r^2 K^a \tilde{\nabla}_a \right]^L (r^3 \phi_2)|_{r=R} = 0$$

donde

$$\phi_2 = K^\mu \tilde{Q}^\nu F_{\mu\nu}$$

y K^a , Q^ν son dos de los vectores de la tetrada de Newman-Penrose que elegimos.

En el proximo capítulo vamos a analizar el problema de valores iniciales y de contorno asociado a este problema.

Capítulo 3

El problema de valores iniciales y de contorno

En este capítulo analizaremos el problema de Cauchy dado por la ecuación de onda con las condiciones de frontera absorbentes dadas anteriormente, veremos primero como obtener una formulación bien planteada del problema en una dimension y buscaremos usar este resultado para generalizarlo al caso tridimensional. Para esto es conveniente utilizar algunos resultados de la teoría de semigrupos [6, 7] .

3.1. Teoría de Semigrupos

Comenzamos por considerar un problema de Cauchy lineal de la forma

$$\frac{d}{dt}u(t) = Au(t), \quad t > 0, \quad u(0) = u_0 \quad (3.1)$$

donde $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ es un operador lineal sobre un espacio de Banach X , $u_0 \in X$, y $u : [0, \infty) \rightarrow X$ es la solución buscada.

Definición 1. *Consideremos el problema de Cauchy (3.1), se dice que el problema esta bien planteado si*

1. *Dado $u_0 \in X$ existe una solución de (3.1), es decir una curva diferenciable $u : [0, \infty) \rightarrow X$ tal que $u(t) \in D(A)$, $t \geq 0$ que satisface (3.1)*

2. Dicha solución es única
3. Las soluciones del problema dependen de manera continua de u_0

Queremos saber en que casos tendremos un problema de Cauchy bien planteado, empezaremos por el caso en que A es acotado:

Definición 2. *Dados dos espacios normados X y Y , la colección de todos los operadores lineales continuos $T : X \rightarrow Y$, con las operaciones usuales de suma y multiplicación por escalares, constituye un espacio vectorial, el cual se representará por $\mathcal{L}(X, Y)$*

Teorema 2. *Sea X un espacio de Banach sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o \mathbb{C} . Definimos el mapeo exponencial $\exp : \mathcal{L}(X) \rightarrow \mathcal{L}(X)$ a través de*

$$\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}, \quad A \in \mathcal{L}(X)$$

exp satisface las propiedades siguientes

1. *Sea $A \in \mathcal{L}(X)$ entonces el mapeo $P_A : \mathbb{K} \rightarrow \mathcal{L}(X)$ definido por $P_A(t) := \exp(tA)$, $t \in \mathbb{K}$ es diferenciable y $P'_A(t) = AP_A(t) = P_A(t)A$, $t \in \mathbb{K}$*
2. *Sea $A \in \mathcal{L}(X)$, entonces para cada $u_0 \in X$ el mapeo $u : \mathbb{K} \rightarrow X$, $t \rightarrow P_A(t)u_0 = \exp(tA)u_0$ es diferenciable y es la única solución del problema de Cauchy (3.1). además $\|u(t)\| \leq \exp(|t|\|A\|) \cdot \|u_0\|$, $t \in \mathbb{K}$*
3. *Sean $A, B \in \mathcal{L}(X)$ tales que su conmutador $[A, B] = 0$ entonces*

$$\exp(A + B) = \exp(A) \cdot \exp(B)$$

Demostración: [7].

Este teorema implica que el problema de Cauchy lineal (3.1) para un operador lineal y acotado esta bien planteado. Además las soluciones están dadas por el propagador $P_A : \mathbb{K} \rightarrow \mathcal{L}(X)$ definido por $P_A(t) := \exp(tA)$ el cual satisface las propiedades:

1. $P_A(0) = 1_x$

2. $P_A(t)P_A(s) = P_A(s)P_A(t) = P_A(t+s)$, $t, s \in \mathbb{K}$
3. $\lim_{t \rightarrow 0} \|P_A(t) - 1_x\| = 0$

Entonces P_A es un grupo monoparamétrico uniformemente continuo, el cual además satisface

$$\|P_A(t)\| \leq \exp(|t|\|A\|), \quad \forall t \in \mathbb{K}$$

Queremos ahora considerar el caso en el cual A no es un operador acotado. Empezaremos por la caracterización del propagador:

Definición 3. *Un semigrupo fuertemente continuo sobre X espacio de Banach es una familia $P(t) \in \mathcal{L}(X)$, $t \geq 0$, de operadores lineales y acotados que satisface*

1. $P(0) = 1_x$
2. $P(t)P(s) = P(s)P(t) = P(t+s)$
3. $\lim_{t \rightarrow 0} P(t)u = u$ para todo $u \in X$

para todo $t, s \geq 0$

.

Definición 4. *Sea $P : [0, \infty) \rightarrow L(X)$ un semigrupo fuertemente continuo sobre X . Definimos el generador infinitesimal como el operador $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ dado por*

$$D(A) := \left\{ u \in X \mid \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}(P(h) - 1)u \text{ existe en } X \right\}$$

$$Au := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}(P(h) - 1)u \in X, \quad u \in D(A)$$

Como el propósito de este capítulo es demostrar que el problema de Cauchy con las condiciones de frontera absorbentes está bien planteado, es conveniente establecer una relación entre los semigrupos fuertemente continuos definidos anteriormente y el problema de Cauchy, la cual estará dada por el siguiente teorema:

Teorema 3. *Sea X espacio de Banach, $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ un operador lineal tal que $\overline{D(A)} = X$ y $\rho(A) \neq \emptyset$. Entonces son equivalentes:*

- *A es el generador infinitesimal de un semigrupo fuertemente continuo*
- *El problema de Cauchy $\frac{d}{dt}u(t) = Au(t)$, $u(0) = u_0$, para $t \geq 0$, está bien planteado, es decir, tiene una única solución $u : [0, \infty) \rightarrow X$ continuamente diferenciable tal que $u(t) \in D(A)$ para todo $t \geq 0$ para todo $u_0 \in D(A)$.*

Es decir basta ahora con demostrar que el operador A genera un semigrupo fuertemente continuo, lo cual podemos hacer a través de los siguientes teoremas importantes de la teoría de semigrupos (5,4,6) dados a continuación, para esto daremos antes las siguientes definiciones:

Definición 5. *Sean $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ y $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$. Sea $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ una función tal que*

$$\int_{\Omega} v(x)\varphi(x)dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u(x)(D^{\alpha}\varphi)(x)dx, \quad \forall \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$$

Entonces esta función es única y se llama la α -derivada débil de u y escribimos $v = D^{\alpha}u$ en el sentido débil.

Definición 6. *Sea $m \in \mathbb{N}_0$ y $p \in [1, \infty)$, entonces definimos el espacio de Sobolev como*

$$W^{m,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) \mid \text{Existen todas las derivadas débiles } D^{\alpha}u \text{ y } D^{\alpha}u \in L^p(\Omega) \ \forall |\alpha| \leq m\}$$

Sea $u \in W^{m,p}(\Omega)$ entonces definimos su norma

$$|u|_{m,p} := \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^{\alpha}u\|_{L^p(\Omega)}$$

Entonces tenemos los siguientes teoremas:

Teorema 4. *Hille-Yosida-Phillips:*

Sea X un espacio de Banach sobre \mathbb{R} o \mathbb{C} y sea $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ un operador lineal con dominio denso $\overline{D(A)} = X$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. Existen constantes $a \geq 1$ y $b \in \mathbb{R}$ tales que $(b, \infty) \subset \rho(A)$ y $\|R_A(\lambda)^n\| \leq \frac{a}{(\lambda-b)^n}$ para todo $\lambda > b$ y todo $n \in \mathbb{N}$
2. A genera un semigrupo fuertemente continuo $P(t)$

ademas, 2 implica que $\|P(t)\| \leq e^{bt}$ para toda $t \geq 0$.

Teorema 5. *Lumer-Phillips:*

Sea $D(A)$ denso y X espacio de Hilbert, A cuasi-disipativo (existe b en \mathbb{R} tal que $\operatorname{Re}(u, Au) \leq \|u\|^2 b$), y existe $\lambda > b$ tal que $(\lambda - A)(D(A)) \subset X$ es denso. Entonces A es cerrable y \overline{A} genera un semigrupo fuertemente continuo $P(t)$ y $\|P(t)\| \leq e^{bt}$ para toda $t \geq 0$.

Teorema 6. *segunda version del Teorema de Lumer-Phillips:*

Sea X espacio de Hilbert, y $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ tal que $A - b$ disipativo para un $b \in \mathbb{R}$, y existe $\lambda_0 > b$ tal que $R(\lambda_0 - A) = (\lambda_0 - A)(D(A)) = X$, entonces A genera un semigrupo fuertemente continuo $P(t)$ y $\|P(t)\| \leq e^{bt}$ para toda $t \geq 0$

Antes de demostrarlo veamos los siguientes resultados:

Teorema 7. *Sobolev*

$W^{1,2}(\mathbb{R}) \subset C_b(\mathbb{R})$. Es decir, cada función $u \in W^{1,2}(\mathbb{R})$ posee un representante continuo y acotado.

Demostración Teorema 7

Sea $u \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, entonces

$$u(x)^2 = \int_{-\infty}^x 2u(y)u'(y)dy, \quad x \in \mathbb{R}$$

y

$$\begin{aligned} |u(x)|^2 &\leq 2 \int_{-\infty}^{\infty} |u(y)| |u'(y)| dy \leq 2 \|u\|_{L^2(\mathbb{R})} \|u'\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\leq (\|u\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|u'\|_{L^2(\mathbb{R})})^2 \end{aligned}$$

lo que implica

$$\|u\|_{\infty} \leq \|u\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|u'\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|u\|_{W^{1,2}(\mathbb{R})}, \quad \text{para todo } u \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$$

donde la norma infinito esta definida como $\|u\|_{\infty} := \sup_{x \in \mathbb{R}} |u_x|$. Ahora sea $u \in W^{1,2}(\mathbb{R})$ tomemos una sucesión $(u_j) \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$ tal que $u_j \rightarrow u$ en $W^{1,2}(\mathbb{R})$, y $u_j(x) \rightarrow u(x)$ para casi todo $x \in \mathbb{R}$, concluimos que $W^{1,2}(\mathbb{R}) \subset C_b(\mathbb{R})$ y que $\|u\|_{\infty} \leq \|u\|_{W^{1,2}(\mathbb{R})}$ para $u \in W^{1,2}(\mathbb{R})$, ademas $\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0$, para $u \in W^{1,2}(\mathbb{R})$.

Veamos por ultimo que u es uniformemente continuo:

Para $y > x$ tenemos que

$$|u(y) - u(x)| = \left| \int_x^y u'(z) dz \right| \leq \int_x^y |u'(z)| dz \leq \sqrt{|y-x|} \|u\|_{W^{1,2}(\mathbb{R})}$$

lo que implica que $u \in W^{1,2}(\mathbb{R})$ es uniformemente continuo. \square

Proposición 1. Sea X espacio de Banach sobre \mathbb{R} o \mathbb{C} y $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ un operador lineal y disipativo. Si existe un $\lambda_0 > 0$ tal que $R(\lambda_0 - A) = X$, entonces $(0, \infty) \subset \rho(A)$ y $\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}$ para todo $\lambda > 0$.

Lema 6. Sea X espacio de Hilbert, $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ un operador disipativo y $\lambda > 0$ tal que $(\lambda - A)(D(A)) = X$, entonces $D(A) \subset X$ es denso

Demostración Lema 6

Sabemos que $D(A) \subset X$ es denso si y solo si $\overline{D(A)} = D(A)^{\perp\perp} = X$ si y solo si $D(A)^{\perp} = \{0\}$. Así que sea $v \in X$ tal que $(\phi, v) = 0$ para toda $\phi \in D(A)$, esto quiere decir que $v \in D(A)^{\perp}$, existe $u \in D(A)$ tal que $(\lambda - A)u = v$, entonces $(\phi, (\lambda - A)u) = 0$ para toda $\phi \in D(A)$. Tomemos en particular $\phi = u$, usando el hecho de que A es disipativo

$$0 = \operatorname{Re}(u, (\lambda - A)u) = \lambda \|u\|^2 - \operatorname{Re}(u, Au) \geq \lambda \|u\|^2$$

lo que implica que $u = 0$ y por lo tanto $v = 0$, así que $D(A)^\perp = \{0\}$, y el lema queda demostrado. \square

Veamos ahora la demostración del teorema (6).

Demostración teorema 6

Supongamos $A - b$ disipativo y existe $\lambda_0 > b$ tal que $R(\lambda_0 - A) = X$, esto quiere decir que existe $\lambda_1 = \lambda_0 - b > 0$ tal que $X = R(\lambda_0 - A) = R(\lambda_0 - b - (A - b)) = R(\lambda_1 - (A - b))$. Es decir tenemos que $A - b$ es disipativo y existe $\lambda_1 > 0$ tal que $R(\lambda_1 - (A - b)) = X$, pero gracias a la proposición 1, nos queda que $(0, \infty) \subset \rho(A - b)$ y $\|(\lambda - A + b)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}$ para todo $\lambda > 0$, es decir $(b, \infty) \subset \rho(A)$ y $\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda - b}$ para todo $\lambda > b$. En particular vemos que

$$\| [(\lambda - A)^{-1}]^n \| \leq \|(\lambda - A)^{-1}\|^n \leq \frac{1}{(\lambda - b)^n} \quad \text{para toda } n \in \mathbb{N}$$

Buscamos aplicar el teorema de Hille-Yosida-Phillips para lo que falta demostrar que el dominio es denso, pero del lema 1 tenemos además que $D(A)$ es denso en X , entonces ahora podemos usar el teorema 4, y tenemos que A genera un semigrupo fuertemente continuo $P(t)$ y $\|P(t)\| \leq e^{bt}$ para toda $t \geq 0$. \square

Así que para demostrar que un problema de Cauchy que cumple las condiciones del teorema 3 esta bien planteado, basta demostrar el teorema de Lumer-Phillips, como podemos ver a través del siguiente ejemplo:

Sean $X = L^2(\mathbb{R}^n)$ y $B := \Delta$ el operador laplaciano tal que $D(B) \subset X \rightarrow X$ con $D(B) := W^{2,2}(\mathbb{R}^n)$.

Analizamos el problema de transporte de calor

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u(t) &= \Delta u(t), \quad t \geq 0 \\ u(0) &= u_0, \quad u_0 \in W^{2,2}(\mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

Para ver que este problema de Cauchy esta bien planteado usaremos el teorema (4).

Se puede demostrar que el espectro del operador laplaciano $\sigma(B) = \mathbb{R} \setminus \rho(B)$ donde $\rho(B)$ es el conjunto resolvente de B dado por

$$\rho(B) := \{ \lambda \in \mathbb{R} \mid (\lambda - B) : D(B) \rightarrow X \text{ es biyectivo y } (\lambda - B)^{-1} \in L(X) \}$$

, es $\sigma(B) = (-\infty, 0]$ y que $\|(\lambda - B)^{-1}\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re}(\lambda)} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \text{ con } \operatorname{Re}(\lambda) > 0$. Sean $\lambda > 0$ y $R_b(\lambda) := (\lambda - B)^{-1} \in L(X)$, entonces esto implica que

$$\|R_B(\lambda)^n\| \leq \|R_B(\lambda)\|^n \leq \frac{1}{\lambda^n}$$

para todo $\lambda > 0$ y $n \in \mathbb{N}$. Además $W^{2,2}(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^2(\mathbb{R}^n)$ puesto que $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset W^{2,2}(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Entonces de acuerdo al teorema (4) B es el generador infinitesimal de un semigrupo fuertemente continuo $Q : [0, \infty) \rightarrow L(X)$ y la solución del problema de transporte de calor es dado por $u(t) = Q(t)u_0$ para $t \geq 0$.

3.2. Demostración para el problema en una dimension

Del capítulo anterior tenemos que podemos reducir el problema inicial a ecuaciones de onda en una dimensión, para los cuales encontramos ya las condiciones de frontera absorbentes que buscábamos, así que ahora buscamos aplicar la teoría de semigrupos de la sección anterior para demostrar que este problema estará bien planteado.

3.2.1. Condición de Sommerfeld

Tenemos la ecuación de onda para un potencial $V(r)$ positivo, uniformemente continuo y acotado sobre un intervalo compacto $I = [0, R)$

$$\ddot{\phi} - \phi'' + V_l(r)\phi = 0 \quad (3.2)$$

Si definimos $\pi = \dot{\phi}$ entonces nos queda el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \pi &= \dot{\phi} \\ \dot{\pi} &= \phi'' - V\phi \end{aligned}$$

junto con las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} \pi|_{r=0} &= 0 \\ (\partial_t + \partial_r)\phi|_{r=R} &= \pi + \phi'|_{r=R} = 0 \end{aligned}$$

Así que tendremos el problema de Cauchy $\dot{u} = Au$ donde

$$u = \begin{pmatrix} \phi \\ \pi \end{pmatrix}, \quad Au = \begin{pmatrix} \pi \\ \phi'' - V\phi \end{pmatrix}$$

Definimos la norma como la cantidad:

$$E = \frac{1}{2} \int_0^R (\pi^2 + \phi'^2 + V\phi^2) dr$$

3.2. DEMOSTRACIÓN PARA EL PROBLEMA EN UNA DIMENSION 42

Entonces necesitamos que $\phi \in W^{1,2}(0, R)$ y $\pi \in L^2(0, R)$ por lo tanto definimos

$$X = W^{1,2}(0, R) \times L^2(0, R)$$

Definimos también el producto escalar

$$\langle u_1, u_2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \pi_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \phi_2 \\ \pi_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \int_0^R (\pi_1 \pi_2 + \phi_1' \phi_2' + V \phi_2 \phi_2) dr$$

para $u_1, u_2 \in X$. Notamos que este producto escalar se reduce a la norma $2E$, y con esto X es un espacio de Hilbert. Definimos el dominio de A como

$$D(A) = \{(\phi, \pi) \in C^\infty[0, R] \times C^\infty[0, R] \mid \pi|_{r=0} = 0, \pi + \partial_r \phi|_{r=R} = 0\}$$

Teorema 8. *El operador A es cerrable y su cerradura \bar{A} genera un semigrupo fuertemente continuo $P(t)$ contractivo*

Demostración:

Este análisis es similar al realizado por Horst [7]. Ahora mostraremos que se cumplen las condiciones para aplicar la primera versión del teorema de Lumer-Phillips

Lema 7. *A disipativo*

Demostración:

Sea $u = \begin{pmatrix} \phi \\ \pi \end{pmatrix} \in D(A)$,

$$\begin{aligned} \langle u, Au \rangle &= \int_0^R [\pi(\phi'' - V\phi) + \phi'\pi' + V\phi\pi] dr = \pi\phi'|_0^R \\ &= \pi(R)\phi'(R) - \pi(0)\phi'(0) = -[\phi'(R)]^2 \leq 0 \end{aligned}$$

por lo tanto A es disipativo. \square

3.2. DEMOSTRACIÓN PARA EL PROBLEMA EN UNA DIMENSION 43

Lema 8. $D(A)$ denso en X

Demostración:

Sea (f, g) en X , y $\varepsilon > 0$ un número real, denotamos $I = (0, R)$.

Como $C^\infty(\bar{I})$ es denso en $W^{1,2}(I)$, entonces existe algún u en $C^\infty(\bar{I})$ tal que

$$\|u - f\|_{W^{1,2}} \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$$

Como $C_0^\infty(I)$ es denso en $L^2(I)$, entonces existe algún v_1 en $C_0^\infty(I)$ tal que

$$\|v_1 - g\|_{L^2} \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{8}}$$

Por último existe algún v_2 en $C^\infty(\bar{I})$ tal que $v_2|_0 = 0$, $v_2|_R = -u'|_R$ y que

$$\|v_2\|_{L^2} \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{8}}$$

Entonces por construcción $(u, v_1 + v_2)$ está en $D(A)$, puesto que u y $v_1 + v_2$ están en C^∞ y vemos que en efecto cumplen las condiciones de frontera, usando que v_1 está en $C_0^\infty(I)$

$$(v_1 + v_2 + u')|_R = v_1|_R + (-u'|_R) + u'|_R = v_1|_R = 0$$

$$(v_1 + v_2)|_0 = v_1|_0 = 0$$

Por último vemos que en efecto podemos aproximar (f, g) en X por medio de $(u, v_1 + v_2)$ en $D(A)$

$$\begin{aligned} \|(f, g) - (u, v_1 + v_2)\|_X^2 &= \|f - u\|_{W^{1,2}}^2 + \|g - (v_1 + v_2)\|_{L^2}^2 \\ &\leq \|f - u\|_{W^{1,2}}^2 + 2\|g - v_1\|_{L^2}^2 + 2\|v_2\|_{L^2}^2 \\ &\leq \frac{\varepsilon^2}{2} + 2\frac{\varepsilon^2}{8} + 2\frac{\varepsilon^2}{8} \leq \varepsilon^2 \end{aligned}$$

3.2. DEMOSTRACIÓN PARA EL PROBLEMA EN UNA DIMENSION 44

usando el hecho de que $2ab \leq a^2 + b^2$.

Por lo tanto $D(A)$ es denso en X . \square

Lema 9. *Existe $\lambda > 0$ tal que $(\lambda - A)(D(A)) \subset X$ es denso*

Demostración:

Para demostrar esto debemos de resolver el siguiente problema

$$(\lambda - A)u = v = \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}$$

con F, G en $C^\infty(\bar{I})$ dado y $u \in D(A)$ desconocido.

Tenemos entonces las ecuaciones:

$$\lambda\phi - \pi = F,$$

$$\lambda\pi - \phi'' + V\phi = G.$$

Sustituyendo la primera ecuación en la segunda obtenemos la ecuación para π

$$\lambda^2\pi - \pi'' + V\pi = \lambda G + F'' - VF =: H$$

con las condiciones de frontera

$$\pi|_0 = 0, \quad \lambda\pi + \pi'|_R = -F$$

Notamos que podemos tomar una f en $C^\infty(\bar{I})$ tal que

$$f|_0 = 0, \quad \lambda f + f'|_R = -F$$

Sea ahora $\pi = f + \tilde{\pi}$, tendremos ahora la siguiente ecuación para $\tilde{\pi}$

$$\lambda^2\tilde{\pi} - \tilde{\pi}'' + V\tilde{\pi} = \tilde{H} \tag{3.3}$$

con las condiciones de frontera

$$\tilde{\pi}|_0 = 0, \quad \lambda\tilde{\pi} + \tilde{\pi}'|_R = 0$$

3.2. DEMOSTRACIÓN PARA EL PROBLEMA EN UNA DIMENSION 45

donde

$$\tilde{H} = H - \lambda^2 f + \lambda f'' - Vf$$

De ahora en adelante en vez de usar $\tilde{\pi}$ y \tilde{H} usaremos solamente π y H por simplicidad.

Multipliquemos (3.3) con ψ en $C^\infty(\bar{I})$ tal que $\psi|_{r=0} = 0$ y usemos integración por partes

$$\int_0^R [\lambda^2 \pi \psi - \pi' \psi' + V \pi \psi] dr - \psi \pi'|_0^R = \int_0^R H \psi dr$$

si usamos la condición de frontera $\pi + \psi' |_{r=R} = 0$ y $\pi|_{r=0}$ nos queda

$$\int_0^R [\lambda^2 \pi \psi - \pi' \psi' + V \pi \psi] dr - \lambda \psi \pi|_R = \int_0^R H \psi dr$$

Por lo que proponemos el siguiente problema débil, queremos ver que existe π tal que $Q_\lambda(\psi, \pi) = L_H(\psi)$ para toda $\psi \in Y$ donde

$$Q_\lambda(\psi, \pi) := \int_0^R (\lambda^2 \psi \pi + \psi' \pi' + V \psi \pi) dr + \lambda \psi \pi|_R$$

con $\lambda > 0$, tomamos ψ y π en el espacio

$$Y = (\pi \in W^{1,2}(I) \mid \pi|_0 = 0)$$

y el funcional lineal

$$L_H(\psi) = \int_0^R H \psi dr$$

La demostración se hara en cuatro pasos:

- Q_λ define un producto escalar equivalente al producto escalar de $W^{1,2}$:

3.2. DEMOSTRACIÓN PARA EL PROBLEMA EN UNA DIMENSION 46

Notemos que

$$Q_\lambda(\psi, \psi) = \int_0^R (\lambda^2 \psi^2 + \psi'^2 + V\psi^2) dr + \lambda\psi^2|_R \geq 0$$

Como es la suma de elementos positivos, esto quiere decir que $Q_\lambda(\psi, \psi) = 0$ si y solo si $\psi = 0$.

Sabemos que tanto el producto como la integración son lineales por lo que $Q_\lambda(\psi, \pi_1 + k\pi_2) = Q_\lambda(\psi, \pi_1) + kQ_\lambda(\psi, \pi_2)$ para todo $\psi, \pi_1, \pi_2 \in Y$ y $k \in \mathbb{R}$.

Y por último tenemos que $Q_\lambda(\psi, \pi) = Q_\lambda(\pi, \psi)$ para todo $\psi, \pi \in Y$

Por lo que Q_λ define un producto escalar.

Veamos ahora si existe $M \geq m > 0$ tales que $m\|u\|_{W^{1,2}} \leq \|u\|_Y \leq M\|u\|_{W^{1,2}}$.

Por un lado queremos demostrar que existe M tal que:

$$\int_0^R (\lambda^2 \pi^2 + \pi'^2 + V\pi^2 - M(\pi^2 + \pi'^2)) dr + \lambda\pi^2|_R \leq 0$$

Pero para el término de frontera usamos la estimación de Sobolev (7)

$$\sup_{r \in I} |\pi(r)|^2 \leq \|\pi\|_{W^{1,2}}^2 \quad (3.4)$$

Así que lo que es suficiente demostrar es

$$\int_0^R ((\lambda^2 + V - M + \lambda)\pi^2 + (1 - M + \lambda)\pi'^2) dr \leq 0$$

Así que elegimos M tal que $(\lambda^2 + V - M + \lambda) \leq 0$ y $(1 - M + \lambda) \leq 0$.

Por otro lado queremos demostrar que existe m tal que:

$$\int_0^R (\lambda^2 \pi^2 + \pi'^2 + V\pi^2 - m(\pi^2 + \pi'^2)) dr + \lambda\pi^2|_R \geq 0$$

El término de frontera siempre es mayor o igual que cero, entonces basta con elegir m tal que $(\lambda^2 + V - m) \geq 0$ y $1 - m \geq 0$.

3.2. DEMOSTRACIÓN PARA EL PROBLEMA EN UNA DIMENSION 47

Así que Q_λ es equivalente al producto escalar en $W^{1,2}$.

Notemos por ultimo que $W^{1,2}(I)$ es completo y que de la estimación de Sobolev (3.4), si tomamos una sucesión π_n convergente a un π en la norma $W^{1,2}$ entonces esta también va a converger en la norma $\sup_{0 \leq x \leq 1} |\pi(x)|^2$, así que podemos tomar el límite puntual de la sucesión π_n , $\pi(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_n(0) = 0$, por lo que Y es un subespacio cerrado de $W^{1,2}(I)$, y entonces (Y, Q_λ) es un espacio de Hilbert.

o Existencia de solución del problema débil:

Para esto usaremos el siguiente lema:

Lema 10. *Lema de Riezs:*

Sea $(X, (\cdot, \cdot))$ un espacio de Hilbert sobre el campo $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, y sea η en $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ un funcional lineal sobre X . Entonces existe un único vector x^* en X tal que $(x^*, y) = \eta(y)$ para todo y en X . Además $\|\eta\| = \|x^*\|$.

Para poder aplicar este lema definimos el funcional lineal $L_H(\psi) = \int_0^R H\psi dr$, usando la desigualdad de Schwarz tenemos que

$$|L_H(\psi)| \leq \left(\int_0^R \psi^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^R H^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|\psi\|_{L^2} \|H\|_{L^2}$$

Pero del resultado anterior, sabemos que Q_λ es equivalente al producto escalar en $W^{1,2}$, así que existe $m > 0$ tal que

$$m\|\psi\|_{L^2} \leq m\|\psi\|_{L^2} + m\|\psi'\|_{L^2} = m\|\psi\|_{W^{1,2}} \leq \|\psi\|_Y$$

Por lo que

$$|L_H(\psi)| \leq \frac{1}{m} \|\psi\|_Y \|H\|_{L^2}$$

Lo que implica que L_H esta en Y^* .

3.2. DEMOSTRACIÓN PARA EL PROBLEMA EN UNA DIMENSION 48

De acuerdo al lema de Riesz, existe un único π en Y tal que $(\pi, \psi)_Y = L_H(\psi)$ para todo ψ en Y , por lo tanto π es una solución débil única.

◦ π esta en C^∞ :

Sabemos que H esta en $C^\infty(\bar{I})$ y π esta en $W^{1,2}(I) \subset C(\bar{I})$ lo que implica que π esta en $C(\bar{I})$

Por otro lado, para todo $\psi \in Y$

$$\int_0^R (\lambda^2 \psi \pi + \psi' \pi' + V \psi \pi) dr + \lambda \psi \pi|_R = \int_0^R H \psi dr$$

Si definimos $u := \pi'$, entonces nos queda que para todo $\psi \in C_o^\infty(I)$

$$\int_0^R (\lambda^2 \pi + V \pi - H) \psi dr + = - \int_0^R u \psi' dr$$

Lo que implica que existe u' en el sentido débil y

$$u' = (\lambda^2 \pi + V \pi - H) \in L^2(I)$$

y u' esta en $L^2(I)$, así que u' esta en $W^{1,2}(I)$, lo que implica que π esta en $W^{2,2}(I) \subset C^1(\bar{I})$, por lo tanto π esta en $C^1(\bar{I})$.

Pero sabemos que $(\lambda^2 \pi + V \pi - H)$ esta en $C(\bar{I})$, así que π'' esta en $C(\bar{I})$ y entonces π esta en $C^2(\bar{I})$.

De la misma forma también tenemos que $(\lambda^2 \pi + V \pi - H)$ esta en $C^1(\bar{I})$ y entonces π esta en $C^3(\bar{I})$.

Siguiendo con este procedimiento obtenemos que π esta en $C^\infty(\bar{I})$.

◦ π es una solución fuerte:

Para todo $\psi \in C^\infty(\bar{I})$ tal que $\psi|_{r=0} = 0$

$$\int_0^R (\lambda^2 \psi \pi + \psi' \pi' + V \psi \pi) dr + \lambda \psi \pi|_R = \int_0^R H \psi dr \quad (3.5)$$

Usando integración por partes, y tomando $\psi \in C_o^\infty(I)$ el término de frontera sera cero

3.2. DEMOSTRACIÓN PARA EL PROBLEMA EN UNA DIMENSION 49

$$\int_0^R (\lambda^2 \pi - \pi'' + V\pi) \psi dr = \int_0^R H\psi dr$$

Lo que implica

$$H = \lambda^2 \pi - \pi'' + V\pi \quad (3.6)$$

Notemos que la condición de frontera $\pi|_0 = 0$ se satisface, ahora veamos que pasa con la condición $\lambda\pi + \pi'|_R = 0$, para esto tomemos ahora $\psi \in C^\infty(\bar{I})$, al hacer integración por partes en (3.5) nos quedara ahora otro término de frontera:

$$\int_0^R (\lambda^2 \psi - \psi'' + V\psi) \psi dr + \lambda\pi\psi|_R + \psi\pi'|_R = \int_0^R H\psi dr$$

Pero usando (3.6) tenemos:

$$\int_0^R H\psi dr + (\lambda\pi + \pi')\psi|_R = \int_0^R H\psi dr$$

Lo que implica que $\lambda\pi + \pi'|_R = 0$

Por lo tanto π es una solución fuerte que satisface las condiciones de frontera. \square

Así que gracias a los teoremas 5 y 3, hemos demostrado que la cerradura de A genera un semigrupo fuertemente continuo contractivo y por lo tanto el problema de Cauchy $\frac{d}{dt}u = \bar{A}u$ esta bien planteado. \square

Veamos que pasa en el caso de una métrica estacionaria, tenemos la ecuación

$$-\tilde{\nabla}^a \tilde{\nabla}_a \phi + \frac{l(l+1)}{r^2} \phi = F \quad (3.7)$$

Reescribimos la métrica introduciendo coordenadas conformes localmente

$$\tilde{g}_{ab} dx^a dx^b = \Omega^2(t, x)(-dt^2 + dx^2)$$

donde $\Omega^2(t, x)$ es el factor conforme.

3.2. DEMOSTRACIÓN PARA EL PROBLEMA EN UNA DIMENSION 50

Entonces

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}^a \tilde{\nabla}_a &= \frac{1}{\sqrt{-\tilde{g}}} \partial_a (\sqrt{-\tilde{g}} \tilde{g}^{ab} \partial_b) \\ &= \frac{1}{\Omega^2} (-dt^2 + dx^2)\end{aligned}$$

y escribimos (3.7) como

$$-dt^2 + dx^2 + \Omega^2(t, x) \frac{l(l+1)}{r^2} \phi = \Omega^2(t, x) F \quad (3.8)$$

Notemos que para el caso de una métrica estacionaria

$$\begin{aligned}\tilde{g} = -A^2(r)dt^2 + 2B(r)dtdr + C^2(r)dr^2 &= -A^2 \left(dt - \frac{B}{A^2} dr \right)^2 + \left(C^2 + \frac{B^2}{A^2} \right) dr^2 \\ &= -A^2 dt^2 + A^2 \left(\frac{C^2}{A^2} + \frac{B^2}{A^4} \right) dr^2\end{aligned}$$

si definimos

$$\left(\frac{C^2}{A^2} + \frac{B^2}{A^4} \right) dr^2 = dr_*^2$$

la métrica será

$$\tilde{g} = A^2(-dT^2 + dr_*^2)$$

entonces el factor conforme es $\Omega^2 = A^2 = -\tilde{g}(\partial_t, \partial_t)$, es decir la norma al cuadrado del vector de Killing (para Schwarzschild $A^2 = 1 - \frac{2M}{r}$), y la ecuación (3.8) nos da

$$\partial_t - \partial_{r_*}^2 + V(r)\phi = \Omega^2 F$$

donde $V(r) = A^2(r) \frac{l(l+1)}{r^2}$.

Entonces podemos aplicar los resultados de este capítulo para una métrica estacionaria. Por último notemos que si consideramos un agujero negro solamente podemos describir lo que pasa fuera del agujero pues al introducir la coordenada r_* (coordenada tortuga) mandamos el horizonte a $(-\infty)$.

3.2.2. Condiciones de frontera absorbentes

Queremos generalizar el resultado anterior para el problema de Cauchy

$$\ddot{\phi} - \phi'' + V\phi = 0$$

con las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} [a(r)(\partial_t - \partial_r)]^{L+1}\phi|_{r=0} &= 0 \\ [a(r)(\partial_t + \partial_r)]^{L+1}\phi|_{r=R} &= 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

donde pedimos $a \in C^\infty(\bar{I})$ positivo con $I = [0, R)$, y $V(r)$ un potencial acotado L veces continuamente diferenciable con primeras L derivadas acotadas.

Notamos que las condiciones de frontera que introdujimos anteriormente (2.22) son las condiciones (3.9) con $a(r) = r^2$.

Ahora vamos a reescribir el sistema en términos de ϕ y $\pi = \dot{\phi}$ para aplicar la teoría de semigrupos.

Lema 11. *Podemos escribir para toda $r \in I$*

$$\begin{aligned} [a(r)(\partial_t - \partial_r)]^{L+1}\phi(r) &= (-2)^L a(r)^{L+1} \partial_r^L (\pi(r) - \phi'(r)) \\ &+ f_L(\phi(r), \phi'(r), \dots, \partial_r^L \phi(r), \pi(r), \pi'(r), \dots, \partial_r^{L-1} \pi(r)) \end{aligned}$$

donde f_L es una función lineal.

Demostración: La demostración se hara por inducción:

·L=0:

$$a(\partial_t - \partial_r)\phi = a(\pi - \phi') + f_0(\phi)$$

donde $f_0 = 0$.

·L=1:

tenemos que demostrar que

$$[a(\partial_t - \partial_r)]^2 \phi = (-2)a^2 \partial_r (\pi - \phi') + f_1(\phi, \phi', \pi)$$

3.2. DEMOSTRACIÓN PARA EL PROBLEMA EN UNA DIMENSION 52

Veamos que en efecto

$$\begin{aligned}
 [a(\partial_t - \partial_r)]^2 \phi &= a(\partial_t - \partial_r)a(\pi - \phi') \\
 &= a[a(2\phi'' - V\phi - 2\pi') - (\pi - \phi')a'] \\
 &= -2a^2\partial_r(\pi - \phi') - a^2V\phi - (\pi - \phi')aa' \\
 &= -2a^2\partial_r(\pi - \phi') + f_1(\phi, \phi', \pi)
 \end{aligned}$$

con $f_1(\phi, \phi', \pi) = -a^2V\phi + aa'\phi' - aa'\pi$.

· Supongamos válido para L.

· L+1:

$$[a(\partial_t + \partial_r)]^{L+1}\phi = a(\partial_t + \partial_r)[a(\partial_t + \partial_r)]^L\phi$$

pero por suposición el lema era válido para L, así que

$$\begin{aligned}
 [a(\partial_t - \partial_r)]^{L+1}\phi &= a(\partial_t - \partial_r)(-2)^L a^{L+1} \partial_r^L (\pi - \phi') \\
 &+ a(\partial_t - \partial_r)(-2)^L f_L(\phi, \phi', \dots, \partial_r^L \phi, \pi, \pi', \dots, \partial_r^{L-1} \pi) \\
 &= a^{L+2}(-2)^L \partial_r^L (\partial_t \pi - \partial_r \pi - \partial_t \phi' + \phi'') \\
 &+ a(\partial_t - \partial_r)(-2)^L f_L(\phi, \phi', \dots, \partial_r^L \phi, \pi, \pi', \dots, \partial_r^{L-1} \pi)
 \end{aligned}$$

Usando la ecuación de onda tenemos que :

$$\partial_t \pi - \partial_r \pi - \partial_t \phi' + \phi'' = 2\phi'' - 2\pi' - V\phi$$

así que

$$\begin{aligned}
 [a(\partial_t - \partial_r)]^{L+1}\phi &= a^{L+2}(-2)^{L+1} \partial_r^{L+1} (\pi - \phi') \\
 &+ \tilde{f}_L(\phi, \phi', \dots, \partial_r^{L+1} \phi, \pi, \pi', \dots, \partial_r^L \pi)
 \end{aligned}$$

y la demostración queda completa. \square

Así que ahora el espacio X sera

$$X = W^{L+1,2}(I) \times W^{L,2}(I) = H^{L+1} \times H^L$$

donde $H^m = W^{m,2}(I)$, y usando el Lema 11 notamos que podemos escribir el problema como sigue $\dot{u} = A_L u$

3.2. DEMOSTRACIÓN PARA EL PROBLEMA EN UNA DIMENSION 53

$$u = \begin{pmatrix} \phi \\ \pi \end{pmatrix}, \quad A_L u = \begin{pmatrix} \pi \\ \phi'' - V\phi \end{pmatrix}$$

$$D(A) = \left\{ (\phi, \pi) \in H^{L+2} \times H^{L+1} \mid \begin{aligned} &\partial_r^L (\pi - \phi')|_{r=0} = f(\phi, \phi', \dots, \partial_r^L \phi, \pi, \pi', \dots, \partial_r^{L-1} \pi)|_{r=0}, \\ &\partial_r^L (\pi + \phi')|_{r=R} = h(\phi, \phi', \dots, \partial_r^L \phi, \pi, \pi', \dots, \partial_r^{L-1} \pi)|_{r=R} \end{aligned} \right\}$$

con el producto escalar estandar

$$\begin{aligned} \langle u_1, u_2 \rangle_X &= \int_0^R (\phi_1 \phi_2 + \phi_1' \phi_2' + \dots + \partial_r^{L+1} \phi_1 \partial_r^{L+1} \phi_2 + \\ &\quad + \pi_1 \pi_2 + \pi_1' \pi_2' + \dots + \partial_r^L \pi_1 \partial_r^L \pi_2) dr \end{aligned}$$

$$\text{para } u_1 = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \pi_1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} \phi_2 \\ \pi_2 \end{pmatrix} \in X.$$

Teorema 9. *A genera un semigrupo fuertemente continuo $P(t)$*

Demostración: Ahora verificaremos las condiciones de la segunda version del teorema de Lumer-Phillips:

Lema 12. *A cuasi-disipativo*

Demostración:

Sea $u \in D(A_L)$

$$\begin{aligned} \langle u, A_L u \rangle_X &= \int_0^R [(\phi \pi + \phi' \pi' + \dots + \partial_r^L \phi \partial_r^L \pi + \pi(\phi'' - V\phi)) \\ &\quad + \dots + (\partial_r^{L-1} \phi \partial_r^{L-1} (\phi'' - V\phi) + \partial_r^L \pi \partial_r^L (-V\phi)) \\ &\quad + \partial_r^{L+1} \phi \partial_r^{L+1} \pi] dr \end{aligned}$$

Notamos que, usando Schwarz, podemos acotar los términos entre paréntesis por la norma por una constante c . Escribiendo $f = f(\phi, \phi', \dots, \partial_r^L \phi, \pi, \pi', \dots, \partial_r^{L-1} \pi)$

3.2. DEMOSTRACIÓN PARA EL PROBLEMA EN UNA DIMENSION 54

y $h = h(\phi, \phi', \dots, \partial_r^L \phi, \pi, \pi', \dots, \partial_r^{L-1} \pi)$ por simplicidad:

$$\begin{aligned}
 \langle u, A_L u \rangle_X &\leq c \|u\|_{X_L}^2 + \int_0^R [\partial_r^{L+1} \phi \partial_r^{L+1} \pi + \partial_r^L \pi \partial_r^{L+2} \phi] dr \\
 &\leq c \|u\|_{X_L}^2 + \int_0^R \{ \partial_r (\partial_r^{L+1} \phi \partial_r^L \pi) \} dr \\
 &= c \|u\|_{X_L}^2 + \partial_r^{L+1} \phi \partial_r^L \pi |_{r=0}^R \\
 &= c \|u\|_{X_L}^2 + \partial_r^{L+1} \phi (h - \partial_r^L \phi') |_{r=R} - \partial_r^{L+1} \phi (f + \partial_r^L \phi') |_{r=0} \\
 &= c \|u\|_{X_L}^2 - \left(\partial_r^{L+1} \phi |_{r=R} + \frac{1}{2} h \right)^2 + \frac{1}{4} h^2 \\
 &\quad - \left(\partial_r^{L+1} \phi |_{r=0} + \frac{1}{2} f \right)^2 + \frac{1}{4} f^2 \\
 &\leq c \|u\|_{X_L}^2 + \frac{1}{4} h^2 |_{r=R} + \frac{1}{4} f^2 |_{r=0}
 \end{aligned}$$

Estimando los últimos dos términos por Sobolev (3.4) nos queda

$$\langle u, A_L u \rangle_X \leq \tilde{c} \|u\|_{X_L}^2, \quad u \in D(A_L) \quad (3.10)$$

Por lo tanto A_L es cuasi-disipativo. \square

Lema 13. $(\lambda - A_L)(D(A_L)) = X$ para $\lambda > 0$ suficientemente grande

Demostración:

Para demostrar esto debemos de resolver el siguiente problema

$$(\lambda - A_L)u = v = \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}$$

con $\begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}$ en X_L dado y $u \in D(A_L)$ desconocido.

Tenemos entonces las ecuaciones:

$$\lambda \phi - \pi = F$$

$$\lambda \pi - \phi'' + V \phi = G$$

3.2. DEMOSTRACIÓN PARA EL PROBLEMA EN UNA DIMENSION 55

Sustituyendo la primera ecuación en la segunda obtenemos la ecuación para ϕ

$$\lambda^2 \phi - \phi'' + V\phi = \lambda F + G =: H \in H^L, \quad \text{y } \phi \in H^{L+2} \text{ desconocido} \quad (3.11)$$

con las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} \partial_r^L(\lambda\phi - \phi')|_{r=0} &= f(\phi, \phi', \dots, \partial_r^L \phi, \lambda\pi, \lambda\phi', \dots, \lambda\partial_r^{L-1}\phi)|_{r=0} + g_0 \\ \partial_r^L(\lambda\phi + \phi')|_{r=R} &= h(\phi, \phi', \dots, \partial_r^L \phi, \lambda\pi, \lambda\phi', \dots, \lambda\partial_r^{L-1}\phi)|_{r=R} + g_1 \end{aligned}$$

La demostración se hara por inducción:

o $L = 0$:

En este caso tenemos la condición de Sommerfeld, la cual ya habíamos analizado, tenemos el espacio

$$X = W^{1,2}(I) \times L^2(I) = H^1(I) \times L^2(I)$$

y el dominio de A

$$D(A) = \{(\phi, \pi) \in H^1(I) \times L^2(I) \mid \pi - \phi'|_{r=0} = 0, \quad \pi + \phi'|_{r=R} = 0\}$$

Tenemos que demostrar que existe una única solución para el problema (3.11) con las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} (\lambda\phi - \phi')|_{r=0} &= f(\phi)|_{r=0} + F|_{r=0} \equiv f_0\phi|_{r=0} + g_0 \\ (\lambda\phi + \phi')|_{r=R} &= h(\phi)|_{r=R} + F|_{r=R} \equiv h_0\phi|_{r=R} + g_1 \end{aligned}$$

las podemos reescribir como

$$\begin{aligned} \{(\lambda - f_0)\phi - \phi'\}|_{r=0} &\equiv \{\alpha\phi - \phi'\}|_{r=0} = g_0 \\ \{(\lambda - h_0)\phi + \phi'\}|_{r=R} &\equiv \{\beta\phi + \phi'\}|_{r=R} = g_1 \end{aligned}$$

3.2. DEMOSTRACIÓN PARA EL PROBLEMA EN UNA DIMENSION 56

Lema 14. Sea $W \in C^\infty(\bar{I})$ positivo, $\alpha, \beta > 0$. Sean $H \in H^L$ y $g_0, g_1 \in \mathbb{R}$. Entonces el problema de contorno

$$-\phi'' + W\phi = H$$

$$(\alpha\phi - \phi')|_{r=0} = g_0, \quad (\beta\phi + \phi')|_{r=R} = g_1$$

posee una única solución $\phi \in H^{L+2}$

Demostación:

Sea $\lambda^2 + V \equiv W > 0$ y $\lambda - f_0 > 0$, $\lambda - h_0 > 0$.

Multipliquemos (3.11) con ψ en $C^\infty(\bar{I})$ y usemos integración por partes

$$\int_0^R [\phi'\psi' + W\phi\psi] dr - \psi\phi'|_0^R = \int_0^R H\psi dr$$

si usamos las condiciones de frontera nos queda

$$\int_0^R [\phi'\psi' + W\phi\psi] dr + \psi(\beta\phi - g_0)|_{r=0} + \psi(\lambda\psi - g_1)|_{r=R} = \int_0^R H\psi dr$$

Por lo que proponemos el siguiente problema débil, queremos ver que existe ϕ tal que $Q_\lambda(\psi, \phi) = L_H(\psi)$ para toda $\psi \in Y = H^1(I)$ donde

$$Q_\lambda(\psi, \phi) := \int_0^R (\psi'\phi' + W\psi\phi) dr + \lambda\psi\phi|_0 + \lambda\psi\phi|_R$$

con $\lambda > 0$, tomamos ψ y ϕ en $H^1(I)$ y el funcional lineal

$$L_H(\psi) = \int_0^R H\psi dr + \psi|_{r=0}g_0 + \psi|_{r=R}g_1$$

La demostración se hara de forma similar que anteriormente:

★ Q_λ define un producto escalar equivalente al producto escalar de $W^{1,2}$:

3.2. DEMOSTRACIÓN PARA EL PROBLEMA EN UNA DIMENSION 57

Notemos que

$$Q_\lambda(\psi, \psi) = \int_0^R (\psi'^2 + W\psi^2) dr + \lambda\psi^2|_0 + \lambda\psi^2|_R \geq 0$$

Como es la suma de elementos positivos, esto quiere decir que $Q_\lambda(\psi, \psi) = 0$ si y solo si $\psi = 0$.

Sabemos que tanto el producto como la integración son lineales por lo que $Q_\lambda(\psi, \phi_1 + k\phi_2) = Q_\lambda(\psi, \phi_1) + kQ_\lambda(\psi, \phi_2)$ para todo $\psi, \phi_1, \phi_2 \in Y$ y $k \in \mathbb{R}$.

Y por ultimo tenemos que $Q_\lambda(\psi, \phi) = Q_\lambda(\phi, \psi)$ para todo $\psi, \phi \in Y$

Por lo que Q_λ define un producto escalar.

Veamos ahora si existe $M \geq m > 0$ tales que $m\|u\|_{W^{1,2}} \leq \|u\|_Y \leq M\|u\|_{W^{1,2}}$.

Por un lado queremos demostrar que existe M tal que:

$$\int_0^R (\phi'^2 + W\phi^2 - M(\phi^2 + \phi'^2)) dr + \lambda\phi^2|_0 + \lambda\phi^2|_R \leq 0$$

Pero para los términos de frontera usamos de nuevo la estimación de Sobolev (3.4), y eligiendo una M suficientemente grande tenemos que en efecto $\|u\|_Y \leq M\|u\|_{W^{1,2}}$.

Por otro lado queremos demostrar que existe m tal que:

$$\int_0^R (\phi'^2 + W\phi^2 - m(\phi^2 + \phi'^2)) dr + \lambda\phi^2|_0 + \lambda\phi^2|_R \geq 0$$

Los términos de frontera siempre son mayores o iguales que cero, entonces basta con elegir m tal que $(W - m) \geq 0$ y $1 - m \geq 0$.

Así que Q_λ es equivalente al producto escalar en $W^{1,2}$.

★ Existencia de solución del problema débil:

Para esto usaremos de nuevo el Lema de Riezs

3.2. DEMOSTRACIÓN PARA EL PROBLEMA EN UNA DIMENSION 58

Para poder aplicar este lema definimos el funcional lineal

$$L_H(\psi) = \int_0^R H\psi dr + \psi|_{r=0}g_0 + \psi|_{r=R}g_1,$$

, usando la desigualdad de Schwarz tenemos que

$$\begin{aligned} |L_H(\psi)| &\leq \left(\int_0^R \psi^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^R H^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \psi|_{r=0}g_0 + \psi|_{r=R}g_1 \\ &= \|\psi\|_{L^2} \|H\|_{L^2} + \psi|_{r=0}g_0 + \psi|_{r=R}g_1 \end{aligned}$$

Usando la estimación de Sobolev (3.4) para los términos de frontera tenemos ahora que

$$\begin{aligned} |L_H(\psi)| &\leq \|\psi\|_{L^2} \|H\|_{L^2} + \|\psi g_0\|_{W^{1,2}} + \|\psi g_1\|_{W^{1,2}} \\ &= \|\psi\|_{L^2} \|H\|_{L^2} + \|\psi\|_{W^{1,2}} |g_0| + \|\psi\|_{W^{1,2}} |g_1| \end{aligned}$$

Pero del resultado anterior, sabemos que Q_λ es equivalente al producto escalar en $W^{1,2}$, así que existe $m > 0$ tal que

$$m\|\psi\|_{L^2} \leq m\|\psi\|_{L^2} + m\|\psi'\|_{L^2} = m\|\psi\|_{W^{1,2}} \leq \|\psi\|_Y$$

Por lo que

$$\begin{aligned} |L_H(\psi)| &\leq \frac{1}{m} \|\psi\|_Y \|H\|_{L^2} + \frac{1}{m} \|\psi\|_Y (|g_0| + |g_1|) \\ &= \frac{1}{m} \|\psi\|_Y (\|H\|_{L^2} + |g_0| + |g_1|) \end{aligned}$$

Lo que implica que L_H esta en Y^* .

De acuerdo al lema de Riesz (10), existe un único ϕ en Y tal que $(\phi, \psi)_Y = L_H(\psi)$ para todo ψ en Y , por lo tanto ϕ es una solución débil única.

★ ϕ es una solución fuerte:

Para todo $\psi \in C^\infty(\bar{I})$

$$\int_0^R (\lambda^2 \psi \phi + \psi' \phi' + V \psi \phi) dr + \lambda \psi \phi|_0 + \lambda \psi \phi|_R = \int_0^R H \psi dr + \psi|_{r=0} g_0 + \psi|_{r=R} g_1 \quad (3.12)$$

3.2. DEMOSTRACIÓN PARA EL PROBLEMA EN UNA DIMENSION 59

Usando integración por partes, y tomando $\psi \in C_0^\infty(I)$ los términos de frontera serán cero

$$\int_0^R (\lambda^2 \psi - \phi'' + V\phi) \psi dr = \int_0^R H\psi dr$$

Lo que implica

$$H = \lambda^2 \psi - \phi'' + V\phi \quad (3.13)$$

Veamos ahora que se satisfacen las condiciones de frontera para esto tomemos ahora $\psi \in C^\infty(\bar{I})$, al hacer integración por partes en (3.12) nos quedara ahora otro término de frontera:

$$\begin{aligned} \int_0^R H\psi dr + \psi|_{r=0}g_0 + \psi|_{r=R}g_1 &= \int_0^R (\lambda^2 \phi - \phi'' + V\phi) \psi dr \\ &+ \lambda\psi\phi|_0 + \lambda\psi\phi|_R + \psi\phi'|_R - \psi\phi'|_0 \end{aligned}$$

Pero usando (3.13) tenemos:

$$\int_0^R H\psi dr + (\lambda\phi - \phi')\psi|_0 + (\lambda\phi + \phi')\psi|_R = \int_0^R H\psi dr + \psi|_{r=0}g_0 + \psi|_{r=R}g_1$$

Lo que implica que $\lambda\phi - \phi'|_0 = g_0$ y $\lambda\phi + \phi'|_R = g_1$.

Sabemos que existe una única solución $\phi \in H^L$, pero notemos que como ϕ es solución del problema entonces $\phi'' = W\phi - H$, tanto ϕ como H están en H^L , así que $\phi'' \in H^L$, es decir $\phi \in H^{L+2}$. \square

Por lo tanto $\phi \in H^2$ es una solución fuerte que satisface las condiciones de frontera.

Y la demostración para $L = 0$ esta completa. \square

o $L = 1$:

Tenemos ahora las condiciones de frontera

$$\partial_r(\lambda\phi - \phi')|_{r=0} = f(\phi, \phi', \lambda\phi)|_{r=0} + g_0 \quad (3.14)$$

3.2. DEMOSTRACIÓN PARA EL PROBLEMA EN UNA DIMENSION 60

$$\partial_r(\lambda\phi + \phi')|_{r=R} = h(\phi, \phi', \lambda\phi)|_{r=R} + g_1 \quad (3.15)$$

Notemos que (3.14) se puede reescribir usando la ecuación (3.11) como:

$$\lambda\partial_r\phi - (\lambda^2\phi + V\phi - H)|_{r=0} = f(\phi, \phi', \lambda\phi) + g_0$$

dividiendo entre $(-\lambda)$:

$$(\lambda\phi - \partial_r\phi)|_{r=0} = -\frac{1}{\lambda}V\phi - f\left(\frac{\phi}{\lambda}, \frac{\phi'}{\lambda}, \phi\right) - \frac{g_0}{\lambda} + \frac{H_0}{\lambda}$$

Pero podemos escribir $f(\phi, \phi', \lambda\phi) = (f_0\phi + f_1\phi' + f_2\lambda\phi)$, así que

$$\left[\left(\lambda + \frac{V}{\lambda} + \frac{f_0}{\lambda} + f_2 \right) \phi - \left(1 - \frac{f_1}{\lambda} \right) \partial_r \phi \right] |_{r=0} = -\frac{g_0}{\lambda} + \frac{H_0}{\lambda} \equiv \tilde{g}_0$$

Para λ grande $1 - \frac{f_1}{\lambda} > 0$, y $\frac{(\lambda + \frac{V}{\lambda} + \frac{f_0}{\lambda} + f_2)}{1 - \frac{f_1}{\lambda}} \equiv \alpha > 0$, así que nos queda:

$$(\alpha\phi - \partial_r\phi)|_{r=0} = \tilde{g}_0$$

de la misma forma la condición de frontera (3.15) nos quedara de la forma

$$(\beta\phi + \partial_r\phi)|_{r=R} = \tilde{g}_1$$

Así que estamos de vuelta en el caso de las condiciones de frontera para $L = 0$, para el cual ya habíamos demostrado que existía solución. Por lo tanto para el caso $L=1$ existe una única solución $\phi \in H^3$. Donde usamos el lema (14).

o Supongamos cierto para L .

Las condiciones de frontera son de la forma

$$\partial_r^L(\lambda\phi - \phi')|_{r=0} = f_L(\phi)$$

$$\partial_r^L(\lambda\phi + \phi')|_{r=R} = h_L(\phi)$$

donde

$$f_L(\phi) = \sum_{j=0}^L f_{Lj}(\lambda) \partial_r^j \phi |_{r=0} \quad (3.16)$$

3.2. DEMOSTRACIÓN PARA EL PROBLEMA EN UNA DIMENSION 61

tal que

$$f_{Lj}(\lambda) = O(\lambda), \quad j = 0, \dots, L-1 \quad f_{LL}(\lambda) = O(1), \quad (3.17)$$

Sabemos que para $L = 0$ y $L = 1$ se cumple el lema.

Supongamos que $\lambda - A_L$ suryectivo para algún L y $\lambda > 0$ suficientemente grande.

o $L + 1$:

Tenemos ahora las condiciones de frontera

$$\partial_r^{L+1}(\lambda\phi - \phi')|_{r=0} = f_{L+1}(\phi) \quad (3.18)$$

$$\partial_r^{L+1}(\lambda\phi + \phi')|_{r=R} = h_{L+1}(\phi) \quad (3.19)$$

donde

$$f_{L+1}(\phi) = \sum_{j=0}^{L+1} f_{L+1,j}(\lambda) \partial_r^j \phi|_{r=0}$$

tal que

$$f_{L+1,j}(\lambda) = O(\lambda), \quad j = 0, \dots, L \quad f_{L+1,L+1}(\lambda) = O(1)$$

Dividamos la ecuación (3.18) entre $(-\lambda)$

$$\left(-\partial_r^{L+1}\phi + \frac{\partial_r^{L+2}\phi}{\lambda} \right) |_{r=0} = -\frac{f_{L+1}(\phi)}{\lambda}$$

Usando la ecuación (3.11) nos queda

$$\left[-\partial_r^{L+1}\phi + \frac{1}{\lambda} \partial_r^L(\lambda^2\phi + V\phi - H) \right] |_{r=0} = -\frac{f_{L+1}(\phi)}{\lambda}$$

es decir

$$\partial_r^L(\lambda\phi - \phi')|_{r=0} = -\frac{f_{L+1}(\phi)}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \partial_r^L(V\phi - H)|_{r=0}$$

3.3. DEMOSTRACIÓN PARA LA ECUACIÓN DE ONDA EN TRES DIMENSIONES 62

Nos preguntamos si $\frac{f_{L+1}(\phi)}{\lambda}$ sera de la forma de algún $\widetilde{f}_L(\phi)$ dado por (3.16) que cumpla las condiciones (3.17), de forma que podamos tener ahora una ecuación para el caso L para el cual supusimos había solución. En efecto tenemos que:

$$\partial_r^L(\lambda\phi - \phi')|_{r=0} = -\frac{1}{\lambda} \sum_{j=0}^{L+1} f_{L+1,j}(\lambda) \partial_r^j \phi|_{r=0} - \frac{1}{\lambda} \partial_r^L(V\phi)|_{r=0} + \frac{1}{\lambda} \partial_r^L(H)|_{r=0}$$

Notamos que para λ grande, $\frac{1}{\lambda} \partial_r^L(V\phi)|_{r=0} = O(1)$ y $\frac{1}{\lambda} \partial_r^L(H)|_{r=0} = O(1)$, así que

$$\partial_r^L(\lambda\phi - \phi')|_{r=0} = O(1) - \frac{1}{\lambda} \sum_{j=0}^L f_{L+1,j}(\lambda) \partial_r^j \phi|_{r=0} - \frac{1}{\lambda} f_{L+1,L+1}(\lambda) \partial_r^{L+1} \phi|_{r=0}$$

pero tenemos que $\frac{1}{\lambda} \sum_{j=0}^L f_{L+1,j}(\lambda) \partial_r^j \phi|_{r=0} = O(1)$ y $f_{L+1,L+1}(\lambda) = O(1)$, por otro lado

$$\begin{aligned} \partial_r^{L+1} \phi|_{r=0} &= \partial_r^{L-1}(\lambda^2 \phi + V\phi - H)|_{r=0} \\ &= \lambda^2 \partial_r^{L-1} \phi|_{r=0} + \partial_r^{L-1}(V\phi - H)|_{r=0} \end{aligned}$$

donde $\partial_r^{L-1}(V\phi - H)|_{r=0} = O(1)$.

Así que en efecto $\frac{f_{L+1}(\phi)}{\lambda}$ es de la forma de $\widetilde{f}_L(\phi)$ dado por (3.16) y las condiciones (3.17). Por lo tanto estamos ahora en el caso L , para el cual teníamos la suposición que podíamos reducirlo al caso $L = 1$, por el lema 14 $\phi \in H^{L+2}$.

3.3. Demostración para la ecuación de onda en tres dimensiones

Queremos ver que la ecuación de onda en tres dimensiones con las condiciones de frontera correspondientes define un problema de Cauchy bien planteado, de la sección anterior sabemos ya que todos los problemas radiales (todos los problemas en una dimensión) están bien planteados, queremos usar estos resultados para hacer la demostración en tres dimensiones.

Empezaremos por considerar la ecuación de onda en tres dimensiones haciendo una descomposición en armónicos esféricos lo cual reducirá nuestro

3.3. DEMOSTRACIÓN PARA LA ECUACIÓN DE ONDA EN TRES DIMENSIONES 63

problema a una familia de ecuaciones 1-dimensionales las cuales ya habíamos analizado anteriormente, pero debemos notar que si bien para cada l fija tenemos el resultado deseado, al tomar l muy grande no sabemos si la cota que obtuvimos en los problemas 1-dimensionales es uniforme, es decir, puede ser que no podamos aplicar los teoremas usados en la sección anterior, y por lo tanto no podremos demostrar que el problema esta bien planteado.

Entonces lo que haremos sera introducir un nuevo espacio de Hilbert sobre el cual definiremos el operador A el que usaremos para plantear el problema de la ecuación de onda en tres dimensiones, y por medio de una serie de definiciones y teoremas llegaremos al resultado que buscamos.

Consideraremos la ecuación de onda en tres dimensiones

$$\Phi - \Delta\Phi = 0 \quad y \quad \dot{\Phi} = \Pi \quad (3.20)$$

con las condiciones de frontera

$$r\Pi + \partial_r(\Phi r)|_{r=R_2} = 0, \quad r\Pi - \partial_r(\Phi r)|_{r=R_1} = 0$$

en el dominio $\Omega = I \times S^2$, donde $I = (R_1, R_2)$. Haremos de nuevo una decomposición en armónicos esféricos de la forma $\Phi = \frac{1}{r} \sum_{lm} \phi_{lm}(r) Y^{lm}(\theta, \phi)$, entonces (3.20) se reduce a una familia de ecuaciones

$$\ddot{\phi}_{lm} - \phi_{lm}'' + \frac{l(l+1)}{r^2} \phi_{lm} = 0 \quad y \quad \dot{\phi}_{lm} = \pi_{lm} \quad (3.21)$$

con

$$\pi_{lm} + \partial_r \phi_{lm}|_{r=R_2} = 0, \quad \pi_{lm} - \partial_r \phi_{lm}|_{r=R_1} = 0$$

Notamos que en $r = 0$ el potencial $\frac{l(l+1)}{r^2}$ diverge, por lo que al elegir el dominio cortamos $r = 0$.

Entonces el problema de Cauchy formado por la ecuación de onda y las condiciones de frontera absorbentes será equivalente al problema global mas el problema en el dominio Ω donde cortamos el cero.

Así que para el problema en el dominio Ω dividimos el dato inicial en dos partes en las cuales será cero, evolucionamos por un tiempo pequeno y usamos el hecho de que el problema es lineal y la solución será la superposición de ambas soluciones, y hacemos esto sucesivamente.

3.3. DEMOSTRACIÓN PARA LA ECUACIÓN DE ONDA EN TRES DIMENSIONES 64

Sabemos que cada problema radial esta bien planteado, buscamos una forma de pegar cada problema radial para encontrar el resultado para el problema en tres dimensiones. Para esto veamos primero los espacios de Banach en los que debemos de trabajar para los problemas radiales y la forma de utilizar estos para construir el espacio de Banach que usaremos para el problema en tres dimensiones:

Notemos ahora con la descomposición en armónicos esféricos los coeficientes ϕ_{lm} , π_{lm} deben de cumplir:

Recordando las propiedades de los armónicos esféricos

$$\int \overline{Y^{lm}} Y^{l'm'} d\Omega = \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \quad \hat{g}^{AB} \int \hat{\nabla}_A \overline{Y^{lm}} \hat{\nabla}_B Y^{l'm'} d\Omega = l(l+1) \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

Pedir que $\Pi \in L^2$, es decir, $\int |\Pi|^2 d^3x < \infty$ implica

$$\Pi \in L^2 \quad \Rightarrow \quad \sum_{lm} \|\pi_{lm}\|_{L^2}^2 < \infty$$

Veamos ahora $\Phi \in H^1$, es decir, $\int (|\Phi|^2 + |\nabla\Phi|^2) d^3x < \infty$, el primer término de la integral implica $\sum_{lm} \|\phi_{lm}\|_{L^2}^2 < \infty$, para analizar el segundo término usemos coordenadas esfericas $\int |\nabla\Phi|^2 d^3x = \int \left((\partial_r\Phi)^2 + \frac{1}{r^2} |\hat{\nabla}\Phi|^2 \right) d^3x$, así que al introducir la descomposición en armónicos en cada uno de estos términos tendremos

$$r\partial_r\Phi = \sum_{lm} r \left(\frac{\phi_{lm}}{r} \right)' Y^{lm}, \quad \hat{\nabla}\Phi = \sum_{lm} \frac{\phi_{lm}}{r} \hat{\nabla} Y^{lm}$$

de las propiedades de los ármonicos esféricos tenemos que $\sum_{lm} \|r \left(\frac{\phi_{lm}}{r} \right)'\|_{L^2}^2 < \infty$ y $\sum_{lm} \|\frac{\phi_{lm}}{r}\|_{L^2}^2 l(l+1) < \infty$, así que

$$\Phi \in H^1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{lm} [\|\phi_{lm}\|_{H^1}^2 + l^2 \|\phi_{lm}\|_{L^2}^2] < \infty$$

De la misma forma encontramos que

$$\Phi \in H^2 \quad \Rightarrow \quad \sum_{lm} [\|\phi_{lm}\|_{H^2}^2 + l^2 \|\phi_{lm}\|_{H^1}^2 + l^4 \|\phi_{lm}\|_{L^2}^2] < \infty$$

y así sucesivamente lo que va a motivar la elección del producto escalar para estos nuevos espacios de Banach:

$$\langle \Phi, \Pi \rangle := \sum_{lm} \sum_{j=0}^k (1 + l^2)^{k-j} \left(\phi_{lm}^{(j)}, \psi_{lm}^{(j)} \right)_{L^2} \quad (3.22)$$

con $\Phi, \Pi \in H^L(\Omega)$.

Notemos que tenemos ahora una sucesión de espacios de Banach con norma $\sum_{j=0}^k (1 + l^2)^{k-j} \|\phi_{lm}^{(j)}\|_{L^2(I)}^2$, y queremos analizar los problemas radiales, para esto veamos los siguientes resultados:

Definición 7. Sean X_j espacios de Banach y $A_j : D(A_j) \subset X_j \rightarrow X_j$ generadores infinitesimales de semigrupos fuertemente continuos P_j cuasi-contractivos con cota exponencial b independiente de j : $\|P_j(t)\| \leq e^{bt}$ para todo $t \geq 0$ y para todo $j = 1, 2, 3, \dots$

Definimos el espacio

$$X := \{u = (u_1, u_2, \dots) \mid u_j \in X_j, \sum_{j=1}^{\infty} \|u_j\|_{X_j}^2 < \infty\}$$

con la norma $\|u\|_X := \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|u_j\|_{X_j}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, $u \in X$.

Lema 15. Se cumplen

1. $(X, \|\cdot\|_X)$ es espacio de Banach
2. $D := \{u = (u_1, u_2, \dots) \mid u_j \in X, u_j \neq 0 \text{ para un conjunto finito de } j\text{'s}\}$ es denso en X

Demostración

1. Veamos primero que en efecto $\|\cdot\|_X$ define una norma, notemos que tenemos la suma de términos positivos y por lo tanto la norma sera positiva, y solamente sera cero si cada u_j es cero lo que implica que u debe de ser cero, y se cumple también que

$$\|ku\|_X = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |k|^2 \|u_j\|_{X_j}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = (|k|^2)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|u_j\|_{X_j}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = |k| \|u\|_X$$

3.3. DEMOSTRACIÓN PARA LA ECUACIÓN DE ONDA EN TRES DIMENSIONES 66

para todo $k \in \mathbb{R}$, $u \in X$. Por ultimo usamos la desigualdad de Minkowski para demostrar la desigualdad del triangulo, y tenemos que $\|\cdot\|_X$ define una norma. Y notamos que como cada X_j es lineal entonces el espacio X sera también lineal.

Ahora demostraremos que $(X, \|\cdot\|_X)$ es completo.

Sea $\{u^n\}$ sucesión de Cauchy en X , es decir, $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|u_j^n - u_j^m\|_{X_j}^2 < \varepsilon \quad \forall n, m > N \quad (3.23)$$

por ser suma de términos positivos esto implica que $\|u_j^n - u_j^m\|_{X_j}^2 < \varepsilon$, $\forall n, m > N$. Pero sabemos que estos espacios son de Banach, así que existe u_j tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_j^n = u_j \in X$. De (3.23)

$$\sum_{j=1}^{\Lambda} \|u_j^n - u_j^m\|_{X_j}^2 < \varepsilon \quad \forall n, m > N, \forall \Lambda \in \mathbb{N}$$

$$m \rightarrow \infty \Rightarrow \sum_{j=1}^{\Lambda} \|u_j^n - u_j\|_{X_j}^2 \leq \varepsilon \quad \forall n > N, \forall \Lambda \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} \Lambda \rightarrow \infty &\Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \|u_j^n - u_j\|_{X_j}^2 \leq \varepsilon \quad \forall n > N \\ &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u^n = u \in X \end{aligned}$$

2. Por demostrar que dado cualquier punto $u \in X$ existe una sucesión $\{u^n\} \in D$ que converge a u :

Sea $u = (u_1, u_2, \dots) \in X$, y sea $u^n = (u_1, u_2, \dots, u_n, 0, 0, \dots)$, notamos que en efecto $\|u^n - u\|_X^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \|u_j^n - u_j\|_{X_j}^2 = \sum_{j=n+1}^{\infty} \|u_j\|_{X_j}^2 \rightarrow 0$ tomando el límite $n \rightarrow \infty$ por lo que $\lim_{n \rightarrow \infty} u^n = u \in X$ y esto demuestra que D es denso en X . \square

Teorema 10. *Sea el operador*

$$A : D(A) \subset X \rightarrow X, \quad Au := (A_1, A_2, \dots) \quad \text{con } u \in D(A)$$

3.3. DEMOSTRACIÓN PARA LA ECUACIÓN DE ONDA EN TRES DIMENSIONES 67

donde

$$D(A) := \{u = (u_1, u_2, \dots) \mid u_j \in D(A_j), \sum_{j=1}^{\infty} \|u_j\|_{X_j}^2 < \infty \text{ y } \sum_{j=1}^{\infty} \|A_j u_j\|_{X_j}^2 < \infty\}$$

con los espacios dados en la definición (7), entonces A es el generador infinitesimal de un semigrupo fuertemente continuo $P(t)$ tal que $\|P(t)\| \leq e^{bt}$, $\forall t \geq 0$

Demostración: Para demostrarlo usaremos la primera version del teorema de Lumer-Phillips (5), haremos la demostración en 5 pasos

1. $D(A) \subset X$ es denso:

Recordemos primero que $D \subset X$. Sean $\varepsilon > 0$ y $u = (u_1, u_2, \dots) \in D$. Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $u_j = 0$ para $j > N$. Puesto que $D(A_j) \subset X_j$ es denso, existe $v_j \in D(A_j)$ tal que $\|v_j - u_j\|_{X_j} \leq \frac{\varepsilon}{2^j}$, $j = 1, 2, \dots$, y tal que $v_j = 0$ para $j > N$ lo que implica que $v := (v_1, v_2, \dots) \in D(A)$ y tenemos que $\|v - u\|_X^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \|v_j - u_j\|_{X_j}^2 \leq \varepsilon \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \varepsilon$, por lo que $D(A)$ es denso en X .

2. A es cerrado:

Sea $u^n = (u_1^n, u_2^n, \dots) \in D(A)$ una sucesión tal que $u^n \rightarrow u \in X$ y $Au^n \rightarrow v \in X$.

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|u_j^n - u_j\|_{X_j}^2 \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \|A_j u_j^n - v_j\|_{X_j}^2 \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow u_j^n \rightarrow u_j \text{ en } X_j \text{ y } A_j u_j^n \rightarrow v_j \text{ en } X_j \quad \forall j = 1, 2, \dots$$

Fijando $j \in \mathbb{N}$: A_j cerrado implica $u_j \in D(A_j)$ y $A_j u_j = v_j$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \|A_j u_j\|_{X_j}^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \|v_j\|_{X_j}^2 < \infty$$

porque $v \in X \Rightarrow u \in D(A)$ y $Au = (A_1 u_1, A_2 u_2, \dots) = (v_1, v_2, \dots) = v$.

3. $A - b$ disipativo:

Sabemos que $B := A - b$ disipativo $\Leftrightarrow \|(\mu - B)u\|_X \geq \mu \|u\|_X$, $\forall \mu >$

3.3. DEMOSTRACIÓN PARA LA ECUACIÓN DE ONDA EN TRES DIMENSIONES 68

0 y $u \in D(B)$. Así que sean $\mu > 0$ y $u \in D(A)$:

$$\begin{aligned} \|(\mu - B)u\|_X^2 &= \|((\mu - B_1)u_1, (\mu - B_2)u_2, \dots)\|_X^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \|(\mu - B_j)u_j\|^2 \\ &\geq \sum_{j=1}^{\infty} (\mu \|u_j\|_{X_j})^2 = \mu^2 \|u\|_X^2 \end{aligned}$$

por lo tanto $A - b$ es disipativo.

4. $Rg(\lambda - A) \subset X$ es denso $\forall \lambda > b$:
Sean $\lambda > b$ y $v = (v_1, v_2, \dots) \in D$. Sabemos $\lambda - A_j : D(A_j) \rightarrow X_j$ es invertible, $u_j := (\lambda - A_j)^{-1}v_j \in D(A_j)$, entonces $u = (u_1, u_2, \dots) \in D(A)$, y satisface $(\lambda - A)u = ((\lambda - A_1)u_1, (\lambda - A_2)u_2, \dots) = (v_1, v_2, \dots) = v$
5. A es el generador infinitesimal de un semigrupo fuertemente continuo $P(t)$ tal que $\|P(t)\| \leq e^{bt}$, $\forall t \geq 0$:
Aplicando la primera version del teorema de Lumer-Phillips (5) sabemos que la cerradura de A genera un semigrupo fuertemente continuo, pero como demostramos en el segundo paso que A es cerrado, esto implica que A mismo sera el generador del semigrupo fuertemente continuo y el teorema queda demostrado. \square

Así que basta analizar las ecuaciones radiales:

Entonces para las ecuaciones radiales 3.21 definimos ahora el operador $A_{lm} : D(A_{lm}) \subset X_{lm} \rightarrow X_{lm}$:

$$AU = A \begin{pmatrix} \Phi \\ \Pi \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \sum_{lm} A_{lm} u_{lm} \cdot Y^{lm} = \frac{1}{r} \sum_{lm} \left(\phi'' - \frac{l(l+1)}{r^2} \phi \right) Y^{lm} = \begin{pmatrix} \Pi \\ \Delta \Phi \end{pmatrix}$$

con $U = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \sum_{lm} \phi_{lm} u_{lm} \cdot Y^{lm} \\ \frac{1}{r} \sum_{lm} \pi_{lm} u_{lm} \cdot Y^{lm} \end{pmatrix}$ donde

$$D(A_{lm}) = \{(\Phi, \pi) \in X_{lm} \mid \pi + \partial_r(\phi)|_{r=R_2} = 0, \pi - \partial_r(\phi)|_{r=R_1} = 0\}$$

3.3. DEMOSTRACIÓN PARA LA ECUACIÓN DE ONDA EN TRES DIMENSIONES 69

Con los espacios de Hilbert $X_{lm} = H^2 \times H^1$ y $X = \{U = \frac{1}{r} \sum_{lm} u_{lm} Y^{lm} \mid u_{lm} \in X_{lm}, \sum_{lm} \|u_{lm}\|_{X_{lm}}^2 < \infty\}$ y donde

$$\|U\|_{X_{lm}}^2 = \int_{R_1}^{R_2} \left[(l-1)l(l+1)(l+2)r^4 \phi^2 + (l-1)(l+2)r^2(u_1^2 + v_1^2) + \frac{1}{2}(u_2^2 + v_2^2) \right] dr$$

Así que podemos ahora escribir la ecuación de onda en tres dimensiones (3.20) con las condiciones de frontera correspondientes, definiendo el operador $A : D(A) \subset X \rightarrow X$:

$$AU = A \begin{pmatrix} \Phi \\ \Pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Pi \\ \Delta \Phi \end{pmatrix}$$

con $U = \begin{pmatrix} \Phi \\ \Pi \end{pmatrix} \in D(A)$ donde

$$D(A) = \{(\Phi, \Pi) \in X \mid r\Pi + \partial_r(\Phi r)|_{r=R_2} = 0, r\Pi - \partial_r(\Phi r)|_{r=R_1} = 0\}$$

escribiendo el dominio del operador en función de los operadores A_{lm} tenemos:

$$D(A) = \{u = \frac{1}{r} \sum_{lm} u_{lm}(r) Y^{lm}(\theta, \phi) \in X \mid u_{lm} \in D(A_{lm}) \text{ y } \sum_{lm} \|A_{lm} u_{lm}\|_{X_{lm}}^2 < \infty\}$$

Queremos analizar las ecuaciones radiales (3.21)

$$\ddot{\phi} - \phi'' + \frac{l(l+1)}{r^2} \phi = 0$$

con las condiciones de frontera

$$[r^2(\partial_t + \partial_r)]^{L+1} \phi|_{r=R_2} = 0, \quad [r^2(\partial_t + \partial_r)]^{L+1} \phi|_{r=R_1} = 0$$

Definimos

$$u_j = [r^2(\partial_t - \partial_r)]^j \phi, \quad v_j = [r^2(\partial_t + \partial_r)]^j \phi \quad (3.24)$$

así que podemos escribir ahora las condiciones de frontera como $u_{L+1}|_{r=R_2} = 0$ y $v_{L+1}|_{r=R_1} = 0$.

Lema 16.

$$r^2(\partial_t + \partial_r)u_j = 2jru_j - (l - j + 1)(l + j)r^2u_{j-1}$$

$$r^2(\partial_t - \partial_r)v_j = -2jrv_j - (l - j + 1)(l + j)r^2v_{j-1}$$

Demostración:

Notemos primero que podemos escribir la ecuación de onda como

$$r^2(\partial_t + \partial_r)(\partial_r - \partial_t)\phi = -l(l + 1)\phi$$

Hagamos ahora la demostración por inducción sobre j :

$j = 1$ tenemos que

$$\begin{aligned} (\partial_t + \partial_r)u_1 &= (\partial_t + \partial_r)r^2(\partial_t - \partial_r)\phi = r^2(\partial_t + \partial_r)(\partial_t - \partial_r)\phi + 2r(\partial_t - \partial_r)\phi \\ &= -l(l + 1)\phi + \frac{2u_1}{r} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow r^2(\partial_t + \partial_r)u_1 = 2ru_1 - l(l + 1)r^2\phi$$

de la misma forma

$$\begin{aligned} (\partial_t - \partial_r)v_1 &= (\partial_t - \partial_r)r^2(\partial_t + \partial_r)\phi = r^2(\partial_t + \partial_r)(\partial_t - \partial_r)\phi - 2r(\partial_t + \partial_r)\phi \\ &= -l(l + 1)\phi - \frac{2v_1}{r} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow r^2(\partial_t - \partial_r)v_1 = -2rv_1 - l(l + 1)r^2\phi$$

supongamos cierto para j .

$j + 1$:

Como es válido para j entonces tenemos que

$$r^2(\partial_t - \partial_r)(\partial_t + \partial_r)u_j = 2jr^2(\partial_t - \partial_r)\frac{u_j}{r} - (l - j + 1)(l + j)r^2(\partial_t - \partial_r)u_{j-1}$$

pero

$$(\partial_t + \partial_r)u_{j+1} = r^2(\partial_t + \partial_r)(\partial_t - \partial_r)u_j + \frac{2}{r}u_{j+1}$$

lo que implica que

$$r^2(\partial_t + \partial_r)u_{j+1} = 2(j + 1)ru_{j+1} - (l - j + 2)(l + j + 1)r^2u_j$$

de la misma forma se demuestra para v . \square

3.3. DEMOSTRACIÓN PARA LA ECUACIÓN DE ONDA EN TRES DIMENSIONES 71

Analicemos el caso $L=1$:

De las definiciones (3.24) y el lema (16) tenemos el sistema de ecuaciones ordinarias

$$\begin{aligned}
 \partial_t \phi &= \frac{u_1 + v_1}{2r} \\
 \partial_t u_1 &= \frac{u_1}{r} + \frac{u_2}{2r^2} - \frac{l(l+1)}{2} \phi \\
 \partial_t v_1 &= -\frac{v_1}{r} + \frac{v_2}{2r^2} - \frac{l(l+1)}{2} \phi \\
 (\partial_t + \partial_r) u_2 &= \frac{4u_2}{r} - (l-1)(l+2)u_1 \\
 (\partial_t - \partial_r) v_2 &= -\frac{4v_2}{r} - (l-1)(l+2)v_1
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

junto con las condiciones de frontera

$$u_2|_{r=R_1} = 0, \quad v_2|_{r=R_2} = 0$$

lo que motiva la elección de la norma siguiente para $U = \begin{pmatrix} \Phi \\ \Pi \end{pmatrix}$:

$$\|U\|_{X_{lm}}^2 = \int_{R_1}^{R_2} \left[(l-1)l(l+1)(l+2)r^4 \phi^2 + (l-1)(l+2)r^2(u_1^2 + v_1^2) + \frac{1}{2}(u_2^2 + v_2^2) \right] dr$$

para $l \geq 2$, notamos ahora que tenemos una forma cuadrática, y como es la suma de términos positivos será cero solamente cuando $\phi = 0 = \pi$, por lo que esta norma será equivalente a la norma canónica en el espacio $X_{lm} = H^2(I) \times H^1(I)$ para cada $l \geq 2$ fijo.

En este caso el espacio de Hilbert será $X_{lm} = H^2(I) \times H^1(I)$, donde $I = (R_1, R_2)$ y tenemos el operador A_{lm} :

$$A_{lm}u = \begin{pmatrix} \pi \\ \phi'' - \frac{l(l+1)}{r^2} \phi \end{pmatrix}, \quad u \in D(A_{lm})$$

cuyo dominio es

$$D(A_{lm}) = \left\{ U = \begin{pmatrix} \phi \\ \pi \end{pmatrix} \in H^3(I) \times H^2(I) \mid u_2|_{r=R_2} = 0, v_2|_{r=R_2} = 0 \right\}$$

3.3. DEMOSTRACIÓN PARA LA ECUACIÓN DE ONDA EN TRES DIMENSIONES 72

De la definición de la norma podemos calcular ahora la disipación de la energía

$$E = \frac{1}{2} \int_{R_1}^{R_2} \left[(l-1)l(l+1)(l+2)r^4\phi^2 + (l-1)(l+2)r^2(u_1^2 + v_1^2) + \frac{1}{2}(u_2^2 + v_2^2) \right] dr$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \int_{R_1}^{R_2} \left[(l-1)(l+2)r(u_1^2 - v_1^2) + \frac{2}{r}(u_2^2 + v_2^2) \right] dr + \frac{1}{2}(-u_2^2 + v_2^2)|_{R_1}^{R_2} \\ &\leq \frac{4}{R_1} \int_{R_1}^{R_2} [(l-1)(l+2)r^2(u_1^2 + v_1^2) + 2(u_2^2 - v_2^2)] dr \leq \frac{8}{R_1} E \end{aligned}$$

Recordamos que

$$E(t) = (u(t), u(t)) \Rightarrow \frac{dE}{dt} = 2\operatorname{Re}(u(t), Au(t)) \leq 2 \cdot \frac{4}{R_1} E$$

así que A_{lm} es disipativo con cota $\frac{4}{R_1}$ independiente de l , así que A_{lm} seguirá siendo disipativo aun para valores muy grandes de l que son los que estamos estudiando ahora.

Para $l = 0, 1$ elegimos la norma canonica en $H^2(I) \times H^1(I)$, pero sabemos de las secciones anteriores que en este caso A_{lm} es cuasidisipativo.

Así que la cota que elegimos sera $b = \max \left\{ \frac{4}{R_1}, b_0, b_1 \right\}$ donde b_0 y b_1 denotan las cotas para los casos $l = 0, 1$ respectivamente, los cuales serán números finitos.

Finalmente sabemos que para cada l fijo $\lambda - A_{lm} : D(A_{lm}) \subset X_{lm} \rightarrow X_{lm}$ es surjectivo para λ suficientemente grande.

Podemos ahora aplicar el teorema (10) y entonces el problema de Cauchy para $L = 1$ esta bien planteado.

Capítulo 4

Conclusiones

En esta tesis analizamos las ecuaciones de Maxwell en un fondo curvo considerando una frontera artificial esféricamente simétrica, buscamos condiciones de frontera [7, 4, 1, 3, 2, 5] tales que la reflexión es cero o decaiga muy rápidamente cuando r se hace muy grande, de esta forma obtenemos un único problema de Cauchy, el cual forma un problema de valores iniciales bien planteado.

Para esto hicimos una decomposición en armónicos esféricos para reducir las ecuaciones de Maxwell a una serie de problemas radiales, dos ecuaciones de onda para el coeficiente γ y el campo escalar ϕ , para los cuales encontramos una solución exacta, así como las correcciones a tal solución inducidas por la curvatura.

Después de esto introdujimos condiciones de frontera para los problemas radiales, notamos que en efecto para $l \leq L$ usando la forma de las soluciones salientes que habíamos encontrado anteriormente las condiciones de frontera eran perfectamente absorbentes, [4] es decir el coeficiente de reflexión era cero, y para $l \geq L$ teníamos que considerar la superposición de soluciones salientes y entrantes dando como resultado un coeficiente de reflexión para ondas monocromáticas distinto de cero pero que decae como $\frac{1}{(kR)^4}$. Finalmente escribimos las condiciones de frontera ahora para el tensor electromagnético $F_{\mu\nu}$ haciendo una elección de base dada por una tetraeda de Newmann-Penrose en términos de la cual escribimos las condiciones de frontera buscadas.

Teniendo ahora la ecuación en tres dimensiones reducida a una serie de ecuaciones en una dimension, junto con las condiciones de frontera nos preguntamos si el problema original 3-dimensional define un problema de Cauchy bien planteado, para esto estudiamos primero algunos conceptos de la teoría de semigrupos [6], lo cual reduce al problema a verificar si los operadores generan semigrupos fuertemente continuos, lo cual implicará que definen un problema de Cauchy bien planteado, para esto presentamos el teorema de Lumer-Phillips en sus dos versiones (5),(6), usando este teorema demostramos que el problema en una dimension esta bien planteado, nos gustaría simplemente 'pegar' estos resultados para demostrar que el problema tridimensional esta bien planteado, pero nos encontramos con el problema de que debemos de tener una cota uniforme pues cuando l toma valores muy grandes necesitamos que las condiciones de los teoremas utilizados se sigan cumpliendo, para esto elegimos una serie de nuevos espacios con su norma correspondiente y ahi demostramos que el problema en 3 dimensiones esta bien planteado.

Bibliografía

- [1] Olivier Sarbach, *Absorbing boundary conditions for Einstein's field equations*, IOP Publishing 2007.
- [2] Luisa T Buchman, Olivier Sarbach , *Towards absorbing outer boundaries in general relativity*, IOP Publishing 2006.
- [3] Luisa T Buchman, Olivier Sarbach, *Improved outer boundary conditions for Einstein's field equations*, IOP Publishing 2007
- [4] Alvin Bayliss, Eli Turkel, *Radiation boundary conditions for wave-like equations*, John Wiley and Sons Inc. 1980
- [5] Bjorn Engquist, Andrew Majda, *Absorbing Boundary Conditions for the numerical simulation of waves*, Mathematics of computation, Volume 31, number 139, 1977
- [6] A.Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Applied Mathematical Sciences Volume 44, Springer.
- [7] Horst Reinhard Beyer, *Beyond partial differential equations*, Springer (1898)
- [8] James M. Bardeen, William H. Press, *Radiation fields in the Schwarzschild background*, J. Math. Phys., Vol. 14, No.1 . 1973