Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo
y
Universidad Nacional Autónoma de México

Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas

Instituto de Física y Matemáticas
y
Centro de Ciencias Matemáticas

Topología de permutación en el mapping class group de una superficie

T E S I N A

Que para optar por el grado de Maestro en Ciencias Matemáticas
Presenta:

Oscar Rutilio Molina Medrano

Asesor: Dr. José Ferrán Valdez Lorenzo
Centro de Ciencias Matemática

Morelia, Michoacán - MARZO 2022.

ÍNDICE GENERAL

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar debo agradecer a mis padres Feliciano Molina y Aida Medrano por estar siempre atentos a mi bienestar, salud y educación. A mis hermanos Pamela, Ignacio e Idalia por apoyarme siempre en mis decisiones y estar a mi lado en las buenas y en las malas, ser mi soporto moral en tiempos difíciles y mi compañia en momentos de alegría.

Quiero agradecer a mi asesor, el Dr. Ferrán Valdez por su valiosa guía, sus consejos y por estar siempre al pendiente de mí y ser mi referente académico en el camino de la ciencia. A mis profesores de la licenciatura Msc. Jorge Martínez y Lic. Tobías Martínez por su apoyo, orientación y por animarme a realizar mis estudios de posgrado. Quiero agradecer también a mi amigo, compatriota y colega del posgrado Kevin Rodíguez por hacer más amena mi estadía en México. También a mis amigos de El Salvador, Joaquín, Amilcar, Romeo y Jhonatan por su invaluable apoyo y amistad.

Por último, agradezco al CONACyT y su programa de becas por apoyarme económicamente durante los años que duró mi formación académica en el Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas.

Resumen

El presente trabajo tiene por objetivo definir una topología en el grupo modular de una superficie orientable que coincida con la topología heredada de la topología compacto-abierta. Esta topología está determinada por la acción del grupo modular en el grafo de curvas de la superficie y se conoce como topología de permutación.

PALABRAS CLAVE: Superficie, curva simple, sistema de Alexander, método de Alexander, grupo modular, topología compacto-abierta, grafo de curvas, topología de permutación.

Abstract

The present work aims to define a topology in the modular group of an orientable surface that coincides with the topology inherited from the compact-open topology. This topology is determined by the action of the modular group in the surface graph and is known as a permutation topology.

INTRODUCCIÓN

Dada una superficie orientable, conexa y con frontera posiblemente vacía, el conjunto de todos los homeomorfismos de S junto con la topología compacto-abierta y la composición de funciones definen un grupo topológico al que llamaremos $Homeo(S)$, denotemos por $Homeo^+(S)$ al subconjunto de $Homeo(S)$ que consta de todos aquellos homeomorfismos que preservan la orientación de S y por $Homeo_0(S)$ a la componente conexa por caminos de id_S relativa a la frontera de S.

Definimos el *grupo modular* (topológico) de S (mapping class group en inglés) como

$$Mod(S) := Homeo^+(S)/Homeo_0(S).$$

Y el *grupo modular (topológico) extendido* de S como

$$Mod^*(S) := Homeo(S)/Homeo_0(S).$$

ambos tienen estructura de grupo topológico inducida por la topología compacto-abierta.

Un hecho importante es que $Mod^*(S)$ resulta ser el grupo de automorfismos del grafo de curvas de S, Nikolai Ivanov en [**Iva97**] demuestra este hecho para superficies de tipo finito y de género al menos dos, posteriormente este resultado fue extendido de forma independiente por M. Korkmaz [**Ker96**] y F.Luo [**Luo00**] para superficies de tipo finito de género cero y al menos cinco ponchaduras y para superficies con género uno y al menos dos ponchaduras. La prueba para superficies de tipo infinito sin frontera se atribuye a Hernández-Morales-Valdez y puede consultarse en [**HMV18**] y de forma independiente por Bavard-Dowdall-Rafi en [**BDR18**].

Esta igualdad nos permitirá definir una topología más combinatoria en $Mod(S)$ la cuál está determinada por la acción de $Mod(S)$ en el grafo de curvas.

El objetivo principal de este trabajo es demostrar que esta última topología es justamente la compacto-bierta, esta igualdad es consecuencia del método de Alexander y nos permitirá demostrar de forma sencilla algunos resultados interesantes como que cada compacto en $Mod(S)$ tiene interior vacío, entre otros.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

En el presente capítulo presentamos algunas definiciones y resultados básicos que serán utilizados a lo largo del presente escrito así como el grupo modular de una superficie, el cuál es un grupo topológico y será nuestro objeto de estudio.

1.1. Definiciones básicas.

Una superficie es una 2-variedad, Haussdorff y segundo numerable. Esta puede ser orientable o no. En el presente trabajo nos concentraremos en las superficies orientables pero también se presentarán algunos resultados en superficies no orientables. En adelante cuando hablemos de una superficie nos estaremos refiriendo a una superficie orientable conexa y sin frontera a menos que se diga lo contrario.

Nos interesa clasificar a las superficies en dos clases que nos serán de mucho interés, esta clasificación se basa en lo que llamamos "el tipo topológico" de la superficie.

Definición 1.1 *Dada una superficie S, diremos que S es de tipo finito si su grupo fundamental es finitamente generado, si éste no es el caso diremos que S es de tipo infinito.*

Sea S es una superficie, denotemos por $Ends(S)$ al espacio de fines [1] de S y $g(S)$ al género de S, entonces podemos dar una definición equivalente al concepto de ser S de tipo finito o infinito. Diremos que S es de tipo finito si $g(s) < \infty$ y $|Ends(S)| < \infty$, en caso

[1] Para más información del espacio de fines ver [**Loh17**].

contrario diremos que S es de tipo infinito.

Si S es una superficie de tipo finito, entonces S está completamente determinada por su género, la cardinalidad de $Ends(S)$ y la cantidad de componentes conexas de su frontera a las que llamaremos g, n y b respectivamente. En este caso podemos denotar a S por $S^n_{g,b}$. En el caso que $b = 0$ denotaremos a S simplemente por S^n_g, si además $n = 0$, entonces S es la superficie cerrada de género g y la denotaremos por S_g.

Definición 1.2 *Dada una superficie S, una curva cerrada simple en S es un encaje topológico $\gamma : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow S$. Por simplicidad usaremos la palabra curva para referirnos a una curva cerrada simple.*

Si S es una superficie con frontera no vacía, denotaremos por $Int(S)$ y ∂S al interior y frontera de S respectivamente. En adelante cuando nos refiramos a S como una superficie con frontera supondremos que las componentes conexas de ∂S son curvas cerradas simples en S a las cuales llamaremos curvas frontera de S. De esta manera las componentes de ∂S serán compactas.

Definición 1.3 *Sea S una superficie y γ una curva en S, diremos que γ es una curva esencial si no es isotópica a un punto, una ponchadura o una componente de frontera de S. Si $S \backslash \gamma$ no es conexa, diremos que γ es una curva separadora, en caso contrario diremos que γ es una curva no separadora.*

Otra definición que usaremos recurrentemente es la de arco en una superficie.

Definición 1.4 *Dada una superficie S sin frontera, un arco simple (o arco para abreviar) en S es un encaje topológico $\gamma : (0, 1) \hookrightarrow S$ que admite una extensión continua $\hat{\gamma} : [0, 1] \to S \cup Ends(S)$ tal que $\hat{\gamma}(0), \hat{\gamma}(1) \in Ends(S)$ a los cuales llamaremos puntos finales de γ. Diremos que un arco γ en S es esencial si $\hat{\gamma}$ no es isotópico a un punto en $S \cup Ends(S)$ relativo a sus puntos finales.*

Podemos extender la definición de arco a una superficie con frontera no vacía S, permitiendo que éste sea una función contínua $\gamma : [0, 1] \to S$ tal que γ encaja $(0, 1)$ en $Int(S)$ y $\gamma(0), \gamma(1) \in \partial S$, diremos que un arco es *esencial* si no es isotópico a un arco contenido en ∂S relativo a ∂S.

Un resultado inmediato es que en una superficie de tipo infinito S, todo arco esencial en S es propio. Existe un concepto que describe la forma en cómo dos arcos o curvas esenciales en una superficie se entrelazan, éste es el concepto de posición mínima. Nosotros solamente usaremos una caracterización de este concepto, para más información se puede consultar [**FM12**].

Definición 1.5 *Sean α y β dos arcos o curvas esenciales en una superficie S, diremos que α y β forman un bígono si existe un disco $D \subset S$ de tal forma que ∂D consta de dos arcos uno de los cuales está contenido en α y otro en β.*

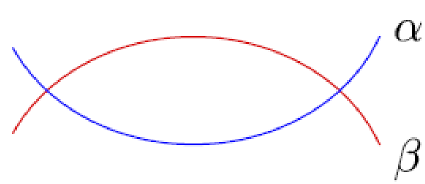

Figura 1.1: Bígono formado por las curvas α y β

Definición 1.6 *Dados dos curvas o arcos esenciales en una superficie, diremos que estos están en posición mínima si no forman bígonos.*

Definición 1.7 *Sea Γ una colección de curvas o arcos esenciales en una superficie S, diremos que Γ es localmente finita, si para cada punto en $x \in S$ existe una vecindad abierta de x que intersecta a un número finito de elementos en Γ.*

Definición 1.8 *Sea S una superficie, $T \subseteq S$ una subsuperficie y Γ una colección de curvas y arcos en S que está contenida en T. Diremos que Γ llena a T si $Int(T \setminus A)$ es una unión disjunta de discos y discos ponchados.*

Ahora definiremos lo que llamaremos *saturación principal* de una superficie topológica de tipo infinito, esta será una forma de expresar a la superficie en cuestión como la unión de subsuperficies de tipo finito encajadas a las cuales les pediremos ciertas condiciones que las vuelvan "interesantes". Una de ellas es una cota inferior a cierto número llamado la complejidad de una superficie, el cuál definimos a continuación.

Definición 1.9 *Sea $S = S_g^n$ una superficie de tipo finito y sin frontera, definimos la complejidad de S como $\kappa(S) := 3g + n - 3$. Si $S = S_{g,b}^n$ es una superficie con frontera no vacía, entonces $Int(S)$ es homemorfo a S_g^{n+b} así que podemos definir la complejidad de S como $\kappa(S) := \kappa(S_g^{n+b})$.*

Ahora sí, estamos listos para definir qué es una saturación principal de una superficie y nos será de mucha ayuda para extrapolar ciertos resultados de superficies de tipo finito a superficies de tipo infinito.

Definición 1.10 *Sea S una superficie de tipo infinito y $\{\Sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de subsuperficies de S tales que $\Sigma_n \subset \Sigma_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$. Diremos que $\{\Sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una saturación principal de S, si la familia $\{\Sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ cubre a S y para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumplen las siguientes condiciones:*

1. *$Int(\Sigma_n)$ es una superficie de tipo finito.*
2. *$Int(\Sigma_n) \subset Int(\Sigma_{n+1})$.*
3. *$\partial\Sigma_n \setminus \partial S$ es unión disjunta y finita de curvas esenciales separadoras en S.*
4. *El interior de cada componente conexa de $\Sigma_{n+1} \setminus \overline{\Sigma_n}$ tiene complejidad al menos 4.*

En el caso que Σ_n sea compacta para cada $n \in \mathbb{N}$, diremos que $\{\Sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una saturación de S por subsuperficies compactas. Notemos que una superficie S es $\sigma-$compacto[2] así que siempre podemos encontrar una saturación de S de este estilo.

La Figura 1.2 se la debemos a [**HMV17**]. En ésta podemos apreciar una saturación principal para la superficie de género infinito y exactamente un fin; también conocida como "el monstruo del lago Ness".

[2]Un espacio es $\sigma-$compacto si es unión numerable de conjuntos compactos.

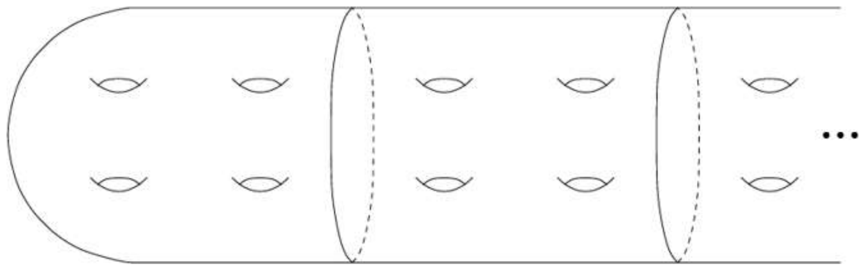

Figura 1.2: una saturación principal para "el monstruo del lago Ness."

1.2. El método de Alexander.

El método de Alexander es una herramienta que se utiliza para determinar si dos homeomorfismos de una superficie S son isotópicos. Éste afirma que dos homeomorfismos de S son isotópicos si y sólo si tienen la misma acción en las clases de isotopía de una familia de curvas y arcos esenciales en S con ciertas características particulares a la cual llamaremos sistema de Alexander y lo definiremos a continuación.

Definición 1.11 *Sea S una superficie de tipo finito o infinito y $\Gamma = \{\gamma_i\}_{i\in I}$ una colección de curvas y arcos esenciales en S. Decimos que Γ es un sistema de Alexander si satisface las siguientes condiciones:*

1. *Los elementos de Γ están en posición mínima por pares.*
2. *No existen dos elementos diferentes en Γ que sean isotópicos.*
3. *Si $i, j, k \in I$ son índices distintos, entonces al menos uno de los conjuntos $\gamma_i \cap \gamma_j$, $\gamma_i \cap \gamma_k$, $\gamma_j \cap \gamma_k$ es vacío.*

Iniciamos con el método de Alexander para superficies de tipo finito, véase **[FM12]** para más detalles.

Teorema 1.12 *(Método de Alexander para superficies de tipo finito). Sea S una superficie de tipo finito de complejidad mayor a uno y $S \notin \{S_1^2, S_2\}$, entonces existe un sistema de Alexander finito Γ tal que si $f \in Homeo^+(S)$ preserva las clases de isotopía de los elementos de Γ, entonces f es isotópico a Id_S.*

Como es de esperarse existe una versión del método de Alexander para superficies de tipo infinito. Ésta fué formulada para superficies orientables por Hernández-Morales-Valdez en [**HMV17**] y para superficies no orientables por Hernández-Hidber en [**HH21**]. Nosotros solamente presentaremos la versión para superficies orientables que aparece en [**HMV17**]. El lector también podrá encontrar una demostración del método de Alexander escrita por Roberta Shapiro en [**Sha21**].

Teorema 1.13 *(Método de Alexander para superficies de tipo infinito). Sea S una superficie de tipo infinito (posiblemente con frontera no vacía), entonces existe un sistema de Alexander infinito Γ en S localmente finito tal que cualquier homeomorfismo en $Homeo^+(S)$ que preserva las clases de isotopía de los elementos en Γ, es isotópico a Id_S.*

Definición 1.14 *Si S es una superficie y Γ es un sistema de Alexander en S tal que todo elemento de $Homeo(S)$ que fija las clases de isotopía de los elementos de Γ es isotópico a la identidad, entonces diremos que Γ es un sistema de Alexander determinista.*

1.3. El grupo modular de una superficie.

Consideremos dos espacios topológicos X e Y, denotemos por $C(X,Y)$ al conjunto de todas las funciones contínuas de X en Y. Dados $K \subset X$ compacto y $U \subset Y$ abierto definamos

$$V(K,U) := \{f \in C(X,Y) : f(K) \subseteq U\}$$

Entonces la familia de todos estos conjuntos forman una subbase para una topología en $C(X,Y)$ conocida como la *topología compacto-abierta.*

Si S es una superficie, entonces el conjunto de todos los homeomorfismos de S junto con la topología compacto-abierta y la composición de funciones definen un grupo topológico al que llamaremos $Homeo(S)$. Al subgrupo de $Homeo(S)$ que consiste de todos los homeomorfismos de S que preservan la orientación lo denotaremos por $Homeo^+(S)$, finalmente denotaremos por $Homeo_0(S)$ a la componente conexa por caminos de Id_S.

En caso que S sea una superficie con frontera no vacía. Definimos a $Homeo(S)$, $Homeo^+(S)$ y $Homeo_0(S)$ como antes, pero pediremos que los homeomorfismos en cuestión fijen puntualmente a ∂S.

Proposición 1.15 *Dada S una superficie, entonces $Homeo_0(S)$ es un subgrupo normal y cerrado de $Homeo(S)$.*

Demostración. Es claro que $Homeo_0(S)$ es un subgrupo de $Homeo^+(S)$. Tomemos $f \in Homeo^+(S)$ y $g \in Homeo_0(S)$, entonces existe $H : [0,1] \times S \to S$ una isotopía entre g e Id_S, definamos $G : [0,1] \times S \to S$ por $G(t,x) := f(H(t, f^{-1}(x)))$, esta es isotopía entre $f \circ g \circ f^{-1}$ e Id_S por lo que $Homeo_0(S)$ es un subgrupo normal de $Homeo^+(S)$.

Sólo nos resta probar que $Homeo_0(S)$ es cerrado. Consideremos $f \in Homeo^+(S) \setminus Homeo_0(S)$, entonces $[f] \neq [Id_S]$ por lo que existe un sistema de Alexander determinista Γ y $\alpha \in \Gamma$ tal que $[f(\alpha)] \neq [\alpha]$.

Sea N_α una pequeña vecindad regular[3] de α y consideremos el abierto $V(\alpha, f(N_\alpha))$. Si $[g] \in V(\alpha, f(N_\alpha))$, entonces $[f(\alpha)] = [g(\alpha)]$ por lo que $[g(\alpha)] \neq [\alpha]$ y así $V(\alpha, f(N_\alpha))$ es una vecindad abierta de f que está contenida en $Homeo^+(S) \setminus Homeo_0(S)$ lo que prueba que $Homeo_0(S)$ es cerrado en $Homeo^+(S)$.

Por último, dado que $Homeo^+(S)$ es un subgrupo cerrado de $Homeo(S)$ y de índice dos, entonces $Homeo_0(S)$ es subgrupo normal y cerrado de $Homeo(S)$ ■

Ahora estamos listos para definir un grupo topológico muy particular y que será el objeto de estudio del presente trabajo.

Definición 1.16 *Si S es una superficie, entonces el grupo modular (topológico) de S (mapping class group en inglés) es el grupo topológico*

$$Mod(S) := Homeo^+(S)/Homeo_0(S).$$

Y el grupo modular (topológico) extendido de S como el grupo topológico

$$Mod^*(S) := Homeo(S)/Homeo_0(S).$$

Equivalentemente podemos definir a $Mod(S)$ como el grupo topológico obtenido de $Homeo(S)^+$ módulo la relación de isotopía y de igual forma para $Mod^*(S)$.

[3] En nuestro caso entenderemos por vecindad regular a una vecindad homeomorfa a un cilindro abierto.

Ejemplo 1.17 *Estos son algunos ejemplos del grupo modular de superficies de tipo finito. El cálculo de estos se puede encontrar en* ***[FM12]****.*

$$
\begin{aligned}
&Mod(S_0) = 1\\
&Mod(S_0^1) \cong 1\\
&Mod(S_0^2) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\\
&Mod(S_0^3) \cong Sym(\{1,2,3\})\\
&Mod(S_0^4) \cong PSL(2,\mathbb{Z}) \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\mathbb{Z})\\
&Mod(S_1) \cong SL(2,\mathbb{Z})\\
&Mod(S_1^1) \cong SL(2,\mathbb{Z})
\end{aligned}
$$

El método de Alexander es de mucha utilidad para estudiar al grupo modular de una superficie, a continuación presentamos algunos resultados que se pueden obtener aplicando el método de Alexander.

El siguiente resultado lo podemos observar con detalles en [**FM12**].

Teorema 1.18 *Si $g \geq 3$, entonces el centro de $Mod(S_g)$ es trivial.*

Tenemos un resultado similar para superficies de tipo finito y sin frontera, véase [**LL19**].

Teorema 1.19 *Si S es una superficie de tipo infinito, entonces todo subgrupo normal de $Mod(S)$ tiene centro trivial.*

El siguiente teorema es también resultado de aplicar el método de Alexander a superficies de tipo finito y nos será de utilidad en el capítulo 2.

Proposición 1.20 *Sea S una superficie de tipo finito, entonces $Mod(S)$ es discreto.*

Demostración.

Del Ejemplo 1.17 podemos apreciar que $Mod(S)$ es discreto si $\kappa(S) \leq 1$.

Ahora, supongamos que $S = S_1^2$. Dado que todo grupo topológico es un espacio homogéneo[4], entonces bastará con demostrar que $\{[Id_S]\}$ es un conjunto abierto de $Mod(S)$. Para ello podemos usar el método de Alexander para encontrar un abierto W que solamente contiene a la identidad y a la involución hiperelíptica.

Sea K un pantalón[5] compacto en la mitad superior de S_1^2 (ver Figura 1.3.A) y U la mitad superior de S_1^2, entonces la imagen de K bajo la involución hiperelíptica no está contenida en U por lo que $W \cap V(K, U) = \{Id_S\}$, así $Mod(S)$ es discreto.

Si $S = S_2$ aplicamos nuevamente el método de Alexander para obtener un abierto W que solamente contiene a la identidad y la involución hiperelíptica. Consideremos K como la mitad superior de S_2 (ver Figura 1.3.B) y U una pequeña vecindad regular dentro de K, haciendo el mismo análisis de antes obtenemos que $W \cap V(K, U) = \{Id_S\}$ y por tanto $Mod(S)$ es discreto.

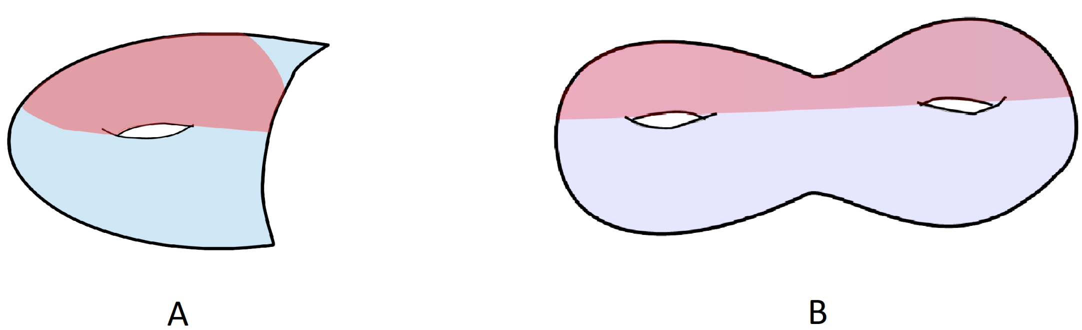

Figura 1.3:

[4]Se dice que un espacio topológico X es homogéneo si para cualesquiera $x, y \in X$ existe un homeomorfismo $\varphi : X \to X$ tal que $\varphi(x) = y$.

[5]Entenderemos por pantalón a una superficie (posiblemente con frontera) cuyo interior es homeomorfo a S_0^3.

Por último supongamos que $\kappa(S) > 1$ y $S \notin \{S_1^2, S_2\}$ y consideremos $\Gamma = \{\gamma_1, \cdots, \gamma_n\}$ un sistema de Alexander determinista finito para S. Para cada $\gamma_i \in \Gamma$ sea $N(\gamma_i)$ una pequeña vecindad regular de γ_i, notemos que si $f \in V(\gamma_i, N(\gamma_i))$, entonces $f(\gamma_i)$ es isotópico a γ_i y se tiene que $\bigcap_{i=1}^{n} V(\gamma_i, N(\gamma_i))$ es un abierto en $Homeo_0(S)$ que contiene a Id_S. Si consideramos la proyección de este abierto al cociente $Homeo(S)/Homeo_0(S)$ obtenemos un abierto que contiene únicamente a $[Id_S]$. Luego $Mod(S)$ es discreto. ■

CAPÍTULO 2

LA TOPOLOGÍA DE PERMUTACIÓN EN EL GRUPO MODULAR

En este capítulo presentamos una nueva topología para $Mod(S)$. Esta nos permirá dar una definición alternativa y más combinatoria de $Mod(S)$ así como demostrar algunas propiedades interesantes.

2.1. El grafo de curvas

Definición 2.1 *Consideremos una superficie S. Denotemos por $\mathcal{C}(S)$ al grafo cuyo conjunto de vértices consta de todas las clases de isotopía de curvas esenciales en S. Y dados dos vértices $[\alpha]$ y $[\beta]$ estos estarán unidos por una arista si α y β son disjuntos módulo isotopía. A $\mathcal{C}(S)$ lo llamaremos el grafo de curvas de S.*

Al *conjunto de vértices* de $\mathcal{C}(S)$ lo denotaremos por $\mathcal{C}_0(S)$ y al *grupo de automorfismos* de $\mathcal{C}(S)$ lo denotaremos por $Aut(\mathcal{C}(S))$.

Dado $[f] \in Mod^*(G)$ definamos $f_* : \mathcal{C}_0(S) \to \mathcal{C}_0(S)$ por $f_*([\alpha]) := [f(\alpha)]$, podemos extender f_* a un automorfismo ϕ_f de $\mathcal{C}(S)$. Con esto podemos definir un homomorfismo de grupos

$$\Psi : Mod^*(S) \longrightarrow Aut(\mathcal{C}(S))$$
$$f \longmapsto \phi_f$$

Resulta que Ψ es un isomorfismo para casi todas las superficies, Nikolai Ivanov en [**Iva97**] demuestra este hecho para superficies de típo finito y de género al menos dos, posteriormente este resultado fue extendido de forma independiente por M. Korkmaz [**Kor96**] y F.Luo [**Luo00**] para superficies de tipo finito de género cero y al menos cinco ponchaduras y para superficies con género uno y al menos tres ponchaduras. La prueba para superficies de típo infinito sin frontera se atribuye a Hernández-Morales-Valdez y puede consultarse en [**HMV18**] y de forma independiente por Bavard-Dowdall-Rafi en [**BDR18**]. Nosotros resumiremos estos resultados en los siguientes dos teoremas.

Teorema 2.2 *Si S es una superficie de tipo finito con complejidad mayor a uno diferente de S_1^2 y S_2, entonces $Mod^*(S)$ es isomorfo a $Aut(\mathcal{C}(S))$.*

Teorema 2.3 *Si S es una superficie de tipo infinito, entonces $Mod^*(S)$ es isomorfo a $Aut(\mathcal{C}(S))$.*

Con esto obtenemos una nueva manera de ver al grupo modular de una superficie.

Corolario 2.4 *Si S es una superficie de tipo finito de complejidad mayor a uno diferente de S_1^2 y S_2 ó de tipo infinito, entonces $Mod(S)$ es un subgrupo de $Aut(\mathcal{C}(S))$.*

2.2. La topología de permutación

Sea S una superficie. Si A es una colección finita de elementos en $\mathcal{C}_0(S)$ definamos

$$U_A := \{[f] \in Mod(S) : [f] \cdot [a] = [a], \forall [a] \in A\}.$$

Y definamos la *topología de permutación* en $Mod(S)$ como a la topología cuya base consiste de todos los elementos de $[f] \cdot U_A := \{[f] \cdot [\alpha] : [\alpha] \in A\}$, donde $[f] \in Mod(S)$ y $A \subseteq \mathcal{C}_0(S)$ es finito.

En el capítulo anterior vimos que si S es una superficie de tipo finito, entonces $Mod(S)$ con la topología compacto-abierta es un grupo discreto, tal y como podríamos esperar esto también es cierto si consideramos a $Mod(S)$ con la topología de permutación.

Proposición 2.5 *Si S es una superficie de tipo finito de complejidad mayor a uno diferente de S_1^2 y S_2 , entonces $Mod(S)$ es discreto con la topología de permutación.*

Demostración. Bastará con demostrar que $\{[Id_S]\}$ es un conjunto abierto de $Mod(S)$. Sea $\Gamma = \{\gamma_1, \cdots, \gamma_n\}$ un sistema de Alexander determinista para S. Para cada $\gamma_i \in \Gamma$ consideremos $U_i := U_{\{\gamma_i\}}$ y definamos $V := \bigcap_{i=1}^n U_i$.

Notemos que si $[f] \in V$, entonces $[f] \cdot [\gamma_i] = [\gamma_i]$ para cada $\gamma_i \in \Gamma$, luego por el método de Alexander tendremos que $[f] = [Id_S]$ y así $V = \{[id_S]\}$ es un abierto en $Mod(S)$ con la topología de permutación. ■

Estamos listos para demostrar el resultado principal de este trabajo: que las dos topologías definidas para el grupo modular de una superficie coinciden, empezaremos demostrando esto para las superficies de tipo finito.

Teorema 2.6 *Si S es una superficie de tipo finito de complejidad mayor a uno diferente de S_1^2 y S_2, entonces las topologías de permutación y la compacto-abierta en $Mod(S)$ coindicen.*

Demostración. La Proposición 1.20 nos dice que $Mod(S)$ es discreto con la topología inducida por la topología compacto-abierta. La Proposición 2.5 nos dice que $Mod(S)$ es discreto con la topología de permutación, luego el homomorfismo identidad $i : Mod(S) \to Mod(S)$ es un isomorfismo topológico y por tanto estas dos topologías coinciden. ■

Ahora demostraremos la equivalencia de las topologías en el caso de superficies de tipo infinito.

Teorema 2.7 *En una superficie S de tipo infinito, las topologías de permutación y la compacto-abierta en $Mod(S)$ coinciden.*

Demostración. Sean $\{\Sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una saturación de S por subsuperficies compactas. Dado $n \in \mathbb{N}$ tomemos Γ_n un sistema de Alexander determinista para Σ_n. Definamos

$$U_n := \{[f] \in Mod(S) : [f|_{\Sigma_n}] = [Id_S|_{\Sigma_n}]\},$$
$$U_{\Gamma_n} := \{[f] \in Mod(S) : [f] \cdot [\alpha] = [\alpha], \forall \alpha \in \Gamma_n\}$$

Notemos que por definición $\{U_{\Gamma_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base local de la identidad de S en la topología de permutación. Demostraremos este mismo hecho para $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en la topología compacto-abierta y posteriormente probaremos que $U_n = U_{\Gamma_n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Iniciaremos probando que los U_n son abiertos en esta topología.

Supongamos que $\Gamma_n = \{\gamma_1, \cdots, \gamma_r\}$, para cada curva γ_i llamemos k_i a su imagen en Σ_n y sea W_i una pequeña vecindad regular de k_i, consideremos $W = \bigcap_{i=1}^{n} V(K_i, U_i)$. Así, si $[f] \in W$, entonces f deja invariante las clases de isotopía de los γ_i y el método de Alexander implica que $[f|_{\Sigma_n}] = [Id_S|_{\Sigma_n}]$ y por tanto $[Id_S] \in W \subseteq U_n$.

Notemos que si $f \in U_n$, entonces $[f|_{\Sigma_n}] = [Id_S|_{\Sigma_n}]$ y por consiguiente $[f] \in [f]\cdot W \subseteq U_n$, luego U_n es abierto en la topología compacto-abierta [1].

Por definición $U_{\Gamma_n} \subseteq U_n$ así que solo restaría demostrar la otra inclusión. Tomemos $[f] \in U_n$, entonces $[f]$ fija las clases de equivalencia de curvas en Γ_n y según el método de Alexander esto implica que $[f|_{\Sigma_n}] = [Id_S|_{\Sigma_n}]$, de aquí que $[f] \in U_{\Sigma_n}$.

Hemos demostrado la existencia de una misma base local de $[Id_S]$ en $Mod(S)$ con la topología de permutación y la compacto-abierta. Por tanto podemos concluir que estas dos topologías coinciden. ■

La importancia de la igualdad entre la topología de permutación y la compacto-abierta es que nos da una descripción más combinatoria de la topología en $Mod(S)$ y nos permite demostrar algunos resultados interesantes de forma sencilla, tales como el siguiente teorema.

[1] Es un hecho que si U es abierto de un grupo topológico G, entonces $f \cdot U := \{f \cdot u : u \in U\}$ es abierto para cada $f \in G$.

Teorema 2.8 *Si S es una superficie de tipo infinito, entonces todo compacto en $Mod(S)$ tiene interior vacío.*

Demostración. Supongamos que K es un compacto en $Mod(S)$ con interior no vacío, sin pérdida de generalidad podemos asumir que $[Id_S] \in K$. Deberá existir un $A \subset \mathcal{C}_0(S)$ finito tal que $U_A \subset K$. Consideremos $[c] \in \mathcal{C}_0(S)$ de tal forma que c sea disjunto a las curvas de A. Sea T_c el giro de Dehn[2] con respecto a c, entonces $T_c \in U_A$ por lo que $T_c^n := (T_c)^n \in U_A$ para cada natural n, así $\{T_c^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un conjunto discreto, cerrado e infinito en K por lo que K no es compacto. ■

A parte de esta podemos mencionar más propiedades interesantes que pueden demostrarse de forma sencilla usando la topología de permutación, nosotros solo las mencionaremos pero para más detalles se puede consultar [**Vla19**].

Proposición 2.9 *Si S es una superficie de tipo infinito, entonces $Mod(S)$ es un grupo polaco[3].*

Proposición 2.10 *Si S es una superficie de tipo infinito, entonces $Mod(S)$ no es ni localmente compacto ni compactamente generado.*

Corolario 2.11 *Si S es una superficie de tipo infinito, entonces $Mod(S)$ es homeomorfo al espacio de Baire $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (que a su vez es homeomorfo al espacio de números irracionales $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$).*

[2]Para más información sobre el giro de Dehn véase [**Iva01**] ó [**FM12**].

[3]Un grupo polaco es un grupo topológico completamente metrizable y separable.

BIBLIOGRAFÍA

[BDR18] Juliette Bavard, Spencer Dowdall, Kasra Rafi, *Isomorphisms Between Big Mapping Class Groups*, International Mathematics Research Notices, Volume 2020, Issue 10, May 2020, Pages 3084–3099, https://doi.org/10.1093/imrn/rny093

[FM12] Benson Farb and Dan Margalit. *A primer on mapping class groups*. Volume 49 of Princeton Mathematical Series. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2012

[HH21] Jesús Hernández Hernández and Cristhian E. Hidber. *First integral cohomology group of the pure mapping class group of a non-orientable surface of infinite type*. arXiv:2104.02684v1, 2021

[HMV17] Jesús Hernández Hernández, Israel Morales, Ferrán Valdez. *Alexander Method for infinite-type surfaces*. The Michigan Mathematical Journal, Volume 68, 2017

[HMV18] Jesús Hernández Hernández, Israel Morales, Ferrán Valdez. *Isomorphisms between curve graphs of infinite-type surfaces are geometric*. Rocky Mountain Journal of Mathematics, 2018

[Iva01] Nikolai V. Ivanov. *Handbook of Geometric Topology*. chapter 12 - Mapping Class Groups*, 523-633. North-Holland, 2001.

[Iva97] Nikolai V. Ivanov. *Automorphism of complexes of curves and of Teichmüller spaces*. Internat. Math. Res. Notices 14 (1997), 651–666.

[Kor96] Mustafa Korkmaz. *Complexes of curves and mapping class groups*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1996. Thesis (Ph.D.)-Michigan State University

[LL19] Justin Lanier and Marissa Loving. *Centers of subgroups of big mapping class groups and the tits alternative*. arXiv preprint arXiv:1904.10060, 2019.

[Loh17] Clara Löh. *Geometric group theory*. Universitext. Springer, Cham, 2017

[Luo00] F. Luo. *Automorphisms of complexes of curves*. Topology, 39(2):283-298, 2000.

[Sha21] Roberta Shapiro. *An Alexander method for infinite-type surfaces*. arXiv preprint arXiv:2107.06909, 2021

[Vla19] Nicholas G. Vlamis. *Notes on the topology of mapping class groups*, http://qcpages.qc.cuny.edu/ nvlamis/ Papers/AIM_Notes.pdf, 2019