

**Universidad Michoacana de San
Nicolás de Hidalgo**
Instituto de Física y Matemáticas

Tesis:

**Aditividad para matrices y $(0,1)$ -aditividad
para pirámides**

que para obtener el grado de

Doctor en Matemáticas

presenta

M. en M. Miguel Santoyo Mondragón

Asesor:

Dr. Ernesto Vallejo Ruiz

Morelia, Mich., Noviembre de 2008.

A mis papás Ofelia Mondragón (†) y J. Jesús Santoyo con todo mi cariño y
respeto

Agradecimientos

Quiero agradecer al Dr. Ernesto Vallejo Ruiz por todo lo que aprendí de él durante el tiempo que trabajé bajo su asesoría, y por el tiempo que dedicó a las múltiples revisiones que fueron necesarias para darle a este trabajo su forma final. También quiero agradecerle su apoyo en la gestión de todos los recursos económicos que me permitieron realizar este trabajo. Es importante mencionar que los resultados presentados en esta tesis fueron obtenidos en trabajo conjunto con el Dr. Vallejo.

Muchas gracias a los miembros del comité sinodal por la revisión de esta tesis, por el tiempo que dedicaron a la lectura de la misma y por sus valiosos comentarios y sugerencias.

Quiero agradecer a las instituciones que apoyaron económicamente este proyecto: CONACYT (beca de doctorado No. 124451), Instituto de Física y Matemáticas de la U.M.S.N.H. (extensión de beca) y DGAPA UNAM IN 103508.

Muchas gracias también al Instituto de Matemáticas de la U.N.A.M., Unidad Morelia por proveerme de los medios físicos para la realización de este proyecto (cubículo, biblioteca, equipo de cómputo, salones de clase, etc.), de manera especial al Dr. Daniel Juan Pineda, jefe de la Unidad. Muchas gracias a la Lic. Lidia González, a la Lic. Adriana Briseño, a la Lic. Mireya Fabián y al M.C. Miguel A. Magaña, por su amable y eficiente atención siempre que necesité de su ayuda. Muchas gracias a todos los amigos y compañeros del instituto por su camaradería fraterna y por todas las cosas que aprendí de cada uno de ustedes.

Finalmente, quiero agradecer a mis familiares y amigos que estuvieron presentes en momentos difíciles y cuya ayuda fue de gran valor para que yo pudiera concluir este proyecto: Fernando Hernández, Rosa M. Santoyo, Adrián Alejandro, Juan Manuel Tarelo y Arturo Tarelo.

Índice general

Introducción	VIII
1. Preliminares	1
1.1. Estructura afín de \mathbb{R}^m y teoría de convexidad	1
1.2. Soluciones básicas factibles	6
1.3. Lema de Farkas para vectores en \mathbb{R}^m	16
1.4. Lema de Farkas para vectores en \mathbb{Q}^m	23
2. Obstrucciones de aditividad para matrices y pirámides	28
2.1. Notación y resultados conocidos	30
2.2. Configuraciones débilmente malas	39
2.3. Diagramas de flechas en $\mathbf{B}(p, q)$	51
2.4. Obstrucciones de aditividad para matrices de dimensión 2	55
2.5. Pesos de las configuraciones débilmente malas para pirámides	65
2.6. Obstrucciones de aditividad en 3×3 y 3×4	71
2.7. F -aditividad y su relación con aditividad	87
2.8. Configuraciones débilmente malas de peso 3	92
2.9. Obstrucciones de aditividad para matrices con entradas repetidas	97
3. Una matriz mínima-real en $\mathbb{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$	103
3.1. Matrices mínimas-reales	105
3.2. Dos bases para $F(\mathbf{0}, \mathbf{0})$	107
3.3. La matriz de norma mínima en $\mathbb{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$	120
A. Complemento de la Sección 3.3	125
A.1. Prueba del Teorema 3.3.2	125
A.2. Algunas demostraciones	133

<i>Índice general</i>	V
A.3. El Algoritmo (Teorema 3.3.2)	145
Bibliografía	154

Índice de figuras

1.	Los 1-márgenes de X son sus vectores de sumas por secciones.	IX
2.	Un diagrama de flechas \mathcal{Z} .	XII
3.	Diagrama de flechas \mathcal{Z}_{33} .	XIV
4.	Diagramas de flechas $\mathcal{Z}_{34(a)}$ y $\mathcal{Z}_{34(b)}$.	XIV
2.1.	Diagrama de flechas \mathcal{Z}_{33} .	28
2.2.	Diagramas de flechas $\mathcal{Z}_{34(a)}$ y $\mathcal{Z}_{34(b)}$.	29
2.3.	Gráfica $G(D)$.	39
2.4.	Gráfica $G(D)$ y conf. déb. mala W para $G(D)$.	40
2.5.	Configuraciones débilmente malas: W , W_1 y W_2 .	43
2.6.	Configuraciones débilmente malas W y \widehat{W} .	45
2.7.	Configuraciones débilmente malas W y \overline{W} .	48
2.8.	$-W$ es c.d.m. para Y (a la derecha).	51
2.9.	El cuasidiagrama \mathcal{Z}° y el diagrama $\mathcal{Z} := \mathcal{Z}^\circ \uplus (\varphi)$.	53
2.10.	Cuasidiagramas: \mathcal{Z}° y $\mathcal{Z} \setminus \mathcal{Z}^\circ$.	54
2.11.	Un diagrama de flechas \mathcal{Z}_W asociado a W .	57
2.12.	Diagramas de flechas $\mathcal{Z}_{22(a)}$ y $\mathcal{Z}_{22(b)}$.	60
2.13.	Algunos pares de flechas que por (3) no pueden existir en \mathcal{Z}_W .	62
2.14.	Algunos pares de flechas que por (4) no pueden existir en \mathcal{Z}_W .	62
2.15.	Diagrama de flechas de Fishburn (\mathcal{Z}_8).	69
2.16.	$G(A'_8)$ y la c.d.m. correspondiente.	71
2.17.	Diagrama de flechas \mathcal{Z}_{33} .	73
2.18.	Configuración (débilmente) mala para $X := G(A)$.	74
2.19.	Diagramas de flechas, $\mathcal{Z}_{34(a)}$, $\mathcal{Z}_{34(b)}$.	75
2.20.	Diagramas de flechas $\mathcal{Z}_{34(1)}$, $\mathcal{Z}_{34(2)}$, $\mathcal{Z}_{34(3)}$ y $\mathcal{Z}_{34(4)}$.	75
2.21.	Configuraciones débilmente malas para $G(A)$ y $G(B)$.	77
2.22.	Diagramas de flechas $\mathcal{Z}_{44(a)}$, $\mathcal{Z}_{44(b)}$ y $\mathcal{Z}_{44(c)}$.	78
2.23.	Diagramas de flechas $\mathcal{Z}_{36(a)}$ y $\mathcal{Z}_{36(b)}$.	80

2.24. Cuatro casos posibles.	81
2.25. Caso i).	82
2.26. Casos a analizar.	84
2.27. Situación en caso de que $\mathbf{z} = (1, 3)$	85
2.28. Situación en caso de que $\mathbf{z} = (1, 2)$	85
2.29. Para ciertos $\mathbf{w}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{w}_3$ y \mathbf{z}_4	86
2.30. \mathbf{w}_2 y \mathbf{z}_3 en el segundo renglón de $\mathbf{B}(3, 4)$	86
2.31. Obstrucción de F -aditividad para A	89
3.1. Subconjunto escalera J y sus puntos añadibles.	108
3.2. Regiones de \mathbf{R} consideradas en los términos de s_{kl}	115
A.1. $I = G_1 \cup G_2$	136
A.2. $I_t \setminus I_s = R_1 \cup R_2 \cup U$	144

Introducción

Comenzamos por definir un poco de notación que necesitamos para plantear los problemas que motivan este trabajo y los resultados que presentamos.

Para cada entero positivo n , denotamos por $[n]$ al conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$. Fijamos tres enteros positivos p , q y r y denotamos al conjunto de puntos enteros en un rectángulo de tamaño $p \times q$ como $\mathbf{R} = \mathbf{B}(p, q) = [p] \times [q]$, y al conjunto de puntos enteros en una caja de dimensión 3 de tamaño $p \times q \times r$ como $\mathbf{B} = \mathbf{B}(p, q, r) := [p] \times [q] \times [r]$. El rectángulo \mathbf{R} tiene un orden parcial definido por $\mathbf{h} \leq \mathbf{k}$ si y sólo si $h_i \leq k_i$, para $i = 1, 2$. La caja \mathbf{B} tiene también un orden parcial \leq definido en la misma forma.

Una *matriz de dimensión 3* (real) es una función $X : \mathbf{B} \rightarrow \mathbb{R}$. Una *(0,1)-matriz de dimensión 3* es una matriz $X : \mathbf{B} \rightarrow \{0, 1\}$. Una (0,1)-matriz de dimensión 3 X es una *pirámide* [24, 27, 28, 29] si para cualesquiera $\mathbf{s}, \mathbf{t} \in \mathbf{B}$

$$\mathbf{s} \leq \mathbf{t} \text{ y } X(\mathbf{t})=1 \implies X(\mathbf{s}) = 1.$$

Para cualquier matriz $X : \mathbf{B} \rightarrow \mathbb{R}$ consideramos sus *1-márgenes*, también llamados *sumas por planos* ó *rayos X de dimensión 2*, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_p)$, $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_q)$ y $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_r)$, definidos por

$$a_i = \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^r X(i, j, k), \quad b_j = \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^r X(i, j, k) \quad \text{y} \quad c_k = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q X(i, j, k),$$

ver Figura 1.

Sea X una (0,1)-matriz de dimensión 3. Entonces X es de *unicidad* si no existe una (0,1)-matriz $Y \neq X$ que tenga los mismos 1-márgenes que X . Decimos que X es *(0,1)-aditiva* si existen funciones

$$f_1 : [p] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_2 : [q] \rightarrow \mathbb{R} \text{ y } f_3 : [r] \rightarrow \mathbb{R},$$

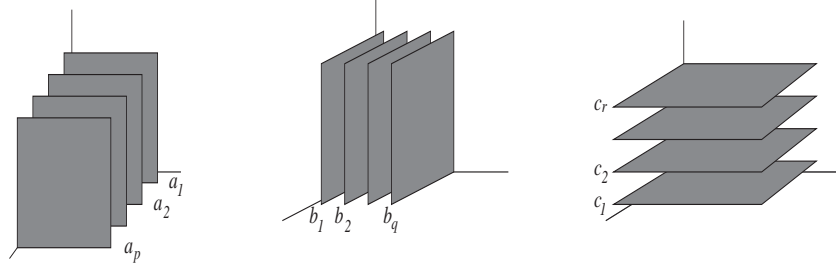


Figura 1: Los 1-márgenes de X son sus vectores de sumas por secciones.

tales que para todo $\mathbf{k} \in \mathbf{B}$,

$$X(\mathbf{k}) = 1 \iff \sum_{i=1}^3 f_i(k_i) \geq 0.$$

Sea X una $(0,1)$ -matriz de dimensión 3. Una *configuración débilmente mala* para X es una matriz no idénticamente cero $W \in \mathbf{F}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ con entradas enteras, tal que si $W(\mathbf{k}) > 0$ entonces $X(\mathbf{k}) = 1$ y si $W(\mathbf{k}) < 0$ entonces $X(\mathbf{k}) = 0$. El *peso* de una configuración débilmente mala W es la suma de sus entradas positivas; esto es

$$w(W) = \sum_{\mathbf{k}, W(\mathbf{k}) > 0} W(\mathbf{k}).$$

Note que $w(W) = -\sum_{\mathbf{k}, W(\mathbf{k}) < 0} W(\mathbf{k})$. Una *configuración mala* para X es una configuración débilmente mala que tiene entradas en $\{-1, 0, 1\}$.

Las nociones de $(0,1)$ -matriz, configuración (débilmente) mala, $(0,1)$ -aditividad y unicidad pueden ser consideradas para cualquier dimensión $m \geq 2$ de manera similar a como lo hemos hecho para $m = 3$. Cada $(0,1)$ -matriz X de dimensión m puede ser identificada con un subconjunto finito S de \mathbb{N}^m mediante la condición

$$X(\mathbf{k}) = 1 \iff \mathbf{k} \in S.$$

Las nociones antes mencionadas así como los resultados relativos a éstas tienen sus respectivas versiones en el lenguaje que considera las matrices como subconjuntos finitos de \mathbb{N}^m ; de hecho estas nociones fueron introducidas utilizando este lenguaje en [8].

En sus orígenes, las nociones de unicidad, (0,1)-aditividad, configuración mala y configuración débilmente mala fueron definidas respecto al conjunto \mathcal{H}_m de hiperplanos canónicos de \mathbb{R}^m ; esto es, $\mathcal{H}_m := \{H_i : 1 \leq i \leq m\}$, donde para $i = 1, \dots, m$, $H_i := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : x_i = 0\}$, ver Figura 1 para $m = 3$. En [8], Fishburn et al. prueban que un subconjunto finito $S \subseteq \mathbb{N}^m$ es de unicidad si y sólo si S no tiene configuraciones malas, y que S es (0,1)-aditivo si y sólo si S no tiene configuraciones débilmente malas [8, Teoremas 1 y 2]. Concluyen con esto que (0,1)-aditividad implica unicidad. Note que en [8] a la noción de (0,1)-aditividad Fishburn et al. le llaman aditividad, nosotros le llamaremos aditividad a otra noción que más adelante definiremos. Posteriormente Fishburn y Shepp [9] extendieron las nociones de (0,1)-aditividad y unicidad, considerándolas respecto a ciertos conjuntos finitos \mathcal{H} de subespacios lineales de \mathbb{R}^m un poco más generales que \mathcal{H}_m . Los nuevos conceptos fueron llamados \mathcal{H} -unicidad y \mathcal{H} -aditividad. Como antes, Fishburn y Shepp probaron que \mathcal{H} -unicidad, resp. \mathcal{H} -aditividad, era equivalente a la ausencia de \mathcal{H} -configuraciones malas, resp. \mathcal{H} -configuraciones débilmente malas [9, Teoremas 2.1 y 2.2]; y concluyeron que \mathcal{H} -aditividad implica \mathcal{H} -unicidad. Note que las nociones de unicidad y (0,1)-aditividad como fueron definidas en [8] corresponden a \mathcal{H}_m -unicidad y \mathcal{H}_m -aditividad respectivamente. Entre las instancias de \mathcal{H} para las que más se ha estudiado sobre \mathcal{H} -unicidad y \mathcal{H} -aditividad, están el caso en que \mathcal{H} es un conjunto de líneas [8, 9, 13, 14, 16, 28, 29] y el caso $\mathcal{H} = \mathcal{H}_m$ [4, 10, 18, 23, 24, 26, 27, 28, 29].

Problema 1. ¿Existe una cota superior en el peso de las \mathcal{H}_m -configuraciones malas que es necesario considerar para determinar si un subconjunto finito de \mathbb{N}^m , $m \geq 3$, es un conjunto de \mathcal{H}_m -unicidad? [8, §5]. La misma pregunta se puede plantear para \mathcal{H}_m -aditividad y en general para \mathcal{H} -unicidad y \mathcal{H} -aditividad para cualquier \mathcal{H} .

En [8, Teo. 3] Fishburn et al. demuestran que para determinar tanto \mathcal{H}_2 -unicidad como \mathcal{H}_2 -aditividad de cualquier subconjunto finito de \mathbb{N}^2 es suficiente considerar \mathcal{H}_2 -configuraciones malas de peso 2, y que \mathcal{H}_2 -unicidad es equivalente a \mathcal{H}_2 -aditividad; ver también [16, §1.2.2] y [29, §5.4] para información sobre resultados relacionados. Por otro lado, si \mathcal{H} es un conjunto de tres o más líneas por el origen, en general no existe una cota superior en el peso de las \mathcal{H} -configuraciones malas que es necesario considerar para determinar \mathcal{H} -unicidad [9, 13, 14]. Sin embargo, la cuestión original [8, §5] sobre \mathcal{H}_m -unicidad, para $m \geq 3$, permaneció abierta. Tampoco se conocen,

previo al presente trabajo y a [22], respuestas para \mathcal{H} -aditividad, excepto para el caso $\mathcal{H} = \mathcal{H}_2$ [9, §2.6].

En este trabajo probamos que para $m = 3$, la respuesta al Problema 1 para \mathcal{H}_3 -unicidad (que en adelante llamaremos simplemente unicidad) y para \mathcal{H}_3 -aditividad (que llamaremos simplemente (0,1)-aditividad) es negativa. Enunciamos el resultado en el lenguaje de (0,1)-matrices:

Resultado 1. *No existe una cota en el peso de las configuraciones malas (resp. débilmente malas) que es necesario considerar para determinar unicidad (resp. (0,1)-aditividad) de cualquier (0,1)-matriz de dimensión 3.*

A continuación estudiamos algunos resultados conocidos relativos a la noción de aditividad para matrices de dimensión 2, que requerimos para exponer las ideas importantes detrás del Resultado 1. Posteriormente expondremos dichas ideas.

Una *matriz de dimensión 2* de tamaño $p \times q$ con entradas reales es una función $A : \mathbb{R} = \mathbb{B}(p, q) \rightarrow \mathbb{R}$. Para cualquier matriz $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ consideramos sus *1-márgenes*, también llamados *sumas por líneas* ó *rayos X de dimensión 1*, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_p)$ y $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_q)$, definidos por

$$a_i := \sum_{j=1}^q A(i, j) \quad \text{y} \quad b_j := \sum_{i=1}^p A(i, j).$$

Una matriz $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es *doblemente graduada* si para cualesquiera $\mathbf{h}, \mathbf{k} \in \mathbb{R}$ tenemos que

$$\mathbf{h} \triangleleft \mathbf{k} \implies A(\mathbf{h}) \geq A(\mathbf{k}).$$

Una matriz doblemente graduada con entradas en \mathbb{N}_0 se conoce como *partición plana*. Es claro que los 1-márgenes de una partición plana son particiones. Una matriz $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es *aditiva* si existen vectores $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^q$ tales que para cualesquiera $(i, j), (k, l) \in \mathbb{R}$

$$A(i, j) > A(k, l) \implies x_i + y_j > x_k + y_l.$$

La noción de aditividad fue introducida en [27] para matrices con entradas en \mathbb{N}_0 y extendida luego a matrices reales en [18], ver también [28, 29]. Note

que la noción de aditividad depende solamente de las relaciones de orden entre las entradas de una matriz, y no de sus valores específicos.

Una *flecha* en $\mathbf{R} = \mathbf{B}(p, q)$ es un par ordenado $\varphi = (\mathbf{z}, \mathbf{w}) \in \mathbf{R}^2$ con $\mathbf{z} \neq \mathbf{w}$. Pensamos a \mathbf{z} como el *punto inicial* y a \mathbf{w} como el *punto final* de φ . Un *diagrama de flechas* es una sucesión de flechas no necesariamente distintas $\mathcal{Z} = (\varphi_1, \dots, \varphi_t)$ tales que cada renglón y cada columna de \mathbf{R} tiene tantos puntos iniciales como puntos finales de flechas de \mathcal{Z} , contando multiplicidades. La figura 2 ilustra un diagrama de flechas.

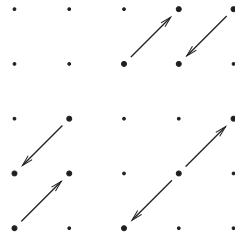


Figura 2: Un diagrama de flechas \mathcal{Z} .

El Teorema 2.4.5, que aparece en [22], afirma que una matriz $A : \mathbf{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es no aditiva si y sólo si existe un diagrama de flechas $\mathcal{Z} = ((\mathbf{z}_1, \mathbf{w}_1), \dots, (\mathbf{z}_t, \mathbf{w}_t))$, tal que $A(\mathbf{z}_i) > A(\mathbf{w}_i)$, para $i = 1, \dots, t$. Cuando A es no aditiva, a un diagrama de flechas como en el Teorema 2.4.5 le llamamos *obstrucción de aditividad para A*.

Sea $A : \mathbf{R} \rightarrow \mathbb{N}_0$ una matriz y sea r un entero positivo tal que $r \geq \max\{A(\mathbf{h}) : \mathbf{h} \in \mathbf{R}\}$. Entonces, la gráfica de A (introducida en [18]) es la $(0,1)$ -matriz de dimensión 3, $\mathbf{G}(A) : \mathbf{B}(p, q, r) \rightarrow \{0, 1\}$ definida por

$$\mathbf{G}(A)(i, j, k) := \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \leq k \leq A(i, j); \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Note que el valor de r no es relevante, lo que realmente importa es el conjunto de todos los $\mathbf{h} \in \mathbf{B}$ que satisfacen que $\mathbf{G}(A)(\mathbf{h}) = 1$. Note también que A es una partición plana si y sólo si $\mathbf{G}(A)$ es una pirámide (ver Lema 5.4 en [28]).

Sea $A : \mathbf{R} \rightarrow \mathbb{N}_0$. Por el Teorema 1 en [27] (ver también Teorema 14 en [29]) A es aditiva si y sólo si $\mathbf{G}(A)$ es $(0,1)$ -aditiva. Si A es no aditiva (y $\mathbf{G}(A)$ no es $(0,1)$ -aditiva) existe una manera natural de asociar a cada obstrucción de aditividad \mathcal{Z} para A una configuración débilmente mala W para $\mathbf{G}(A)$,

tal que el peso de W es precisamente el número de flechas de \mathcal{Z} (contando multiplicidades).

Ahora usamos estas consideraciones para explicar cómo se obtiene el Resultado 1. Resulta que aditividad para matrices de dimensión 2 es una noción muy similar a cierta noción de aditividad que se ha estudiado desde hace tiempo para órdenes lineales en el rectángulo $[p] \times [q]$, a la que en este trabajo llamamos F -aditividad (ver [6, 7] y las referencias que ahí aparecen). Fishburn mostró [6, 7] que para determinar F -aditividad de órdenes lineales en los rectángulos $[3] \times [q]$ (para cualquier entero positivo q) se necesita considerar obstrucciones de F -aditividad arbitrariamente grandes.

Nosotros adaptamos los resultados de Fishburn a matrices con entradas en \mathbb{N}_0 , y probamos que para cada entero par $q \geq 4$ existe una partición plana A_q no aditiva, tal que A_q tiene una obstrucción de aditividad con q flechas distintas y no tiene obstrucciones de aditividad con menos de q flechas. Entonces para cada entero par $q \geq 4$, la pirámide $X_q := G(A_q)$ no es $(0,1)$ -aditiva; probamos que X_q tiene una configuración mala de peso q (asociada a la mencionada obstrucción de aditividad para A_q) y que X_q no tiene configuraciones débilmente malas de peso menor que q . De esto se sigue el Resultado 1.

El siguiente problema que consideramos en este trabajo es sobre el estudio de las obstrucciones de aditividad para matrices de dimensión 2. Al estudiar tales obstrucciones podemos suponer sin perder generalidad que nuestras matrices tienen 1-márgenes débilmente decrecientes y entradas en \mathbb{N}_0 . Con estas hipótesis, uno tiene por el Corolario 3 de [29] que toda matriz de dimensión 2 que es aditiva es partición plana (ver también [22, Lema 2.6] y [23, Teo. 1'(i)]), así que podemos restringirnos al estudio de las obstrucciones de aditividad para particiones planas. Como toda partición plana de tamaño $2 \times q$ (q entero positivo) es aditiva [29, Lema 8], nos interesa estudiar obstrucciones de aditividad para particiones planas de tamaño $p \times q$, para enteros p y q mayores o iguales que 3:

Problema 2. Para cada par de enteros p y q mayores o iguales que 3, dar una lista completa de obstrucciones de aditividad para particiones planas de tamaño $p \times q$.

El término “lista completa” se refiere a una lista de diagramas de flechas (para cada par de enteros p y q mayores o iguales que 3) tal que dada cualquier partición plana A de tamaño $p \times q$ no aditiva, algún elemento de nuestra lista

es una obstrucción de aditividad para A .

Sabemos que si una matriz A de tamaño $2 \times q$ es no aditiva, entonces A no es partición plana. En este caso es fácil dar una obstrucción de aditividad para A con dos flechas. El estudio de las obstrucciones de aditividad se complica considerablemente al tratar con matrices (particiones planas) que tienen 3 ó más renglones y 3 ó más columnas, que es el caso del Problema 2. En este trabajo presentamos los siguientes resultados al respecto:

Resultado 2 (Teo. 2.6.2). *Sea $A : \mathbf{B}(3, 3) \rightarrow \mathbb{N}_0$ una partición plana. Entonces A es no aditiva si y sólo si \mathcal{Z}_{33} ó $-\mathcal{Z}_{33}$ es una obstrucción de aditividad para A (ver Figura 3).*

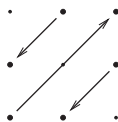


Figura 3: Diagrama de flechas \mathcal{Z}_{33} .

Resultado 3 (Teo. 2.6.7). *Sea $A : \mathbf{B}(3, 4) \rightarrow \mathbb{N}_0$ una partición plana que no tiene entradas repetidas. Entonces A es no aditiva si y sólo si, o bien A tiene una submatriz de tamaño 3×3 que es no aditiva, o bien alguno de los diagramas de flechas $\mathcal{Z}_{34(a)}$, $\mathcal{Z}_{34(b)}$, $-\mathcal{Z}_{34(a)}$ ó $-\mathcal{Z}_{34(b)}$ es una obstrucción de aditividad para A (ver Figura 4).*

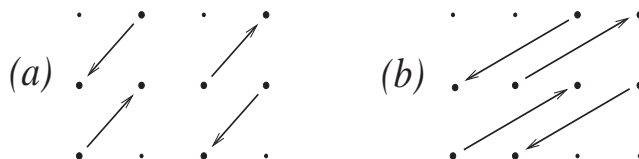


Figura 4: Diagramas de flechas $\mathcal{Z}_{34(a)}$ y $\mathcal{Z}_{34(b)}$.

Cuando una partición plana A de tamaño $p \times q$ es no aditiva, entonces la pirámide $X = \mathbf{G}(A)$ no es (0,1)-aditiva, por lo tanto existe alguna configuración débilmente mala W para X , y podemos suponer que W es de peso

mínimo (para X). Existe una manera natural de asociar a W un diagrama de flechas \mathcal{Z}_W , que resulta ser una obstrucción de aditividad para A .

En este trabajo adaptamos a matrices con entradas en \mathbb{N}_0 el Lema 5.1 en [7] (sobre obstrucciones de F -aditividad para órdenes lineales), para obtener una serie de restricciones que cumplen las flechas de una obstrucción de aditividad \mathcal{Z}_W obtenida como en el párrafo anterior. Con esto, haciendo un análisis caso por caso concluimos que cuando una partición plana A de tamaño 3×3 , resp. de tamaño 3×4 sin entradas repetidas, es no aditiva, entonces A tiene una de las obstrucciones de aditividad indicadas en el Resultado 2, resp. Resultado 3. Para la otra implicación en ambos resultados, sabemos que cuando una matriz A de tamaño $p \times q$ tiene una obstrucción de aditividad, entonces A es no aditiva.

También son importantes en este trabajo las nociones para una matriz A de dimensión 2 de ser mínima-real y de ser mínima (si A tiene entradas en \mathbb{N}_0). El tercer problema que consideramos en este trabajo tiene que ver con estas nociones. Enseguida explicamos esto detalladamente.

Fijamos vectores $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_p)$ y $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_q)$ con entradas en \mathbb{N}_0 y tales que $\sum_{i=1}^p a_i = \sum_{j=1}^q b_j$. $F(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ denotará al conjunto de matrices reales que tienen por 1-márgenes a los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} , $T(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ al conjunto de matrices en $F(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ con entradas no negativas, y $M(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ al conjunto de matrices en $T(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ con entradas en \mathbb{N}_0 . $F(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ es un espacio afín, $T(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ es un politopo que se conoce como el *politopo de transporte*, y $M(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ es el conjunto de puntos reticulares de $T(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Consideramos la noción de mayorización para vectores en \mathbb{R}^m (que denotamos por \preceq) que generaliza la noción de orden de dominación para particiones, ver por ejemplo [12, 17].

Sea $A \in F(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. La π -sucesión de A , denotada por $\pi(A)$, es el vector en \mathbb{R}^{pq} formado por las entradas de A arregladas en orden débilmente decreciente. Decimos que A es *mínima-real* [18] si no existe otra matriz $B \in F(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ tal que $\pi(B) \prec \pi(A)$; si $A \in M(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, A es *mínima* [23] si no existe otra matriz $B \in M(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ tal que $\pi(B) \prec \pi(A)$. Es claro que si una matriz $A \in M(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ es mínima-real entonces A es mínima, el recíproco en general no es cierto (ver Ejemplo 3.1.5).

Las matrices mínimas juegan un papel importante en tomografía discreta porque contribuyen al estudio de unicidad para subconjuntos finitos de \mathbb{N}^3

((0,1)-matrices de dimensión 3) [3, 8, 9, 23, 24, 27]; en teoría de representaciones del grupo simétrico ayudan a obtener información sobre las componentes mínimas, con respecto al orden de dominación de particiones, del producto de Kronecker de dos caracteres complejos irreducibles del grupo simétrico [1, 25]; y en teoría de investigación de operaciones éstas aparecen de manera natural como la solución óptima (de norma euclidiana mínima) entre las matrices solución del problema clásico de transporte con demandas y fuentes predeterminadas [18].

Las matrices mínimas-reales fueron introducidas en [18] como una herramienta auxiliar en el estudio de las matrices mínimas.

En este trabajo consideramos el siguiente problema.

Problema 3. Dados vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} con entradas en \mathbb{N}_0 y cuyas sumas de coordenadas coinciden:

- a) Dar un método para construir una matriz en $\mathbf{M}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ que sea mínima.
- b) Dar un método para construir una matriz en $\mathbf{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ que sea mínima-real.

Como las matrices mínimas son en cierto modo más importantes que las matrices mínimas-reales, la parte a) es más interesante que la parte b) en el Problema 3. Sin embargo, hasta el momento sólo hemos tenido éxito en resolver la parte b):

Resultado 4. *Dados vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} con entradas en \mathbb{N}_0 y cuyas sumas de coordenadas coinciden, se da un método para construir una matriz mínima-real en $\mathbf{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.*

Por la Proposición 5.8 de [18], la matriz de norma euclidiana mínima en $\mathbf{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ es una matriz mínima-real. En este trabajo damos un método para construir la matriz de norma mínima en $\mathbf{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Para explicar cómo hacemos esto necesitamos la siguiente notación. Consideramos el subconjunto de $\mathbf{R} = \mathbf{B}(p, q)$

$$\mathbf{R}^\diamond = \{(i, j) \in \mathbf{R} : 2 \leq i \leq p, 2 \leq j \leq q\}.$$

Un subconjunto $J \subseteq \mathbf{R}^\diamond$ es una *escalera* si

$$\forall \mathbf{k} \in J \text{ y } \forall \mathbf{l} \in \mathbf{R}^\diamond, \mathbf{k} \trianglelefteq \mathbf{l} \implies \mathbf{l} \in J.$$

Sea $J \subseteq \mathbb{R}^\diamond$ un conjunto escalera. Decimos que un punto $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^\diamond$ es *añadible* a J si $J \cup \{\mathbf{k}\}$ es nuevamente un conjunto escalera.

Exponemos ahora las ideas importantes en nuestra construcción. Fijamos vectores débilmente decrecientes ¹ $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_p)$ y $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_q)$ con coordenadas en \mathbb{N} (positivas) y tales que $\sum_{i=1}^p a_i = N = \sum_{j=1}^q b_j$. Consideramos la matriz P tal que para cada $(i, j) \in \mathbb{B}(p, q)$

$$P(i, j) = \frac{a_i}{q} + \frac{b_j}{p} - \frac{N}{pq}.$$

Una construcción análoga a la matriz P aparece en [20]. Tenemos por el Teorema 3.2.4 que P es la proyección ortogonal del origen de $\mathbb{M}_{p \times q}$ (el espacio de matrices reales de tamaño $p \times q$) en el espacio afín $\mathbb{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, y que P es doblemente graduada. Entonces P es la matriz de norma mínima en $\mathbb{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Si $P \in \mathbb{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ es claro que P es también la matriz de norma mínima en $\mathbb{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Si $P \notin \mathbb{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, esto es, si P tiene alguna entrada negativa, aplicamos un procedimiento recursivo para obtener, a partir de P , una matriz P_l en $\mathbb{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Para exponer dicho procedimiento consideramos la siguiente notación. Para cada $\mathbf{h} \in \mathbb{R}$ definimos el hiperplano de $\mathbb{M}_{p \times q}$

$$H_{\mathbf{h}} := \{A \in \mathbb{M}_{p \times q}(\mathbb{R}) : A(\mathbf{h}) = 0\}.$$

Sea $J \subseteq \mathbb{R}^\diamond$ un conjunto escalera. Asociamos a J el subespacio afín de $\mathbb{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ definido por

$$\mathbb{U}(J) := \begin{cases} \mathbb{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \cap [\cap_{\mathbf{h} \in J} H_{\mathbf{h}}] & \text{si } J \neq \emptyset; \\ \mathbb{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) & \text{si } J = \emptyset; \end{cases}$$

esto es, $\mathbb{U}(J)$ es el subespacio de $\mathbb{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ que consta de todas las matrices que son idénticamente cero en J .

Dados una matriz $Q \in \mathbb{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ y un conjunto escalera $J \subseteq \mathbb{R}^\diamond$ consideramos para la pareja (Q, J) las siguientes condiciones:

- (a) Q es la proyección ortogonal del origen de $\mathbb{M}_{p \times q}$ en espacio afín $\mathbb{U}(J)$; esto es, $Q \in \mathbb{U}(J)$ y es la (única) matriz de norma mínima en $\mathbb{U}(J)$.
 - (b) Q es doblemente graduada fuera de J .
- (1)

¹Podemos suponer sin pérdida de generalidad que \mathbf{a} y \mathbf{b} son débilmente decrecientes y que tienen entradas positivas.

Para (i, j) en \mathbb{R}^\diamond sea Q_{ij} la matriz de tamaño $p \times q$ definida por

$$Q_{ij}(r, s) = \begin{cases} 1 & \text{si } (r, s) = (i, j); \\ -\frac{1}{i-1} & \text{si } 1 \leq r \leq i-1 \text{ y } s = j; \\ -\frac{1}{j-1} & \text{si } r = i \text{ y } 1 \leq s \leq j-1; \\ \frac{1}{(i-1)(j-1)} & \text{si } 1 \leq r \leq i-1 \text{ y } 1 \leq s \leq j-1; \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es fácil ver que $Q_{ij} \in \mathbf{F}(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ para todo (i, j) en \mathbb{R}^\diamond ².

Procedimiento recursivo. Aplicamos este procedimiento cuando $P \notin \mathbb{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Partimos de $P_0 = P$ e $I_0 := \emptyset$. Entonces la pareja (P_0, I_0) satisface las condiciones en (1).

Para el paso recursivo sea $j \geq 0$ y supongamos que hemos definido parejas $(P_0, I_0), \dots, (P_j, I_j)$ y que estas parejas cumplen las condiciones en (1). Supongamos también que $P_0, \dots, P_j \notin \mathbb{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Entonces P_j tiene alguna entrada negativa. Como P_j es doblemente graduada fuera de I_j , podemos seleccionar un \mathbf{k}_j en \mathbb{R}^\diamond añadible a I_j , tal que $P_j(\mathbf{k}_j) < 0$. Definimos entonces $I_{j+1} := I_j \cup \{\mathbf{k}_j\}$, y $P_{j+1} := P_j + s_{\mathbf{k}_j} Q_{\mathbf{k}_j}$, donde $s_{\mathbf{k}_j} := -P_j(\mathbf{k}_j)$. No es difícil ver que $P_{j+1}(\mathbf{k}_j) = 0$. Se prueba que la pareja (P_{j+1}, I_{j+1}) cumple las condiciones en (1), esto completa la definición del paso recursivo. Si $P_{j+1} \in \mathbb{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, el procedimiento termina. Si no, se aplica nuevamente el paso recursivo. Se prueba que eventualmente se obtiene una matriz $P_l \in \mathbb{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, con $l \leq (p-1)(q-1)$, y donde $P_0, \dots, P_{l-1} \notin \mathbb{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

El procedimiento anterior está implícito en la demostración del Teorema 3.3.2. Note que en el paso recursivo, la definición de P_{j+1} depende de la elección de \mathbf{k}_j , sin embargo la matriz P_l que finalmente se obtiene resulta ser, por el Teorema 3.3.3, la matriz de norma mínima en $\mathbb{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ y por lo tanto P_l está definida de manera única. Este método es implementable a un algoritmo computacional (ver Sección A.3).

Este algoritmo fue descubierto de manera independiente por D. Romero, por un lado, y por el autor y el asesor de esta tesis por otro. D. Romero lo obtuvo primero (comunicación privada a E. Vallejo [21]) utilizando métodos de optimización; sin embargo no lo ha publicado. Nosotros sin conocer aún el algoritmo de D. Romero lo redescubrimos utilizando ideas puramente geomé-

²Previo al Lema 3.2.3 se ilustra un ejemplo de este tipo de matrices. En la Sección 3.2 estudiamos varias propiedades de este tipo de matrices.

tricas (proyecciones en subespacios). Es interesante notar que aunque ambos enfoques son muy diferentes, al final se obtiene el mismo algoritmo.

El trabajo está distribuido de la siguiente manera. En el Capítulo 1 revisamos algunas nociones y resultados sobre espacios afines y teoría de convexidad que requerimos en el presente trabajo. Estudiamos también dos versiones del Lema de Farkas que usamos luego en el Capítulo 2 para probar algunos resultados.

En el Capítulo 2 presentamos las demostraciones de los Resultados 1, 2 y 3, y tratamos algunos temas relacionados con dichos resultados. La mayoría de la notación que usamos a lo largo de todo este trabajo se define en el Capítulo 2.

El Capítulo 3 junto con el Apéndice A están dedicados a la obtención del Resultado 4 y a tratar varios aspectos interesantes relacionados.

Los resultados que presentamos en esta tesis fueron obtenidos en trabajo conjunto con el Dr. Vallejo, quien la asesoró. El Teorema 2.4.5 y el material relacionado con el Resultado 1 aparecen en [22].

Capítulo 1

Preliminares

El contenido de este capítulo está distribuido de la siguiente manera. En la Sección 1.1 revisamos algunas nociones y resultados sobre espacios afines y teoría de convexidad que requerimos en el presente trabajo. Sobresalen en este capítulo dos resultados sobre sistemas finitos de desigualdades lineales con coeficientes racionales, que en la literatura se dice que son *de tipo Lema de Farkas*; estos resultados son el contenido de la Sección 1.4. Las Secciones 1.2 y 1.3 contienen resultados que se requieren en la Sección 1.4.

1.1. Estructura afín de \mathbb{R}^m y teoría de convexidad

En esta sección revisamos las definiciones y resultados básicos relativos a espacios afines, conjuntos convexos y conos. El material relativo a espacios afines se tomó de [2, §1.1], el material sobre conjuntos convexos proviene de [2, §1.2] y el material sobre conos fue tomado de [30, p. 28]. Los resultados en esta sección se enuncian sin demostraciones. Esta sección es solamente un resumen sobre los conceptos antes mencionados, que es lo que requerimos para este trabajo; para un estudio más detallado se pueden consultar las referencias citadas.

A lo largo de todo este trabajo asumimos la convención de que para cada entero positivo t , \mathbb{R}^t representa el conjunto de vectores columna de longitud t con entradas reales, mientras que $(\mathbb{R}^t)^*$ representa el conjunto de vectores

renglón de longitud t con entradas reales. Por ejemplo

$$(1, 4, 2) \in (\mathbb{R}^3)^*, \quad (3, 7)^\top = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Consideramos el producto interno usual para vectores \mathbf{x}, \mathbf{y} en \mathbb{R}^t , $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := \mathbf{x}^\top \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^t x_i y_i$ y la norma (euclidiana) usual para un vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^t$, $|\mathbf{x}| := \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$. Denotamos por $\mathbf{M}_{m \times n}$ al conjunto de matrices de tamaño $m \times n$ con entradas en \mathbb{R} , y por $\mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{Q})$ y $\mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{Z})$ respectivamente, a los subconjuntos de $\mathbf{M}_{m \times n}$ formados por las matrices con entradas en \mathbb{Q} y \mathbb{Z} respectivamente. Sea $A \in \mathbf{M}_{m \times n}$ y $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$. Por convención escribiremos el producto de A por \mathbf{x} en alguna de las siguientes formas: $A\mathbf{x}$ ó $A \cdot (x_1, \dots, x_n)^\top$ (note que en el primer caso no usamos “ \cdot ”).

Fijamos un entero positivo m y consideramos por el resto de esta sección el espacio lineal \mathbb{R}^m . A continuación presentamos un resumen sobre la estructura afín de \mathbb{R}^m , tomado de [2, §1.1]. Un *subespacio afín* de \mathbb{R}^m es, o bien el conjunto \emptyset , o bien el trasladado de un subespacio lineal de \mathbb{R}^m (es decir, de la forma $\mathbf{x} + V$, con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ y V un subespacio lineal de \mathbb{R}^m). Si F_1 y F_2 son subespacios afines de \mathbb{R}^m y $F_1 \subseteq F_2$, decimos que F_1 es *subespacio afín* de F_2 . La *línea a través de dos puntos distintos* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ de \mathbb{R}^m es el conjunto

$$\{\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 + \lambda_2 = 1\}.$$

La siguiente proposición corresponde al resultado (a') de un resumen sobre la estructura afín de \mathbb{R}^m que se encuentra en [2, §1.1].

Proposición 1.1.1. [2, §1.1] *Un subconjunto F de \mathbb{R}^m es un subespacio afín si y sólo si la línea a través de cualquier par de puntos distintos de F está contenida en F .*

Una combinación afín de puntos $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_s$ de \mathbb{R}^m es una combinación de la forma $\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \lambda_s \mathbf{x}_s$, donde $\sum_{i=1}^s \lambda_i = 1$. La siguiente proposición se obtiene combinando los resultados (a') y (b') del resumen sobre la estructura afín de \mathbb{R}^m de [2, §1.1].

Proposición 1.1.2. [2, §1.1] *Un subconjunto F de \mathbb{R}^m es un subespacio afín si y sólo si cualquier combinación afín (finita) de puntos de F pertenece a F .*

La intersección de cualquier familia de subespacios afines de \mathbb{R}^m es un subespacio afín de \mathbb{R}^m . Por lo tanto, para cualquier subconjunto \mathcal{X} de \mathbb{R}^m ,

existe un subespacio afín más pequeño de \mathbb{R}^m que contiene a \mathcal{X} , que es la intersección de todos los subespacios afines que contienen a \mathcal{X} ; llamamos a este subespacio el subespacio afín *generado* por \mathcal{X} , o la *envolvente afín* de \mathcal{X} . Note que también tiene sentido hablar de la envolvente afín del conjunto \emptyset (que es el conjunto \emptyset) ya que éste también es un espacio afín. La siguiente proposición corresponde al resultado (*c'*) del resumen sobre la estructura afín de \mathbb{R}^m de [2, §1.1].

Proposición 1.1.3. [2, §1.1] *Para cualquier subconjunto \mathcal{X} de \mathbb{R}^m , la envolvente afín de \mathcal{X} es el conjunto de todas las combinaciones afines de puntos en \mathcal{X} .*

A continuación damos algunas definiciones y algunas afirmaciones (que no probamos aquí) relacionadas con la noción de dependencia afín de familias de puntos en \mathbb{R}^m . Una familia de puntos $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_s)$ es *afínmente independiente* si siempre que tengamos una combinación $\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \lambda_s \mathbf{x}_s = \mathbf{0}$, con $\lambda_1 + \dots + \lambda_s = 0$, tenemos que $\lambda_1 = \dots = \lambda_s = 0$. Independencia afín equivale a decir que ninguno de los puntos es combinación afín de los restantes. Una familia de puntos que no es afínmente independiente se dice que es *afínmente dependiente*. Cuando un punto \mathbf{x} es una combinación afín de $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_s$, digamos $\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \lambda_s \mathbf{x}_s$, entonces los coeficientes $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ están únicamente determinados si y sólo si la familia $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_s)$ es afínmente independiente. Una *s*-familia, esto es, una familia que tiene *s* puntos, $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_s)$ es afínmente independiente si y sólo si cada una de las $(s - 1)$ -familias

$$(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_i, \dots, \mathbf{x}_{i-1} - \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i, \dots, \mathbf{x}_s - \mathbf{x}_i), \quad i = 1, \dots, s$$

es linealmente independiente. Una *base afín* de un subespacio afín F de \mathbb{R}^m es una familia $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_s)$ afínmente independiente de puntos de F , tal que F es la envolvente afín de $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_s)$. La *dimensión* de un subespacio afín no vacío F de \mathbb{R}^m , denotada por $\dim(F)$, es la dimensión del subespacio lineal V tal que $F = \mathbf{x} + V$. Por definición asumimos que $\dim(\emptyset) = -1$. La dimensión de $F = s - 1$ si y sólo si s es el mayor entero tal que existe una *s*-familia afínmente independiente de puntos de F . Una *s*-familia afínmente independiente de puntos de F es una base afín de F si y sólo si $s = \dim(F) + 1$. La siguiente proposición es similar al resultado (*d'*) del resumen sobre la estructura afín de \mathbb{R}^m de [2, §1.1], se sigue de las afirmaciones anteriores y es una síntesis de las mismas.

Proposición 1.1.4. *Sea F un subespacio afín de \mathbb{R}^m que tiene dimensión afín $s - 1$. Sea $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_t)$ una familia máxima afínmente independiente de puntos de F . Entonces*

- i) $t = s$.*
- ii) $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_s)$ es una base afín de F .*
- iii) F es precisamente el conjunto de todas las combinaciones afines de los puntos $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_s$, y para cada punto de F su representación como combinación afín de los puntos $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_s$ es única.*

Sea F un subespacio afín de \mathbb{R}^m de dimensión s . Un subespacio afín de dimensión $(s - 1)$ de F se llama *hiperplano* en F . Los hiperplanos de F son los conjuntos de la forma $H \cap F$, donde H es un hiperplano de \mathbb{R}^m tal que $H \cap F$ es un subconjunto propio no vacío de F .

A continuación revisamos algunas nociones sobre conjuntos convexos, el siguiente resumen fue tomado de [2, §1.2]. Sean $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_s \in \mathbb{R}^m$. Una *combinación convexa* de los \mathbf{x}_i , $i = 1, \dots, s$, es una combinación de la forma

$$\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \lambda_s \mathbf{x}_s, \text{ tal que } \lambda_i \geq 0 \text{ para } i \in [s] \text{ y } \sum_{i=1}^s \lambda_i = 1.$$

El *segmento cerrado* entre dos puntos $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ de \mathbb{R}^m , denotado por $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]$, es el conjunto de todas las combinaciones convexas de $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$, esto es

$$\begin{aligned} [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2] &:= \{\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 : \lambda_1, \lambda_2 \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1\} \\ &= \{(1 - \lambda) \mathbf{x}_1 + \lambda \mathbf{x}_2 : \lambda \in [0, 1]\}. \end{aligned}$$

Un subconjunto \mathcal{K} de \mathbb{R}^m es *convexo* si dados dos puntos $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{K}$ se tiene que $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2] \subseteq \mathcal{K}$; esto es, si cualquier combinación convexa de dos puntos de \mathcal{K} pertenece a \mathcal{K} . Note que el conjunto \emptyset es convexo.

Teorema 1.1.5. [2, Teo. 2.1] *Un subconjunto \mathcal{K} de \mathbb{R}^m es convexo si y sólo si cualquier combinación convexa de (no necesariamente dos) puntos de \mathcal{K} pertenece a \mathcal{K} .*

Es claro que la intersección de cualquier familia de subconjuntos convexos de \mathbb{R}^m es un conjunto convexo. Para un subconjunto \mathcal{A} de \mathbb{R}^m , la *envolvente convexa* de \mathcal{A} , que denotamos por $\text{conv}(\mathcal{A})$ se define como

$$\text{conv}(\mathcal{A}) := \bigcap \{\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}^m : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{K}, \mathcal{K} \text{ convexo}\};$$

esto es, $\text{conv}(\mathcal{A})$ es el subconjunto convexo más pequeño de \mathbb{R}^m que contiene a \mathcal{A} . Observe que $\text{conv}(\emptyset) = \emptyset$.

Teorema 1.1.6. [2, Teo. 2.2] *Para cualquier subconjunto \mathcal{A} de \mathbb{R}^m , $\text{conv}(\mathcal{A})$ es el conjunto de todas las combinaciones convexas de elementos en \mathcal{A} .*

Como una instancia particular del teorema anterior, tenemos que si \mathcal{A} es finito, digamos $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$, entonces

$$\text{conv}(\mathcal{A}) = \left\{ \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{a}_n : \lambda_i \geq 0 \text{ para } i \in [n], \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\}.$$

Un *politopo* es la envolvente convexa de un subconjunto finito no vacío de \mathbb{R}^m . Los politopos son uno de los principales objetos de estudio en teoría de convexidad, para un estudio detallado sobre politopos ver, por ejemplo [2, 11].

Finalizamos esta sección presentando algunas nociones básicas sobre conos. El siguiente resumen se tomó de [30, p. 28]. Para un estudio detallado sobre conos ver, por ejemplo [30, Cap. 1]. Un subconjunto no vacío \mathcal{Q} de \mathbb{R}^m es un *cono* si cualquier combinación lineal con coeficientes no negativos de cualquier subconjunto finito de \mathcal{Q} , pertenece a \mathcal{Q} . Note que un cono no necesariamente es cerrado, por ejemplo, el conjunto

$$\mathcal{Q}_1 := \{\text{primer cuadrante (abierto) de } \mathbb{R}^2\} \cup \{\mathbf{0}\}$$

es un cono que no es cerrado. Note también que cualquier cono contiene al vector $\mathbf{0}$. Es claro que la intersección de cualquier familia de conos es un cono. Para un subconjunto arbitrario \mathcal{C} de \mathbb{R}^m , el *cono generado por \mathcal{C}* , que denotamos como $\text{cono}(\mathcal{C})$ se define como

$$\text{cono}(\mathcal{C}) := \bigcap \{ \mathcal{Q} \subseteq \mathbb{R}^m : \mathcal{C} \subseteq \mathcal{Q}, \mathcal{Q} \text{ cono} \};$$

esto es, $\text{cono}(\mathcal{C})$ es el cono más pequeño en \mathbb{R}^m que contiene a \mathcal{C} . En particular, $\text{cono}(\emptyset) = \{\mathbf{0}\}$. Para un subconjunto no vacío \mathcal{C} de \mathbb{R}^m se tiene que

$$\text{cono}(\mathcal{C}) = \{ \lambda_1 \mathbf{c}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{c}_k : \{\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_k\} \subseteq \mathcal{C}, \lambda_i \geq 0 \},$$

la primera contención se sigue de que (es fácil ver que) el conjunto del lado derecho es un cono, que ese cono contiene a \mathcal{C} , y que $\text{cono}(\mathcal{C})$ es la intersección de tales conos. La otra contención es consecuencia de que todos los elementos en el conjunto de la derecha deben pertenecer a cualquier cono que contenga

a \mathcal{C} , y $\text{cono}(\mathcal{C})$ es uno (el más pequeño) de ellos. En particular, si \mathcal{C} es finito, digamos $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_t\}$, entonces

$$\text{cono}(\mathcal{C}) = \{\lambda_1 \mathbf{c}_1 + \dots + \lambda_t \mathbf{c}_t, \lambda_i \geq 0 \text{ para } i \in [t]\}.$$

Note que cuando \mathcal{C} es finito, $\text{cono}(\mathcal{C})$ es cerrado. La noción de cono en la literatura es más general que la que aquí presentamos, en el sentido de que también considera las traslaciones de los conos que aquí definimos, pero esas traslaciones no se requieren en el presente trabajo.

1.2. Soluciones básicas factibles

En esta sección estudiamos un par de lemas técnicos que se requieren en la Sección 1.4 (Lemas 1.2.7 y 1.2.8). Para las pruebas de dichos lemas necesitamos un poco de teoría de optimización combinatoria, que veremos a continuación.

Como comentamos al principio de la Sección 1.1, los elementos de \mathbb{R}^m y por consiguiente los de \mathbb{Q}^m , son vectores columna. Con frecuencia usaremos la notación $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)^\top \in \mathbb{Q}^m$, pensando a (x_1, \dots, x_m) como un vector renglón y a su transpuesto como un vector columna.

El material que veremos enseguida, incluyendo la notación fueron tomados de [19, §2.2]. Comenzamos por la notación. Sea $A \in \mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{Q})$ una matriz que tiene rango m (note que esto implica que $m \leq n$), y sea $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m)^\top \in \mathbb{Q}^m$. Una *solución factible* del sistema dado por A y por \mathbf{b} , es un vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, con $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$; esto es, $x_i \geq 0$, para $i = 1, \dots, n$, y tal que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Denotamos por \mathcal{F} al conjunto de soluciones factibles del sistema dado por A y por \mathbf{b} ; esto es

$$\mathcal{F} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}.$$

Una *base* de A es un conjunto formado por m vectores columna de A linealmente independientes:

$$\mathfrak{B} = \{A_{i_1}, \dots, A_{i_m}\}. \tag{1.1}$$

Cada base de A como en (1.1), tiene asociada la submatriz de A , $B = [A_{i_j}]$, que es invertible. Dada una base de A , $\mathfrak{B} = \{A_{i_1}, \dots, A_{i_m}\}$, cuya

matriz asociada es $B = [A_{i_j}]$, la *solución básica correspondiente a \mathfrak{B}* es el vector $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ tal que,

$$\begin{cases} A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \\ x_j = 0 \text{ si } A_j \notin \mathfrak{B}, \\ (x_{i_1}, \dots, x_{i_m})^\top \text{ es el único vector } \bar{\mathbf{x}} \text{ en } \mathbb{R}^m, \text{ tal que } B\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{b}. \end{cases} \quad (1.2)$$

Si una solución básica \mathbf{x} pertenece a \mathcal{F} , decimos que \mathbf{x} es una *solución básica factible*.

Ejemplo 1.2.1. [19, §2.2] Sea A la matriz en $M_{4 \times 7}(\mathbb{Q})$ dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y sea $\mathbf{b} = (4, 2, 3, 6)^\top$. En este caso el conjunto de soluciones factibles es

$$\mathcal{F} = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_7)^\top \in \mathbb{R}^7 : A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}.$$

Una base para A es $\mathfrak{B} = \{A_4, A_5, A_6, A_7\}$, que tiene asociada la submatriz $B = I$ (la matriz identidad en $M_{4 \times 4}$). La solución básica correspondiente es $(0, 0, 0, 4, 2, 3, 6)^\top$, y es una solución básica factible porque tiene entradas no negativas. Otra base para A es $\mathfrak{B}_2 = \{A_2, A_5, A_6, A_7\}$, que tiene asociada la submatriz de A

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La solución básica correspondiente es $(0, 4, 0, 0, 2, 3, -6)^\top$. Esta solución básica tiene una entrada negativa y por lo tanto no es una solución básica factible.

◇

Comentario 1.2.2. Sea $A \in M_{m \times n}(\mathbb{Q})$, y sea σ una permutación en el grupo simétrico S_m . Sean σA la matriz que se obtiene de permutar los renglones de A por medio de σ , y $\sigma \mathbf{b}$ el vector que se obtiene de permutar las entradas de \mathbf{b} por medio de σ . Entonces el conjunto de soluciones factibles, resp. soluciones básicas, resp. soluciones básicas factibles, del sistema dado por A y por \mathbf{b} ,

es igual al conjunto de soluciones factibles, resp. soluciones básicas, resp. soluciones básicas factibles, del sistema dado por σA y $\sigma \mathbf{b}$.

Sea τ una permutación en el grupo simétrico \mathcal{S}_n . Sea $A\tau$ la matriz que se obtiene de permutar las columnas de A por medio de τ , y para cada vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, sea $\tau\mathbf{x}$ el vector que se obtiene de permutar las entradas de \mathbf{x} por medio de τ . Entonces \mathbf{x} es una solución factible, resp. solución básica, resp. solución básica factible, del sistema dado por A y por \mathbf{b} , si y sólo si $\tau\mathbf{x}$ es una solución factible, resp. solución básica, resp. solución básica factible del sistema dado por $A\tau$ y por \mathbf{b} . Este par de observaciones serán usadas implícitamente en lo sucesivo. \diamond

El siguiente teorema y su demostración fueron tomados de [19, §2.2], donde se considera el resultado para una matriz $A \in \mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{Z})$ y un vector $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^m$. El teorema y su prueba siguen siendo válidos si consideramos $A \in \mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{Q})$ y $\mathbf{b} \in \mathbb{Q}^m$, y así los tomamos en este trabajo.

Teorema 1.2.3. [19, Teo. 2.1] *Sea $A \in \mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{Q})$ una matriz que tiene rango m , y sea $\mathbf{b} \in \mathbb{Q}^m$. Si existe una solución factible del sistema dado por A y por \mathbf{b} , entonces existe una solución básica factible del sistema.*

Para la prueba del teorema necesitamos los siguientes resultados:

Lema 1.2.4. *Sea $A = (a_{ij}) \in \mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ una matriz que tiene rango l (para alguna $l \leq m$), y sea $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Supongamos que existe un $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Sea $\mathcal{C} := \{\mathbf{r}_{i_1}, \dots, \mathbf{r}_{i_l}\}$ un subconjunto linealmente independiente de renglones de A . Sea \tilde{A} la submatriz de A formada por los renglones en \mathcal{C} , y sea $\tilde{\mathbf{b}}$ el subvector de \mathbf{b} que corresponde a esos renglones; esto es*

$$\tilde{A} := \begin{pmatrix} \mathbf{r}_{i_1} \\ \vdots \\ \mathbf{r}_{i_l} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} b_{i_1} \\ \vdots \\ b_{i_l} \end{pmatrix}.$$

Entonces el conjunto solución del sistema dado por A y por \mathbf{b} es igual al conjunto solución del sistema dado por \tilde{A} y por $\tilde{\mathbf{b}}$.

Demostración. Si $l = m$ entonces $\tilde{A} = A$, $\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{b}$ y no hay nada que probar. Supongamos que $l < m$. Sean \mathbf{r}_i , $i = 1, \dots, m$ los renglones de A . Debemos probar que para todo $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ se tiene que

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r}_{i_j}, \mathbf{y} \rangle &= b_{i_j}, \text{ para } j = 1, \dots, l \iff \\ \langle \mathbf{r}_i, \mathbf{y} \rangle &= b_i, \text{ para } i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Una implicación es trivial. Para la otra, supongamos que

$$\langle \mathbf{r}_{i_j}, \mathbf{y} \rangle = b_{i_j}, \text{ para } j = 1, \dots, l, \quad (1.3)$$

y sea k tal que $\mathbf{r}_k \notin \mathbf{C}$. Por demostrar que $\langle \mathbf{r}_k, \mathbf{y} \rangle = b_k$. Como \mathbf{r}_k está en el espacio generado por los renglones de A , y \mathbf{C} es una base de dicho espacio, existen reales $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ tales que

$$\mathbf{r}_k = \sum_{j=1}^l \lambda_j \mathbf{r}_{i_j}.$$

Por (1.3) tenemos que

$$\langle \mathbf{r}_k, \mathbf{y} \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^l \lambda_j \mathbf{r}_{i_j}, \mathbf{y} \right\rangle = \sum_{j=1}^l \lambda_j \langle \mathbf{r}_{i_j}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{j=1}^l \lambda_j b_{i_j}. \quad (1.4)$$

Por otro lado, como \mathbf{x} es tal que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, entonces $\langle \mathbf{r}_i, \mathbf{x} \rangle = b_i$, para $i = 1, \dots, m$. Luego

$$\sum_{j=1}^l \lambda_j b_{i_j} = \sum_{j=1}^l \lambda_j \langle \mathbf{r}_{i_j}, \mathbf{x} \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^l \lambda_j \mathbf{r}_{i_j}, \mathbf{x} \right\rangle = \langle \mathbf{r}_k, \mathbf{x} \rangle = b_k. \quad (1.5)$$

Combinando (1.4) y (1.5) concluimos que $\langle \mathbf{r}_k, \mathbf{y} \rangle = b_k$. \diamond

El Lema 1.2.5 está implícito en la prueba del Teorema 2.1 en [19].

Lema 1.2.5. [19, p. 31 y 32] *Sea $A \in \mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{Q})$ y sea $\mathbf{b} \in \mathbb{Q}^m$. Sea \mathbf{x} una solución factible del sistema dado por A y por \mathbf{b} . Supongamos que \mathbf{x} tiene una cantidad mínima de entradas positivas (en el conjunto de soluciones factibles) y que $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Sean x_{i_1}, \dots, x_{i_t} las entradas positivas de \mathbf{x} . Entonces el subconjunto $\{A_{i_1}, \dots, A_{i_t}\}$ de columnas de A es linealmente independiente.*

Demostración. Sea $A = (a_{ij})$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. Por el Comentario 1.2.2, podemos suponer sin pérdida de generalidad que las t entradas positivas de \mathbf{x} son x_1, \dots, x_t . Probamos la contrapositiva. Suponiendo que A_1, \dots, A_t no son linealmente independientes, veremos que entonces \mathbf{x} no tiene una cantidad mínima de entradas positivas. Sea $\widehat{A} := (A_1, \dots, A_t)$ y sea r el rango de \widehat{A} . Entonces $r < t$. Nuevamente por el Comentario 1.2.2, podemos suponer sin pérdida de generalidad que las primeras r columnas de \widehat{A} son linealmente independientes, y que los primeros r renglones de \widehat{A} son linealmente

independientes. No es difícil ver que entonces la submatriz $D = (d_{ij})$ de \widehat{A} , definida por $d_{ij} = (\widehat{A})_{ij} = a_{ij}$ para $i, j \in [r]$, tiene rango r , y por lo tanto es invertible. Sea $\widetilde{A} \in \mathbf{M}_{r \times t}(\mathbb{Q})$ la matriz formada por los primeros r renglones de \widehat{A} , y $C \in \mathbf{M}_{r \times (t-r)}(\mathbb{Q})$ la submatriz de \widetilde{A} formada por las entradas que no pertenecen a D . Tenemos entonces las matrices (* representa alguna submatriz que no nos interesa)

$$A = \begin{pmatrix} \widehat{A} & * \end{pmatrix}, \quad \widehat{A} = \begin{pmatrix} \widetilde{A} \\ * \end{pmatrix}, \quad \widetilde{A} = \begin{pmatrix} D & C \end{pmatrix}.$$

Como $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y $x_{t+1} = \dots = x_n = 0$, tenemos que

$$\widehat{A} \cdot (x_1, \dots, x_t)^\top = \mathbf{b}.$$

Sea $\widetilde{\mathbf{b}} := (b_1, \dots, b_r)^\top$. Entonces el conjunto solución del sistema dado por \widehat{A} y por \mathbf{b} es no vacío, y por el Lema 1.2.4 es igual al conjunto solución del sistema dado por \widetilde{A} y por $\widetilde{\mathbf{b}}$. Sea $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_t)^\top \in \mathbb{R}^t$ tal que $\widetilde{A}\mathbf{y} = \widetilde{\mathbf{b}}$. Definimos

$$\mathbf{y}_D := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_C := \begin{pmatrix} y_{r+1} \\ \vdots \\ y_t \end{pmatrix} \text{ de manera que } \mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_D \\ \mathbf{y}_C \end{pmatrix}.$$

Luego

$$\widetilde{\mathbf{b}} = \widetilde{A}\mathbf{y} = D\mathbf{y}_D + C\mathbf{y}_C.$$

Por lo tanto

$$\mathbf{y}_D = D^{-1}(\widetilde{\mathbf{b}} - C\mathbf{y}_C) = D^{-1}\widetilde{\mathbf{b}} - D^{-1}C\mathbf{y}_C. \quad (1.6)$$

Recíprocamente, cada vector $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_D, \mathbf{y}_C)^\top$ que satisfaga (1.6) es tal que $\widetilde{A}\mathbf{y} = \widetilde{\mathbf{b}}$; esto es, el conjunto solución del sistema dado por \widetilde{A} y por $\widetilde{\mathbf{b}}$ es precisamente el conjunto de vectores $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_D, \mathbf{y}_C)^\top$ que satisfacen (1.6). Para $i = 1, \dots, r$, $j = r + 1, \dots, t$ sean $\beta_i := (D^{-1}\widetilde{\mathbf{b}})_i$ y $\alpha_{ij} := (-D^{-1}C)_{i(j-r)}$. Entonces un vector $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_D, \mathbf{y}_C)^\top \in \mathbb{R}^t$ es solución del sistema dado por \widetilde{A} y $\widetilde{\mathbf{b}}$, equivalentemente solución del sistema dado por \widehat{A} y por \mathbf{b} , si y sólo si \mathbf{y} puede ser construido fijando libremente las coordenadas y_{r+1}, \dots, y_t (que son

las coordenadas de \mathbf{y}_C), y determinando las coordenadas y_1, \dots, y_r (que son las de \mathbf{y}_D) mediante la ecuación

$$y_i = \beta_i + \sum_{j=r+1}^t \alpha_{ij} y_j, \quad i = 1, \dots, r. \quad (1.7)$$

El vector $(x_1, \dots, x_t)^\top$ es solución de este sistema dado por \widehat{A} y por \mathbf{b} , por lo tanto,

$$x_i = \beta_i + \sum_{j=r+1}^t \alpha_{ij} x_j, \quad i = 1, \dots, r. \quad (1.8)$$

Ahora, sea

$$\theta_1 := \min_{\alpha_{i(r+1)} > 0} \left\{ \frac{x_i}{\alpha_{i(r+1)}}, \quad i = 1, \dots, r \right\}, \quad (1.9)$$

y sea

$$\theta := \min\{\theta_1, x_{r+1}\}, \quad (1.10)$$

y en caso de que $\alpha_{i(r+1)} \leq 0$ para $i = 1, \dots, r$ entonces $\theta = x_{r+1}$. Dicho de otra manera, $\theta = x_{r+1}$ a menos que el conjunto en (1.9) sea no vacío y que el mínimo de ese conjunto, que es $\theta_1 > 0$, sea menor que x_{r+1} , en cuyo caso $\theta = \theta_1$. Note que entonces $0 < \theta \leq x_{r+1}$.

Sea $(\widehat{x}_1, \dots, \widehat{x}_t)^\top$ el vector en \mathbb{R}^t definido por

$$\widehat{x}_k = \begin{cases} x_k - \theta & \text{si } k = r + 1 \\ x_k & \text{si } k = r + 2, \dots, t \\ \beta_k + \sum_{j=r+1}^t \alpha_{kj} \widehat{x}_j & \text{si } k = 1, \dots, r. \end{cases}$$

Afirmación 1. El vector $(\widehat{x}_1, \dots, \widehat{x}_t)^\top$ satisface las siguientes condiciones:

- i) $\widehat{A} \cdot (\widehat{x}_1, \dots, \widehat{x}_t)^\top = \mathbf{b}$,
- ii) $\widehat{x}_k = x_k - \alpha_{k(r+1)} \theta$, para $k = 1, \dots, r$,
- iii) $\widehat{x}_k \geq 0$, para $k = 1, \dots, t$, y
- iv) $(\widehat{x}_1, \dots, \widehat{x}_t)^\top$ tiene estrictamente menos entradas positivas que $(x_1, \dots, x_t)^\top$.

Prueba de la Afirmación 1. Probamos i). El vector $(\widehat{x}_1, \dots, \widehat{x}_t)^\top$ se construyó fijando valores a las coordenadas $\widehat{x}_{r+1}, \dots, \widehat{x}_t$, y determinando $\widehat{x}_1, \dots, \widehat{x}_r$

a partir de estos valores mediante la ecuación (1.7). Por el comentario previo a dicha ecuación, así es precisamente como se construyen las soluciones del sistema dado por \widehat{A} y por \mathbf{b} .

Para la parte *ii*), sea $1 \leq k \leq r$, entonces

$$\begin{aligned}\widehat{x}_k &= \beta_k + \sum_{j=r+1}^t \alpha_{kj} \widehat{x}_j \\ &= \beta_k + \alpha_{k(r+1)}(x_{r+1} - \theta) + \sum_{j=r+2}^t \alpha_{kj} x_j \\ &= x_k - \alpha_{k(r+1)} \theta.\end{aligned}$$

La última igualdad es por (1.8). Ahora probamos *iii*). Para $k = r + 2, \dots, t$, $\widehat{x}_k = x_k > 0$. Para $k = r + 1$, como ya hemos observado,

$$0 < \theta \leq x_{r+1},$$

por lo tanto $\widehat{x}_{r+1} = x_{r+1} - \theta \geq 0$. Para $k = 1, \dots, r$ la prueba es por casos. Primero consideramos el caso en que $\alpha_{k(r+1)} < 0$, en este caso, aplicando la parte *ii*) tenemos que

$$\widehat{x}_k = x_k - \alpha_{k(r+1)} \theta > x_k > 0.$$

Si $\alpha_{k(r+1)} = 0$, por la parte *ii*) tenemos que

$$\widehat{x}_k = x_k > 0.$$

Finalmente, si $\alpha_{k(r+1)} > 0$, por (1.9) y (1.10)

$$\frac{x_k}{\alpha_{k(r+1)}} \geq \theta_1 \geq \theta,$$

de esto y de la parte *ii*) tenemos que

$$\widehat{x}_k = x_k - \alpha_{k(r+1)} \theta \geq 0.$$

Ahora probamos la parte *iv*). Si $\theta = x_{r+1}$, entonces $\widehat{x}_{r+1} = x_{r+1} - \theta = 0$. Y si $\theta = \frac{x_k}{\alpha_{k(r+1)}}$ para algún $1 \leq k \leq r$, con $\alpha_{k(r+1)} > 0$, entonces

$$\widehat{x}_k = x_k - \alpha_{k(r+1)} \theta = 0.$$

Como $x_1, \dots, x_t > 0$, lo anterior implica que $(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_t)^\top$ tiene estrictamente menos entradas positivas que $(x_1, \dots, x_t)^\top$. Esto concluye la prueba de la Afirmación 1. \diamond

Continuamos con la prueba del lema. A partir del vector $(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_t)^\top$ considerado en la Afirmación 1, construimos el vector

$$\hat{\mathbf{x}} := (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_t, 0, \dots, 0)^\top \in \mathbb{R}^n.$$

Por *i*) de la Afirmación 1, y puesto que $\hat{x}_{t+1} = \dots = \hat{x}_n = 0$, tenemos que $A\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{b}$, por lo tanto $\hat{\mathbf{x}}$ es una solución factible del sistema dado por A y por \mathbf{b} , que tiene estrictamente menos entradas positivas que \mathbf{x} , por lo tanto \mathbf{x} no tiene un número mínimo de entradas positivas. \diamond

Demostración (del Teorema 1.2.3). Sea $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top$ una solución factible del sistema dado por A y por \mathbf{b} , y supongamos que \mathbf{x} tiene un número mínimo de entradas positivas. Probaremos que \mathbf{x} es de hecho una solución básica factible. Si $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ y es claro que \mathbf{x} es una solución básica factible. Supongamos que $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, y sin perder generalidad, las entradas distintas de cero son las primeras t entradas de \mathbf{x} . Como \mathbf{x} tiene un número mínimo de entradas positivas, entonces por el Lema 1.2.5 el conjunto $\{A_1, \dots, A_t\}$ es linealmente independiente. Como A tiene rango m , entonces $t \leq m$ y podemos completar $\{A_1, \dots, A_t\}$ a una base de A , digamos

$$\mathfrak{B} := \{A_1, \dots, A_t, A_{i_{t+1}}, \dots, A_{i_m}\},$$

considerando para $k = 1, \dots, t$, $i_k := k$. Sea $B = (A_1, \dots, A_t, A_{i_{t+1}}, \dots, A_{i_m})$ la submatriz de A asociada a \mathfrak{B} . Como las únicas entradas positivas de \mathbf{x} son x_1, \dots, x_t , tenemos que $x_{i_{t+1}} = \dots = x_{i_m} = 0$. De esto y de que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sigue que

$$B \cdot (x_1, \dots, x_t, x_{i_{t+1}}, \dots, x_{i_m})^\top = \mathbf{b}. \quad (1.11)$$

B es invertible, entonces $(x_1, \dots, x_t, x_{i_{t+1}}, \dots, x_{i_m})^\top$ es la única solución al sistema dado en (1.11). Por lo tanto \mathbf{x} es la solución básica factible correspondiente a la base \mathfrak{B} . \diamond

La Proposición 1.2.6 es muy similar, pero adaptada a nuestros propósitos, a la parte (a) \Rightarrow (b) del Lema 13.1 en [19]; la prueba que presentamos aquí está basada en la idea de la prueba de la parte (a) \Rightarrow (b) del Lema 13.1 en [19]. El Teorema 1.2.3 (que corresponde al Teorema 2.1 en [19]) es pieza fundamental en la prueba de esta proposición.

Proposición 1.2.6. Sean $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{Q}^m$, y sea $1 \leq k \leq n$. Supongamos que existen reales $r_1, \dots, r_n \geq 0$, con $r_1 + \dots + r_k > 0$, y tales que $\sum_{i=1}^n r_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0}$. Entonces existen racionales $s_1, \dots, s_n \geq 0$, con $s_1 + \dots + s_k > 0$, y tales que $\sum_{i=1}^n s_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0}$.

Demostración. Supongamos que existen reales $r_1, \dots, r_n \geq 0$, con $r_1 + \dots + r_k > 0$ y tales que $\sum_{i=1}^n r_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0}$. Sea A la matriz con vectores columna $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$, esto es

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} := (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n);$$

y sea $\mathbf{u} := (r_1, \dots, r_n)^\top \in \mathbb{R}^n$, de tal forma que $A\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Sea $t \leq m$ el rango de A . Consideramos una subfamilia C con t vectores linealmente independientes de renglones de A , y sea \tilde{A} la submatriz de A formada por esos renglones. Tenemos que $A\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Denotamos por $\mathbf{0}$ al vector cero en \mathbb{R}^m y por $\tilde{\mathbf{0}}$ al vector cero en \mathbb{R}^t . Entonces por el Lema 1.2.4 tenemos que

$$A\mathbf{y} = \mathbf{0} \iff \tilde{A}\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{0}}, \text{ para todo } \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n. \quad (1.12)$$

Habremos probado la proposición si exhibimos un $\mathbf{s} \in \mathbb{Q}^n$, con $s_1, \dots, s_n \geq 0$, $s_1 + \dots + s_k > 0$, y tal que $A\mathbf{s} = \mathbf{0}$. Por (1.12) podemos suponer sin pérdida de generalidad que A tiene rango m . Para $i \in [n]$, sea $\mathbf{e}_i \in (\mathbb{R}^n)^*$ el i -ésimo vector canónico (que tiene valor 1 en la i -ésima coordenada y valor cero en las restantes). Sea $\mathbf{1}_k := \sum_{i=1}^k \mathbf{e}_i \in (\mathbb{R}^n)^*$. El vector $\mathbf{1}_k$ no pertenece al espacio generado por los renglones de A ; si perteneciera, como $A\mathbf{u} = \mathbf{0}$, tendríamos que $\mathbf{1}_k \cdot \mathbf{u} = 0$; pero $\mathbf{1}_k \cdot \mathbf{u} = r_1 + \dots + r_k$, y por hipótesis $r_1 + \dots + r_k > 0$. Entonces la matriz

$$C := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & a_{1(k+1)} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mk} & a_{m(k+1)} & \cdots & a_{mn} \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

tiene rango $m + 1$. Sea $N := r_1 + \dots + r_k$. Podemos suponer que $N \in \mathbb{Q}$ (multiplicando \mathbf{u} por un real positivo λ si es necesario, $\lambda\mathbf{u}$ satisface las mismas hipótesis que \mathbf{u}). Tenemos que \mathbf{u} es solución factible del sistema dado por C y por $(0, \dots, 0, N)^\top \in \mathbb{Q}^{m+1}$. Entonces, por el Teorema 1.2.3,

existe una solución básica factible $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n)^\top$ del sistema dado por C y por $(0, \dots, 0, N)^\top$. Sea $\mathfrak{B} = \{C_{i_1}, \dots, C_{i_{m+1}}\}$ una base de C , tal que \mathbf{s} es la solución básica factible correspondiente a \mathfrak{B} , y sea $B = [C_{i_1}, \dots, C_{i_{m+1}}]$ la matriz asociada a la base \mathfrak{B} . Note que B es una matriz invertible con entradas racionales. Entonces, de (1.2) tenemos que:

- a) $C\mathbf{s} = (0, \dots, 0, N)^\top$,
- b) $s_j = 0$, si $C_j \notin \mathfrak{B}$, y
- c) $(s_{i_1}, \dots, s_{i_{m+1}})^\top$ es el único vector $\bar{\mathbf{s}} \in \mathbb{R}^{m+1}$ tal que $B\bar{\mathbf{s}} = (0, \dots, 0, N)^\top$.

Tanto B como el vector $(0, \dots, 0, N)^\top$ tienen entradas racionales, concluimos de c) que $s_{i_1}, \dots, s_{i_{m+1}}$ son racionales; de esto y de b) tenemos que s_1, \dots, s_n son racionales. Como \mathbf{s} es solución factible tenemos que $s_1, \dots, s_n \geq 0$. De a) concluimos que $s_1 + \dots + s_k = N > 0$ y que $A\mathbf{s} = \mathbf{0}$; esto es

$$\sum_{i=1}^n s_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0}. \diamond$$

Los enunciados de los Lemas 1.2.7 y 1.2.8 están contenidos en [5, Lema 3, p. 46]; las demostraciones de dichos lemas se derivan de la Proposición 1.2.6. Los Lemas 1.2.7 y 1.2.8 se requieren en la Sección 1.4 para probar las Proposiciones 1.4.1 y 1.4.2.

Lema 1.2.7. [5, Lema 3] Sean $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{Q}^m$, y sea $1 \leq k \leq n$. Entonces existen reales r_1, \dots, r_n , con $r_1, \dots, r_k \geq 0$, $r_1 + \dots + r_k > 0$, y tales que $\sum_{i=1}^n r_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0}$; si y sólo si existen enteros t_1, \dots, t_n , con $t_1, \dots, t_k \geq 0$, $t_1 + \dots + t_k > 0$, y tales que $\sum_{i=1}^n t_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0}$.

Demostración. Una implicación es trivial. Para la otra supongamos que existen reales r_1, \dots, r_n , con $r_1, \dots, r_k \geq 0$, $r_1 + \dots + r_k > 0$, y tales que $\sum_{i=1}^n r_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0}$. Escribimos al conjunto $[n]$ como la unión disjunta de los subconjuntos $\mathcal{P} := \{i \in [n] : r_i \geq 0\}$ y $\mathcal{N} := \{i \in [n] : r_i < 0\}$. Note $\mathcal{N} \subseteq \{k+1, \dots, n\}$; o equivalentemente $\{1, \dots, k\} \subseteq \mathcal{P}$. Definimos reales r_i° , $i \in [n]$, resp. vectores \mathbf{a}_i° , $i \in [n]$ como sigue

$$r_i^\circ := \begin{cases} r_i & \text{para } i \in \mathcal{P} \\ -r_i & \text{para } i \in \mathcal{N} \end{cases}, \quad \mathbf{a}_i^\circ := \begin{cases} \mathbf{a}_i & \text{para } i \in \mathcal{P} \\ -\mathbf{a}_i & \text{para } i \in \mathcal{N} \end{cases}.$$

Entonces tenemos que $r_1^\circ, \dots, r_n^\circ \geq 0$, $r_1^\circ + \dots + r_k^\circ > 0$ y que $\sum_{i=1}^n r_i^\circ \mathbf{a}_i^\circ = \sum_{i=1}^n r_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0}$. Por la Proposición 1.2.6, existen racionales $s_1^\circ, \dots, s_n^\circ \geq 0$, con

$s_1^\circ + \cdots + s_k^\circ > 0$, y tales que $\sum_{i=1}^n s_i^\circ \mathbf{a}_i^\circ = \mathbf{0}$. Para $i \in [n]$ definimos racionales s_i como

$$s_i := \begin{cases} s_i^\circ & \text{para } i \in \mathcal{P}; \\ -s_i^\circ & \text{para } i \in \mathcal{N}. \end{cases}$$

Como $\{1, \dots, k\} \subseteq \mathcal{P}$, entonces $s_1, \dots, s_k \geq 0$ y $s_1 + \cdots + s_k > 0$. Por otro lado $\sum_{i=1}^n s_i \mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^n s_i^\circ \mathbf{a}_i^\circ = \mathbf{0}$. Multiplicando los s_i , $i \in [n]$ por un entero positivo apropiado se obtienen los enteros t_1, \dots, t_n que buscamos. \diamond

Lema 1.2.8. [5, Lema 3] Sean $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{Q}^m$, y sea $1 \leq k \leq n$. Entonces existen reales r_1, \dots, r_n , con $r_1, \dots, r_k \geq 0$, $r_1 + \cdots + r_k > 0$, $r_{k+1}, \dots, r_n \leq 0$, y tales que $\sum_{i=1}^n r_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0}$; si y sólo si existen enteros t_1, \dots, t_n , con $t_1, \dots, t_k \geq 0$, $t_1 + \cdots + t_k > 0$, $t_{k+1}, \dots, t_n \leq 0$, y tales que $\sum_{i=1}^n t_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0}$.

Demostración. Una implicación es trivial. Para la otra, supongamos que existen reales r_1, \dots, r_n , con $r_1, \dots, r_k \geq 0$, $r_1 + \cdots + r_k > 0$, $r_{k+1}, \dots, r_n \leq 0$, y tales que $\sum_{i=1}^n r_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0}$. Escribimos al conjunto $[n]$ como la unión disjunta de los subconjuntos $\mathcal{P} := \{1, \dots, k\}$ y $\mathcal{N} := \{k+1, \dots, n\}$. Definimos reales r_i° , $i \in [n]$, resp. vectores \mathbf{a}_i° , $i \in [n]$ como sigue

$$r_i^\circ := \begin{cases} r_i & \text{para } i \in \mathcal{P} \\ -r_i & \text{para } i \in \mathcal{N} \end{cases}, \quad \mathbf{a}_i^\circ := \begin{cases} \mathbf{a}_i & \text{para } i \in \mathcal{P} \\ -\mathbf{a}_i & \text{para } i \in \mathcal{N}. \end{cases}$$

Entonces tenemos que $r_1^\circ, \dots, r_n^\circ \geq 0$, $r_1^\circ + \cdots + r_k^\circ > 0$ y que $\sum_{i=1}^n r_i^\circ \mathbf{a}_i^\circ = \sum_{i=1}^n r_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0}$. Por la Proposición 1.2.6, existen racionales $s_1^\circ, \dots, s_n^\circ \geq 0$, con $s_1^\circ + \cdots + s_k^\circ > 0$, y tales que $\sum_{i=1}^n s_i^\circ \mathbf{a}_i^\circ = \mathbf{0}$. Para $i \in [n]$ definimos racionales s_i como

$$s_i := \begin{cases} s_i^\circ & \text{para } i \in \mathcal{P}; \\ -s_i^\circ & \text{para } i \in \mathcal{N}. \end{cases}$$

Entonces $s_1, \dots, s_k \geq 0$, $s_1 + \cdots + s_k > 0$ y $s_{k+1}, \dots, s_n \leq 0$. Por otro lado $\sum_{i=1}^n s_i \mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^n s_i^\circ \mathbf{a}_i^\circ = \mathbf{0}$. Multiplicando los s_i , $i \in [n]$ por un entero positivo apropiado se obtienen los enteros t_1, \dots, t_n que buscamos. \diamond

1.3. Lema de Farkas para vectores en \mathbb{R}^m

En esta sección estudiamos dos versiones del Lema de Farkas (Proposiciones 1.3.1 y 1.3.2) que consideran vectores en \mathbb{R}^m . Estas proposiciones se

necesitan para probar las Proposiciones 1.4.1 y 1.4.2 que aparecen en la Sección 1.4.

El contenido de esta sección fue tomado de [5, Cap. 5].

Proposición 1.3.1. [5, Lema 1, p. 44] Sean $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m$, y sea $1 \leq k \leq n$. Entonces exactamente una de las siguientes condiciones se cumple:

(A) Existe $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ tal que

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, \mathbf{a}_i \rangle &> 0, \text{ para } i = 1, \dots, k, \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{a}_i \rangle &= 0, \text{ para } i = k + 1, \dots, n. \end{aligned}$$

(B) Existen reales r_1, \dots, r_n , con $r_1, \dots, r_k \geq 0$, $r_1 + \dots + r_k > 0$, y tales que $\sum_{i=1}^n r_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0}$.

Proposición 1.3.2. [5, Lema 2, p. 45] Sean $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m$, y sea $1 \leq k \leq n$. Entonces exactamente una de las siguientes condiciones se cumple:

(A) Existe $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ tal que

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, \mathbf{a}_i \rangle &> 0, \text{ para } i = 1, \dots, k, \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{a}_i \rangle &\leq 0, \text{ para } i = k + 1, \dots, n. \end{aligned}$$

(B) Existen reales r_1, \dots, r_n , con $r_1, \dots, r_k \geq 0$, $r_1 + \dots + r_k > 0$, $r_{k+1}, \dots, r_n \leq 0$, y tales que $\sum_{i=1}^n r_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0}$.

El resto de la sección se dedicará a las pruebas de las proposiciones.

Sean \mathcal{A} , \mathcal{B} y \mathcal{C} subconjuntos finitos de \mathbb{R}^m , para los cuales consideramos:

$$\text{conv}(\mathcal{A}), \langle \mathcal{B} \rangle \text{ y } \text{cono}(\mathcal{C}).$$

Donde $\text{conv}(\mathcal{A})$ es la envolvente convexa de \mathcal{A} , $\langle \mathcal{B} \rangle$ es el espacio lineal generado por \mathcal{B} , y $\text{cono}(\mathcal{C})$ es el cono generado por \mathcal{C} . Recuerde que

$$\text{conv}(\emptyset) = \emptyset, \langle \emptyset \rangle = \{\mathbf{0}\}, \text{ y } \text{cono}(\emptyset) = \{\mathbf{0}\}.$$

El siguiente lema, que está implícito en [5, p. 44], será necesario en la prueba de ambas proposiciones. Su demostración es muy simple y se omite.

Lema 1.3.3. [5, p. 44] Sean \mathcal{A} , \mathcal{B} y \mathcal{C} subconjuntos finitos de \mathbb{R}^m , y sea $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$. Entonces:

- i) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle > 0, \forall \mathbf{a} \in \mathcal{A} \implies \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle > 0, \forall \mathbf{a} \in \text{conv}(\mathcal{A})$.
- ii) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{b} \rangle = 0, \forall \mathbf{b} \in \mathcal{B} \implies \langle \mathbf{x}, \mathbf{b} \rangle = 0, \forall \mathbf{b} \in \langle \mathcal{B} \rangle$.
- iii) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{c} \rangle \leq 0, \forall \mathbf{c} \in \mathcal{C} \implies \langle \mathbf{x}, \mathbf{c} \rangle \leq 0, \forall \mathbf{c} \in \text{cono}(\mathcal{C})$.

La siguiente notación y lemas serán necesarios para la prueba de la Proposición 1.3.1. Los Lemas 1.3.4 y 1.3.5 están implícitos en [5, p. 44].

Sean \mathcal{A} y \mathcal{B} subconjuntos finitos de \mathbb{R}^m . Asociamos a \mathcal{A} y \mathcal{B} el conjunto $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^m$ definido por

$$\mathcal{S} := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \begin{array}{l} 1) \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle > 0, \text{ para todo } \mathbf{a} \in \mathcal{A}, \\ 2) \langle \mathbf{x}, \mathbf{b} \rangle = 0, \text{ para todo } \mathbf{b} \in \mathcal{B} \end{array} \right\}. \quad (1.13)$$

Lema 1.3.4. [5, p. 44] Sean \mathcal{A} y \mathcal{B} subconjuntos finitos de \mathbb{R}^m , con $\mathcal{A} \neq \emptyset$, y considere el conjunto $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^m$ asociado a \mathcal{A} y \mathcal{B} que se definió en (1.13). Entonces

$$\mathcal{S} \neq \emptyset \iff \text{conv}(\mathcal{A}) \cap \langle \mathcal{B} \rangle = \emptyset.$$

Demostración. Como $\mathcal{A} \neq \emptyset$, entonces $\text{conv}(\mathcal{A}) \neq \emptyset$. Supongamos primero que $\mathcal{S} \neq \emptyset$, y sea $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$. Entonces, por (1.13) y por el Lema 1.3.3, \mathbf{x} satisface las siguientes condiciones:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle > 0, \forall \mathbf{a} \in \text{conv}(\mathcal{A}), \quad (1.14)$$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{b} \rangle = 0, \forall \mathbf{b} \in \langle \mathcal{B} \rangle. \quad (1.15)$$

El conjunto $\text{conv}(\mathcal{A})$ es compacto en \mathbb{R}^m , de esto y de (1.14) tenemos que $\min\{\langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle : \mathbf{a} \in \text{conv}(\mathcal{A})\}$ está bien definido y es un número positivo d . Sea $\epsilon := \frac{d}{2}$. Entonces

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle > \epsilon, \forall \mathbf{a} \in \text{conv}(\mathcal{A}). \quad (1.16)$$

Definimos el siguiente hiperplano de \mathbb{R}^m con sus respectivos semiespacios:

$$H_\epsilon := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m : \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \epsilon\},$$

$$K_\epsilon^+ := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m : \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \geq \epsilon\},$$

$$K_\epsilon^- := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m : \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \leq \epsilon\}.$$

Tenemos por (1.16) que $\text{conv}(\mathcal{A}) \subseteq K_\epsilon^+ \setminus H_\epsilon$, y por (1.15), que $\langle \mathcal{B} \rangle \subseteq K_\epsilon^- \setminus H_\epsilon$; por lo tanto el hiperplano H_ϵ separa estrictamente ¹ a $\text{conv}(\mathcal{A})$ y a $\langle \mathcal{B} \rangle$. Concluimos que $\text{conv}(\mathcal{A}) \cap \langle \mathcal{B} \rangle = \emptyset$.

¹Un hiperplano H de \mathbb{R}^m separa a dos subconjuntos U, U' de \mathbb{R}^m si U está contenido en uno de los semiespacios cerrados determinados por H , mientras que U' está contenido en el otro. H separa estrictamente a U y U' si H separa a U y U' , y $U \cap H = U' \cap H = \emptyset$ [11, §2.2].

Para el recíproco, note que $\text{conv}(\mathcal{A})$ y $\langle \mathcal{B} \rangle$ son subconjuntos cerrados y convexos de \mathbb{R}^m que no se intersecan, y que $\text{conv}(\mathcal{A})$ es acotado. Entonces, por el Teorema 1 en [11, §2.2] existe un hiperplano H de \mathbb{R}^m que separa estrictamente a $\text{conv}(\mathcal{A})$ y $\langle \mathcal{B} \rangle$. Sean $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^m$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que

$$H = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m : \langle \mathbf{y}, \mathbf{n} \rangle = \alpha\}.$$

Podemos suponer que

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{n} \rangle > \alpha, \quad \forall \mathbf{a} \in \text{conv}(\mathcal{A}), \quad (1.17)$$

$$\langle \mathbf{b}, \mathbf{n} \rangle < \alpha, \quad \forall \mathbf{b} \in \langle \mathcal{B} \rangle, \quad (1.18)$$

porque si no, simplemente reemplazamos \mathbf{n} por $-\mathbf{n}$ y α por $-\alpha$. Como $\forall \mathbf{b} \in \langle \mathcal{B} \rangle$ y $\forall t \in \mathbb{R}$, $t\mathbf{b} \in \langle \mathcal{B} \rangle$, entonces, por (1.18) tenemos que

$$\forall \mathbf{b} \in \langle \mathcal{B} \rangle \text{ y } \forall t \in \mathbb{R}, \quad \langle t\mathbf{b}, \mathbf{n} \rangle < \alpha. \quad (1.19)$$

Si existiera $\mathbf{b} \in \langle \mathcal{B} \rangle$ tal que $\langle \mathbf{b}, \mathbf{n} \rangle \neq 0$, entonces, tomando $t = \frac{\alpha}{\langle \mathbf{b}, \mathbf{n} \rangle}$ tendríamos que

$$\langle t\mathbf{b}, \mathbf{n} \rangle = \alpha,$$

que contradiría (1.19). Por lo tanto

$$\langle \mathbf{b}, \mathbf{n} \rangle = 0, \quad \forall \mathbf{b} \in \langle \mathcal{B} \rangle. \quad (1.20)$$

Tenemos por (1.18) y (1.20) que $\alpha > 0$. Entonces, de (1.17) sigue que

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{n} \rangle > \alpha > 0, \quad \forall \mathbf{a} \in \text{conv}(\mathcal{A}).$$

Por lo tanto \mathbf{n} satisface la condición 1) de (1.13), y por (1.20), \mathbf{n} satisface la condición 2) de (1.13). Por lo tanto $\mathbf{n} \in \mathcal{S}$; esto es, $\mathcal{S} \neq \emptyset$. \diamond

Lema 1.3.5. [5, p. 44] *Sea $1 \leq k \leq n$ y sean $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k\}$ y $\mathcal{B} = \{\mathbf{a}_{k+1}, \dots, \mathbf{a}_n\}$ subconjuntos finitos de \mathbb{R}^m (note que $\mathcal{A} \neq \emptyset$). Entonces $\text{conv}(\mathcal{A}) \cap \langle \mathcal{B} \rangle \neq \emptyset$ si y sólo si existen reales r_1, \dots, r_n , con $r_1, \dots, r_k \geq 0$, $r_1 + \dots + r_k > 0$, y tales que $\sum_{i=1}^n r_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0}$.*

Demostración. Si $\mathcal{B} = \emptyset$ entonces $k = n$ y el lema diría en este caso, que $\mathbf{0} \in \text{conv}(\mathcal{A})$ si y sólo si existen reales $r_1, \dots, r_n \geq 0$, con $r_1 + \dots + r_n > 0$ tales

que $\sum_{i=1}^n r_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0}$. Esta equivalencia claramente es cierta. Tratamos ahora el caso en el que \mathcal{B} es no vacío (esto es, $k < n$).

Supongamos primero que $\text{conv}(\mathcal{A}) \cap \langle \mathcal{B} \rangle \neq \emptyset$ y sea $\mathbf{d} \in \text{conv}(\mathcal{A}) \cap \langle \mathcal{B} \rangle$. Por un lado

$$\mathbf{d} = \sum_{i=1}^k s_i \mathbf{a}_i, \text{ para ciertos reales } s_1, \dots, s_k \geq 0, \text{ con } \sum_{i=1}^k s_i = 1,$$

y por otro lado

$$\mathbf{d} = \sum_{i=k+1}^n s_i \mathbf{a}_i, \text{ para ciertos reales } s_{k+1}, \dots, s_n.$$

Sean $r_i := s_i$, para $i = 1, 2, \dots, k$, y $r_i := -s_i$, para $i = k + 1, \dots, n$. Entonces $r_1, \dots, r_k \geq 0$, $r_1 + \dots + r_k > 0$ y

$$\sum_{i=1}^n r_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0}.$$

Para el recíproco, supongamos que existen reales r_1, \dots, r_n , con $r_1, \dots, r_k \geq 0$, $r_1 + \dots + r_k > 0$, y tales que $\sum_{i=1}^n r_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0}$. Note que $1 \leq k < n$. Multiplicando por un real positivo apropiado, podemos suponer que $r_1 + \dots + r_k = 1$. Como $\sum_{i=1}^n r_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0}$ tenemos que

$$\sum_{i=1}^k r_i \mathbf{a}_i = \sum_{i=k+1}^n -r_i \mathbf{a}_i =: \mathbf{d}.$$

Entonces $\mathbf{d} \in \text{conv}(\mathcal{A}) \cap \langle \mathcal{B} \rangle$, y por lo tanto $\text{conv}(\mathcal{A}) \cap \langle \mathcal{B} \rangle \neq \emptyset$. \diamond

Demostración de la Proposición 1.3.1. Sean $\mathcal{A} := \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k\}$ y $\mathcal{B} := \{\mathbf{a}_{k+1}, \dots, \mathbf{a}_n\}$, donde $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ son los vectores de la proposición. Como $k \geq 1$ entonces $\mathcal{A} \neq \emptyset$. Sea \mathcal{S} el conjunto asociado a \mathcal{A} y \mathcal{B} definido en (1.13). Entonces, aplicando los Lemas 1.3.4 y 1.3.5 tenemos que

$$\begin{aligned} \text{se cumple (A)} &\iff \mathcal{S} \neq \emptyset \iff \text{conv}(\mathcal{A}) \cap \langle \mathcal{B} \rangle = \emptyset \\ &\iff \text{no se cumple (B)}. \diamond \end{aligned}$$

Para la prueba de la Proposición 1.3.2 necesitamos la siguiente notación y lemas. Los Lemas 1.3.6 y 1.3.7 también están implícitos en [5, p. 44].

Sean \mathcal{A} y \mathcal{C} subconjuntos finitos de \mathbb{R}^m . Consideramos el siguiente subconjunto de \mathbb{R}^m asociado a \mathcal{A} y \mathcal{C} :

$$\mathcal{S}_2 := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \begin{array}{l} 1) \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle > 0, \text{ para todo } \mathbf{a} \in \mathcal{A}, \\ 2) \langle \mathbf{x}, \mathbf{c} \rangle \leq 0, \text{ para todo } \mathbf{c} \in \mathcal{C} \end{array} \right\}. \quad (1.21)$$

Lema 1.3.6. [5, p. 44] Sean \mathcal{A} y \mathcal{C} subconjuntos finitos de \mathbb{R}^m , con $\mathcal{A} \neq \emptyset$, y considere el subconjunto \mathcal{S}_2 asociado a \mathcal{A} y \mathcal{C} definido en (1.21). Entonces

$$\mathcal{S}_2 \neq \emptyset \iff \text{conv}(\mathcal{A}) \cap \text{cono}(\mathcal{C}) = \emptyset.$$

Demostración. Como $\mathcal{A} \neq \emptyset$ entonces $\text{conv}(\mathcal{A}) \neq \emptyset$. Supongamos primero que $\mathcal{S}_2 \neq \emptyset$ y sea $\mathbf{x} \in \mathcal{S}_2$. Entonces, por (1.21) y por el Lema 1.3.3, \mathbf{x} es tal que

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle > 0, \quad \forall \mathbf{a} \in \text{conv}(\mathcal{A}), \quad (1.22)$$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{c} \rangle \leq 0, \quad \forall \mathbf{c} \in \text{cono}(\mathcal{C}). \quad (1.23)$$

El conjunto $\text{conv}(\mathcal{A})$ es compacto en \mathbb{R}^m , de esto y por (1.22), tenemos que $\min\{\langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle : \mathbf{a} \in \text{conv}(\mathcal{A})\}$ está bien definido y es un número positivo d . Sea $\epsilon := \frac{d}{2} > 0$. Entonces

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle > \epsilon, \quad \forall \mathbf{a} \in \text{conv}(\mathcal{A}). \quad (1.24)$$

Considere el siguiente hiperplano de \mathbb{R}^m con sus respectivos semiespacios:

$$H_\epsilon := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m : \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \epsilon\},$$

$$K_\epsilon^+ := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m : \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \geq \epsilon\},$$

$$K_\epsilon^- := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m : \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \leq \epsilon\}.$$

Por (1.24), $\text{conv}(\mathcal{A}) \subseteq K_\epsilon^+ \setminus H_\epsilon$; y por (1.23), $\text{cono}(\mathcal{C}) \subseteq K_\epsilon^- \setminus H_\epsilon$. Por lo tanto, el hiperplano H_ϵ separa estrictamente a $\text{conv}(\mathcal{A})$ y a $\text{cono}(\mathcal{C})$. Concluimos que $\text{conv}(\mathcal{A}) \cap \text{cono}(\mathcal{C}) = \emptyset$.

Para el recíproco, note que $\text{conv}(\mathcal{A})$ y $\text{cono}(\mathcal{C})$ son subconjuntos cerrados y convexos de \mathbb{R}^m que no se intersecan, y que $\text{conv}(\mathcal{A})$ es acotado. Entonces por el Teorema 1 en [11, §2.2] existe un hiperplano H de \mathbb{R}^m que separa estrictamente a $\text{conv}(\mathcal{A})$ y a $\text{cono}(\mathcal{C})$. Sean \mathbf{n} y α tales que

$$H = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m : \langle \mathbf{y}, \mathbf{n} \rangle = \alpha\}.$$

Multiplicando \mathbf{n} y α por -1 si es necesario, podemos suponer que

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{n} \rangle > \alpha, \forall \mathbf{a} \in \text{conv}(\mathcal{A}), \quad (1.25)$$

$$\langle \mathbf{c}, \mathbf{n} \rangle < \alpha, \forall \mathbf{c} \in \text{cono}(\mathcal{C}). \quad (1.26)$$

Como $\mathbf{0} \in \text{cono}(\mathcal{C})$, de (1.26), tenemos que en particular

$$0 = \langle \mathbf{0}, \mathbf{n} \rangle < \alpha.$$

Por lo tanto $\alpha > 0$. Para todo $\mathbf{c} \in \text{cono}(\mathcal{C})$ y para todo $t \in \mathbb{R}^+$ (\mathbb{R}^+ es el conjunto de reales positivos), $t\mathbf{c} \in \text{cono}(\mathcal{C})$. Entonces, por (1.26) tenemos que

$$\forall \mathbf{c} \in \text{cono}(\mathcal{C}) \text{ y } \forall t \in \mathbb{R}^+, \langle t\mathbf{c}, \mathbf{n} \rangle < \alpha. \quad (1.27)$$

Si existiera algún $\mathbf{c} \in \text{cono}(\mathcal{C})$ tal que $\langle \mathbf{c}, \mathbf{n} \rangle > 0$, entonces, tomando $t = \frac{\alpha}{\langle \mathbf{c}, \mathbf{n} \rangle} > 0$ tendríamos que

$$\langle t\mathbf{c}, \mathbf{n} \rangle = \alpha;$$

esto contradiría (1.27). Por lo tanto

$$\langle \mathbf{c}, \mathbf{n} \rangle \leq 0, \forall \mathbf{c} \in \text{cono}(\mathcal{C}). \quad (1.28)$$

Por otro lado, por (1.25)

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{n} \rangle > \alpha > 0, \forall \mathbf{a} \in \text{conv}(\mathcal{A}). \quad (1.29)$$

De (1.21), (1.28) y (1.29) tenemos que $\mathbf{n} \in \mathcal{S}_2$, por lo tanto $\mathcal{S}_2 \neq \emptyset$. \diamond

Lema 1.3.7. [5, p. 44] *Sea $1 \leq k \leq n$ y sean $\mathcal{A} := \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k\}$ y $\mathcal{C} := \{\mathbf{a}_{k+1}, \dots, \mathbf{a}_n\}$ subconjuntos finitos de \mathbb{R}^m (note que $\mathcal{A} \neq \emptyset$). Entonces $\text{conv}(\mathcal{A}) \cap \text{cono}(\mathcal{C}) \neq \emptyset$ si y sólo si existen reales r_1, \dots, r_n , con $r_1, \dots, r_k \geq 0$, $r_1 + \dots + r_k > 0$, $r_{k+1}, \dots, r_n \leq 0$, tales que $\sum_{i=1}^n r_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0}$.*

Demostración. Primero tratamos el caso $\mathcal{C} = \emptyset$, donde $k = n$ y $\text{cono}(\mathcal{C}) = \{\mathbf{0}\}$. El lema diría en este caso que $\mathbf{0} \in \text{conv}(\mathcal{A})$ si y sólo si existen reales $r_1, \dots, r_n \geq 0$, con $r_1 + \dots + r_n > 0$, tales que $\sum_{i=1}^n r_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0}$. Eso es claramente cierto. Ahora tratamos el caso $\mathcal{C} \neq \emptyset$ ($k < n$).

Supongamos primero que $\text{conv}(\mathcal{A}) \cap \text{cono}(\mathcal{C}) \neq \emptyset$. Sea $\mathbf{d} \in \text{conv}(\mathcal{A}) \cap \text{cono}(\mathcal{C})$. Por un lado

$$\mathbf{d} = \sum_{i=1}^k s_i \mathbf{a}_i, \text{ para ciertos reales } s_1, \dots, s_k \geq 0, \text{ con } \sum_{i=1}^k s_i = 1,$$

y por otro lado

$$\mathbf{d} = \sum_{i=k+1}^n s_i \mathbf{a}_i, \text{ para ciertos reales } s_{k+1}, \dots, s_n \geq 0.$$

Sean $r_i := s_i$, para $i = 1, \dots, k$, y $r_i := -s_i$ para $i = k + 1, \dots, n$. Entonces $r_1, \dots, r_k \geq 0$, $r_1 + \dots + r_k > 0$, $r_{k+1}, \dots, r_n \leq 0$ y

$$\sum_{i=1}^n r_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0}.$$

Para el recíproco, supongamos que existen reales r_1, \dots, r_n , con $r_1, \dots, r_k \geq 0$, $r_1 + \dots + r_k > 0$, $r_{k+1}, \dots, r_n \leq 0$, y tales que $\sum_{i=1}^n r_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0}$. Note que $1 \leq k < n$. Multiplicando por un real positivo apropiado, podemos suponer que $r_1 + \dots + r_k = 1$. Entonces

$$\sum_{i=1}^k r_i \mathbf{a}_i = \sum_{i=k+1}^n -r_i \mathbf{a}_i =: \mathbf{d}.$$

Es claro que $\mathbf{d} \in \text{conv}(\mathcal{A}) \cap \text{cono}(\mathcal{C})$. \diamond

Demostración (de la Proposición 1.3.2). Sean $\mathcal{A} := \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k\}$, $\mathcal{C} := \{\mathbf{a}_{k+1}, \dots, \mathbf{a}_n\}$, donde $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ son los vectores de la proposición. Como $k \geq 1$ entonces $\mathcal{A} \neq \emptyset$. Consideremos el subconjunto \mathcal{S}_2 asociado a \mathcal{A} y \mathcal{C} definido en (1.21). Aplicando los Lemas 1.3.6 y 1.3.7 tenemos que

$$\begin{aligned} \text{se cumple (A)} &\iff \mathcal{S}_2 \neq \emptyset \iff \text{conv}(\mathcal{A}) \cap \text{cono}(\mathcal{C}) = \emptyset \\ &\iff \text{no se cumple (B)}. \diamond \end{aligned}$$

1.4. Lema de Farkas para vectores en \mathbb{Q}^m

Los resultados importantes de esta sección son las Proposiciones 1.4.1 y 1.4.2, que usaremos en el Capítulo 2.

Proposición 1.4.1. [5, Lemas 1 y 3] Sean $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{Q}^m$, y sea $1 \leq k \leq n$. Entonces exactamente una de las siguientes condiciones se cumple:

(A) Existe $\mathbf{c} \in \mathbb{Z}^m$ tal que

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{c}, \mathbf{a}_i \rangle &> 0, \text{ para } i = 1, \dots, k, \\ \langle \mathbf{c}, \mathbf{a}_i \rangle &= 0, \text{ para } i = k + 1, \dots, n. \end{aligned}$$

(B) Existen enteros t_1, \dots, t_n , con $t_1, \dots, t_k \geq 0$, $t_1 + \dots + t_k > 0$, y tales que $\sum_{i=1}^n t_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0}$.

Proposición 1.4.2. [5, Lemas 2 y 3] Sean $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{Q}^m$, y sea $1 \leq k \leq n$. Entonces exactamente una de las siguientes condiciones se cumple:

(A) Existe $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ tal que

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, \mathbf{a}_i \rangle &> 0, \text{ para } i = 1, \dots, k, \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{a}_i \rangle &\leq 0, \text{ para } i = k + 1, \dots, n. \end{aligned}$$

(B) Existen enteros t_1, \dots, t_n , con $t_1, \dots, t_k \geq 0$, $t_1 + \dots + t_k > 0$, $t_{k+1}, \dots, t_n \leq 0$, tales que $\sum_{i=1}^n t_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0}$.

La Proposición 1.4.2 también es cierta si en la condición (A) reemplazamos “ $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ ” por “ $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^m$ ” [5, Lemas 2 y 3]; pero en el Capítulo 2, que es donde la usaremos, se necesita justamente como está enunciada.

El resto de la sección se dedicará a las pruebas.

Recordamos que para cada entero positivo t , \mathbb{R}^t consta de vectores columna, mientras que $(\mathbb{R}^t)^*$ consta de vectores renglón. Con un ligero abuso de notación hemos denotado al vector cero en \mathbb{R}^t (para cualquier valor de t) por $\mathbf{0}$, y el valor de t tal que $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^t$ es claro por el contexto. En esta sección consideramos también el vector cero en $(\mathbb{R}^t)^*$, para diferentes valores de t . En este caso hay mayor ambigüedad, porque se consideran simultáneamente varios valores de t ; así que escribimos $(0, \dots, 0)_t$ para denotar al vector cero en $(\mathbb{R}^t)^*$.

Para la prueba de la Proposición 1.4.1 necesitamos el siguiente lema que contiene parte de la información del Lema 3 en [5].

Lema 1.4.3. [5, Lema 3] Sean $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{Q}^m$ y sea $1 \leq k \leq n$. Entonces existe $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ tal que

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, \mathbf{a}_i \rangle &> 0, \text{ para } i = 1, \dots, k, \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{a}_i \rangle &= 0, \text{ para } i = k + 1, \dots, n \end{aligned}$$

si y sólo si existe $\mathbf{c} \in \mathbb{Z}^m$ tal que

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{c}, \mathbf{a}_i \rangle &> 0, \text{ para } i = 1, \dots, k, \\ \langle \mathbf{c}, \mathbf{a}_i \rangle &= 0, \text{ para } i = k + 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Demostración. Una implicación es trivial. Para la otra supongamos que existe $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ tal que $\langle \mathbf{x}, \mathbf{a}_i \rangle > 0$, para $i = 1, \dots, k$ y $\langle \mathbf{x}, \mathbf{a}_i \rangle = 0$, para $i = k + 1, \dots, n$. Primeramente mostramos que existe un vector $\mathbf{s} \in \mathbb{Q}^m$ tal que $\langle \mathbf{s}, \mathbf{a}_i \rangle > 0$, para $i = 1, \dots, k$ y $\langle \mathbf{s}, \mathbf{a}_i \rangle = 0$, para $i = k + 1, \dots, n$. Para cada $i = 1, \dots, k$ consideramos el hiperespacio lineal ortogonal a \mathbf{a}_i y el respectivo semiespacio:

$$\begin{aligned} H_i &:= \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m : \langle \mathbf{y}, \mathbf{a}_i \rangle = 0\}, \\ K_i^+ &:= \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m : \langle \mathbf{y}, \mathbf{a}_i \rangle \geq 0\}. \end{aligned}$$

Por hipótesis $\mathbf{x} \in K_i^+ \setminus H_i$, para $i = 1, \dots, k$, por lo tanto

$$\mathbf{x} \in \bigcap_{i=1}^k [K_i^+ \setminus H_i] =: U. \quad (1.30)$$

Afirmación. Considere el vector \mathbf{x} de la hipótesis. Sea $\epsilon > 0$ arbitrariamente pequeño. Entonces existe $\mathbf{s} \in \mathbb{Q}^m$ tal que

- a) $\langle \mathbf{s}, \mathbf{a}_i \rangle = 0$, para $i = k + 1, \dots, n$.
- b) $|\mathbf{s} - \mathbf{x}| < \epsilon$.

Prueba de la Afirmación. Primeramente, note que \mathbf{x} es no cero, ya que $\langle \mathbf{x}, \mathbf{a}_i \rangle > 0$ para $i = 1, \dots, k$ (y $k \geq 1$). Sea $A \in M_{m \times (n-k)}(\mathbb{Q})$ la matriz con vectores columna $\mathbf{a}_{k+1}, \dots, \mathbf{a}_n$. Por hipótesis $\mathbf{x}^\top \cdot A = (0, \dots, 0)_{n-k}$. Sea t el mayor entero tal que $(\mathbf{a}_{k+1}, \dots, \mathbf{a}_n)$ tiene una subfamilia linealmente independiente con t vectores. Supongamos sin perder generalidad que $(\mathbf{a}_{k+1}, \dots, \mathbf{a}_{k+t})$ es una subfamilia linealmente independiente de $(\mathbf{a}_{k+1}, \dots, \mathbf{a}_n)$, y sea A_1 la matriz con vectores columna $\mathbf{a}_{k+1}, \dots, \mathbf{a}_{k+t}$. Entonces para cada vector $\mathbf{u} \in (\mathbb{R}^m)^*$ tenemos que

$$\mathbf{u}A = (0, \dots, 0)_{n-k} \iff \mathbf{u}A_1 = (0, \dots, 0)_t. \quad (1.31)$$

En particular $\mathbf{x}^\top A_1 = (0, \dots, 0)_t$. Note que $A_1 \in M_{m \times t}(\mathbb{Q})$ y tiene rango t . Como \mathbf{x} no es el vector cero y $\mathbf{x}^\top A_1 = (0, \dots, 0)_t$, entonces $m > t$. No se pierde generalidad en suponer que los primeros t renglones de A_1 son linealmente independientes. Entonces podemos escribir $A_1 = \begin{pmatrix} D \\ C \end{pmatrix}$, donde la matriz D , formada por los primeros t renglones de A_1 es invertible. Escribimos también cada vector $\mathbf{u} \in (\mathbb{R}^m)^*$ como $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_D, \mathbf{u}_C)$, donde $\mathbf{u}_D := (u_1, \dots, u_t)$, $\mathbf{u}_C :=$

(u_{t+1}, \dots, u_m) . Para cada vector $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_D, \mathbf{u}_C) \in (\mathbb{R}^m)^*$ tenemos que

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_D, \mathbf{u}_C) \begin{pmatrix} D \\ C \end{pmatrix} = (0, \dots, 0)_t &\iff \mathbf{u}_D D + \mathbf{u}_C C = (0, \dots, 0)_t \\ &\iff \mathbf{u}_D = -\mathbf{u}_C C D^{-1}. \end{aligned}$$

Note que la matriz $-CD^{-1} \in \mathbf{M}_{(m-t) \times t}(\mathbb{Q})$. Lo anterior significa que el conjunto de vectores $\mathbf{u} \in (\mathbb{R}^m)^*$ tales que $\mathbf{u}A_1 = (0, \dots, 0)_t$, es precisamente el conjunto de vectores $\mathbf{u} \in (\mathbb{R}^m)^*$ que se pueden construir fijando libremente las coordenadas de \mathbf{u}_C y determinando las coordenadas de \mathbf{u}_D mediante la ecuación $\mathbf{u}_D = \mathbf{u}_C(-CD^{-1})$. Considerando el vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, escribimos $\mathbf{x}^\top = (\mathbf{x}_D, \mathbf{x}_C) \in (\mathbb{R}^m)^*$, donde $\mathbf{x}_D := (x_1, \dots, x_t) \in (\mathbb{R}^t)^*$ y $\mathbf{x}_C := (x_{t+1}, \dots, x_m) \in (\mathbb{R}^{m-t})^*$. La función lineal $L : (\mathbb{R}^{m-t})^* \rightarrow (\mathbb{R}^t)^*$ tal que $L(\mathbf{v}) := \mathbf{v}(-CD^{-1})$ es continua en $(\mathbb{R}^{m-t})^*$; en particular L es continua en \mathbf{x}_C . Por lo tanto, dado $\epsilon_1 > 0$ existe $\delta_1 > 0$ tal que para cada $\mathbf{v} \in (\mathbb{R}^{m-t})^*$ se tiene que

$$|\mathbf{v} - \mathbf{x}_C| < \delta_1 \implies |L(\mathbf{v}) - L(\mathbf{x}_C)| < \epsilon_1.$$

Sea $\epsilon_0 := \frac{\epsilon}{2}$ (donde ϵ es el valor en la hipótesis de la afirmación) y considere el valor δ_0 que se obtiene por la continuidad de L . Sea $\delta := \min\{\delta_0, \frac{\epsilon}{2}\}$. Existe un vector $\mathbf{s}_C \in (\mathbb{Q}^{m-t})^*$ tal que $|\mathbf{s}_C - \mathbf{x}_C| < \delta$. Sea $\mathbf{s}_D := \mathbf{s}_C(-CD^{-1})$ y sea $\mathbf{s} \in \mathbb{Q}^m$ el vector tal que $\mathbf{s}^\top = (\mathbf{s}_D, \mathbf{s}_C) \in (\mathbb{Q}^m)^*$. Por demostrar que \mathbf{s} cumple las condiciones requeridas en la Afirmación. Por construcción $\mathbf{s}^\top A_1 = (0, \dots, 0)_t$, entonces por (1.31) $\mathbf{s}^\top A = (0, \dots, 0)_{n-k}$. Por lo tanto $\langle \mathbf{s}, \mathbf{a}_i \rangle = 0$, para $i = k+1, \dots, n$. Ahora, usando la desigualdad del triángulo para vectores en $(\mathbb{R}^m)^*$, y por las definiciones de δ_0 , ϵ_0 y δ tenemos lo siguiente: (aquí usamos que la norma de un vector y la de su transpuesto son iguales)

$$\begin{aligned} |\mathbf{s} - \mathbf{x}| &\leq |\mathbf{s}_D - \mathbf{x}_D| + |\mathbf{s}_C - \mathbf{x}_C| = |L(\mathbf{s}_C) - L(\mathbf{x}_C)| + |\mathbf{s}_C - \mathbf{x}_C| \\ &< \epsilon_0 + \delta \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Esto concluye la prueba de la Afirmación. \diamond

Continuamos con la prueba del lema. El subconjunto U en (1.30) es abierto en \mathbb{R}^m , por lo tanto, existe $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, tal que la bola $B_\epsilon(\mathbf{x}) := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m : |\mathbf{y} - \mathbf{x}| < \epsilon\}$ está contenida en U . Para este valor de ϵ , existe, por la Afirmación, un vector $\mathbf{s} \in \mathbb{Q}^m$ tal que $\langle \mathbf{s}, \mathbf{a}_i \rangle = 0$, para $i = k+1, \dots, n$, y con $|\mathbf{s} - \mathbf{x}| < \epsilon$. Por lo tanto $\mathbf{s} \in B_\epsilon(\mathbf{x}) \subseteq U$. Por definición

de U , \mathbf{s} es tal que $\langle \mathbf{s}, \mathbf{a}_i \rangle > 0$, para $i = 1, \dots, k$. El vector $\mathbf{c} \in \mathbb{Z}^m$ al que se refiere el lema se obtiene multiplicando \mathbf{s} por un entero positivo apropiado.

◇

Demostración (de la Proposición 1.4.1.) Como $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{Q}^m$, por el Lema 1.4.3, la condición (A) de esta proposición es equivalente a la condición (A) de la Proposición 1.3.1; y por el Lema 1.2.7, la condición (B) de esta proposición es equivalente a la condición (B) de la Proposición 1.3.1. La prueba de esta proposición sigue entonces de la Proposición 1.3.1. ◇

Demostración (de la Proposición 1.4.2.) Note que la condición (A) de esta proposición coincide con la condición (A) de la Proposición 1.3.2; y como $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{Q}^m$, por el Lema 1.2.8, la condición (B) de esta proposición es equivalente a la condición (B) de la Proposición 1.3.2. La prueba de esta proposición sigue entonces de la Proposición 1.3.2. ◇

Capítulo 2

Obstrucciones de aditividad para matrices y pirámides

En este capítulo presentamos las demostraciones de los Resultados 1, 2 y 3 mencionados en la introducción del trabajo:

Resultado 1. *No existe una cota en el peso de las configuraciones malas (resp. débilmente malas) que es necesario considerar para determinar unicidad (resp. $(0,1)$ -aditividad) de cualquier $(0,1)$ -matriz de dimensión 3.*

Este resultado, que es el más importante del trabajo, aparece en [22]. La Sección 2.5 está dedicada a la prueba de dicho resultado.

Resultado 2 (Teo. 2.6.2). *Sea $A : \mathbf{B}(3,3) \rightarrow \mathbb{N}_0$ una partición plana. Entonces A es no aditiva si y sólo si \mathcal{Z}_{33} ó $-\mathcal{Z}_{33}$ es una obstrucción de aditividad para A (ver Figura 2.1).*

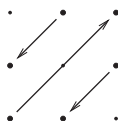


Figura 2.1: Diagrama de flechas \mathcal{Z}_{33} .

Resultado 3 (Teo. 2.6.7). *Sea $A : \mathbf{B}(3, 4) \rightarrow \mathbb{N}_0$ una partición plana que no tiene entradas repetidas. Entonces A es no aditiva si y sólo si, o bien A tiene una submatriz de tamaño 3×3 que es no aditiva, o bien alguno de los diagramas de flechas $\mathcal{Z}_{34(a)}$, $\mathcal{Z}_{34(b)}$, $-\mathcal{Z}_{34(a)}$ ó $-\mathcal{Z}_{34(b)}$ es una obstrucción de aditividad para A (ver Figura 2.2).*

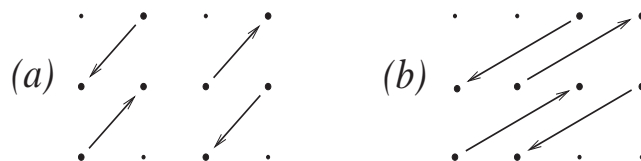


Figura 2.2: Diagramas de flechas $\mathcal{Z}_{34(a)}$ y $\mathcal{Z}_{34(b)}$.

En la Sección 2.6 demostramos estos resultados. Incluimos además algunas conjeturas relacionadas, las más importantes son las Conjeturas 4 y 5 que se refieren a listas completas de obstrucciones de aditividad para particiones planas de tamaños 3×5 y 3×6 respectivamente.

Las demás secciones contienen información relacionada con los Resultados 1, 2 y 3: Las Secciones 2.1, 2.2, 2.3 y 2.4 contienen resultados que se usan en las pruebas de los Resultados 1, 2 y 3. En la Sección 2.7 estudiamos algunos resultados de Fishburn [6, 7] relativos a la noción a la que aquí nos referimos como F -aditividad, que se aplica a órdenes parciales en el rectángulo $[p] \times [q]$. También analizamos la forma en que dichos resultados se relacionan con los Resultados 1, 2 y 3.

En la Sección 2.8 presentamos la clasificación de las configuraciones débilmente malas de peso 3 para pirámides (Teorema 2.8.2). Esta clasificación resulta coincidir con la clasificación de las configuraciones malas de peso 3 para pirámides que ya es conocida [24, Teo. 5.1]. También probamos que toda configuración débilmente mala de peso 3 para una pirámide es de hecho una configuración mala (Proposición 2.8.1), probamos esto aplicando algunas de las ideas que usamos en la prueba del Teorema 2.8.2.

En la Sección 2.9 probamos que una matriz A doblemente graduada es aditiva si y sólo si cierta matriz D relacionada con A , doblemente graduada y sin entradas repetidas, es aditiva. Este resultado, combinado con el Resul-

tado 3 (que vale para matrices sin entradas repetidas), ayuda a determinar aditividad para algunas particiones planas de tamaño 3×4 con entradas repetidas (Ejemplo 2.9.2).

2.1. Notación y resultados conocidos

Comenzamos por definir algo de notación que será usada a lo largo de todo este trabajo ¹. Para cada entero positivo n denotamos por $[n]$ al conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$. Sea \mathbb{N} el conjunto de los números naturales, denotamos por \mathbb{N}_0 al conjunto $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Un vector $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ es una *partición* si sus coordenadas son enteros no negativos y $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m$. Si $\sum_{i=1}^m \lambda_i = N$, decimos que $\boldsymbol{\lambda}$ es una partición de N . El *diagrama de Young* de $\boldsymbol{\lambda}$ es el conjunto $D(\boldsymbol{\lambda}) := \{(i, j) : 1 \leq j \leq \lambda_i\}$. La *longitud* de $\boldsymbol{\lambda}$, denotada por $\ell(\boldsymbol{\lambda})$ es el número de sus coordenadas positivas, es decir, el número de renglones de $D(\boldsymbol{\lambda})$. Con frecuencia pensaremos a $\boldsymbol{\lambda}$ como un elemento de \mathbb{R}^m para algún $m \geq \ell(\boldsymbol{\lambda})$, agregando algunos ceros a la derecha. La partición conjugada de $\boldsymbol{\lambda}$ es $\boldsymbol{\lambda}' = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_k)$, donde $k \geq \lambda_1$ y $\lambda'_j = \#\{i : \lambda_i \geq j\}$; en otras palabras, λ'_j es la longitud de la j -ésima columna de $D(\boldsymbol{\lambda})$. Por ejemplo, si $\boldsymbol{\lambda} = (5, 4, 2, 2, 1, 1, 1)$, entonces $\boldsymbol{\lambda}' = (7, 4, 2, 2, 1)$.

Fijamos tres enteros positivos p, q y r , y denotamos el conjunto de puntos enteros en un rectángulo de tamaño $p \times q$ por $\mathbf{R} = \mathbf{B}(p, q) = [p] \times [q]$, y el conjunto de puntos enteros en una caja de dimensión 3 de tamaño $p \times q \times r$ como $\mathbf{B} = \mathbf{B}(p, q, r) := [p] \times [q] \times [r]$. Denotamos a los elementos de $\mathbf{R} = \mathbf{B}(p, q)$ con letras de tipo $\mathbf{h}, \mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{s}$, etc; y a los elementos de $\mathbf{B} = \mathbf{B}(p, q, r)$ con letras de tipo $\mathbf{h}, \mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{s}$, etc. Un elemento $\mathbf{k} \in \mathbf{B}$ será representado algunas veces por un par $\mathbf{k} = (\mathbf{h}, s)$, $\mathbf{h} \in \mathbf{R}$, $1 \leq s \leq r$, y otras como (i, j, k) , $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq q$ y $1 \leq k \leq r$. El rectángulo \mathbf{R} tiene un orden parcial definido por $\mathbf{h} \trianglelefteq \mathbf{k}$ si y sólo si $h_i \leq k_i$, para $i = 1, 2$. La caja \mathbf{B} tiene también un orden parcial \trianglelefteq definido en la misma forma. Una *matriz de dimensión 3* (real) de tamaño $p \times q \times r$ es una función $X : \mathbf{B} \rightarrow \mathbb{R}$. Una *(0,1)-matriz de dimensión 3* ó *matriz binaria de dimensión 3* es una matriz $X : \mathbf{B} \rightarrow \{0, 1\}$.

Para cualquier matriz $X : \mathbf{B} \rightarrow \mathbb{R}$ consideramos sus *1-márgenes*, también llamados *sumas por planos* ó *rayos X de dimensión 2*, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_p)$,

¹Algunas de estas definiciones ya aparecen en la introducción del trabajo, de cualquier manera las incluimos aquí nuevamente.

$\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_q)$ y $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_r)$, definidos por

$$a_i = \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^r X(i, j, k), \quad b_j = \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^r X(i, j, k) \quad \text{y} \quad c_k = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q X(i, j, k).$$

Fijamos $N \in \mathbb{N}_0$ y sean $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_p)$, $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_q)$ y $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_r)$ vectores con coordenadas en \mathbb{N}_0 , cada uno con suma de coordenadas igual a N . Entonces, denotamos por $\mathbf{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ al conjunto de todas las matrices de dimensión 3 con entradas reales que tienen por 1-márgenes a los vectores \mathbf{a} , \mathbf{b} y \mathbf{c} ; y por $\mathbf{M}^*(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ al conjunto de todas las (0,1)-matrices en $\mathbf{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$. Note que las (0,1)-matrices pueden ser identificadas con los subconjuntos S de \mathbf{B} por medio de la condición

$$\mathbf{k} \in S \iff X(\mathbf{k}) = 1. \tag{2.1}$$

Sea $X \in \mathbf{M}^*(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$. Decimos que X es de *unicidad* [8] si X es el único elemento en el conjunto $\mathbf{M}^*(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$. Decimos que X es *(0,1)-aditiva* [8]² si existen funciones

$$f_1 : [p] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_2 : [q] \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{y} \quad f_3 : [r] \longrightarrow \mathbb{R},$$

tales que para todo $\mathbf{k} \in \mathbf{B}$,

$$X(\mathbf{k}) = 1 \iff \sum_{i=1}^3 f_i(k_i) \geq 0. \tag{2.2}$$

Decimos que X es una *pirámide* [24, 27, 28, 29] si para cualesquiera $\mathbf{s}, \mathbf{t} \in \mathbf{B}$

$$\mathbf{s} \trianglelefteq \mathbf{t} \implies X(\mathbf{s}) \geq X(\mathbf{t}), \tag{2.3}$$

o equivalentemente, si

$$\mathbf{s} \trianglelefteq \mathbf{t} \text{ y } X(\mathbf{t})=1 \implies X(\mathbf{s}) = 1. \tag{2.4}$$

Una *configuración débilmente mala* para X es una matriz diferente de la matriz cero, $W \in \mathbf{F}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ con entradas enteras, tal que si $W(\mathbf{k}) > 0$

²En [8, 9] Fishburn et al. trabajan, no con matrices sino con los subconjuntos finitos asociados a ellas por medio (2.1). Consideran dimensión n en general. Le llaman aditividad a la noción de (0,1)-aditividad. Nosotros llamaremos *aditividad* a otro concepto que luego definiremos.

entonces $X(\mathbf{k}) = 1$ y si $W(\mathbf{k}) < 0$ entonces $X(\mathbf{k}) = 0$. El *peso* de una configuración débilmente mala W es la suma de sus entradas positivas; esto es

$$w(W) = \sum_{\mathbf{k}, W(\mathbf{k}) > 0} W(\mathbf{k}).$$

Note que $w(W) = -\sum_{\mathbf{k}, W(\mathbf{k}) < 0} W(\mathbf{k})$. Una *configuración mala* para X es una configuración débilmente mala que tiene entradas en $\{-1, 0, 1\}$.

Proposición 2.1.1. [24, §3], [27, §3] *Sea X una $(0,1)$ -matriz de dimensión 3. Entoces X es una pirámide si y sólo si X no tiene configuraciones malas de peso 2.*

Las configuraciones débilmente malas, resp. configuraciones malas, fueron introducidas en [8] para caracterizar $(0,1)$ -aditividad, resp. unicidad.

Teorema 2.1.2. [8, Teo. 1] *Sea X una $(0,1)$ -matriz de dimensión 3. Entonces X es de unicidad si y sólo si X no tiene configuraciones malas.*

Teorema 2.1.3. [8, Teo. 2] *Sea X una $(0,1)$ -matriz de dimensión 3. Entonces X es $(0,1)$ -aditiva si y sólo si X no tiene configuraciones débilmente malas.*

Como una configuración mala también es configuración débilmente mala, los Teoremas 2.1.2 y 2.1.3 implican que si X es una matriz $(0,1)$ -aditiva entonces X es una matriz de unicidad. Dada la relevancia que el Teorema 2.1.3 tiene en el presente trabajo, presentamos su demostración, que fue tomada de [8, p. 152]. Dicha prueba vale para matrices de dimensión n en general, aquí presentamos solamente la versión para dimensión 3, que es la que requerimos en este trabajo. La prueba del teorema requiere un poco de notación y trabajo técnico, que enseguida desarrollamos.

Necesitamos la siguiente versión alternativa de $(0,1)$ -aditividad. Decimos que una $(0,1)$ -matriz de dimensión 3, $X : \mathbf{B} \rightarrow \{0, 1\}$, es *$(0,1)$ -aditiva** si existen funciones $g_1 : [p] \rightarrow \mathbb{R}$, $g_2 : [q] \rightarrow \mathbb{R}$ y $g_3 : [r] \rightarrow \mathbb{R}$ tales que para $\mathbf{k} \in \mathbf{B}$

$$X(\mathbf{k}) = 1 \iff \sum_{i=1}^3 g_i(k_i) > 0, \tag{2.5}$$

(comparar con (2.2)).

Lema 2.1.4. *Sea $X : \mathbf{B} \rightarrow \{0, 1\}$ una $(0,1)$ -matriz de dimensión 3. Entonces X es $(0,1)$ -aditiva si y sólo si X es $(0,1)$ -aditiva*.*

Demostración. Supongamos primero que X es $(0,1)$ -aditiva, y sean $f_1 : [p] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_2 : [q] \rightarrow \mathbb{R}$ y $f_3 : [r] \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones que satisfacen (2.2). Sea

$$d := \max \left\{ \sum_{i=1}^3 f_i(k_i) : X(\mathbf{k}) = 0 \right\}.$$

Entonces por (2.2), $d < 0$. Sea $\delta := \frac{1}{6}|d|$. Definimos funciones $g_1 : [p] \rightarrow \mathbb{R}$, $g_2 : [q] \rightarrow \mathbb{R}$ y $g_3 : [r] \rightarrow \mathbb{R}$ de la siguiente manera: $g_i(s) := f_i(s) + \delta$, $i = 1, 2, 3$ y $s \in [p]$, resp. $s \in [q]$, resp. $s \in [r]$. Probar que estas funciones satisfacen (2.5) equivale a mostrar que se cumplen las siguientes condiciones:

$$X(\mathbf{k}) = 1 \implies \sum_{i=1}^3 g_i(k_i) > 0, \quad (2.6)$$

$$X(\mathbf{k}) = 0 \implies \sum_{i=1}^3 g_i(k_i) \leq 0. \quad (2.7)$$

Si $X(\mathbf{k}) = 1$, como X es $(0,1)$ -aditiva, $\sum_{i=1}^3 f_i(k_i) \geq 0$, por lo tanto

$$\sum_{i=1}^3 g_i(k_i) = \sum_{i=1}^3 f_i(k_i) + 3\delta > 0.$$

Por lo tanto se cumple (2.6). Si $X(\mathbf{k}) = 0$, entonces $\sum_{i=1}^3 f_i(k_i) \leq d < 0$. Luego

$$\sum_{i=1}^3 g_i(k_i) = \sum_{i=1}^3 f_i(k_i) + 3\delta = \sum_{i=1}^3 f_i(k_i) + \frac{|d|}{2} < 0.$$

En particular, se cumple la condición (2.7). Por lo tanto X es $(0,1)$ -aditiva*.

La prueba del recíproco es totalmente análoga. \diamond

Sean $\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}$ vectores en $\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q$ y \mathbb{R}^r respectivamente. El vector *fusión* de \mathbf{c}, \mathbf{d} y \mathbf{e} , que denotamos por $\mathbf{c} * \mathbf{d} * \mathbf{e}$, es el vector en \mathbb{R}^{p+q+r} definido por

$$(\mathbf{c} * \mathbf{d} * \mathbf{e})_k := \begin{cases} c_k & \text{si } 1 \leq k \leq p; \\ d_{k-p} & \text{si } p+1 \leq k \leq p+q; \\ e_{k-(p+q)} & \text{si } p+q+1 \leq k \leq p+q+r. \end{cases}$$

A cada elemento $\mathbf{h} \in \mathbf{B}$ le asociamos una matriz $\mathbf{M}_{\mathbf{h}} : \mathbf{B} \rightarrow \{0, 1\}$ definida por

$$\mathbf{M}_{\mathbf{h}}(\mathbf{k}) := \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{h}}$$

para todo $\mathbf{k} \in \mathbf{B}$; en otras palabras $\mathbf{M}_{\mathbf{h}}(\mathbf{k}) = 1$ si $\mathbf{k} = \mathbf{h}$, y $\mathbf{M}_{\mathbf{h}}(\mathbf{k}) = 0$ si $\mathbf{k} \neq \mathbf{h}$. Sea $\mathbf{h} \in \mathbf{B}$ y sean \mathbf{c}, \mathbf{d} y \mathbf{e} los 1-márgenes de $\mathbf{M}_{\mathbf{h}}$. Entonces asociamos a \mathbf{h} el vector $\mathbf{v}_{\mathbf{h}} \in \mathbb{R}^{p+q+r}$ definido como la fusión de \mathbf{c}, \mathbf{d} y \mathbf{e} ; esto es,

$$\mathbf{v}_{\mathbf{h}} := \mathbf{c} * \mathbf{d} * \mathbf{e}.$$

Demostración (del Teorema 2.1.3). Por el Lema 2.1.4 basta probar que X es (0,1)-aditiva* si y sólo si X no tiene configuraciones débilmente malas.

Sean $s := \sum_{\mathbf{h}, X(\mathbf{h})=1} X(\mathbf{h})$ y $M := pqr = |\mathbf{B}|$. Sean $\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_s$ los puntos de \mathbf{B} tales que $X(\mathbf{h}_i) = 1$, para $i = 1, \dots, s$; y $\mathbf{h}_{s+1}, \dots, \mathbf{h}_M$ los puntos de \mathbf{B} donde X toma el valor cero. Para cada $i \in [M]$ sea $\mathbf{v}_i := \mathbf{v}_{\mathbf{h}_i} \in \mathbb{R}^{p+q+r}$.

Para cualquier vector $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{p+q+r}) \in \mathbb{R}^{p+q+r}$ definimos funciones $g_1 : [p] \rightarrow \mathbb{R}$, $g_2 : [q] \rightarrow \mathbb{R}$ y $g_3 : [r] \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$g_1(k_1) = x_{k_1}, \quad g_2(k_2) = x_{p+k_2} \quad \text{y} \quad g_3(k_3) = x_{(p+q)+k_3};$$

de manera que, para cada $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3) \in \mathbf{B}$, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_{\mathbf{k}} \rangle = g_1(k_1) + g_2(k_2) + g_3(k_3)$. Por lo tanto, X es (0,1)-aditiva* si y sólo si existe un vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{p+q+r}$ tal que

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_i \rangle &> 0, \text{ para } i = 1, \dots, s, \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_i \rangle &\leq 0, \text{ para } i = s + 1, \dots, M. \end{aligned}$$

Por la Proposición 1.4.2, tal \mathbf{x} existe si y sólo si no existen enteros t_1, \dots, t_M , con $t_1, \dots, t_s \geq 0$, $t_1 + \dots + t_s > 0$, $t_{s+1}, \dots, t_M \leq 0$, y tales que $\sum_{i=1}^M t_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$. La prueba del Teorema concluye entonces con la siguiente Afirmación (para la cual usamos la notación de esta demostración).

Afirmación. Existen enteros t_1, \dots, t_M , con $t_1, \dots, t_s \geq 0$, $t_1 + \dots + t_s > 0$, $t_{s+1}, \dots, t_M \leq 0$, y tales que $\sum_{i=1}^M t_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ si y sólo si existe una configuración débilmente mala W para X .

Prueba de la Afirmación. Supongamos primero que existen los enteros t_1, \dots, t_M mencionados en la Afirmación. Definimos la matriz $W : \mathbf{B} \rightarrow \mathbb{Z}$ como

$$W := \sum_{i=1}^M t_i \mathbf{M}_{\mathbf{h}_i}.$$

Como $\mathbf{v} := \sum_{i=1}^M t_i \mathbf{v}_i$ es la fusión de los 1-márgenes de W , tenemos por nuestras hipótesis, que $W \in \mathbf{F}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$. Sea $i \in [M]$. Si $W(\mathbf{h}_i) > 0$, entonces $t_i > 0$. Como $t_{s+1}, \dots, t_M \leq 0$, entonces $i \leq s$; esto es, $X(\mathbf{h}_i) = 1$. Si $W(\mathbf{h}_i) < 0$, entonces $t_i < 0$. Como $t_1, \dots, t_s \geq 0$, en este caso tenemos que $i \geq s + 1$; esto es $X(\mathbf{h}_i) = 0$. Como $t_1 + \dots + t_s > 0$, entonces W no es la matriz cero. Por lo tanto W es una configuración débilmente mala para X .

Ahora, sea W una configuración débilmente mala para X . Para cada $i \in [M]$ sea $t_i := W(\mathbf{h}_i)$. Como W toma valores negativos solamente en puntos \mathbf{h}_i , con $i \geq s + 1$, entonces $t_1, \dots, t_s \geq 0$. Como W toma valores positivos solamente en puntos \mathbf{h}_i con $i \leq s$, entonces $t_{s+1}, \dots, t_M \leq 0$. Como W no es la matriz cero, $t_1 + \dots + t_s > 0$. Por la definición de los t_i , $i = 1, \dots, M$, tenemos que $W = \sum_{i=1}^M t_i \mathbf{M}_{\mathbf{h}_i}$, entonces $\sum_{i=1}^M t_i \mathbf{v}_i$ es la fusión de los 1-márgenes de W . Como $W \in \mathbf{F}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$, concluimos que $\sum_{i=1}^M t_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$. \diamond

Ejemplo 2.1.5. [8, p. 155] La (0,1)-matriz de dimensión 3

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

tiene 1-márgenes (23,21,8,5,3), (17,15,12,9,7) y (20,14,12,8,6), y tiene una configuración débilmente mala de peso 6 dada por la matriz $W : \mathbf{B}(5, 5, 5) \rightarrow \mathbb{Z}$, que toma valor 2 en (4, 4, 1), valor 1 en (5, 1, 2), (3, 2, 3), (1, 5, 4), (2, 3, 5), valor -1 en (5, 3, 1), (3, 5, 1), (4, 2, 2), (4, 1, 3), (2, 4, 4), (1, 4, 5) y valor 0 en los puntos restantes. Por lo tanto, por el Teorema 2.1.3, la matriz no es (0,1)-aditiva. \diamond

Comentario 2.1.6. [28, §3] Una *sección* en la tercera dirección de una (0,1)-matriz de dimensión 3, $X : \mathbf{B} \rightarrow \{0, 1\}$, es una (0,1)-matriz de dimensión 2 Y , obtenida restringiendo X a $[p] \times [q] \times \{k\}$ para algún $k \in [r]$. Pensamos a X como una matriz formada por r secciones en la tercera dirección; estas secciones pueden ser permutadas de acuerdo a una permutación σ de los elementos de $[r]$. La matriz obtenida, denotada por σX , tiene los mismos dos primeros 1-márgenes que X , mientras que el tercer 1-márgen de σX tiene las mismas coordenadas que el tercer 1-márgen de X , pero reordenadas de acuerdo a σ . Sigue de la definición, que X es (0,1)-aditiva si y sólo si σX es (0,1)-aditiva. Las mismas observaciones aplican cuando consideramos

permutaciones de secciones en la primera y segunda direcciones. Por lo tanto, al considerar (0,1)-aditividad para una (0,1)-matriz X , podemos suponer sin perder generalidad, que los 1-márgenes de X son débilmente decrecientes, es decir, particiones. \diamond

En ocasiones es conveniente trabajar con matrices que tienen 1-márgenes débilmente decrecientes, ver por ejemplo el Teorema 2.1.7, el Lema 2.1.9, el Lema 2.4.7, el Lema 2.5.4, el Teorema 2.5.5, la Proposición 3.1.1 y los Teoremas 3.3.2 y 3.3.3, éstos últimos se refieren a matrices en $\mathbb{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, donde \mathbf{a} y \mathbf{b} son vectores débilmente decrecientes.

El siguiente teorema está implícito en [23, Teo. 1'(i)] y también en [27, Prop. 3.1]. En [29, Teo. 7] se da una prueba directa para el caso más general de matrices de dimensión n .

Teorema 2.1.7. *Sea X una (0,1)-matriz de dimensión 3 cuyos 1-márgenes son particiones. Si X es (0,1)-aditiva, entonces X es pirámide.*

Existe una segunda noción de aditividad para matrices de dimensión 2 con entradas reales. Empezamos con algo de notación y definiciones. Una matriz de dimensión 2 de tamaño $p \times q$ con entradas reales es una función $A : \mathbb{R} = \mathbb{B}(p, q) \rightarrow \mathbb{R}$. Para cualquier matriz $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ consideramos sus 1-márgenes, también llamados sumas por líneas ó rayos X de dimensión 1, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_p)$ y $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_q)$, definidos por

$$a_i := \sum_{j=1}^q A(i, j) \quad \text{y} \quad b_j := \sum_{i=1}^p A(i, j).$$

Sean $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_p)$ y $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_q)$ vectores con coordenadas en \mathbb{N}_0 y con sumas de coordenadas iguales a N . Denotamos por $\mathbb{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ al conjunto de todas las matrices de dimensión 2 con entradas reales que tienen por 1-márgenes a los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} ; y por $\mathbb{M}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ al conjunto de todas las matrices en $\mathbb{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ con entradas en \mathbb{N}_0 . Una matriz $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es *doblemente graduada* si para cualesquiera $\mathbf{h}, \mathbf{k} \in \mathbb{R}$ tenemos que

$$\mathbf{h} \trianglelefteq \mathbf{k} \implies A(\mathbf{h}) \geq A(\mathbf{k}). \tag{2.8}$$

Una matriz doblemente graduada con entradas en \mathbb{N}_0 se conoce como *partición plana*. Es claro que los 1-márgenes de una partición plana son particiones. Una matriz $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es *aditiva* si existen vectores $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^q$

tales que para cualesquiera $(i, j), (k, l) \in \mathbb{R}$

$$A(i, j) > A(k, l) \implies x_i + y_j > x_k + y_l. \quad (2.9)$$

La noción de aditividad fue introducida en [27] para matrices con entradas en \mathbb{N}_0 y extendida luego a matrices reales en [18], ver también [28, 29]. Si A es aditiva, una *solución de aditividad* para A es una pareja (\mathbf{x}, \mathbf{y}) , con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^q$, y que satisfacen (2.9). Dos matrices $A, B : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tienen el mismo *tipo de orden* si para cualesquiera $\mathbf{h}, \mathbf{k} \in \mathbb{R}$

$$A(\mathbf{h}) > A(\mathbf{k}) \iff B(\mathbf{h}) > B(\mathbf{k}). \quad (2.10)$$

Por definición, la noción de aditividad depende solamente del tipo de orden de las matrices; más aún:

Lema 2.1.8. [22, Lema 2.5] *Sea $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una matriz. Entonces existe una matriz $B : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}_0$ tal que A y B tienen el mismo tipo de orden. En particular A es aditiva si y sólo si B es aditiva.*

Demostración. Sean $a_0 < \dots < a_s$ los diferentes valores que toman las entradas de A , ordenados en orden creciente. Sea B la matriz que se obtiene reemplazando cada entrada de A que tenga valor a_i , por i . Entonces B es una matriz con entradas enteras y que tiene el mismo tipo de orden que A . La segunda afirmación sigue de (2.9) y (2.10). \diamond

El siguiente lema está implícito en [23, Teo 1'(i)].

Lema 2.1.9. *Sea $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Supongamos que los 1-márgenes de A son débilmente decrecientes. Si A es aditiva, entonces A es doblemente graduada.*

Demostración. Supondremos que A es aditiva y que no es doblemente graduada, llegaremos a una contradicción. Como A es aditiva, existen vectores $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^q$ que cumplen la condición en (2.9). Es claro que si una matriz $B : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es tal que

$$\begin{cases} B(i, j) \geq B(i, j + 1) & \text{para } i \in [p], j \in [q - 1]; \text{ y} \\ B(i, j) \geq B(i + 1, j) & \text{para } i \in [p - 1], j \in [q]; \end{cases}$$

entonces B es doblemente graduada. Como A no es doblemente graduada, existe $(i, j) \in \mathbb{R}$, con $i \in [p], j \in [q - 1]$, tal que $A(i, j) < A(i, j + 1)$ (ó existe $(i, j) \in \mathbb{R}$, con $i \in [p - 1], j \in [q]$, tal que $A(i, j) < A(i + 1, j)$, este caso

se trata de manera similar). Entonces, por (2.9), $x_i + y_j < x_i + y_{j+1}$. Como A tiene 1-márgenes débilmente decrecientes, existe $k \in [p], k \neq i$, tal que $A(k, j) > A(k, j + 1)$. Luego, por (2.9), $x_k + y_j > x_k + y_{j+1}$; que es una contradicción. \diamond

Un resultado análogo al Lema 2.1.9, que vale para matrices de dimensión n con entradas enteras es parte del resultado del Corolario 3 en [29]. El recíproco del Lema 2.1.9 es cierto para matrices de tamaño $2 \times q$, como lo muestra el siguiente teorema.

Teorema 2.1.10. [27, Teo. 2] *Sea $A : \mathbf{B}(2, q) \rightarrow \mathbb{R}$. Si A es doblemente graduada entonces A es aditiva.*

Note que este teorema no es cierto para matrices en general. La matriz D del Ejemplo 2.1.13 es doblemente graduada y es no aditiva.

Sea $A \in \mathbf{M}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, la π -sucesión de A , denotada por $\pi(A)$, es el vector formado por las entradas de A arregladas en orden débilmente decreciente. $\pi(A)$ es una partición de N (donde N es la suma de las entradas de A) que tiene pq coordenadas (algunas de las cuales pueden ser ceros). Sea r un entero positivo tal que $r \geq \max\{A(\mathbf{h}) : \mathbf{h} \in \mathbf{R}\}$. Entonces, la gráfica de A es la $(0,1)$ -matriz de dimensión 3, $\mathbf{G}(A) : \mathbf{B}(p, q, r) \rightarrow \{0, 1\}$ definida por

$$\mathbf{G}(A)(i, j, k) := \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \leq k \leq A(i, j); \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Note que el valor de r no es relevante, lo que realmente importa es el conjunto de todos los $\mathbf{h} \in \mathbf{B}$ que satisfacen que $\mathbf{G}(A)(\mathbf{h}) = 1$. Dos hechos elementales sobre la matriz $\mathbf{G}(A)$ que son fáciles de verificar directamente, se enuncian en el siguiente Lema.

Lema 2.1.11. *Sea $A \in \mathbf{M}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Entonces*

- (1) *La gráfica $\mathbf{G}(A)$ tiene 1-márgenes \mathbf{a}, \mathbf{b} y $\pi(A)$ '.*
- (2) *A es una partición plana si y sólo si $\mathbf{G}(A)$ es una pirámide.*

La parte (1) del lema anterior es una observación en [28, p. 122]; la parte (2) se encuentra en [28, Lema 5.4, (1)].

Las dos nociones de aditividad se relacionan por medio del Teorema 1 en [27]. Ver también [28, Teo. 6.1] para una versión más general:

Teorema 2.1.12. *Sea $A \in \mathbf{M}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Entonces A es aditiva si y sólo si la gráfica $\mathbf{G}(A)$ es $(0,1)$ -aditiva.*

Ejemplo 2.1.13. [29, Ej. 9] La gráfica $G(D)$ de la matriz

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es la matriz en el Ejemplo 2.1.5. Los 1-márgenes de D son $\mathbf{a} = (23, 21, 8, 5, 3)$ y $\mathbf{b} = (17, 15, 12, 9, 7)$. La π -sucesión de D es la partición conjugada a $\mathbf{c} = (20, 14, 12, 8, 6)$. Como la gráfica $G(D)$ no es $(0,1)$ -aditiva, por el Teorema 2.1.12, D es no aditiva. Se acostumbra representar la gráfica de una matriz por medio de un arreglo de cubitos apilados, como se muestra en la Figura 2.3.

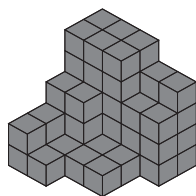


Figura 2.3: Gráfica $G(D)$.

2.2. Configuraciones débilmente malas

En esta sección presentamos algunos resultados sobre configuraciones débilmente malas. Estos resultados, que son interesantes por sí mismos, se usan en las secciones posteriores.

Usamos la notación definida en la Sección 2.1. Fijamos tres enteros positivos p , q y r , y trabajamos a lo largo de esta sección con una caja fija $\mathbf{B} = \mathbf{B}(p, q, r)$ y un rectángulo fijo $\mathbf{R} = \mathbf{B}(p, q)$. Sea X una $(0,1)$ -matriz de dimensión 3 y sea W una configuración débilmente mala para X , decimos que W es *de peso mínimo* si X no tiene una configuración débilmente mala \widehat{W} , con $w(\widehat{W}) < w(W)$.

El siguiente ejemplo ilustra la manera que usaremos en este trabajo para ilustrar una configuración débilmente mala para una $(0,1)$ -matriz X de dimensión 3.

Ejemplo 2.2.1. [8, p. 155] Considere la gráfica $G(D)$ para la matriz D del Ejemplo 2.1.13; esto es, la $(0,1)$ -matriz de dimensión 3 definida en el Ejemplo 2.1.5. En la Figura 2.4 se muestra a la izquierda la gráfica $G(D)$, y a la derecha la configuración débilmente mala W para $G(D)$ definida en el Ejemplo 2.1.5. Los cubitos de color más oscuro representan los puntos en los que W toma

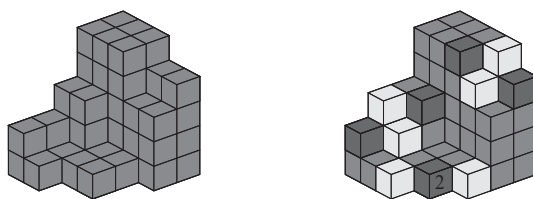


Figura 2.4: Gráfica $G(D)$ y conf. déb. mala W para $G(D)$.

valor positivo, por lo tanto pertenecen a la gráfica $G(D)$. Los cubitos de color muy claro representan los puntos donde W toma valor negativo, por lo tanto no pertenecen a la gráfica $G(D)$. El 2 en el cubito oscuro del nivel de abajo indica que en ese punto W toma valor 2. \diamond

Teorema 2.2.2. *Sea X una pirámide y sea W una configuración débilmente mala para X de peso mínimo. Entonces no existen $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{B}(p, q, r)$, comparables entre sí, para los cuales $W(\mathbf{u}) > 0$ y $W(\mathbf{v}) < 0$.*

Para la prueba del teorema se requieren los siguientes lemas.

Lema 2.2.3. *Sea X una pirámide y sea W una configuración débilmente mala para X de peso mínimo. Entonces no existen $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{B}(p, q, r)$, que difieren exactamente en una coordenada, y para los cuales $W(\mathbf{u}) > 0$ y $W(\mathbf{v}) < 0$.*

Demostración. Probamos la contrapositiva. Supongamos que existen $\mathbf{u} = (\mathbf{k}, s)$ y $\mathbf{v} = (\mathbf{k}, s')$, con $1 \leq s \neq s' \leq r$, $\mathbf{k} \in \mathcal{B}(p, q)$, tales que $W(\mathbf{k}, s) > 0$ y $W(\mathbf{k}, s') < 0$ (sin perder generalidad, suponemos que \mathbf{u} y \mathbf{v} difieren en la tercera coordenada). Como W es configuración débilmente

mala para X

$$\begin{aligned} W(\mathbf{k}, s) > 0 &\implies X(\mathbf{k}, s) = 1, \text{ y} \\ W(\mathbf{k}, s') < 0 &\implies X(\mathbf{k}, s') = 0. \end{aligned}$$

Como X es pirámide, $s < s'$. Como $W \in \mathbf{F}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ y $W(\mathbf{k}, s) > 0$, existe \mathbf{l} en $\mathbf{B}(p, q)$ tal que $W(\mathbf{l}, s) < 0$. Sea W' la matriz de dimensión 3 definida por

$$W' = W - M_{(\mathbf{k}, s)} + M_{(\mathbf{l}, s)} + M_{(\mathbf{k}, s')} - M_{(\mathbf{l}, s')}.$$

Entonces $W' \in \mathbf{F}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$. El que W' es configuración débilmente mala para X , sigue de las siguientes observaciones, que se obtienen usando que W es configuración débilmente mala para X , que X es pirámide, que $s < s'$ y de la definición de W' .

(obs 1) $W(\mathbf{k}, s) > 0 \implies [W'(\mathbf{k}, s) \geq 0 \text{ y } X(\mathbf{k}, s) = 1]$.

(obs 2) $W(\mathbf{l}, s) < 0 \implies [W'(\mathbf{l}, s) \leq 0 \text{ y } X(\mathbf{l}, s) = 0]$.

(obs 3) $W(\mathbf{k}, s') < 0 \implies [W'(\mathbf{k}, s') \leq 0 \text{ y } X(\mathbf{k}, s') = 0]$.

(obs 4) Por (obs 2) $X(\mathbf{l}, s) = 0 \implies X(\mathbf{l}, s') = 0 \implies W(\mathbf{l}, s') \leq 0$
 $\implies W'(\mathbf{l}, s') < 0$.

Es fácil ver que $w(W') = w(W) - 1$, por lo tanto W no tiene peso mínimo.

◇

El siguiente ejemplo ilustra cómo funciona la construcción en la prueba del Lema 2.2.3.

Ejemplo 2.2.4. Considere la pirámide $X : \mathbf{B}(4, 4, 5) \longrightarrow \{0, 1\}$ (aquí $p = 4, q = 4$ y $r = 5$) definida como la gráfica $\mathbf{G}(A)$, donde $A : \mathbf{B}(4, 4) \longrightarrow \mathbb{N}_0$ es la partición plana dada por

$$A := \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

y la configuración débilmente mala para X , $W : \mathbf{B}(4, 4, 5) \longrightarrow \mathbb{Z}$, dada por

$$W := \begin{pmatrix} 1[5] & -1[5] & 1[4] & -1[2] \\ -1[4] & 1[3] & 0 & 0 \\ -1[3] & 0 & 0 & 1[1] \\ 1[2] & 0 & -1[1] & 0 \end{pmatrix}$$

(W es una matriz de dimensión 3, la notación en la matriz anterior se interpreta como sigue: si $W(i, j, k) = \alpha$, entonces escribimos “ $\alpha[k]$ ” en posición (i, j)). Alternativamente, escribimos a W como

$$\begin{aligned} W = & \mathbf{M}_{(1,1,5)} - \mathbf{M}_{(1,2,5)} + \mathbf{M}_{(1,3,4)} - \mathbf{M}_{(2,1,4)} + \mathbf{M}_{(2,2,3)} - \mathbf{M}_{(3,1,3)} \\ & + \mathbf{M}_{(4,1,2)} - \mathbf{M}_{(1,4,2)} + \mathbf{M}_{(3,4,1)} - \mathbf{M}_{(4,3,1)}. \end{aligned}$$

Los puntos $\mathbf{u} = (1, 1, 5)$ y $\mathbf{v} = (1, 2, 5)$ son tales que $\mathbf{u} \triangleleft \mathbf{v}$, difieren en la segunda coordenada, $W(\mathbf{u}) > 0$ y $W(\mathbf{v}) < 0$. Entonces (siguiendo la idea de la prueba del Lema 2.2.3), como $W \in \mathbf{F}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ y $W(\mathbf{u}) > 0$, existe un punto $\mathbf{u}' \in \mathbf{B}(4, 4, 5)$ que coincide en la segunda coordenada con \mathbf{u} (que es justo la coordenda en la que \mathbf{u} y \mathbf{v} difieren), tal que $W(\mathbf{u}') < 0$. Tenemos dos opciones para \mathbf{u}' , que son $(2, 1, 4)$ y $(3, 1, 3)$, podemos elegir la que sea; elegimos $\mathbf{u}' = (2, 1, 4)$, y consideramos también el punto \mathbf{v}' que completa el rectángulo determinado por \mathbf{u}, \mathbf{v} y \mathbf{u}' , que en este caso es $\mathbf{v}' = (2, 2, 4)$. Entonces construimos la matriz

$$\begin{aligned} W_1 & := W - \mathbf{M}_{(1,1,5)} + \mathbf{M}_{(1,2,5)} + \mathbf{M}_{(2,1,4)} - \mathbf{M}_{(2,2,4)} \\ & = -\mathbf{M}_{(2,2,4)} + \mathbf{M}_{(1,3,4)} + \mathbf{M}_{(2,2,3)} - \mathbf{M}_{(3,1,3)} \\ & \quad + \mathbf{M}_{(4,1,2)} - \mathbf{M}_{(1,4,2)} + \mathbf{M}_{(3,4,1)} - \mathbf{M}_{(4,3,1)}; \end{aligned}$$

esto es

$$W_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1[4] & -1[2] \\ 0 & 1[3] & -1[4] & 0 \\ -1[3] & 0 & 0 & 1[1] \\ 1[2] & 0 & -1[1] & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces W_1 es una configuración débilmente mala para X , esto se puede ver directamente o concluirse de la prueba del Lema 2.2.3, donde se justifica este hecho. Note que $\mathbf{w}(W_1) = 4 = \mathbf{w}(W) - 1$ (como en la prueba del Lema 2.2.3).

Un procedimiento similar se puede aplicar ahora para W_1 : los puntos $\mathbf{u}_1 = (2, 2, 3)$ y $\mathbf{v}_1 = (2, 2, 4)$ son tales que $\mathbf{u}_1 \triangleleft \mathbf{v}_1$, difieren en la tercera coordenada, $W_1(\mathbf{u}_1) > 0$ y $W_1(\mathbf{v}_1) < 0$. Con un razonamiento análogo al anterior, consideramos los puntos $\mathbf{u}'_1 = (3, 1, 3)$ y $\mathbf{v}'_1 = (3, 1, 4)$, y construimos la matriz

$$\begin{aligned} W_2 & := W_1 - \mathbf{M}_{(2,2,3)} + \mathbf{M}_{(3,1,3)} + \mathbf{M}_{(2,2,4)} - \mathbf{M}_{(3,1,4)} \\ & = -\mathbf{M}_{(3,1,4)} + \mathbf{M}_{(1,3,4)} + \mathbf{M}_{(4,1,2)} - \mathbf{M}_{(1,4,2)} + \mathbf{M}_{(3,4,1)} - \mathbf{M}_{(4,3,1)}; \end{aligned}$$

esto es

$$W_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1[4] & -1[2] \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1[4] & 0 & 0 & 1[1] \\ 1[2] & 0 & -1[1] & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces W_2 es configuración débilmente mala para X ; y como en la prueba del Lema 2.2.3, $w(W_2) = 3 = w(W_1) - 1$. Como X es una pirámide, y las pirámides no tienen configuraciones débilmente malas de peso 2 (Lema 2.8.7), entonces W_2 tiene peso mínimo. En la Figura 2.5 se ilustran W , W_1 y W_2 . \diamond

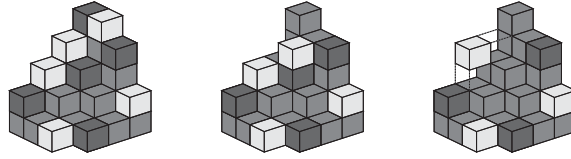


Figura 2.5: Configuraciones débilmente malas: W , W_1 y W_2 .

Lema 2.2.5. *Sea X una pirámide y sea W una configuración débilmente mala para X de peso mínimo. Entonces no existen $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{B}(p, q, r)$, comparables entre sí, que difieren exactamente en dos coordenadas, y para los cuales $W(\mathbf{u}) > 0$ y $W(\mathbf{v}) < 0$.*

Demostración. Probamos la contrapositiva. Supongamos que existen \mathbf{u}, \mathbf{v} en $\mathbf{B}(p, q, r)$, comparables entre sí, que difieren exactamente en dos coordenadas, y para los cuales $W(\mathbf{u}) > 0$ y $W(\mathbf{v}) < 0$. Por demostrar que entonces W no tiene peso mínimo. El hecho de que W es una configuración débilmente mala para X , con $W(\mathbf{u}) > 0$ y $W(\mathbf{v}) < 0$, implica que $X(\mathbf{u}) = 1$ y $X(\mathbf{v}) = 0$. Como X es pirámide, y por hipótesis \mathbf{u} y \mathbf{v} son comparables, lo anterior implica que $\mathbf{u} \triangleleft \mathbf{v}$. Por hipótesis \mathbf{u} y \mathbf{v} difieren exactamente en dos coordenadas. Por simetría podemos suponer sin pérdida de generalidad que \mathbf{u} y \mathbf{v} difieren en la primera y segunda coordenadas. Escribimos entonces $\mathbf{u} = (a, b, l)$ y $\mathbf{v} = (c, d, l)$, con $a < c$ y $b < d$. Como $W(a, b, l) > 0$ y $W \in \mathbf{F}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$, existen $(y, z) \in \mathbf{B}(q, r)$ y $(x, s) \in \mathbf{B}(p, r)$ tales que $W(a, y, z) < 0$ y $W(x, b, s) < 0$. Sea

$$\widehat{W} := W - M_{(a,b,l)} + M_{(c,d,l)} + M_{(a,y,z)} - M_{(c,y,z)} + M_{(x,b,s)} - M_{(x,d,s)}.$$

Entonces $\widehat{W} \in \mathbf{F}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$. El que \widehat{W} es configuración débilmente mala para X , sigue de las siguientes observaciones, que se obtienen usando que W es configuración débilmente mala para X , que X es pirámide, que $a < c$ y $b < d$ y de la definición de \widehat{W} .

- (obs 1) $W(a, b, l) > 0 \implies [\widehat{W}(a, b, l) \geq 0 \text{ y } X(a, b, l) = 1]$.
- (obs 2) $W(c, d, l) < 0 \implies [\widehat{W}(c, d, l) \leq 0 \text{ y } X(c, d, l) = 0]$.
- (obs 3) $W(a, y, z) < 0 \implies [\widehat{W}(a, y, z) \leq 0 \text{ y } X(a, y, z) = 0]$.
- (obs 4) $W(x, b, s) < 0 \implies [\widehat{W}(x, b, s) \leq 0 \text{ y } X(x, b, s) = 0]$.
- (obs 5) Por (obs 3) $X(a, y, z) = 0 \implies X(c, y, z) = 0$
 $\implies W(c, y, z) \leq 0 \implies \widehat{W}(c, y, z) < 0$.
- (obs 6) Por (obs 4) $X(x, b, s) = 0 \implies X(x, d, s) = 0$
 $\implies W(x, d, s) \leq 0 \implies \widehat{W}(x, d, s) < 0$.

El único término de $\widehat{W} - W$ que implica una diferencia entre el peso de W y \widehat{W} es $-\mathbf{M}_{(a,b,l)}$; de los otros cinco términos, tres contribuyen con $+1$ a entradas negativas de W , y dos, con -1 a entradas no positivas de W . Por lo tanto $w(\widehat{W}) = w(W) - 1$, y concluimos que W no tiene peso mínimo. \diamond

El siguiente ejemplo ilustra cómo funciona la construcción en la prueba del Lema 2.2.5.

Ejemplo 2.2.6. Considere la pirámide $X : \mathbf{B}(4, 4, 3) \longrightarrow \{0, 1\}$ (aquí $p = 4, q = 4$ y $r = 3$) definida como la gráfica $\mathbf{G}(A)$, donde $A : \mathbf{B}(4, 4) \longrightarrow \mathbb{N}_0$ es la partición plana dada por

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

y la configuración débilmente mala para X , $W : \mathbf{B}(4, 4, 3) \longrightarrow \mathbb{Z}$, dada por

$$W := \begin{pmatrix} 0 & -1[3] & 0 & 1[2] \\ 0 & 1[2] & 0 & -1[1] \\ 1[3] & 0 & -1[2] & 0 \\ -1[2] & 0 & 1[1] & 0 \end{pmatrix}.$$

Siguiendo la notación del Lema 2.2.5, tenemos que los puntos $\mathbf{u} = (a, b, l) := (2, 2, 2)$ y $\mathbf{v} = (c, d, l) := (3, 3, 2)$ son tales que $\mathbf{u} \triangleleft \mathbf{v}$, difieren en las primeras dos coordenadas, $W(\mathbf{u}) > 0$ y $W(\mathbf{v}) < 0$. Como $W(2, 2, 2) > 0$, entonces

existen $(y, z) \in \mathbf{B}(q, r) = \mathbf{B}(4, 3)$ y $(x, s) \in \mathbf{B}(p, r) = \mathbf{B}(4, 3)$, tales que $W(2, y, z) < 0$ y $W(x, 2, s) < 0$. Las únicas opciones son $(y, z) = (4, 1)$ y $(x, s) = (1, 3)$; esto es $W(2, 4, 1) < 0$ y $W(1, 2, 3) < 0$. Entonces construimos la matriz

$$\begin{aligned} \widehat{W} &:= W - M_{(a,b,l)} + M_{(c,d,l)} + M_{(a,y,z)} - M_{(c,y,z)} + M_{(x,b,s)} - M_{(x,d,s)} \\ &= M_{(3,1,3)} - M_{(1,2,3)} + M_{(2,2,2)} - M_{(4,1,2)} \\ &\quad M_{(1,4,2)} - M_{(3,3,2)} + M_{(4,3,1)} - M_{(2,4,1)} \\ &\quad - M_{(2,2,2)} + M_{(3,3,2)} + M_{(2,4,1)} - M_{(3,4,1)} + M_{(1,2,3)} - M_{(1,3,3)} \\ &= M_{(3,1,3)} - M_{(4,1,2)} + M_{(1,4,2)} + M_{(4,3,1)} - M_{(3,4,1)} - M_{(1,3,3)}; \end{aligned}$$

esto es

$$\widehat{W} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1[3] & 1[2] \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1[3] & 0 & 0 & -1[1] \\ -1[2] & 0 & 1[1] & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces \widehat{W} es configuración débilmente mala para X , esto puede verse directamente o concluirse de la prueba del Lema 2.2.5, donde se justifica este hecho. Note que $w(\widehat{W}) = 3 = w(W) - 1$. Como X es pirámide, y las pirámides no tienen configuraciones débilmente malas de peso 2 (Lema 2.8.7), entonces \widehat{W} tiene peso mínimo. En la Figura 2.6 se muestran W y \widehat{W} . \diamond

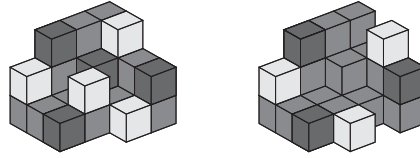


Figura 2.6: Configuraciones débilmente malas W y \widehat{W} .

Demostración del Teorema 2.2.2. En virtud de los Lemas 2.2.3 y 2.2.5, resta probar solamente que si W tiene peso mínimo, entonces no existen $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{B}(p, q, r)$, comparables entre sí, diferentes en sus tres coordenadas, y para los cuales $W(\mathbf{u}) > 0$ y $W(\mathbf{v}) < 0$. Probamos la contrapositiva de esta afirmación. Supongamos que existen $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{B}(p, q, r)$, comparables entre sí,

diferentes en sus tres coordenadas, y para los cuales $W(\mathbf{u}) > 0$ y $W(\mathbf{v}) < 0$. Por demostrar que entonces W no tiene peso mínimo. Argumentando como en la prueba del Lema 2.2.5 concluimos que $\mathbf{u} \triangleleft \mathbf{v}$. Escribimos $\mathbf{u} = (a, b, c)$ y $\mathbf{v} = (x, y, z)$, donde $a < x$, $b < y$ y $c < z$. Consideramos dos casos: *Caso 1.* $X(a, b, z) = 1$, y *Caso 2.* $X(a, b, z) = 0$.

Caso 1. $X(a, b, z) = 1$. Como $W(a, b, c) > 0$ y $W \in \mathbf{F}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$, existe $(s, t) \in \mathbf{B}(p, q)$ tal que $W(s, t, c) < 0$. Sea

$$\widehat{W} := W - M_{(a,b,c)} + M_{(s,t,c)} + M_{(a,b,z)} - M_{(s,t,z)}.$$

Entonces \widehat{W} satisface las siguientes condiciones:

- a) \widehat{W} es configuración débilmente mala para X .
- b) $\mathbf{w}(\widehat{W}) = \mathbf{w}(W)$.
- c) $\widehat{W}(a, b, z) > 0$ y $\widehat{W}(x, y, z) < 0$.

Probamos a). Es claro que $\widehat{W} \in \mathbf{F}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$. El que \widehat{W} es configuración débilmente mala para X sigue de las siguientes observaciones:

(obs 1) $W(a, b, c) > 0 \implies [X(a, b, c) = 1 \text{ y } \widehat{W}(a, b, c) \geq 0]$.

(obs 2) $W(s, t, c) < 0 \implies [X(s, t, c) = 0 \text{ y } \widehat{W}(s, t, c) \leq 0]$.

(obs 3) $X(a, b, z) = 1$ (hipótesis) $\implies W(a, b, z) \geq 0 \implies \widehat{W}(a, b, z) > 0$.

(obs 4) $W(s, t, c) < 0 \implies X(s, t, c) = 0 \implies X(s, t, z) = 0$
 $\implies W(s, t, z) \leq 0 \implies \widehat{W}(s, t, z) < 0$.

Probamos b). Los términos de $\widehat{W} - W$ que contribuyen a modificar el peso de W son $-M_{(a,b,c)}$, que aporta un -1 a una entrada que en W es positiva; y $+M_{(a,b,z)}$, que aporta un $+1$ a una entrada que en W es no negativa (ver (obs 3)). Por lo tanto $\mathbf{w}(\widehat{W}) = \mathbf{w}(W)$.

Probamos c). $\widehat{W}(a, b, z) > 0$ por (obs 3). Si $(s, t) \neq (x, y)$ entonces $\widehat{W}(x, y, z) = W(x, y, z) < 0$; y si $(s, t) = (x, y)$, entonces $\widehat{W}(x, y, z) = \widehat{W}(s, t, z) < 0$, la última desigualdad es por (obs 4).

La condición c), el hecho de que $a < x$ y $b < y$, y el Lema 2.2.5 implican que \widehat{W} no tiene peso mínimo, y por la condición b), tampoco W .

Caso 2. $X(a, b, z) = 0$. Como X es pirámide y $a < x$, $X(x, b, z) = 0$. Como $W(x, y, z) < 0$, existe $(s, t) \in \mathbf{B}(p, r)$ tal que $W(s, y, t) > 0$. Sea

$$\overline{W} := W + M_{(x,y,z)} - M_{(s,y,t)} - M_{(x,b,z)} + M_{(s,b,t)},$$

de manera similar al caso anterior, vemos que \overline{W} satisface:

- i) \overline{W} es configuración débilmente mala para X .
- ii) $w(\overline{W}) = w(W)$.
- iii) $\overline{W}(a, b, c) > 0$ y $\overline{W}(x, b, z) < 0$, note que $X(x, b, z) = 0$.

La condición *iii*), el hecho de que $a < x$ y $c < z$, y el Lema 2.2.5 implican que \overline{W} no tiene peso mínimo, y por *ii*) tampoco W . \diamond

El siguiente ejemplo ilustra cómo funciona la construcción en la prueba del Teorema 2.2.2.

Ejemplo 2.2.7. Considere la pirámide $X : \mathbf{B}(5, 5, 4) \longrightarrow \{0, 1\}$ (aquí $p = 5, q = 5$ y $r = 4$) definida como la gráfica $\mathbf{G}(A)$, donde $A : \mathbf{B}(5, 5) \longrightarrow \mathbb{N}_0$ es la partición plana dada por

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

y la configuración débilmente mala para X , $W : \mathbf{B}(5, 5, 4) \longrightarrow \mathbb{Z}$, dada por

$$W := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1[4] & -1[2] \\ 0 & 1[3] & 0 & -1[2] & 0 \\ 0 & 0 & -1[4] & 0 & 1[1] \\ -1[3] & 0 & 1[2] & 0 & 0 \\ 1[2] & -1[1] & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La configuración débilmente mala \overline{W} que se construye a partir de W en la prueba del teorema tiene el mismo peso que W ; aplicando el Lema 2.2.5 se concluye que \overline{W} no tiene peso mínimo (y por lo tanto tampoco W).

Usamos la notación de la prueba del Teorema 2.2.2. Los puntos $\mathbf{u} = (a, b, c) := (2, 2, 3)$ y $\mathbf{v} = (x, y, z) := (3, 3, 4)$ son tales que $\mathbf{u} \triangleleft \mathbf{v}$, $a < x$, $b < y$, $c < z$, $W(\mathbf{u}) > 0$ y $W(\mathbf{v}) < 0$. Este ejemplo corresponde al *caso 2* de la prueba del teorema; esto es, donde $X(a, b, z) = 0$, $(a, b, z) = (2, 2, 4)$ en este ejemplo. Como $W(3, 3, 4) < 0$ y $W \in \mathbf{F}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$, existe $(s, t) \in \mathbf{B}(5, 4) = \mathbf{B}(p, r)$ tal que $W(s, 3, t) > 0$. En este caso la única posibilidad es $(s, t) := (4, 2)$, tal que $W(4, 3, 2) > 0$; note que $X(4, 3, 2) = 1$.

Como X es pirámide $X(4, 2, 2) = 1$, en este caso $(4, 2, 2)$ corresponde a (s, b, t) . Construimos entonces la matriz

$$\begin{aligned}
 \overline{W} &:= W + M_{(x,y,z)} - M_{(s,y,t)} - M_{(x,b,z)} + M_{(s,b,t)} \\
 &= M_{(1,4,4)} - M_{(3,3,4)} + M_{(2,2,3)} - M_{(4,1,3)} + M_{(5,1,2)} \\
 &\quad - M_{(2,4,2)} + M_{(4,3,2)} - M_{(1,5,2)} + M_{(3,5,1)} - M_{(5,2,1)} \\
 &\quad + M_{(3,3,4)} - M_{(4,3,2)} - M_{(3,2,4)} + M_{(4,2,2)} \\
 &= M_{(1,4,4)} + M_{(2,2,3)} - M_{(4,1,3)} + M_{(5,1,2)} - M_{(2,4,2)} \\
 &\quad - M_{(1,5,2)} + M_{(3,5,1)} - M_{(5,2,1)} - M_{(3,2,4)} + M_{(4,2,2)};
 \end{aligned}$$

esto es,

$$\overline{W} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1[4] & -1[2] \\ 0 & 1[3] & 0 & -1[2] & 0 \\ 0 & -1[4] & 0 & 0 & 1[1] \\ -1[3] & 1[2] & 0 & 0 & 0 \\ 1[2] & -1[1] & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Los puntos $(a, b, c) = (2, 2, 3)$ y $(x, b, z) = (3, 2, 4)$ son tales que $(a, b, c) \triangleleft (x, b, z)$, difieren en dos coordenadas ($a < x$ y $c < z$), $\overline{W}(a, b, c) > 0$ y $\overline{W}(x, b, z) < 0$. Por el Lema 2.2.5, \overline{W} no tiene peso mínimo, y como $w(\overline{W}) = w(W)$ entonces tampoco W tiene peso mínimo. La Figura 2.7 ilustra las configuraciones W y \overline{W} . \diamond

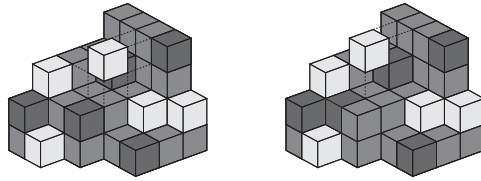


Figura 2.7: Configuraciones débilmente malas W y \overline{W} .

Proposición 2.2.8. *Sea $X : \mathbf{B}(p, q, r) \longrightarrow \{0, 1\}$ una pirámide y sea W una configuración débilmente mala para X de peso mínimo. Entonces*

- a) $W(1, 1, k) = 0$ para toda $1 \leq k \leq r$, y
- b) $W(p, q, k) = 0$ para toda $1 \leq k \leq r$.

Demostración. Probamos que:

- i)* $W(1, 1, k) \geq 0$, para $1 \leq k \leq r$.
- ii)* $W(1, 1, k) \leq 0$, para $1 \leq k \leq r$.
- iii)* $W(p, q, k) \geq 0$, para $1 \leq k \leq r$.
- iv)* $W(p, q, k) \leq 0$, para $1 \leq k \leq r$.

Probamos *i)*. Supongamos que $W(1, 1, k) < 0$ para cierta $1 \leq k \leq r$. Como $W \in \mathbf{F}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$, existe $(a, b) \in \mathbf{B}(p, q)$ tal que $W(a, b, k) > 0$. Entonces $X(1, 1, k) = 0$ y $X(a, b, k) = 1$ porque W es configuración débilmente mala para X . Esto contradice el hecho de que X sea pirámide.

Probamos *ii)*. Supongamos que $W(1, 1, k) > 0$ para cierta $1 \leq k \leq r$. Como $W \in \mathbf{F}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$, existe $(a, b) \in \mathbf{B}(p, q)$ tal que $W(a, b, k) < 0$. Como W tiene peso mínimo y $(1, 1, k) \triangleleft (a, b, k)$, esto contradice el Teorema 2.2.2. La prueba de *iii)* es similar a la de *ii)*; y la prueba de *iv)* es similar a la de *i)*. \diamond

Observación 2.2.9. Las pruebas de las afirmaciones *i)* y *iv)* no requieren de que W tenga peso mínimo, por lo tanto *i)* y *iv)* se cumplen en cualquier configuración débilmente mala para una pirámide. Mientras que las condiciones *ii)* y *iii)* pueden fallar si W no tiene peso mínimo. \diamond

La configuración débilmente mala W para la pirámide X del Ejemplo 2.2.4 no tiene peso mínimo; y es un ejemplo de una configuración débilmente mala que no satisface la condición *ii)* de la prueba de la Proposición 2.2.8. Un ejemplo parecido muestra que también la condición *iii)* puede fallar si W no tiene peso mínimo.

Sea $\mathbf{1} := (1, 1, 1)$ y $\mathbf{S} := (p, q, r)$ en $\mathbf{B}(p, q, r)$. Consideremos un elemento $\mathbf{k} \in \mathbf{B}(p, q, r)$. Definimos dos subconjuntos de $\mathbf{B}(p, q, r)$ asociados a \mathbf{k} .

$$[\mathbf{1}, \mathbf{h}] := \{\mathbf{t} \in \mathbf{B}(p, q, r) : \mathbf{t} \trianglelefteq \mathbf{h}\},$$

$$[\mathbf{k}, \mathbf{S}] := \{\mathbf{t} \in \mathbf{B}(p, q, r) | \mathbf{k} \trianglelefteq \mathbf{t}\}.$$

Teorema 2.2.10. *Sea X una pirámide y sea W una configuración débilmente mala para X de peso mínimo. Entonces existe una pirámide Y , tal que $-W$ es configuración débilmente mala para Y .*

Demostración. Definimos los siguientes subconjuntos de $\mathbf{B}(p, q, r)$ que dependen de W :

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &:= \{\mathbf{h} \in \mathbf{B}(p, q, r) : W(\mathbf{h}) < 0\}, \\ \mathcal{P} &:= \{\mathbf{k} \in \mathbf{B}(p, q, r) : W(\mathbf{k}) > 0\}. \end{aligned}$$

Supongamos que $[\mathbf{1}, \mathbf{h}] \cap [\mathbf{k}, \mathbf{S}] \neq \emptyset$, para ciertos $\mathbf{h} \in \mathcal{N}$ y $\mathbf{k} \in \mathcal{P}$; esto implica que $\mathbf{k} \trianglelefteq \mathbf{h}$, y como $\mathbf{k} \neq \mathbf{h}$ porque $\mathcal{P} \cap \mathcal{N} = \emptyset$, entonces $\mathbf{k} \triangleleft \mathbf{h}$. Esto contradice el resultado en el Teorema 2.2.2 porque W tiene peso mínimo. Por lo tanto

$$[\mathbf{1}, \mathbf{h}] \cap [\mathbf{k}, \mathbf{S}] = \emptyset, \quad \forall \mathbf{h} \in \mathcal{N}, \quad \forall \mathbf{k} \in \mathcal{P}. \quad (2.11)$$

Sean $U(\mathcal{N}) := \bigcup_{\mathbf{h} \in \mathcal{N}} [\mathbf{1}, \mathbf{h}]$ y $U(\mathcal{P}) := \bigcup_{\mathbf{k} \in \mathcal{P}} [\mathbf{k}, \mathbf{S}]$. Entonces, por (2.11) tenemos que $U(\mathcal{N}) \cap U(\mathcal{P}) = \emptyset$. Sea Y la $(0,1)$ -matriz de dimensión 3 definida por

$$Y(\mathbf{t}) := \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{t} \in U(\mathcal{N}), \\ 0 & \text{si } \mathbf{t} \in U(\mathcal{P}), \\ X(\mathbf{t}) & \text{si } \mathbf{t} \notin U(\mathcal{N}) \cup U(\mathcal{P}). \end{cases}$$

Y está bien definida porque $U(\mathcal{N}) \cap U(\mathcal{P}) = \emptyset$. Para concluir la prueba debemos mostrar que:

- a) Y es una pirámide.
- b) $-W$ es configuración débilmente mala para Y .

Probamos a). Por (2.4) debemos mostrar que para $\mathbf{s}, \mathbf{t} \in \mathbf{B}(p, q, r)$ con $\mathbf{s} \trianglelefteq \mathbf{t}$, se cumple que si $Y(\mathbf{t}) = 1$ entonces $Y(\mathbf{s}) = 1$. Esto es claro si $\mathbf{s} = \mathbf{t}$. Supongamos que $\mathbf{s} \triangleleft \mathbf{t}$ y que $Y(\mathbf{t}) = 1$; consideramos dos casos: si $\mathbf{t} \in U(\mathcal{N})$ y si $\mathbf{t} \notin U(\mathcal{N})$. Si $\mathbf{t} \in U(\mathcal{N})$ entonces $\mathbf{s} \in U(\mathcal{N})$ porque $\mathbf{s} \triangleleft \mathbf{t}$. Luego, por definición de Y , $Y(\mathbf{s}) = 1$. Consideramos ahora el caso en que $\mathbf{t} \notin U(\mathcal{N})$. Como $Y(\mathbf{t}) = 1$, la definición de Y implica que $\mathbf{t} \notin U(\mathcal{P})$. Para probar que $Y(\mathbf{s}) = 1$ consideramos dos subcasos: si $\mathbf{s} \in U(\mathcal{N})$ y si $\mathbf{s} \notin U(\mathcal{N})$. Si $\mathbf{s} \in U(\mathcal{N})$, por definición de Y , $Y(\mathbf{s}) = 1$. Supongamos ahora que $\mathbf{s} \notin U(\mathcal{N})$. Tenemos que $\mathbf{s} \notin U(\mathcal{P})$ (como $\mathbf{s} \triangleleft \mathbf{t}$, $\mathbf{s} \in U(\mathcal{P})$ implicaría $\mathbf{t} \in U(\mathcal{P})$, pero sabemos que $\mathbf{t} \notin U(\mathcal{P})$). Por lo tanto \mathbf{s} y \mathbf{t} pertenecen al complemento de $U(\mathcal{N}) \cup U(\mathcal{P})$. Por definición de Y , tenemos entonces que $Y(\mathbf{s}) = X(\mathbf{s})$ y que $Y(\mathbf{t}) = X(\mathbf{t})$. Como X es pirámide concluimos que $Y(\mathbf{s}) = 1$.

Probamos b). Sea $\mathbf{t} \in \mathbf{B}(p, q, r)$. Si $-W(\mathbf{t}) > 0$; esto es, si $W(\mathbf{t}) < 0$, entonces $\mathbf{t} \in \mathcal{N}$, luego $\mathbf{t} \in U(\mathcal{N})$ porque $\mathcal{N} \subseteq U(\mathcal{N})$. De la definición de Y sigue que $Y(\mathbf{t}) = 1$. Si $-W(\mathbf{t}) < 0$; esto es, si $W(\mathbf{t}) > 0$, entonces $\mathbf{t} \in \mathcal{P}$, luego $\mathbf{t} \in U(\mathcal{P})$ porque $\mathcal{P} \subseteq U(\mathcal{P})$. De la definición de Y sigue que $Y(\mathbf{t}) = 0$. Por lo tanto $-W$ es configuración débilmente mala para Y . \diamond

El resultado en el Teorema 2.2.10 puede fallar si W no tiene peso mínimo. Para ilustrar esto consideramos la configuración débilmente mala W del Ejemplo 2.2.4, que no tiene peso mínimo. Note que $-W(1, 1, 5) = -1 < 0$.

Por la afirmación *i*) en la prueba de la Proposición 2.2.8 y la Observación 2.2.9, tenemos que $-W$ no puede ser configuración débilmente mala para ninguna pirámide.

Ejemplo 2.2.11. Considere la la pirámide $G(A)$, donde

$$A := \begin{pmatrix} 10 & 10 & 4 \\ 8 & 6 & 3 \\ 8 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En la Figura 2.8 se ilustra $G(A)$ y una configuración débilmente mala (c.d.m) W para $G(A)$ (a la izquierda en la figura). Note que $w(W) = 3$. Como una pirámide no tiene configuraciones débilmente malas de peso 2 (Lema 2.8.7), entonces W tiene peso mínimo. A la derecha se muestran la pirámide Y que se construye como en la prueba del Teorema 2.2.10, y la configuración débilmente mala $-W$ para Y . \diamond

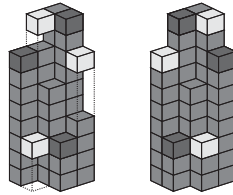


Figura 2.8: $-W$ es c.d.m. para Y (a la derecha).

2.3. Diagramas de flechas en $B(p, q)$

En esta sección introducimos el concepto de diagrama de flechas, y presentamos varios resultados sobre diagramas de flechas que usaremos en las secciones posteriores.

Una *flecha* en $R = B(p, q)$ es un par ordenado $\varphi = (z, w) \in R^2$ con $z \neq w$. Pensamos a z como el *punto inicial* y a w como el *punto final* de φ . A cada vector $h \in B(p, q)$ le asociamos una matriz $M_h : R \rightarrow \{0, 1\}$ definida por

$$M_h(k) = \delta_{k,h}, \text{ para todo } k \in R,$$

esto es, $M_h(k) = 1$ si $k = h$ y $M_h(k) = 0$ si $k \neq h$. Definimos de manera similar $M_h : B \rightarrow \{0, 1\}$ para cada $h \in B = B(p, q, r)$; note que la última

definición ya fue considerada para la prueba del Teorema 2.1.3. A cada flecha $\varphi = (\mathbf{z}, \mathbf{w})$ le asociamos una matriz $M_\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$, definida por

$$M_\varphi := M_{\mathbf{z}} - M_{\mathbf{w}}.$$

Sea $\{\varphi_1, \dots, \varphi_t\}$ un conjunto de flechas en \mathbb{R} y sean n_1, \dots, n_t enteros positivos. Entonces la sucesión de flechas $\mathcal{Z} = (n_1\varphi_1, \dots, n_t\varphi_t)$ (la notación significa que φ_i aparece n_i veces en la sucesión) es un *diagrama de flechas* [7, p. 16] si

$$M_{\mathcal{Z}} := \sum_{i=1}^t n_i M_{\varphi_i}$$

pertenece a $\mathbf{F}(\mathbf{0}, \mathbf{0})$. Sea \mathcal{Z} es un diagrama de flechas, es claro que si invertimos las flechas de \mathcal{Z} obtenemos un nuevo diagrama de flechas, denotamos este nuevo diagrama por $-\mathcal{Z}$. Observe que si \mathcal{Z} es un diagrama de flechas, entonces cualquier sucesión de flechas obtenida reordenando las flechas de \mathcal{Z} representa el mismo diagrama de flechas \mathcal{Z} . Sea $\mathcal{Z}^\circ = (n_1\varphi_1, \dots, n_t\varphi_t)$ una sucesión de flechas, entonces \mathcal{Z}° es un *cuasidiagrama de flechas* [7, p. 16] si existe una flecha φ , tal que la sucesión $(n_1\varphi_1, \dots, n_t\varphi_t, \varphi)$, que denotamos por $\mathcal{Z}^\circ \uplus (\varphi)$, es un diagrama de flechas. En este caso decimos que la flecha φ *completa* a \mathcal{Z}° [7, p. 16]³. Note que dado un cuasidiagrama de flechas \mathcal{Z}° , cabe la posibilidad de que la flecha φ que completa a \mathcal{Z}° se repita con alguna de las flechas de \mathcal{Z}° , tal es el caso en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.3.1. En la Figura 2.9 se muestra (a la izquierda) un cuasidiagrama de flechas \mathcal{Z}° . La flecha que completa a \mathcal{Z}° es $\varphi = ((3, 3), (4, 1))$, que en este caso coincide con una de las flechas de \mathcal{Z}° . Entonces la sucesión $\mathcal{Z} := \mathcal{Z}^\circ \uplus (\varphi)$ es un diagrama de flechas (a la derecha en la Figura 2.9).

La matriz asociada al diagrama $\mathcal{Z} := \mathcal{Z}^\circ \uplus (\varphi)$ es

$$M_{\mathcal{Z}} := \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \diamond$$

³En [7] a las flechas Fishburn les llama pares (ordenados); a los diagramas de flechas, sucesiones balanceadas (de pares); a los cuasidiagramas de flechas, sucesiones casi balanceadas; y a una flecha que completa un cuasidiagrama, par de completación.


 Figura 2.9: El cuasidiagrama \mathcal{Z}° y el diagrama $\mathcal{Z} := \mathcal{Z}^\circ \uplus (\varphi)$.

Lema 2.3.2. Sea $\mathcal{Z} = (\varphi_1, \dots, \varphi_t)$ un diagrama de flechas no necesariamente distintas en \mathbf{R} , y sea $\mathcal{Z}^\circ = (\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_s})$, con $s < t$, una subsucesión de \mathcal{Z} . Si \mathcal{Z}° es un cuasidiagrama de flechas, y la flecha $\varphi = (\mathbf{z}, \mathbf{w})$ completa a \mathcal{Z}° ; entonces $\mathcal{Z} \setminus \mathcal{Z}^\circ$ es también un cuasidiagrama de flechas, y la flecha $\varphi^* = (\mathbf{w}, \mathbf{z})$ completa a $\mathcal{Z} \setminus \mathcal{Z}^\circ$.⁴

Demostración. Como $\mathcal{Z}^\circ \uplus (\varphi) = (\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_s}, \varphi)$ es un diagrama de flechas, entonces la matriz

$$M_{\mathcal{Z}^\circ \uplus (\varphi)} = \left(\sum_{i \in \{i_1, \dots, i_s\}} M_{\varphi_i} \right) + M_\varphi$$

pertenece a $\mathbf{F}(\mathbf{0}, \mathbf{0})$. Como \mathcal{Z} es un diagrama de flechas, entonces la matriz

$$M_{\mathcal{Z}} = \sum_{i=1}^t M_{\varphi_i}$$

también pertenece a $\mathbf{F}(\mathbf{0}, \mathbf{0})$. Note que $M_{\varphi^*} = -M_\varphi$, entonces la matriz

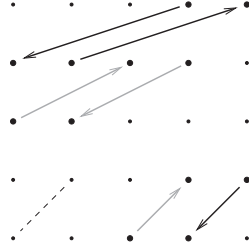
$$M_{[\mathcal{Z} \setminus \mathcal{Z}^\circ] \uplus (\varphi^*)} = \left(\sum_{i \in [t] \setminus \{i_1, \dots, i_s\}} M_{\varphi_i} \right) + M_{\varphi^*} = M_{\mathcal{Z}} - M_{\mathcal{Z}^\circ \uplus (\varphi)}$$

también pertenece a $\mathbf{F}(\mathbf{0}, \mathbf{0})$. Por lo tanto, $\mathcal{Z} \setminus \mathcal{Z}^\circ$ es un cuasidiagrama de flechas, y φ^* completa a $\mathcal{Z} \setminus \mathcal{Z}^\circ$. \diamond

El siguiente ejemplo ilustra el resultado del lema anterior.

Ejemplo 2.3.3. [7, p. 10] Considere el diagrama \mathcal{Z} de flechas que se ilustra en la Figura 2.10, que consta de tres flechas negras y tres flechas grises. Sea \mathcal{Z}° el cuasidiagrama formado por las flechas grises. La flecha $\varphi = ((4, 2), (5, 1))$ completa a \mathcal{Z}° . $\mathcal{Z} \setminus \mathcal{Z}^\circ$ es también un cuasidiagrama de flechas y la flecha $\varphi^* = ((5, 1), (4, 2))$ completa a $\mathcal{Z} \setminus \mathcal{Z}^\circ$. \diamond

⁴En este lema cabe la posibilidad de que la flecha φ se repita con alguna de las flechas de \mathcal{Z} .


 Figura 2.10: Cuasidiagramas: \mathcal{Z}° y $\mathcal{Z} \setminus \mathcal{Z}^\circ$.

A cada par de vectores $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$ y $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^q$ asociamos un vector $\mathbf{x} * \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{p+q}$, que llamamos la *fusión* de \mathbf{x} con \mathbf{y} , definido por

$$(\mathbf{x} * \mathbf{y})_s := \begin{cases} x_s & \text{si } 1 \leq s \leq p; \\ y_{s-p} & \text{si } p+1 \leq s \leq p+q. \end{cases}$$

Sea $\mathbf{h} \in \mathbb{R}$ y sean \mathbf{x} y \mathbf{y} los 1-márgenes de $M_{\mathbf{h}}$. Entonces asociamos a \mathbf{h} el vector en \mathbb{R}^{p+q} definido como (la fusión de sus 1-márgenes)

$$\mathbf{v}_{\mathbf{h}} := \mathbf{x} * \mathbf{y}.$$

Similarmente, a cada flecha $\varphi = (\mathbf{z}, \mathbf{w})$ asociamos el vector $\mathbf{v}_{\varphi} := \mathbf{v}_{\mathbf{z}} - \mathbf{v}_{\mathbf{w}}$; y a cada sucesión de flechas $\mathcal{Z} = (n_1\varphi_1, \dots, n_t\varphi_t)$, el vector

$$\mathbf{v}_{\mathcal{Z}} := \sum_{i=1}^t n_i \mathbf{v}_{\varphi_i}.$$

Es claro que \mathbf{v}_{φ} es la fusión de los 1-márgenes de M_{φ} y similarmente para $\mathbf{v}_{\mathcal{Z}}$.

Lema 2.3.4. *Sea $\mathcal{Z} = (n_1\varphi_1, \dots, n_t\varphi_t)$ una sucesión de flechas en \mathbb{R} . Entonces \mathcal{Z} es un diagrama de flechas si y sólo si $\mathbf{v}_{\mathcal{Z}} = 0$.*

Demostración. Sigue del hecho de que $\mathbf{v}_{\mathcal{Z}}$ es la fusión de los 1-márgenes de $M_{\mathcal{Z}}$. \diamond

A cada par de vectores $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^q$ asociamos una matriz $S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$S(\mathbf{x}, \mathbf{y})(i, j) := x_i + y_j.$$

Entonces tenemos el siguiente lema que está implícito en [18, §6], ver también [29, §9].

Lema 2.3.5. [18, §6] Sean $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^q$. Entonces para toda $M \in F(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ de tamaño $p \times q$, las matrices $S(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ y M son ortogonales en \mathbb{R}^{pq} , esto es,

$$\langle S(\mathbf{x}, \mathbf{y}), M \rangle = 0.$$

Demostración. Como M pertenece a $F(\mathbf{0}, \mathbf{0})$

$$\begin{aligned} \langle S(\mathbf{x}, \mathbf{y}), M \rangle &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q (x_i + y_j) M(i, j) \\ &= \sum_{i=1}^p x_i \sum_{j=1}^q M(i, j) + \sum_{j=1}^q y_j \sum_{i=1}^p M(i, j) = 0. \diamond \end{aligned}$$

Corolario 2.3.6. Sea $\mathcal{Z} = (n_1(\mathbf{z}_1, \mathbf{w}_1), \dots, n_t(\mathbf{z}_t, \mathbf{w}_t))$ un diagrama de flechas. Entonces para cualesquiera $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^q$ tenemos que

$$\sum_{k=1}^t n_k S(\mathbf{x}, \mathbf{y})(\mathbf{z}_k) = \sum_{k=1}^t n_k S(\mathbf{x}, \mathbf{y})(\mathbf{w}_k).$$

Demostración. Aplicamos el Lema 2.3.5 a $S(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ y $M_{\mathcal{Z}}$. \diamond

Lema 2.3.7. Sean $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^q$. Sea $\varphi = (\mathbf{z}, \mathbf{w})$ una flecha con $\mathbf{z} = (i, j)$ y $\mathbf{w} = (k, l)$. Entonces

$$\langle \mathbf{x} * \mathbf{y}, \mathbf{v}_{\varphi} \rangle > 0 \iff x_i + y_j > x_k + y_l.$$

Demostración. Sigue de

$$\langle \mathbf{x} * \mathbf{y}, \mathbf{v}_{\varphi} \rangle = \langle \mathbf{x} * \mathbf{y}, \mathbf{v}_{\mathbf{z}} \rangle - \langle \mathbf{x} * \mathbf{y}, \mathbf{v}_{\mathbf{w}} \rangle = x_i + y_j - x_k - y_l. \diamond$$

2.4. Obstrucciones de aditividad para matrices de dimensión 2

El resultado más importante de esta sección es el Teorema 2.4.5, que afirma una matriz $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es no aditiva si y sólo si existe un diagrama de flechas $\mathcal{Z} = ((\mathbf{z}_1, \mathbf{w}_1), \dots, (\mathbf{z}_t, \mathbf{w}_t))$ tal que $A(\mathbf{z}_i) > A(\mathbf{w}_i)$, para $i = 1, \dots, t$. Otro punto importante en esta sección es una manera que definimos de asociar, a una configuración débilmente mala W para una pirámide, cierto

diagrama de flechas \mathcal{Z}_W . Esta idea se utiliza en la prueba del Teorema 2.4.5 y también en las demostraciones de los Resultados 1, 2 y 3 mencionados en la introducción (que se enuncian al principio de este capítulo).

El Lema 2.4.8, que es una adaptación a nuestro contexto del Lema 5.1 en [7], y el Lema 2.4.9, proporcionan un conjunto de restricciones que cumplen las flechas de ciertas obstrucciones de aditividad para particiones planas, que son obstrucciones de cardinalidad mínima. Estos lemas se usan en las demostraciones de los Resultados 2 y 3.

Consideramos para esta sección la notación que se ha definido a lo largo del capítulo.

Sea $W : \mathbf{B} \rightarrow \mathbb{Z} \in \mathbf{F}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$. Enseguida mostramos cómo asociar a W un diagrama de flechas \mathcal{Z}_W . Sean $W^+ := \{\mathbf{h} \in \mathbf{B} : W(\mathbf{h}) > 0\}$, $W^- := \{\mathbf{h} \in \mathbf{B} : W(\mathbf{h}) < 0\}$, y

$$t = \sum_{\mathbf{h} \in W^+} W(\mathbf{h}) = - \sum_{\mathbf{k} \in W^-} W(\mathbf{k}).$$

Entonces existen dos sucesiones $(\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_t)$ y $(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_t)$ de elementos en \mathbf{B} tales que

$$\left\{ \begin{array}{l} i) \text{ Un elemento } \mathbf{h} \in W^+ \text{ aparece } W(\mathbf{h}) \text{ veces en } (\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_t). \\ ii) \text{ Un elemento } \mathbf{k} \in W^- \text{ aparece } -W(\mathbf{k}) \text{ veces en } (\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_t). \\ iii) \text{ Los elementos } \mathbf{h}_i \text{ y } \mathbf{k}_i \text{ coinciden en su tercera coordenada.} \end{array} \right. \quad (2.12)$$

La correspondencia indicada en la condición *iii*) es posible ya que el tercer 1-margen de W es el vector $\mathbf{0}$. La condición *iii*) será esencial en la prueba del Teorema 2.4.5. Sea $\mathbf{P} : \mathbf{B} \rightarrow \mathbb{R}$ la proyección, tal que $\mathbf{P}(i, j, k) = (i, j)$, y sean $\mathbf{z}_i := \mathbf{P}(\mathbf{h}_i)$ y $\mathbf{w}_i := \mathbf{P}(\mathbf{k}_i)$, para $i \in [t]$. Finalmente sea

$$\mathcal{Z}_W := ((\mathbf{z}_1, \mathbf{w}_1), \dots, (\mathbf{z}_t, \mathbf{w}_t)).$$

Note que la definición de \mathcal{Z}_W depende de varias elecciones, así que no está únicamente definida. El Lema 2.4.1 es consecuencia de que los 1-márgenes de W son cero.

Lema 2.4.1. *Sea $W : \mathbf{B} \rightarrow \mathbb{Z}$ una matriz en $\mathbf{F}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$. Entonces la sucesión \mathcal{Z}_W es un diagrama de flechas. Además el número de flechas de \mathcal{Z}_W es igual a $w(W)$.*

Ejemplo 2.4.2. Sea W la configuración débilmente mala definida en el Ejemplo 2.1.5. Un diagrama de flechas asociado a W se muestra en la Figura 2.11.

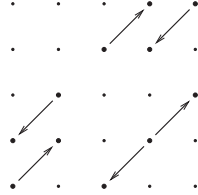


Figura 2.11: Un diagrama de flechas \mathcal{Z}_W asociado a W .

Los Lemas 2.4.3 y 2.4.4 se requieren para probar el Teorema 2.4.5.

Lema 2.4.3. Sea $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}_0$ una matriz y sea $X = \mathbf{G}(A)$ la gráfica de A . Sea W una configuración débilmente mala para X , y consideremos un diagrama de flechas $\mathcal{Z}_W = ((\mathbf{z}_1, \mathbf{w}_1), \dots, (\mathbf{z}_t, \mathbf{w}_t))$ asociado a W . Entonces $A(\mathbf{z}_i) > A(\mathbf{w}_i)$, para $i = 1, \dots, t$.

Demostración. Sea $i \in [t]$. Los vectores $\mathbf{z}_i, \mathbf{w}_i \in \mathbb{R}$ se obtienen proyectando a \mathbb{R} vectores $\mathbf{h}_i, \mathbf{k}_i \in \mathbb{B}$. Por *iii*) en (2.12), \mathbf{h}_i y \mathbf{k}_i coinciden en su tercera coordenada, y por *i*) de (2.12), $W(\mathbf{h}_i) > 0$ y $W(\mathbf{k}_i) < 0$. Como W es configuración débilmente mala para X , entonces $X(\mathbf{h}_i) = 1$ y $X(\mathbf{k}_i) = 0$. Como X es la gráfica de A , esto implica que $A(\mathbf{z}_i) > A(\mathbf{w}_i)$. \diamond

Lema 2.4.4. Sea $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}_0$ una matriz y sea $X := \mathbf{G}(A)$ la gráfica de A . Sea $\mathcal{Z} = ((\mathbf{z}_1, \mathbf{w}_1), \dots, (\mathbf{z}_t, \mathbf{w}_t))$ un diagrama de flechas no necesariamente distintas en \mathbb{R} , tal que $A(\mathbf{z}_i) > A(\mathbf{w}_i)$, para $i = 1, \dots, t$. Para cada $i = 1, \dots, t$ definimos $m_i := A(\mathbf{z}_i)$, y los elementos $\mathbf{h}_i = (\mathbf{z}_i, m_i), \mathbf{k}_i = (\mathbf{w}_i, m_i) \in \mathbb{B}$. Sea $W := \sum_{i=1}^t (\mathbf{M}_{\mathbf{h}_i} - \mathbf{M}_{\mathbf{k}_i})$. Entonces:

- i*) W es una configuración débilmente mala para X .
- ii*) $\mathbf{w}(W) = t$.

Demostración. Probamos *i*). Como \mathcal{Z} es un diagrama de flechas, y como los elementos \mathbf{h}_i y \mathbf{k}_i coinciden en su tercera coordenada, para $i = 1, \dots, t$; entonces $W \in \mathbf{F}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$. Como $m_i = A(\mathbf{z}_i) > A(\mathbf{w}_i)$, para $i \in [t]$, y como $\mathbf{h}_i = (\mathbf{z}_i, m_i)$ y $\mathbf{k}_j = (\mathbf{w}_j, m_j)$, para $i, j \in [t]$; entonces

$$\begin{aligned} X(\mathbf{h}_i) &= 1, \text{ para } i = 1, \dots, t, \\ X(\mathbf{k}_j) &= 0, \text{ para } j = 1, \dots, t. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Por lo tanto $\mathbf{h}_i \neq \mathbf{k}_j$, para cualesquiera $i, j \in [t]$. Por lo tanto W no es la matriz cero. Ahora, sea $\mathbf{h} \in \mathbf{B}$. Si $W(\mathbf{h}) > 0$, entonces $\mathbf{h} = \mathbf{h}_i$, para alguna $i \in [t]$; y si $W(\mathbf{h}) < 0$, entonces $\mathbf{h} = \mathbf{k}_j$, para alguna $j \in [t]$; de esto y de (2.13) sigue que W es configuración débilmente mala para X .

La parte *ii*) es consecuencia de que, por (2.13), $\mathbf{h}_i \neq \mathbf{k}_j$, para cualesquiera $i, j \in [t]$. \diamond

El siguiente teorema aparece en [22].

Teorema 2.4.5. [22] *Sea $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una matriz. Entonces A es no aditiva si y sólo si existe un diagrama de flechas $\mathcal{Z} = ((\mathbf{z}_1, \mathbf{w}_1), \dots, (\mathbf{z}_t, \mathbf{w}_t))$ tal que $A(\mathbf{z}_i) > A(\mathbf{w}_i)$, para $i = 1, \dots, t$.*

Demostración. Supongamos primero que A es no aditiva. Por el Lema 2.1.8, existe una matriz $B : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}_0$ que tiene el mismo tipo de orden que A , y que por lo tanto, también es no aditiva. Sea $X = \mathbf{G}(B)$ la gráfica de B . Entonces, por el Teorema 2.1.12, X no es (0,1)-aditiva; y por el Teorema 2.1.3, existe una configuración débilmente mala W para X . Sea $\mathcal{Z}_W = ((\mathbf{z}_1, \mathbf{w}_1), \dots, (\mathbf{z}_t, \mathbf{w}_t))$ un diagrama de flechas asociado a W . Por el Lema 2.4.3, $B(\mathbf{z}_i) > B(\mathbf{w}_i)$, para $i = 1, \dots, t$. Como A y B tienen el mismo tipo de orden, entonces $A(\mathbf{z}_i) > A(\mathbf{w}_i)$, para $i = 1, \dots, t$.

Para el recíproco, supongamos que existe un diagrama de flechas $\mathcal{Z} = ((\mathbf{z}_1, \mathbf{w}_1), \dots, (\mathbf{z}_t, \mathbf{w}_t))$, tal que $A(\mathbf{z}_i) > A(\mathbf{w}_i)$, para $i = 1, \dots, t$. Por el Lema 2.1.8, existe una matriz $B : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}_0$ que tiene el mismo tipo de orden que A . Entonces $B(\mathbf{z}_i) > B(\mathbf{w}_i)$, para $i = 1, \dots, t$. Sea $X = \mathbf{G}(B)$ la gráfica de B , y sea W la configuración débilmente mala para X obtenida por medio del Lema 2.4.4 a partir de \mathcal{Z} . La existencia de W implica, por el Teorema 2.1.3, que X no es (0,1)-aditiva; entonces por el Teorema 2.1.12, B es no aditiva. Concluimos por el Lema 2.1.8, que A es no aditiva. \diamond

El Teorema 2.4.5 motiva a la siguiente definición. Sea $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una matriz. Si existe un diagrama de flechas $\mathcal{Z} = ((\mathbf{z}_1, \mathbf{w}_1), \dots, (\mathbf{z}_t, \mathbf{w}_t))$, tales que $A(\mathbf{z}_i) > A(\mathbf{w}_i)$, para $i = 1, \dots, t$, entonces por el Teorema 2.4.5, A es no aditiva. Por esta razón, a cualquiera de tales diagramas de flechas le llamaremos *obstrucción de aditividad* para A . El Teorema dice que A es no aditiva si y sólo si existe alguna obstrucción de aditividad para A . Note que dos matrices con el mismo tipo de orden (ver definición en (2.10)) tienen las mismas obstrucciones de aditividad. Note también que la definición de obstrucción de aditividad se aplica a matrices con entradas reales.

La *cardinalidad* de un diagrama de flechas \mathcal{Z} se define como el número de flechas que hay en \mathcal{Z} (contando repeticiones). Una obstrucción de aditividad \mathcal{Z} para una matriz $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tiene *cardinalidad mínima* si A no tiene obstrucciones de aditividad con menos flechas (contando multiplicidades).

Proposición 2.4.6. *Sea $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}_0$ una matriz, y sea $X := G(A)$ la gráfica de A . Supongamos que A es no aditiva y que X no es $(0,1)$ -aditiva (estas condiciones son equivalentes por el Teorema 2.1.12).*

(1) *Sea W una configuración débilmente mala para X (que existe por el Teo. 2.1.3) y sea \mathcal{Z}_W un diagrama de flechas asociado a W (que es obstrucción de aditividad para A por el Lema 2.4.3). Entonces W tiene peso mínimo si y sólo si \mathcal{Z}_W tiene cardinalidad mínima.*

(2) *Sea \mathcal{Z} una obstrucción de aditividad para A (que existe por el Teorema 2.4.5) y sea W la configuración débilmente mala para X definida en el Lema 2.4.4. Entonces \mathcal{Z} tiene cardinalidad mínima si y sólo si W tiene peso mínimo.*

Demostración. Para (1), supongamos que $w(W) = t$, que por el Lema 2.4.1 es el número de flechas de \mathcal{Z} . Probamos las contrapositivas. Si \mathcal{Z}_W no tiene cardinalidad mínima, consideramos una obstrucción de aditividad $\widehat{\mathcal{Z}}$ para A que tenga $s < t$ flechas. Entonces, la configuración débilmente mala \widehat{W} para X que se construye en el Lema 2.4.4 a partir de $\widehat{\mathcal{Z}}$, tiene peso s por la parte *ii*) del mismo Lema. Por lo tanto W no tiene peso mínimo. Para el converso, si W no tiene peso mínimo, sea \widehat{W} una configuración débilmente mala para X con peso $s < t$; y sea $\mathcal{Z}_{\widehat{W}}$ un diagrama de flechas asociado a \widehat{W} , que por el Lema 2.4.3, es obstrucción de aditividad para A . Por el Lema 2.4.1, $\mathcal{Z}_{\widehat{W}}$ tiene s flechas. Por lo tanto \mathcal{Z} no tiene cardinalidad mínima. La prueba de (2) es similar. \diamond

El siguiente lema es considerado en la Sección 2.6. Recuerde que si \mathcal{Z} es un diagrama de flechas, entonces $-\mathcal{Z}$ denota el diagrama de flechas obtenido al invertir las flechas de \mathcal{Z} .

Lema 2.4.7. *Sea $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una matriz. Suponga que A tiene 1-márgenes débilmente decrecientes. Si A no es doblemente graduada, entonces alguno de los diagramas $\mathcal{Z}_{22(a)}$, $\mathcal{Z}_{22(b)}$, $-\mathcal{Z}_{22(a)}$ ó $-\mathcal{Z}_{22(b)}$ (ver Figura 2.12) es una obstrucción de aditividad para A (aplicado a una submatriz B de A de tamaño 2×2).*



Figura 2.12: Diagramas de flechas $\mathcal{Z}_{22(a)}$ y $\mathcal{Z}_{22(b)}$.

Note que del Lema 2.4.7 y del Teorema 2.4.5 sigue que si una matriz A tiene 1-márgenes débilmente decrecientes y no es doblemente graduada, entonces A es no aditiva; esto no es nuevo (ver Lema 2.1.9). La intención del Lema 2.4.7 es más bien resaltar el tipo de obstrucciones que aparecen en las matrices con 1-márgenes débilmente decrecientes que no son doblemente graduadas.

Demostración (del Lema 2.4.7). Como A no es doblemente graduada, se puede mostrar que existe $(i, j) \in \mathbb{R}$ tal que, o bien $A(i, j) < A(i, j + 1)$, o bien $A(i, j) < A(i + 1, j)$ (no es difícil ver que si tal (i, j) no existe, entonces A es doblemente graduada). Supongamos que (i, j) es tal que $A(i, j) < A(i, j + 1)$. Como A tiene 1-márgenes débilmente decrecientes, entonces existe $k \in [p]$, $k \neq i$, tal que $A(k, j) > A(k, j + 1)$. Supongamos que $k < i$, resp. $k > i$; entonces consideramos la sumatriz B_1 , resp. B_2 , de la matriz A ; donde

$$B_1 := \begin{pmatrix} A(k, j) & A(k, j + 1) \\ A(i, j) & A(i, j + 1) \end{pmatrix}, \quad B_2 := \begin{pmatrix} A(i, j) & A(i, j + 1) \\ A(k, j) & A(k, j + 1) \end{pmatrix}.$$

Entonces $\mathcal{Z}_{22(a)}$, resp. $-\mathcal{Z}_{22(a)}$ es obstrucción de aditividad para A (aplicada a la submatriz B_1 , resp. B_2 de A). Si (i, j) es tal que $A(i, j) < A(i + 1, j)$ entonces de manera similar se concluye que $\mathcal{Z}_{22(b)}$ ó $-\mathcal{Z}_{22(b)}$ es obstrucción de aditividad para A (aplicada a cierta submatriz B de A de tamaño 2×2).
 \diamond

El Lema 2.4.8 es una adaptación a matrices enteras (para las que estudiamos obstrucciones de aditividad) del Lema 5.1 en [7], que considera obstrucciones de F -aditividad para ciertos tipos de orden (en el rectángulo $\mathbb{R} = \mathbb{B}(p, q)$)^{5 6}. La prueba que presentamos aquí tiene como ingrediente

⁵En [7] a estas obstrucciones Fishburn les llama CV listas (ver también nota número 8 a pie de página).

⁶Como se comenta al principio de la Sección 2.7, en [6, 7] Fishburn no considera matrices, sino los tipos de orden que pueden tomar las matrices.

principal los resultados sobre configuraciones débilmente malas de la Sección 2.2. Las pruebas que presentamos de las partes (3), (5) y (6) se apoyan mucho en las ideas de la prueba del Lema 5.1 en [7]. Las pruebas que ofrecemos de las partes (1), (2) y (4) son originales (aunque las partes (1) y (2) también pueden probarse siguiendo las ideas de la prueba del Lema 5.1 en [7]). Este lema se requiere en la Sección 2.6.

Lema 2.4.8. *Sean A una partición plana no aditiva, X la gráfica de A , W una configuración débilmente mala de peso mínimo para X (que existe por los Teoremas 2.1.3 y 2.1.12), y $\mathcal{Z}_W = ((z_1, w_1), \dots, (z_t, w_t))$ un diagrama de flechas asociado a W . Entonces las siguientes condiciones se cumplen.*

- (1) z_i y w_i no son comparables en \mathbf{R} , para $1 \leq i \leq t$.
- (2) $z_i \neq w_j$, para cualesquiera $i, j \in [t]$, con $i \neq j$.
- (3) No existe un par de flechas en \mathcal{Z}_W , (z_i, w_i) y (z_j, w_j) , tales que $w_j \triangleleft z_i$ y $w_i \triangleleft z_j$.
- (4) No existe un par de flechas en \mathcal{Z}_W , (z_i, w_i) y (z_j, w_j) , tales que $z_i \triangleleft w_j$ y $z_j \triangleleft w_i$.
- (5) Ninguna subsucesión $\widehat{\mathcal{Z}}$ de \mathcal{Z} , contenida propiamente en \mathcal{Z} (como multiconjuntos), forma una diagrama de flechas.

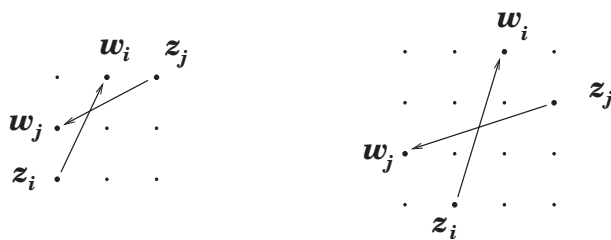
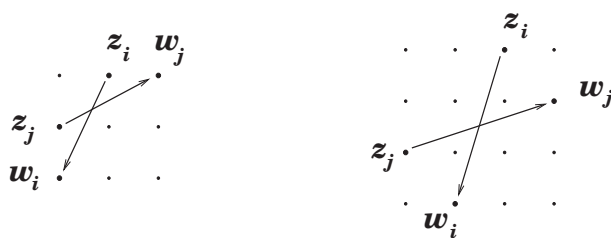
Si además todas las entradas de A son distintas, entonces \mathcal{Z} satisface también:

- (6) Ninguna subsucesión de \mathcal{Z} con $2 \leq s < t - 1$ elementos es un cuasidiagrama de flechas.

Las partes (3) y (4) del Lema excluyen la existencia en \mathcal{Z}_W de ciertos pares de flechas que se cruzan. En la figura 2.13 se ilustran algunos ejemplos de pares que quedan excluidos por (3), y en la figura 2.14 se ilustran algunos ejemplos de pares que quedan excluidos por (4).

Demostración (del Lema 2.4.8). Probamos (1). Sea $i \in [t]$. Los elementos z_i y w_i son las respectivas proyecciones a \mathbf{R} de dos elementos $\mathbf{h}_i, \mathbf{k}_i \in \mathbf{B}$, tales que $W(\mathbf{h}_i) > 0$ y $W(\mathbf{k}_i) < 0$. Por *iii* de (2.12), \mathbf{h}_i y \mathbf{k}_i coinciden en su tercera coordenada. Si z_i y w_i fueran comparables, entonces \mathbf{h}_i y \mathbf{k}_i serían comparables. Como W tiene peso mínimo, por el Teorema 2.2.2 esto no puede ocurrir.

(2) Supongamos que $z_i = w_j$ para ciertos $i \neq j \in [t]$. El elemento $z_i = w_j$ es la proyección a \mathbf{R} de dos elementos $\mathbf{h}_i, \mathbf{k}_j \in \mathbf{B}$, tales que $W(\mathbf{h}_i) > 0$ y


 Figura 2.13: Algunos pares de flechas que por (3) no pueden existir en \mathcal{Z}_W .

 Figura 2.14: Algunos pares de flechas que por (4) no pueden existir en \mathcal{Z}_W .

$W(\mathbf{k}_j) < 0$. Como $\mathbf{z}_i = \mathbf{w}_j$, \mathbf{h}_i y \mathbf{k}_j difieren exactamente en una coordenada. Esto contradice el Lema 2.2.3.

(3) Esta condición no requiere que W tenga peso mínimo. Supongamos que existen en \mathcal{Z} flechas $(\mathbf{z}_i, \mathbf{w}_i)$ y $(\mathbf{z}_j, \mathbf{w}_j)$ tales que $\mathbf{w}_j \triangleleft \mathbf{z}_i$ y $\mathbf{w}_i \triangleleft \mathbf{z}_j$; como A es una partición plana, esto implica que $A(\mathbf{w}_j) \geq A(\mathbf{z}_i)$ y que $A(\mathbf{w}_i) \geq A(\mathbf{z}_j)$; entonces

$$A(\mathbf{w}_j) \geq A(\mathbf{z}_i) > A(\mathbf{w}_i) \geq A(\mathbf{z}_j) > A(\mathbf{w}_j),$$

la segunda y la última desigualdades son por el Lema 2.4.3. Esto da una contradicción.

(4) Como W tiene peso mínimo, por el Teorema 2.2.10 existe una pirámide Y tal que $-W$ es configuración débilmente mala para Y . Sea B la proyección de Y en $\mathbb{B}(p, q)$, entonces B es una partición plana cuya gráfica es la pirámide Y . Entonces un diagrama de flechas asociado a $-W$ es el diagrama definido por $\mathcal{Z}_{(-W)} := ((\mathbf{z}'_1, \mathbf{w}'_1), \dots, (\mathbf{z}'_t, \mathbf{w}'_t))$, donde $\mathbf{z}'_i := \mathbf{w}_i$ y $\mathbf{w}'_i := \mathbf{z}_i$, para $1 \leq i \leq t$. Supongamos que existen flechas $(\mathbf{z}_i, \mathbf{w}_i)$ y $(\mathbf{z}_j, \mathbf{w}_j)$ en \mathcal{Z} tales que $\mathbf{z}_i \triangleleft \mathbf{w}_j$ y $\mathbf{z}_j \triangleleft \mathbf{w}_i$, entonces las flechas $(\mathbf{z}'_i, \mathbf{w}'_i)$ y $(\mathbf{z}'_j, \mathbf{w}'_j)$ en $\mathcal{Z}_{(-W)}$ son

tales que

$$\begin{cases} \mathbf{w}'_i = \mathbf{z}_i \triangleleft \mathbf{w}_j = \mathbf{z}'_j, \text{ y} \\ \mathbf{w}'_j = \mathbf{z}_j \triangleleft \mathbf{w}_i = \mathbf{z}'_i. \end{cases} \quad (2.14)$$

Considerando la condición (3) para la partición plana B , la configuración débilmente mala $-W$ para Y , y el diagrama de flechas $\mathcal{Z}_{(-W)}$, vemos que (2.14) no puede ocurrir. Por lo tanto la condición (4) se cumple. Note que no sabemos si la configuración débilmente mala $-W$ para Y tiene peso mínimo, y que la condición (3) no lo requiere.

(5) Supongamos que la subsucesión $\widehat{\mathcal{Z}} = ((\mathbf{z}_{i_1}, \mathbf{w}_{i_1}), \dots, (\mathbf{z}_{i_s}, \mathbf{w}_{i_s}))$, con $s < t$, es un diagrama de flechas. Por el Lema 2.4.3, $A(\mathbf{z}_{i_j}) > A(\mathbf{w}_{i_j})$, para $j = 1, \dots, s$. Sea \widehat{W} la configuración débilmente mala para X construida por medio del Lema 2.4.4, a partir del diagrama $\widehat{\mathcal{Z}}$. Entonces, por el mismo lema, tenemos que $w(\widehat{W}) = s < t$. Por el Lema 2.4.1 tenemos que $w(W) = t$. Esto contradice la hipótesis de que W tiene peso mínimo. Por lo tanto no existe tal $\widehat{\mathcal{Z}}$.

(6) Supongamos que A tiene todas sus entradas distintas, y que existen en \mathcal{Z} flechas $\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_s}$, $2 \leq s < t - 1$, tales que $\mathcal{Z}^\circ := (\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_s})$ es un cuasidiagrama de flechas. Sea $\varphi = (\mathbf{z}, \mathbf{w})$ la flecha que completa a \mathcal{Z}° . Entonces, por el Lema 2.3.2, $\mathcal{Z} - \mathcal{Z}^\circ$ también es un cuasidiagrama de flechas, y $\varphi^* = (\mathbf{w}, \mathbf{z})$ completa a $\mathcal{Z} - \mathcal{Z}^\circ$. Como A no tiene entradas repetidas, tenemos que $A(\mathbf{z}) > A(\mathbf{w})$ ó $A(\mathbf{w}) > A(\mathbf{z})$. Note además que, por el Lema 2.4.3, para cada flecha $(\mathbf{z}_i, \mathbf{w}_i) \in \mathcal{Z}$, se tiene que $A(\mathbf{z}_i) > A(\mathbf{w}_i)$. Supongamos que $A(\mathbf{z}) > A(\mathbf{w})$. Sea W° la configuración débilmente mala para X obtenida por medio del Lema 2.4.4 a partir del diagrama de flechas $\mathcal{Z}^\circ \sqcup (\varphi)$. Por el mismo lema tenemos que $w(W^\circ) = s + 1$. Por hipótesis $s + 1 < t$. Supongamos ahora que $A(\mathbf{w}) > A(\mathbf{z})$. Sea W° la configuración débilmente mala para X obtenida por medio del Lema 2.4.4 a partir del diagrama de flechas $[\mathcal{Z} - \mathcal{Z}^\circ] \sqcup (\varphi^*)$. Por el mismo lema tenemos que $w(W^\circ) = t - s + 1$. Como $2 \leq s$, entonces $t - s + 1 < t$. En cualquier caso se contradice la hipótesis de que W tiene peso mínimo. Por lo tanto se cumple (6). \diamond

El siguiente lema también se requiere en la Sección 2.6.

Lema 2.4.9. Sean $A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ una partición plana no aditiva, $X = \mathbf{G}(A)$ la gráfica de A , W una configuración débilmente mala con peso mínimo para X (que existe por los Teoremas 2.1.3 y 2.1.12), y \mathcal{Z}_W un diagrama de flechas asociado a W . Entonces ninguna de las siguientes flechas pertenece a \mathcal{Z}_W :

- a) $((p, j), (1, j + 1))$, para $j = 1, \dots, q - 1$.
- b) $((1, j + 1), (p, j))$, para $j = 1, \dots, q - 1$.
- c) $((i + 1, 1), (i, q))$, para $i = 1, \dots, p - 1$.
- d) $((i, q), (i + 1, 1))$, para $i = 1, \dots, p - 1$.

Demostración. Para cada $j \in [q - 1]$ definimos el siguiente par de subconjuntos de \mathbf{R} asociados a j :

$$\begin{aligned} L(j) &:= \{(k, l) \in \mathbf{R} : l \leq j\}, \\ R(j) &:= \{(k, l) \in \mathbf{R} : j < l\}; \end{aligned}$$

de tal manera que $\mathbf{R} = L(j) \amalg R(j)$. Sea \mathcal{Z} un diagrama de flechas, entonces para $j \in [q - 1]$ tenemos que

$$\begin{aligned} SL_{\mathcal{Z}}(j) &:= \sum_{(k,l) \in L(j)} M_{\mathcal{Z}}(k, l) = 0, \\ SR_{\mathcal{Z}}(j) &:= \sum_{(k,l) \in R(j)} M_{\mathcal{Z}}(k, l) = 0, \end{aligned}$$

porque $M_{\mathcal{Z}} \in \mathbf{F}(\mathbf{0}, \mathbf{0})$. Fijamos $j \in [q - 1]$. Respecto a este valor de j , tenemos flechas de tres tipos en \mathbf{R} :

- Tipo 1. $\varphi = (\mathbf{z}, \mathbf{w})$, con $\mathbf{z} \in L(j)$ y $\mathbf{w} \in R(j)$. En este caso M_{φ} contribuye con $+1$ a $SL_{\mathcal{Z}}(j)$ y con -1 a $SR_{\mathcal{Z}}(j)$.
- Tipo 2. $\varphi = (\mathbf{z}, \mathbf{w})$, con $\mathbf{z} \in R(j)$ y $\mathbf{w} \in L(j)$. En este caso M_{φ} contribuye con $+1$ a $SR_{\mathcal{Z}}(j)$ y con -1 a $SL_{\mathcal{Z}}(j)$.
- Tipo 3. $\varphi \subset L(j)$ ó $\varphi \subset R(j)$. En este caso M_{φ} no contribuye ni a $SL_{\mathcal{Z}}(j)$ ni a $SR_{\mathcal{Z}}(j)$.

Ahora, sea $j \in [q - 1]$ y suponga que la flecha $(\mathbf{z}, \mathbf{w}) = ((p, j), (1, j + 1))$ pertenece a \mathcal{Z}_W . La flecha φ es de Tipo 1, así que M_{φ} aporta un $+1$ a $SL_{(\mathcal{Z}_W)}(j)$ y un -1 a $SR_{(\mathcal{Z}_W)}(j)$. Como $M_{(\mathcal{Z}_W)} \in \mathbf{F}(\mathbf{0}, \mathbf{0})$

$$SL_{(\mathcal{Z}_W)}(j) = SR_{(\mathcal{Z}_W)}(j) = 0.$$

Por lo tanto \mathcal{Z}_W debe tener alguna flecha de Tipo 2, digamos $\varphi_2 = (\mathbf{z}_2, \mathbf{w}_2)$ con $\mathbf{z}_2 \in R(j)$ y $\mathbf{w}_2 \in L(j)$. Como (p, j) es el elemento máximo en $L(j)$, entonces $\mathbf{w}_2 \preceq (p, j)$; pero por la condición (2) del Lema 2.4.8, $\mathbf{w}_2 \neq (p, j)$; por lo tanto $\mathbf{w}_2 \triangleleft (p, j)$. Similarmente se prueba que $(1, j + 1) \triangleleft \mathbf{z}_2$. Por la condición (3) del Lema 2.4.8 esto no puede ocurrir. Por lo tanto, una flecha

como en a) no puede pertenecer a \mathcal{Z}_W . La prueba para los otros casos es similar. \diamond

La siguiente conjetura podría ayudar a resolver algunas conjeturas que planteamos en la Sección 2.6 (Conjeturas 2, 3 y 5).

Conjetura 1. *Sea q un entero mayor o igual que 3. Sean $A : \mathbf{B}(3, q) \rightarrow \mathbb{N}_0$ una partición plana no aditiva, $X = \mathbf{G}(A)$ la gráfica de A , W una configuración débilmente mala de peso mínimo para X (que existe por los Teoremas 2.1.3 y 2.1.12), y \mathcal{Z}_W un diagrama de flechas asociado a W . Entonces ninguna de las siguientes flechas pertenece a \mathcal{Z}_W :*

- i) *Para $1 \leq k \leq q - 1$, $1 \leq s \leq q - k$, $((3, k), (1, k + s))$.*
- ii) *Para $1 \leq k \leq q - 1$, $1 \leq s \leq q - k$, $((1, k + s), (3, k))$.*

Note que por el Lema 2.4.3, el diagrama de flechas \mathcal{Z}_W considerado en el Lema 2.4.8, resp. Lema 2.4.9, resp. Conjetura 1, resulta ser una obstrucción de aditividad para la matriz A considerada en cada caso. Más aún, por la Proposición 2.4.6 \mathcal{Z}_W tiene cardinalidad mínima en cada caso (porque W tiene peso mínimo).

2.5. Pesos de las configuraciones débilmente malas para pirámides

Esta sección está dedicada a la prueba del resultado más importante de la tesis:

Resultado 1. *No existe una cota en el peso de las configuraciones malas (resp. débilmente malas) que es necesario considerar para determinar unicidad (resp. (0,1)-aditividad) de cualquier (0,1)-matriz de dimensión 3.*

Los teoremas principales detrás de la prueba del Resultado 1 son los Teoremas 2.5.1 y 2.5.5. El primero afirma que la existencia de ciertos diagramas de flechas con t flechas distintas implica la existencia de matrices enteras no aditivas, todas cuyas obstrucciones de aditividad tienen al menos t flechas distintas. El segundo afirma que la existencia de ciertos diagramas de flechas con t flechas distintas implica la existencia de pirámides que no son (0,1)-aditivas, todas cuyas configuraciones débilmente malas son de peso al menos t . Finalmente, en el Ejemplo 2.5.6 aplicamos los Teoremas 2.5.1 y 2.5.5 a una familia de diagramas de flechas introducida por Fishburn en [6, p. 164],

para obtener, para cada entero par $q \geq 4$ una pirámide X_q de tamaño $3 \times q \times 3q - 1$, tal que X_q tiene una configuración mala de peso q y X_q no tiene configuraciones débilmente malas de peso menor que q . La prueba del Resultado 1 se sigue de la existencia de estas pirámides.

Los resultados presentados en esta sección aparecen en [22].

Usamos la notación definida en las secciones anteriores. Ahora fijamos un poco más de notación. Sea $\mathcal{Z} = (n_1\varphi_1, \dots, n_t\varphi_t)$ un diagrama de flechas, donde φ_i denota la flecha $(\mathbf{z}_i, \mathbf{w}_i)$ en \mathbb{R} , para $i = 1, \dots, t$. Decimos que \mathcal{Z} es *disconexo* si los puntos de \mathbb{R} : $\mathbf{z}_1, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{z}_t, \mathbf{w}_t$ son todos distintos; esto es, si cada punto de \mathbb{R} es el punto inicial o el punto final de a lo más una flecha en $\{\varphi_1, \dots, \varphi_t\}$. \mathcal{Z} tiene *soporte mínimo* si para cualquier subconjunto propio no vacío S de $\{\varphi_1, \dots, \varphi_t\}$ y para cualquier sucesión de enteros positivos $(b_\varphi)_{\varphi \in S}$ la combinación lineal $\sum_{\varphi \in S} b_\varphi \mathbf{M}_\varphi$ no pertenece a $\mathbf{F}(\mathbf{0}, \mathbf{0})$; esto es, si la sucesión de flechas $(b_\varphi \varphi)_{\varphi \in S}$ no es un diagrama de flechas. Un diagrama desconexo $\mathcal{Z} = (n_1\varphi_1, \dots, n_t\varphi_t)$ satisface la *condición de Fishburn* si existen vectores $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^q$, tales que para cualesquiera $\mathbf{h}, \mathbf{k} \in \mathbb{R}$, tenemos que $\mathbf{S}(\mathbf{x}, \mathbf{y})(\mathbf{h}) = \mathbf{S}(\mathbf{x}, \mathbf{y})(\mathbf{k})$ si y sólo si (\mathbf{h}, \mathbf{k}) ó (\mathbf{k}, \mathbf{h}) es una flecha en \mathcal{Z} . El siguiente Teorema es muy similar, pero adaptado a nuestro contexto, al Teorema 3.1 en [7].

Teorema 2.5.1. *Sea $\mathcal{Z} = (n_1\varphi_1, \dots, n_t\varphi_t)$ un diagrama desconexo de flechas en \mathbb{R} con soporte mínimo. Si \mathcal{Z} satisface la condición de Fishburn, entonces existe una matriz no aditiva A , con entradas enteras y sin entradas repetidas, tal que cualquier obstrucción de aditividad para A tiene al menos t flechas distintas.*

Demostración. Como \mathcal{Z} satisface la condición de Fishburn, existen vectores $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^q$, tales que $\mathbf{S}(\mathbf{x}, \mathbf{y})(\mathbf{h}) = \mathbf{S}(\mathbf{x}, \mathbf{y})(\mathbf{k})$ si y sólo si (\mathbf{h}, \mathbf{k}) ó (\mathbf{k}, \mathbf{h}) es una flecha en \mathcal{Z} . Sea K una constante positiva suficientemente grande, tal que la diferencia entre cualesquiera dos entradas distintas de $K\mathbf{S}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ sea mayor que 2. Sea $B = K\mathbf{S}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Entonces B y $\mathbf{S}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ tienen el mismo tipo de orden. Escribimos $\varphi_i = (\mathbf{z}_i, \mathbf{w}_i)$ y definimos $\widehat{A} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\widehat{A}(\mathbf{h}) := \begin{cases} B(\mathbf{h}) + 1 & \text{si } \mathbf{h} = \mathbf{z}_i \text{ para alguna } i \in [t]; \\ B(\mathbf{h}) - 1 & \text{si } \mathbf{h} = \mathbf{w}_i \text{ para alguna } i \in [t]; \\ B(\mathbf{h}) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Alternativamente, $\widehat{A} = B + \sum_{i=1}^t M_{\varphi_i}$. Entonces \mathcal{Z} es una obstrucción de aditividad para \widehat{A} . Como $\widehat{\mathcal{Z}}$ es desconexo, todas las entradas de \widehat{A} son diferentes. Por el Teorema 2.4.5, \widehat{A} es no aditiva. Por demostrar que cualquier obstrucción de aditividad para \widehat{A} contiene al menos todas las flechas de $\{\varphi_1, \dots, \varphi_t\}$. Por simplicidad de notación, probamos que cualquier obstrucción de aditividad para \widehat{A} contiene la flecha φ_t , la prueba para las otras flechas es similar. Como \mathcal{Z} es un diagrama de flechas, el Lema 2.3.4 implica que $\mathbf{v}_{\mathcal{Z}} = \mathbf{0}$. Sea $S = \{\varphi_1, \dots, \varphi_{t-1}\}$; como \mathcal{Z} tiene soporte mínimo, no existe una combinación lineal entera $\sum_{i=1}^{t-1} b_i \mathbf{v}_{\varphi_i} = \mathbf{0}$, con $b_i \geq 0$, para $i \in [t-1]$, y $\sum_{i=1}^{t-1} b_i > 0$. Por el Lema 1.4.1, existen $\mathbf{c} \in \mathbb{Z}^p$ y $\mathbf{d} \in \mathbb{Z}^q$, tales que $\langle \mathbf{c} * \mathbf{d}, \mathbf{v}_{\varphi_i} \rangle > 0$, para $i \in [t-1]$. Sea $C = S(\mathbf{c}, \mathbf{d})$. Entonces por el Lema 2.3.7, $C(\mathbf{z}_i) > C(\mathbf{w}_i)$ para $i \in [t-1]$. Luego por el Corolario 2.3.6, $C(\mathbf{z}_t) < C(\mathbf{w}_t)$. Sea $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño tal que

$$\epsilon \cdot \max\{|C(\mathbf{h}) - C(\mathbf{k})| : \mathbf{h}, \mathbf{k} \in \mathbb{R}\} < 1.$$

Sea $D = B + \epsilon C$. Por la manera en que está definida D es aditiva. Tenemos que $\widehat{A}(\mathbf{z}_t) > \widehat{A}(\mathbf{w}_t)$, mientras que $D(\mathbf{z}_t) < D(\mathbf{w}_t)$; y para $\mathbf{h}, \mathbf{k} \in \mathbb{R}$ tales que (\mathbf{h}, \mathbf{k}) y (\mathbf{k}, \mathbf{h}) son diferentes de $(\mathbf{z}_t, \mathbf{w}_t)$ tenemos que

$$\widehat{A}(\mathbf{h}) > \widehat{A}(\mathbf{k}) \iff D(\mathbf{h}) > D(\mathbf{k}).$$

Sea $\widehat{\mathcal{Z}}$ una obstrucción de aditividad para \widehat{A} que no contiene la flecha φ_t . Entonces $\widehat{\mathcal{Z}}$ es también una obstrucción de aditividad para D . Como D es aditiva, esto es una contradicción al Teorema 2.4.5. Por lo tanto φ_t está contenida en cualquier obstrucción de aditividad para \widehat{A} . Por el Lema 2.1.8 existe una matriz $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}_0$ que tiene el mismo tipo de orden que \widehat{A} , y por lo tanto, las mismas obstrucciones de aditividad que \widehat{A} , la prueba del Teorema sigue de la existencia de A . \diamond

Comentario 2.5.2. Sea \mathcal{Z} un diagrama desconexo de flechas que satisface la condición de Fishburn para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$ y $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^q$. Sea ρ , resp. σ , una permutación de las coordenadas de \mathbf{x} , resp. \mathbf{y} . Permutando por medio de ρ , resp. σ , los renglones, resp. las columnas, de $B(p, q)$, obtenemos un diagrama desconexo de flechas $(\rho, \sigma)\mathcal{Z}$. Sigue de las definiciones que \mathcal{Z} satisface la condición de Fishburn para los vectores \mathbf{x} y \mathbf{y} si y sólo si $(\rho, \sigma)\mathcal{Z}$ satisface la condición de Fishburn para $\rho\mathbf{x}$ y $\sigma\mathbf{y}$. Además, \mathcal{Z} tiene soporte mínimo si y sólo si $(\rho, \sigma)\mathcal{Z}$ tiene soporte mínimo. Por lo tanto, sin pérdida de generalidad podemos asumir que \mathbf{x} y \mathbf{y} son débilmente decrecientes.

Lema 2.5.3. *Sea $\mathcal{Z} = (n_1\varphi_1, \dots, n_t\varphi_t)$ un diagrama desconexo de flechas en \mathbb{R} . Si \mathcal{Z} satisface la condición de Fishburn para un par de vectores estrictamente decrecientes \mathbf{x}, \mathbf{y} , entonces para cualquier flecha $\varphi = (\mathbf{z}, \mathbf{w})$ de \mathcal{Z} , tenemos que \mathbf{z} y \mathbf{w} no son comparables en \mathbb{R} .*

Demostración. Escribimos $\mathbf{z} = (i, j)$ y $\mathbf{w} = (k, l)$. Por la condición de Fishburn tenemos que

$$x_i + y_j = x_k + y_l. \quad (2.15)$$

Si $\mathbf{z} \triangleleft \mathbf{w}$ entonces $i \leq k$ y $j \leq l$ y al menos una de las desigualdades es estricta. Como \mathbf{x}, \mathbf{y} son estrictamente decrecientes, esto implica que

$$x_i + y_j > x_k + y_l.$$

Esto contradice (2.15). Por lo tanto no ocurre que $\mathbf{z} \triangleleft \mathbf{w}$. De manera similar se prueba que no ocurre que $\mathbf{w} \triangleleft \mathbf{z}$. \diamond

Lema 2.5.4. *Sea $\mathcal{Z} = (n_1\varphi_1, \dots, n_t\varphi_t)$ un diagrama desconexo de flechas en \mathbb{R} con soporte mínimo. Supongamos que \mathcal{Z} satisface la condición de Fishburn para un par de vectores estrictamente decrecientes $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$ y $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^q$. Entonces la matriz no aditiva A del Teorema 2.5.1 es una partición plana.*

Demostración. Como \mathbf{x}, \mathbf{y} son estrictamente decrecientes, la matriz $KS(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ de la prueba del Teorema 2.5.1 es doblemente graduada. Entonces por el Lema 2.5.3, la matriz \hat{A} es también doblemente graduada. Por lo tanto, A es partición plana. \diamond

Teorema 2.5.5. *Sea $\mathcal{Z} = (n_1\varphi_1, \dots, n_t\varphi_t)$ un diagrama desconexo de flechas en \mathbb{R} con soporte mínimo. Supongamos que \mathcal{Z} satisface la condición de Fishburn para un par de vectores estrictamente decrecientes $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^q$. Entonces existe una pirámide X que no es $(0,1)$ -aditiva y tal que cualquier configuración débilmente mala para X tiene peso mayor o igual que t .*

Demostración. Por el Lema 2.5.4 existe una partición plana no aditiva $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}_0$, tal que cualquier obstrucción de aditividad para A tiene al menos t flechas. Sea $X = G(A)$ la gráfica de A . Entonces por el Lema 2.1.11, X es una pirámide; y por el Teorema 2.1.12, X no es $(0,1)$ -aditiva. Sea W una configuración débilmente mala para X (que existe por el Teorema 2.1.3) tal que $w(W) = s$. Entonces por el Lema 2.4.1, \mathcal{Z}_W es un diagrama con s flechas. Por el Lema 2.4.3, \mathcal{Z}_W es una obstrucción de aditividad para A . Por lo tanto $s \geq t$. \diamond

Ejemplo 2.5.6. Sea q un entero, $q \geq 4$. Usamos el diagrama de flechas en $B(3, q)$

$$\mathcal{Z}_q = ((z_1, w_1), \dots, (z_q, w_q))$$

introducido por Fishburn en [6, p. 164]; definido como sigue: Sea

$$(z_i, w_i) = \begin{cases} ((3, i), (2, i + 2)) & \text{si } i = 1, 3, \dots, q - 3; \\ ((2, i + 2), (3, i)) & \text{si } i = 2, 4, \dots, q - 2; \\ ((1, q - 1), (2, 1)) & \text{si } i = q - 1; \\ ((2, 2), (1, q)) & \text{si } i = q. \end{cases}$$

La Figura 2.15 muestra el caso $q = 8$. Entonces \mathcal{Z}_q es un diagrama disconexo de flechas.

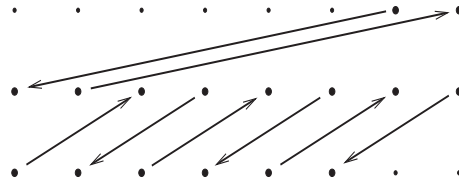


Figura 2.15: Diagrama de flechas de Fishburn (\mathcal{Z}_8).

Como para cada $j \in [q]$, \mathcal{Z}_q tiene exactamente una flecha con punto inicial en la columna j , y exactamente una flecha con punto final en la columna j , y como \mathcal{Z}_q tiene exactamente una flecha con punto inicial en el primer renglón y exactamente una flecha con punto final en el primer renglón, entonces \mathcal{Z}_q tiene soporte mínimo. Por demostrar que \mathcal{Z}_q satisface la condición de Fishburn. Para esto tomamos

$$\mathbf{x} = (q, 2, 0) \in \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{y} = (q - 1, q - 2, \dots, 1, 0) \in \mathbb{R}^q.$$

Entonces

$$S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} 2q - 1 & 2q - 2 & 2q - 3 & \cdots & q + 2 & q + 1 & q \\ q + 1 & q & q - 1 & \cdots & 4 & 3 & 2 \\ q - 1 & q - 2 & q - 3 & \cdots & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

y para cualesquiera $\mathbf{h}, \mathbf{k} \in B(3, q)$ tenemos que $S(\mathbf{x}, \mathbf{y})(\mathbf{h}) = S(\mathbf{x}, \mathbf{y})(\mathbf{k})$ si y sólo si (\mathbf{h}, \mathbf{k}) ó (\mathbf{k}, \mathbf{h}) es una flecha en \mathcal{Z}_q . Entonces por el Teorema 2.5.5 existe

una pirámide X_q que no es (0,1)-aditiva y tal que cualquier configuración débilmente mala W para X_q tiene peso $\mathbf{w}(W) \geq q$.

La matriz $\widehat{A}_q : \mathbf{B}(3, q) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida en la prueba del Teorema 2.5.1, para este caso es

$$\widehat{A}_q = 3\mathbf{S}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \sum_{i=1}^q \mathbf{M}_{(\mathbf{z}_i, \mathbf{w}_i)}. \quad (2.16)$$

Esta matriz tiene entradas enteras, así que la matriz entera garantizada por el Teorema 2.5.1, es para este caso la matriz $A_q = \widehat{A}_q$; y $X_q = \mathbf{G}(A_q)$ es la pirámide cuya existencia se asegura en el Teorema 2.5.5. Para $q = 8$ tenemos

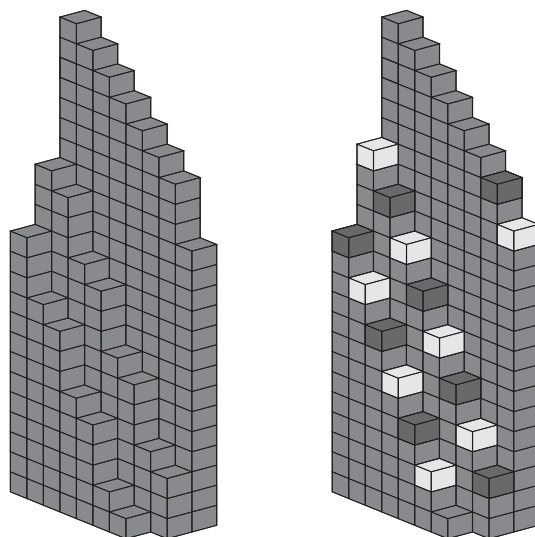
$$A_8 = \begin{bmatrix} 45 & 42 & 39 & 36 & 33 & 30 & 28 & 23 \\ 26 & 25 & 20 & 19 & 14 & 13 & 8 & 7 \\ 22 & 17 & 16 & 11 & 10 & 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Una matriz más simple con el mismo tipo de orden que A_8 es

$$A'_8 = \begin{bmatrix} 23 & 22 & 21 & 20 & 19 & 18 & 17 & 14 \\ 16 & 15 & 12 & 11 & 8 & 7 & 4 & 3 \\ 13 & 10 & 9 & 6 & 5 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces, las gráficas $\mathbf{G}(A_8)$ y $\mathbf{G}(A'_8)$ son pirámides con una configuración mala de peso 8, que no tienen configuraciones débilmente malas de peso menor (ver Figura 2.16 para $\mathbf{G}(A'_8)$). Por el Teorema 2.1.2 $\mathbf{G}(A_8)$ y $\mathbf{G}(A'_8)$ no son conjuntos de unicidad. \diamond

Comentario 2.5.7. Note que para una (0,1)-matriz de tamaño $2 \times q \times r$, ser una pirámide, ser de unicidad y ser (0,1)-aditiva son equivalentes [27, Teo. 2]. Además, una (0,1)-matriz A de tamaño $2 \times q \times r$ es una pirámide si y sólo si A no tiene configuraciones malas de peso 2 [27, §3]. Por lo tanto, para determinar unicidad y (0,1)-aditividad de (0,1)-matrices de tamaño $2 \times q \times r$ es suficiente considerar configuraciones malas de peso 2. Esto significa que la familia anterior de ejemplos es lo mejor posible. \diamond


 Figura 2.16: $G(A'_8)$ y la c.d.m. correspondiente.

2.6. Obstrucciones de aditividad en 3×3 y 3×4

Uno de los resultados importantes de esta sección es el Teorema 2.6.2, que clasifica las obstrucciones de aditividad que es necesario considerar para determinar aditividad de particiones planas de tamaño 3×3 . El otro es el Teorema 2.6.7, que clasifica las obstrucciones de aditividad que se deben considerar para determinar aditividad de particiones planas de tamaño 3×4 que no tienen entradas repetidas. Estos dos teoremas corresponden a los Resultados 2 y 3 de la tesis mencionados en la introducción. Presentamos también algunas conjeturas sobre lo que creemos que son las obstrucciones de aditividad que se deben considerar para determinar aditividad de particiones planas de tamaños 3×5 (Conjetura 4) y 3×6 (Conjetura 5).

Consideramos la notación que se ha definido a lo largo de todo este capítulo.

Comentario 2.6.1. Sea $A : \mathbb{R} = \mathbb{B}(p, q) \longrightarrow \mathbb{R}$ una matriz, y sea σ , resp. ρ , una permutación de los renglones, resp. columnas de A . Sea $(\sigma, \rho)A$ la matriz que se obtiene de permutar los renglones, resp. las columnas de A por medio de σ , resp. ρ . El mismo razonamiento se puede aplicar a los

diagramas de flechas en \mathbb{R} , de manera que para un digrama de flechas \mathcal{Z} podemos considerar también el diagrama de flechas $(\sigma, \rho)\mathcal{Z}$. De la definición de aditividad sigue que A es aditiva si y sólo si $(\sigma, \rho)A$ es aditiva. Es claro que \mathcal{Z} es una obstrucción de aditividad para A si y sólo si $(\sigma, \rho)\mathcal{Z}$ es una obstrucción de aditividad para $(\sigma, \rho)A$.

Por otro lado, dada una matriz $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, por el Lema 2.1.8, existe una matriz $B : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}_0$ que tiene el mismo tipo de orden que A ; por consiguiente, B es aditiva si y sólo si A es aditiva. Es claro que en esta situación A y B tienen las mismas obstrucciones de aditividad. Por lo tanto, al estudiar aditividad (y obstrucciones de aditividad) para matrices de dimensión 2, no perdemos generalidad si consideramos sólo matrices con entradas enteras; y si asumimos que los 1-márgenes de nuestras matrices son vectores débilmente decrecientes; esto es, particiones. \diamond

Nos gustaría, para cada par de enteros positivos p y q , tener una *lista completa de obstrucciones de aditividad* para matrices de tamaño $p \times q$, en el sentido de que para cualquiera de tales matrices que sea no aditiva, algún elemento de nuestra lista sea una obstrucción de aditividad. Por el Comentario 2.6.1, al estudiar aditividad (y obstrucciones de aditividad) para matrices de dimensión 2, podemos, sin perder generalidad, suponer que nuestras matrices tienen 1-márgenes débilmente decrecientes y considerar únicamente matrices con entradas en \mathbb{N}_0 . Con estas consideraciones tenemos, por el Lema 2.1.9, que cualquier matriz de dimensión 2 que es aditiva es una partición plana. El Lema 2.4.7 proporciona una lista completa de obstrucciones de aditividad para matrices de dimensión 2 que no son particiones planas. De manera que podemos restringir el estudio de obstrucciones de aditividad a particiones planas. Por el Teorema 2.1.10, toda partición plana de tamaño $2 \times q$ (q entero positivo) es aditiva; luego, por el Teorema 2.4.5 no existen obstrucciones de aditividad para particiones planas de tamaño $2 \times q$. Por lo tanto nos interesa estudiar las obstrucciones de aditividad para particiones planas de tamaño $p \times q$, donde p y q son mayores o iguales que 3 (porque una matriz y su transpuesta tienen esencialmente las mismas obstrucciones de aditividad). Esta es la cuestión planteada en el Problema 2.

Mientras que para determinar aditividad de matrices de tamaño $2 \times q$ es suficiente considerar las obstrucciones dadas por los diagramas $\mathcal{Z}_{22(a)}$, $\mathcal{Z}_{22(b)}$ y sus negativos (para las matrices que no son particiones planas ver Lema 2.4.7, y para particiones planas ver Teorema 2.1.10); para determinar aditividad de matrices con 3 ó más renglones y 3 ó más columnas es necesario considerar

nuevas obstrucciones. La matriz A del Ejemplo 2.6.3 es partición plana y ninguno de los diagramas $\mathcal{Z}_{22(a)}$, $\mathcal{Z}_{22(b)}$ ó sus negativos (ver Figura 2.12) es obstrucción de aditividad para A . Sin embargo A es no aditiva, en el ejemplo se muestra una obstrucción de aditividad para A .

Teorema 2.6.2. *Sea $A : \mathbf{B}(3, 3) \longrightarrow \mathbb{N}_0$ una partición plana. Entonces A es no aditiva si y sólo si \mathcal{Z}_{33} ó $-\mathcal{Z}_{33}$ es una obstrucción de aditividad para A (ver Figura 2.17).*

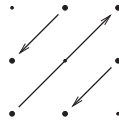


Figura 2.17: Diagrama de flechas \mathcal{Z}_{33} .

Este teorema tiene cierta relación con el Teorema 2.8 de [7], que también considera el diagrama de flechas \mathcal{Z}_{33} , y que trata sobre obstrucciones de F -aditividad de órdenes parciales en el rectángulo $[3] \times [3]$, ver Comentario 2.7.8.

El Teorema 2.6.2 tiene también relación con la clasificación de las configuraciones malas de peso 3 para pirámides que se hace en [24, Teo. 5.1], ver Corolario 2.8.3 (que corresponde con el Corolario 5.2 en [24]).

Hacia el final de la sección veremos la prueba de este Teorema. Sigue de este Teorema que la lista: $\mathcal{Z}_{33}, -\mathcal{Z}_{33}$ es una lista completa de obstrucciones de aditividad para particiones planas de tamaño 3×3 . Para probar que la lista es también mínima debemos mostrar que existe una partición plana de tamaño 3×3 que es no aditiva y tal que \mathcal{Z}_{33} , resp. $-\mathcal{Z}_{33}$, es obstrucción de aditividad para A , pero que $-\mathcal{Z}_{33}$, resp. \mathcal{Z}_{33} no es obstrucción de aditividad para A . Esto se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.6.3. Considere la matriz $A : \mathbf{B}(3, 3) \longrightarrow \mathbb{N}_0$ definida por

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces \mathcal{Z}_{33} es obstrucción de aditividad para A y $-\mathcal{Z}_{33}$ no lo es. Mientras que $-\mathcal{Z}_{33}$ es obstrucción de aditividad para A^T y \mathcal{Z}_{33} no lo es. \diamond

Con esto hemos probado la siguiente

Proposición 2.6.4. *La lista: $\mathcal{Z}_{33}, -\mathcal{Z}_{33}$ (Figura 2.17) es una lista completa mínima de obstrucciones de aditividad para particiones planas de tamaño 3×3 .*

Ejemplo 2.6.5. Considere la matriz A del Ejemplo 2.6.3. Como \mathcal{Z}_{33} es obstrucción de aditividad para A , entonces por el Teorema 2.4.5 A es no aditiva; y por el Teorema 2.1.12, la gráfica $X := G(A)$ no es $(0,1)$ -aditiva. Por el Teorema 2.1.3, existen configuraciones débilmente malas para X ; el Lema 2.4.4 da una manera de construir una configuración débilmente mala para X . Esta configuración débilmente mala (que también es configuración mala) se ilustra en la Figura 2.18. \diamond

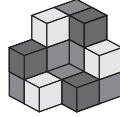


Figura 2.18: Configuración (débilmente) mala para $X := G(A)$.

Ahora procedemos a estudiar las obstrucciones de aditividad para particiones planas de tamaño 3×4 .

Ejemplo 2.6.6. Considere las particiones planas $A, B : B(3, 4) \rightarrow \mathbb{N}_0$ definidas por

$$A := \begin{pmatrix} 11 & 10 & 5 & 3 \\ 9 & 7 & 4 & 2 \\ 8 & 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 11 & 10 & 9 & 6 \\ 8 & 7 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Con ayuda del Teorema 2.6.2 se puede ver que toda submatriz de tamaño 3×3 de A es aditiva, y lo mismo para B . Sin embargo, por el Teorema 2.4.5, A y B son no aditivas: el diagrama $\mathcal{Z}_{34(a)}$, resp. $\mathcal{Z}_{34(b)}$ (ver Figura 2.19) es obstrucción de aditividad para A , resp. B . \diamond

El ejemplo muestra que la lista $\mathcal{Z}_{33}, -\mathcal{Z}_{33}$ no es una lista completa de obstrucciones de aditividad para particiones planas de tamaño 3×4 ; es necesario considerar nuevas obstrucciones, al menos $\mathcal{Z}_{34(a)}$ y $\mathcal{Z}_{34(b)}$ (note que $\mathcal{Z}_{34(a)}$ no es obstrucción de aditividad para B , ni $\mathcal{Z}_{34(b)}$ es obstrucción de aditividad para A).

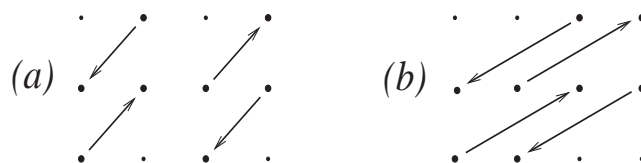


Figura 2.19: Diagramas de flechas, $\mathcal{Z}_{34(a)}$, $\mathcal{Z}_{34(b)}$.

Teorema 2.6.7. *Sea $A : B(3, 4) \rightarrow \mathbb{N}_0$ una partición plana que no tiene entradas repetidas. Entonces A es no aditiva si y sólo si, o bien A tiene una submatriz de tamaño 3×3 que es no aditiva, o bien alguno de los diagramas de flechas $\mathcal{Z}_{34(a)}$, $\mathcal{Z}_{34(b)}$, $-\mathcal{Z}_{34(a)}$ ó $-\mathcal{Z}_{34(b)}$ es una obstrucción de aditividad para A (ver Figura 2.19).*

Este teorema tiene relación con el Teorema 2.8 de [7], que también considera el diagrama de flechas $\mathcal{Z}_{34(a)}$, y que trata sobre obstrucciones de F -aditividad de órdenes parciales en el rectángulo $[3] \times [4]$, ver Comentario 2.7.9.

Damos la prueba de este teorema al final de la sección. El teorema muestra que la lista (ver Figuras 2.19 y 2.20): $\mathcal{Z}_{34(1)}$, $\mathcal{Z}_{34(2)}$, $\mathcal{Z}_{34(3)}$, $\mathcal{Z}_{34(4)}$, $\mathcal{Z}_{34(a)}$, $\mathcal{Z}_{34(b)}$, $-\mathcal{Z}_{34(1)}$, $-\mathcal{Z}_{34(2)}$, $-\mathcal{Z}_{34(3)}$, $-\mathcal{Z}_{34(4)}$, $-\mathcal{Z}_{34(a)}$, $-\mathcal{Z}_{34(b)}$ es una lista completa de obstrucciones de aditividad para particiones planas de tamaño 3×4 que no tienen entradas repetidas.

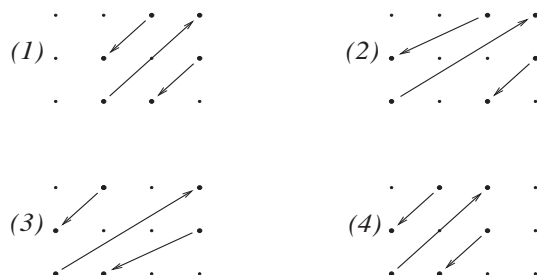


Figura 2.20: Diagramas de flechas $\mathcal{Z}_{34(1)}$, $\mathcal{Z}_{34(2)}$, $\mathcal{Z}_{34(3)}$ y $\mathcal{Z}_{34(4)}$.

El siguiente ejemplo muestra que la lista también es mínima.

Ejemplo 2.6.8. Cada una de las siguientes matrices de tamaño 3×4 es no aditiva, y son tales que para cada matriz *exactamente un* elemento de la lista

anterior (que indicamos para cada matriz) es obstrucción de aditividad.

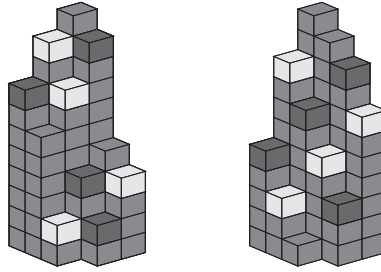
$$\begin{aligned}
 \mathcal{Z}_{34(1)} &\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 11 & 9 & 7 & 3 \\ 10 & 6 & 4 & 2 \\ 8 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & \mathcal{Z}_{34(2)} &\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 11 & 10 & 9 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 2 \\ 5 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
 \mathcal{Z}_{34(3)} &\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 11 & 10 & 8 & 4 \\ 9 & 7 & 5 & 3 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & \mathcal{Z}_{34(4)} &\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 11 & 10 & 7 & 5 \\ 9 & 6 & 4 & 1 \\ 8 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \\
 \mathcal{Z}_{34(a)} &\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 11 & 10 & 5 & 3 \\ 9 & 7 & 4 & 2 \\ 8 & 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & \mathcal{Z}_{34(b)} &\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 11 & 10 & 9 & 6 \\ 8 & 7 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
 -\mathcal{Z}_{34(1)} &\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 11 & 8 & 6 & 5 \\ 10 & 7 & 4 & 1 \\ 9 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, & -\mathcal{Z}_{34(2)} &\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 11 & 10 & 8 & 6 \\ 9 & 7 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \\
 -\mathcal{Z}_{34(3)} &\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 11 & 9 & 8 & 6 \\ 10 & 7 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & -\mathcal{Z}_{34(4)} &\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 11 & 9 & 8 & 3 \\ 10 & 6 & 4 & 1 \\ 7 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \\
 -\mathcal{Z}_{34(a)} &\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 11 & 9 & 6 & 4 \\ 10 & 8 & 3 & 1 \\ 7 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}, & -\mathcal{Z}_{34(b)} &\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 11 & 10 & 8 & 7 \\ 9 & 6 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

◇

Proposición 2.6.9. *La lista (ver Figuras 2.19 y 2.20): $\mathcal{Z}_{34(1)}$, $\mathcal{Z}_{34(2)}$, $\mathcal{Z}_{34(3)}$, $\mathcal{Z}_{34(4)}$, $\mathcal{Z}_{34(a)}$, $\mathcal{Z}_{34(b)}$, $-\mathcal{Z}_{34(1)}$, $-\mathcal{Z}_{34(2)}$, $-\mathcal{Z}_{34(3)}$, $-\mathcal{Z}_{34(4)}$, $-\mathcal{Z}_{34(a)}$, $-\mathcal{Z}_{34(b)}$ es una lista completa mínima de obstrucciones de aditividad para particiones planas de tamaño 3×4 que no tienen entradas repetidas.*

Ejemplo 2.6.10. Las matrices A y B del Ejemplo 2.6.6 son no aditivas porque $\mathcal{Z}_{34(a)}$ es obstrucción de aditividad para A y $\mathcal{Z}_{34(b)}$ es obstrucción de aditividad para B (aplicando el Teorema 2.4.5). Por el Teorema 2.1.12, las gráficas $G(A)$ y $G(B)$ no son $(0,1)$ -aditivas; y por el Teorema 2.1.3, tienen configuraciones débilmente malas. El Lema 2.4.4 da una manera de construir una configuración débilmente mala para $G(A)$, resp. $G(B)$ a partir de $\mathcal{Z}_{34(a)}$, resp. $\mathcal{Z}_{34(b)}$. Estas configuraciones se ilustran en la Figura 2.21. ◇

El siguiente ejemplo es auxiliar para el Comentario 2.6.12.


 Figura 2.21: Configuraciones débilmente malas para $G(A)$ y $G(B)$.

Ejemplo 2.6.11. Considere la partición plana $A : \mathbb{B}(4, 4) \rightarrow \mathbb{N}_0$ definida por

$$A := \begin{pmatrix} 20 & 19 & 16 & 15 \\ 18 & 17 & 15 & 14 \\ 17 & 15 & 13 & 11 \\ 15 & 13 & 12 & 10 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz tiene 16 submatrices de tamaño 3×3 y todas ellas son aditivas, esto sigue del Teorema 2.6.2 porque ni \mathcal{Z}_{33} ni $-\mathcal{Z}_{33}$ es obstrucción de aditividad de ninguna de ellas. En particular esto implica que A no tiene obstrucciones de aditividad con menos de 4 flechas (distintas o no, si A tuviera una tal obstrucción entonces alguna submatriz de tamaño 3×3 de A sería no aditiva). Sin embargo A es no aditiva porque $\mathcal{Z}_{44(a)}$ es obstrucción de aditividad para A (ver Figura 2.22). Por lo tanto $\mathcal{Z}_{44(a)}$ tiene cardinalidad mínima para A . Ahora, sea $B : \mathbb{B}(4, 4) \rightarrow \mathbb{N}_0$ una partición plana sin entradas repetidas, tal que para cada flecha $(\mathbf{z}, \mathbf{w}) \in \mathcal{Z}_{44(a)}$ se tiene que $B(\mathbf{z}) > B(\mathbf{w})$. Entonces $\mathcal{Z}_{44(a)}$ es una obstrucción de aditividad para B , pero no de cardinalidad mínima. Porque si $B(3, 2) < B(2, 3)$ entonces $\mathcal{Z}_{44(b)}$ es obstrucción de aditividad para B , y si $B(3, 2) > B(2, 3)$ entonces $\mathcal{Z}_{44(c)}$ es obstrucción de aditividad para B (ver Figura 2.22). \diamond

Comentario 2.6.12. De los Teoremas 2.6.2 y 2.6.7 se derivan las listas completas de obstrucciones de aditividad para particiones planas de tamaño 3×3 y 3×4 (sin entradas repetidas en este último caso), que después se prueba que también son listas mínimas. El argumento en ambas pruebas es, a grandes rasgos, el siguiente: tomamos una partición plana A no aditiva (arbitraria) y consideramos la gráfica $X := G(A)$, que por el Teorema 2.1.12, no es $(0,1)$ -aditiva. Entonces consideramos también una configuración débilmente mala

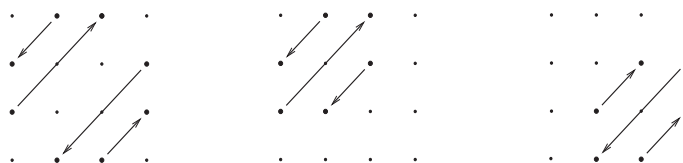


Figura 2.22: Diagramas de flechas $\mathcal{Z}_{44(a)}$, $\mathcal{Z}_{44(b)}$ y $\mathcal{Z}_{44(c)}$.

W para X (que existe por el Teorema 2.1.3), y la tomamos de peso mínimo; luego consideramos un diagrama \mathcal{Z}_W asociado a W . Este diagrama \mathcal{Z}_W resulta ser una obstrucción de aditividad para A (Lema 2.4.3), que tiene cardinalidad mínima (Proposición 2.4.6). Lo que se hace entonces es, mediante las propiedades para \mathcal{Z}_W aseguradas en el Lema 2.4.8, ir descartando posibilidades para la forma de \mathcal{Z}_W , mediante un análisis exhaustivo caso por caso. Los diagramas que al final no se descartan formarán una lista completa de obstrucciones de aditividad (en 3×4 se incluyen a la lista los diagramas correspondientes a las obstrucciones de aditividad para submatrices de tamaño 3×3). Note que en cualquier caso, las listas completas de obstrucciones de aditividad constan de diagramas que para alguna matriz, son obstrucciones de aditividad de cardinalidad mínima. Considere ahora el diagrama de flechas $\mathcal{Z}_{44(a)}$ del ejemplo 2.6.11. Si tratáramos de demostrar, para tamaño 4×4 , el teorema análogo a los Teoremas 2.6.2 y 2.6.7 (siguiendo las mismas ideas), y considerando solo particiones planas sin entradas repetidas, en el análisis caso por caso, el diagrama de flechas $\mathcal{Z}_{44(a)}$ definitivamente quedaría descartado (por (6) del Lema 2.4.8 ó porque, como se muestra en el ejemplo, este diagrama no puede ser obstrucción de aditividad de cardinalidad mínima para ninguna partición plana que no tenga entradas repetidas). Sin embargo, si hacemos el mismo análisis caso por caso para particiones planas (posiblemente con entradas repetidas), como $\mathcal{Z}_{44(a)}$ es obstrucción de aditividad de cardinalidad mínima para la partición plana A del ejemplo 2.6.11, no es seguro que al final quede descartado. En conclusión, no tenemos por qué pensar que una lista completa de obstrucciones de aditividad para particiones planas de cierto tamaño sin entradas repetidas, también sea una lista completa si se consideran particiones planas del mismo tamaño que posiblemente tengan entradas repetidas. \diamond

Comentario 2.6.13. En el Teorema 2.6.7 se pone la hipótesis extra de que las particiones planas a considerar no tengan entradas repetidas. En la

prueba que presentamos del teorema, esto simplifica muchos casos. Aun así la prueba es algo elaborada. La reflexión del Comentario 2.6.12 que se basa en el Ejemplo 2.6.11, es que no tenemos por qué suponer que si omitimos esta hipótesis extra, la lista de obstrucciones que se obtiene del Teorema 2.6.7 sea la misma. Resulta que, para matrices de tamaño 3×4 , este es el caso; esto es, que en el Teorema 2.6.7, al omitir esta hipótesis extra, se obtiene la misma lista. Pero esto no es inmediato, en el análisis exhaustivo caso por caso de la prueba del teorema 2.6.7, se deben considerar todas las instancias que en dicha prueba se habían descartado usando la hipótesis extra. El autor de este trabajo ha hecho esto con detalle, pero esta prueba (bastante más elaborada que la que presentamos aquí usando la hipótesis extra) no se incluye en el presente trabajo. Así que presentamos esto como una conjetura. \diamond

Conjetura 2. *En el Teorema 2.6.7 no es necesaria la hipótesis extra de que las matrices a considerar no tengan entradas repetidas.*

Presentamos también las siguientes conjeturas sobre lo que creemos que podría ser el teorema análogo a los Teoremas 2.6.2 (para tamaño 3×3) y 2.6.7 (para tamaño 3×4), cuando se consideran los tamaños 3×5 y 3×6 . La conjetura para tamaño 3×5 es que no aparecen nuevas obstrucciones de aditividad respecto al caso 3×4 .

Conjetura 3. *Sea $A : \mathbf{B}(3, 5) \rightarrow \mathbb{N}_0$ una partición plana. Entonces A es no aditiva si y sólo si A tiene una submatriz de tamaño 3×4 que es no aditiva.*

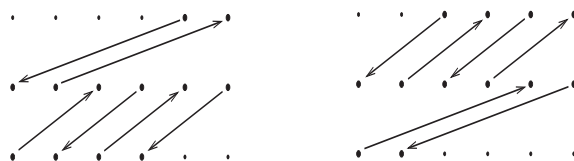
Si las Conjeturas 2 y 3 fueran ciertas, entonces es cierta también la siguiente conjetura.

Conjetura 4. *Los diagramas \mathcal{Z}_{33} , $-\mathcal{Z}_{33}$ (aplicados a submatrices de tamaño 3×3), y los diagramas $\mathcal{Z}_{34(a)}$, $\mathcal{Z}_{34(b)}$, $-\mathcal{Z}_{34(a)}$ y $-\mathcal{Z}_{34(b)}$ (aplicados a submatrices de tamaño 3×4) forman una lista completa de obstrucciones de aditividad para particiones planas de tamaño 3×5 .*

Considere ahora los diagramas de flechas $\mathcal{Z}_{36(a)}$ y $\mathcal{Z}_{36(b)}$ de la Figura 2.23.

El diagrama $\mathcal{Z}_{36(a)}$ es el caso $q = 6$ de los diagramas de Fishburn que consideramos en el Ejemplo 2.5.6. La matriz que para $\mathcal{Z}_{36(a)}$ se obtiene por la construcción del Ejemplo 2.5.6, que tiene a $\mathcal{Z}_{36(a)}$ como obstrucción de aditividad y no tiene obstrucciones de aditividad con menos de 6 flechas distintas es la matriz

$$C_a = \begin{pmatrix} 33 & 30 & 27 & 24 & 22 & 17 \\ 20 & 19 & 14 & 13 & 8 & 7 \\ 16 & 11 & 10 & 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$


 Figura 2.23: Diagramas de flechas $\mathcal{Z}_{36(a)}$ y $\mathcal{Z}_{36(b)}$.

El diagrama de flechas $\mathcal{Z}_{36(b)}$, como se puede observar, es muy similar a $\mathcal{Z}_{36(a)}$, y satisface las mismas hipótesis que los diagramas de Fishburn considerados en el Ejemplo 2.5.6. Con el mismo argumento de dicho ejemplo construimos una matriz no aditiva C_b que tiene por obstrucción de aditividad a $\mathcal{Z}_{36(b)}$ y no tiene obstrucciones de aditividad con menos de 6 flechas distintas. Esta matriz es

$$C_b = \begin{pmatrix} 33 & 30 & 28 & 23 & 22 & 17 \\ 26 & 25 & 20 & 19 & 14 & 13 \\ 16 & 11 & 9 & 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Note que, como C_a y C_b no tienen obstrucciones de aditividad con menos de 6 flechas, la no aditividad de estas dos matrices no puede ser concluida considerando solamente las obstrucciones de aditividad que se tienen para el caso 3×4 (ver también Conjetura 3).

Conjetura 5. *Sea $A : \mathbf{B}(3, 6) \rightarrow \mathbb{N}_0$ una partición plana. Entonces A es no aditiva si y sólo si o bien A tiene una submatriz de tamaño 3×4 que es no aditiva, o bien alguno de los diagramas de flechas $\mathcal{Z}_{36(a)}$, $\mathcal{Z}_{36(b)}$, $-\mathcal{Z}_{36(a)}$, $-\mathcal{Z}_{36(b)}$ (ver Figura 2.23) es una obstrucción de aditividad para A .*

En caso de que se demostrara la Conjetura 1, este resultado prodría ayudar a presentar una prueba no muy tediosa del resultado del Teorema 2.6.7 sin la restricción de considerar sólo matrices sin entradas repetidas (Conjetura 2). También podría ayudar a probar las Conjeturas 3 y 5.

Dedicamos el resto de la sección a las pruebas de los Teoremas 2.6.2 y 2.6.7. Para la prueba del Teorema 2.6.2 se requiere del siguiente lema.

Lema 2.6.14. *Sea $A : \mathbf{B}(3, 3) \rightarrow \mathbb{N}_0$ una partición plana. Supongamos que A es no aditiva, y sea $\mathcal{Z} = ((z_1, \mathbf{w}_1), \dots, (z_t, \mathbf{w}_t))$ una obstrucción de*

aditividad para A , que existe por el Teorema 2.4.5. Entonces cada renglón y cada columna de $\mathbf{B}(3,3)$ contienen al menos un punto inicial y al menos un punto final de alguna flecha en \mathcal{Z} .

Demostración. Supongamos que el primer renglón de $\mathbf{B}(3,3)$ no contiene ningún punto inicial de alguna flecha en \mathcal{Z} , y por lo tanto ningún punto final. Entonces \mathcal{Z} es en realidad una obstrucción de aditividad para una submatriz B de A , de tamaño 2×3 . B es partición plana porque A lo es. Por el Teorema 2.1.10 B es aditiva, entonces por el Teorema 2.4.5, B no tiene obstrucciones de aditividad. Contradicción. Por lo tanto el primer renglón de $\mathbf{B}(3,3)$ contiene al menos un punto inicial (y por lo tanto, al menos un punto final) de alguna flecha en \mathcal{Z} . La misma prueba vale para cualquier otro renglón o columna de $\mathbf{B}(3,3)$. \diamond

Demostración del Teorema 2.6.2. Si \mathcal{Z}_{33} ó $-\mathcal{Z}_{33}$ es obstrucción de aditividad para A , entonces por el Teorema 2.4.5, A es no aditiva.

Probamos el recíproco. Supongamos que A es no aditiva, y sea $X = G(A)$ la gráfica de A . Por el Teorema 2.1.12, X no es $(0,1)$ -aditiva; así que por el Teorema 2.1.3, X tiene alguna configuración débilmente mala W ; podemos suponer que W tiene peso mínimo. Sea $\mathcal{Z}_W = ((z_1, w_1), \dots, (z_t, w_t))$ un diagrama de flechas asociado a W . Por el Lema 2.2.8, ningún punto inicial o final de alguna flecha en \mathcal{Z}_W puede ser $(1,1)$ ó $(3,3)$; y por el Lema 2.6.14 cada renglón y cada columna de $\mathbf{B}(3,3)$ contienen al menos un punto inicial y al menos un punto final de alguna flecha en \mathcal{Z}_W . Así que tenemos cuatro casos posibles, que se ilustran en la Figura 2.24.

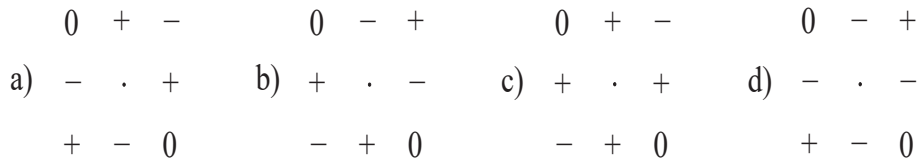


Figura 2.24: Cuatro casos posibles.

La notación en la Figura significa que si en (k,l) hay un $+$ (resp. $-$), entonces (k,l) es punto inicial (resp. punto final) de alguna flecha de \mathcal{Z}_W ; si en (k,l) hay un punto significa que (k,l) podría ser punto inicial, o punto final, o ni punto inicial ni punto final de alguna flecha en \mathcal{Z} ; y si hay un 0 en (k,l) significa que (k,l) definitivamente no es ni punto inicial ni punto final

de alguna flecha en \mathcal{Z} . La notación está bien definida porque por (2) del Lema 2.4.8, un punto (k, l) no puede ser punto inicial de una flecha en \mathcal{Z} y a la vez punto final de otra flecha en \mathcal{Z} . Probamos que los casos $c)$ y $d)$ de la Figura 2.24 no pueden ocurrir, y que de los casos $a)$ y $b)$ se derivan las obstrucciones mencionadas en el Teorema. Para el caso $c)$, existe alguna flecha (z, w) en \mathcal{Z}_W tal que $z = (2, 1)$. Por (1) del Lema 2.4.8 w debe ser $(1, 3)$. Pero por el Lema 2.4.9, la flecha $((2, 1), (1, 3))$ no es una flecha de \mathcal{Z}_W . Por lo tanto el caso $c)$ no se da. De manera similar, se prueba que el caso $d)$ tampoco se da. Consideremos ahora el caso $a)$. Para alguna flecha (z_1, w_1) de \mathcal{Z}_W , $z_1 = (1, 2)$. Por (1) del Lema 2.4.8, w_1 debe ser $(2, 1)$. También, para una flecha (z_2, w_2) de \mathcal{Z}_W , $z_2 = (2, 3)$, y por (1) del Lema 2.4.8 w_2 debe ser $(3, 2)$. Se afirma que la flecha $((3, 1), (1, 3))$ pertenece a \mathcal{Z}_W , independientemente de que $(2, 2)$ sea: $i)$ punto inicial, $ii)$ punto final, ó $iii)$ ni punto inicial ni punto final de alguna flecha de \mathcal{Z}_W . Probamos esto para el caso $i)$, la prueba para $ii)$ y $iii)$ es análoga. Supongamos que $(2, 2)$ es punto inicial de alguna flecha de \mathcal{Z}_W . Tenemos entonces la siguiente situación

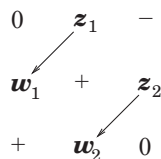


Figura 2.25: Caso $i)$.

Para alguna flecha (z_3, w_3) de \mathcal{Z}_W , $z_3 = (3, 1)$. Por (1) del Lema 2.4.8, debemos tener $w_3 = (1, 3)$. Entonces $((3, 1), (1, 3))$ es una flecha de \mathcal{Z}_W . Por el Lema 2.4.3 $A(z) > A(w)$ para cada flecha (z, w) de \mathcal{Z}_W . Por lo tanto, el subdiagrama de flechas

$$\widehat{\mathcal{Z}} := (((1, 2), (2, 1)), ((2, 3), (3, 2)), ((3, 1), (1, 3))),$$

(que en realidad es igual a \mathcal{Z}_W por (5) del Lema 2.4.8), es una obstrucción de aditividad para A . Como $\widehat{\mathcal{Z}} = \mathcal{Z}_{33}$ concluimos que \mathcal{Z}_{33} es obstrucción de aditividad para A . Con un argumento similar, del caso $b)$ se obtiene que $-\mathcal{Z}_{33}$ es obstrucción de aditividad para A . \diamond

Para la prueba del Teorema 2.6.7 necesitamos los siguientes lemas.

Lema 2.6.15. *Sea $A : \mathbf{B}(3, 4) \longrightarrow \mathbb{N}_0$ una partición plana. Suponga que A es no aditiva, pero que toda submatriz de A de tamaño 3×3 es aditiva⁷. Sea $\mathcal{Z} = ((\mathbf{z}_1, \mathbf{w}_1), \dots, (\mathbf{z}_t, \mathbf{w}_t))$ una obstrucción de aditividad para A , que existe por el Teorema 2.4.5. Entonces cada renglón y cada columna de $\mathbf{B}(3, 4)$ contienen al menos un punto inicial y al menos un punto final de alguna flecha de \mathcal{Z} .*

Demostración. La prueba de que cada renglón de $\mathbf{B}(3, 4)$ contiene al menos un punto inicial y al menos un punto final de alguna flecha de \mathcal{Z} es la misma que en el Lema 2.6.14. Ahora, supongamos que alguna columna de $\mathbf{B}(3, 4)$ no contiene ningún punto inicial, y por lo tanto ningún punto final de alguna flecha de \mathcal{Z} , entonces \mathcal{Z} es en realidad una obstrucción de aditividad para una submatriz B de A de tamaño 3×3 , así que por el Teorema 2.4.5, B es no aditiva. Esto contradice nuestras hipótesis. Por lo tanto, cada columna de $\mathbf{B}(3, 4)$ contiene al menos un punto inicial y al menos un punto final de alguna flecha de \mathcal{Z} . \diamond

Lema 2.6.16. *Sea $A : \mathbf{B}(3, 4) \longrightarrow \mathbb{N}_0$ una partición plana. Supongamos que A es no aditiva, pero que toda submatriz de A de tamaño 3×3 es aditiva. Sea \mathcal{Z} una obstrucción de aditividad para A . Entonces \mathcal{Z} tiene al menos 4 flechas.*

Demostración. Sigue del hecho de que, por el Lema 2.6.15, cada columna de $\mathbf{B}(3, 4)$ contiene al menos un punto inicial y al menos un punto final de alguna flecha de \mathcal{Z} . \diamond

Demostración del Teorema 2.6.7. Es claro que si A tiene una submatriz (de cualquier tamaño) que es no aditiva, entonces A es no aditiva. También, si alguno de los diagramas $\mathcal{Z}_{34(a)}$, $\mathcal{Z}_{34(b)}$, $-\mathcal{Z}_{34(a)}$ ó $-\mathcal{Z}_{34(b)}$ es obstrucción de aditividad para A , entonces por el Teorema 2.4.5, A es no aditiva.

Probamos el recíproco. Supongamos que A es no aditiva pero que toda submatriz B de A de tamaño 3×3 es aditiva. Por demostrar que alguno de los diagramas $\mathcal{Z}_{34(a)}$, $\mathcal{Z}_{34(b)}$, $-\mathcal{Z}_{34(a)}$ ó $-\mathcal{Z}_{34(b)}$ es obstrucción de aditividad para A . Sea $X = \mathbf{G}(A)$ la gráfica de A . Entonces, por el Teorema 2.1.12, X no es (0,1)-aditiva; y por el Teorema 2.1.3, X tiene alguna configuración débilmente mala W , podemos suponer que W tiene peso mínimo. Consideramos un diagrama de flechas asociado a W , $\mathcal{Z}_W = ((\mathbf{z}_1, \mathbf{w}_1), \dots, (\mathbf{z}_t, \mathbf{w}_t))$. Por el Lema 2.4.3, $A(\mathbf{z}) > A(\mathbf{w})$ para cualquier flecha (\mathbf{z}, \mathbf{w}) de \mathcal{Z}_W ; entonces \mathcal{Z}_W

⁷Como sucede con las matrices A y B del Ejemplo 2.6.6.

es una obstrucción de aditividad para A ; y por el Lema 2.6.16 \mathcal{Z}_W tiene al menos 4 flechas. Por el Lema 2.2.8, ningún punto inicial o final de alguna flecha en \mathcal{Z}_W puede ser $(1, 1)$ ó $(3, 4)$, y por el Lema 2.6.15 cada renglón y cada columna de $\mathbf{B}(3, 4)$ contienen al menos un punto inicial y al menos un punto final de alguna flecha en \mathcal{Z}_W . Note también que por (2) del Lema 2.4.8 ningún (k, l) de $\mathbf{B}(3, 4)$ es al mismo tiempo punto inicial de alguna flecha y punto final de otra flecha de \mathcal{Z}_W . Tenemos entonces cuatro casos a analizar, que se ilustran en la figura 2.26.

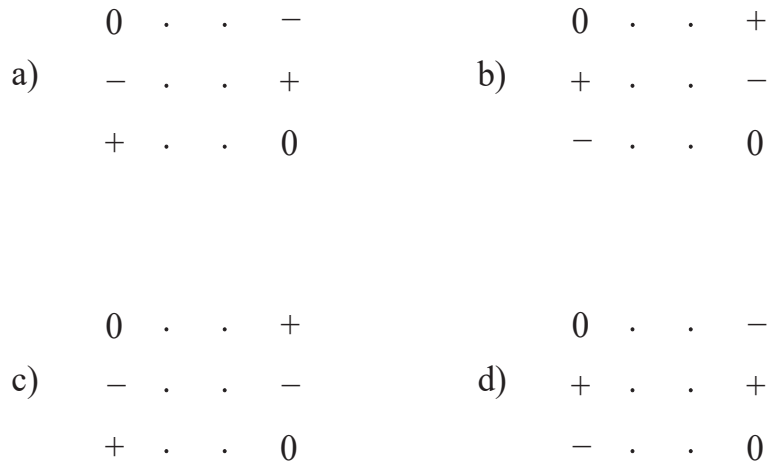


Figura 2.26: Casos a analizar.

La notación en la Figura 2.26 tiene la misma interpretación que en la prueba del Teorema 2.6.2. Observe que como \mathcal{Z}_W tiene al menos 4 flechas, por (6) del Lema 2.4.8, \mathcal{Z}_W no contiene cuasidiagramas con dos flechas. Esta observación será usada con frecuencia a lo largo de la prueba.

Afirmación 1. Los casos *c)* y *d)* de la Figura 2.26 no ocurren.

Prueba de la Afirmación 1. Supongamos que se da del caso *c)*. Alguna flecha (z, w) de \mathcal{Z}_W es tal que $w = (2, 1)$. Por (1) del Lema 2.4.8 y por el Lema 2.4.9, las opciones para z son $(1, 2)$ y $(1, 3)$. Si $z = (1, 3)$, como \mathcal{Z}_W es diagrama de flechas, alguna flecha (z', w') es tal que $w' = (1, 2)$, y por (1) del Lema 2.4.8, $z' = (3, 1)$, como en la Figura 2.27. Pero entonces $w \triangleleft z'$ y $w' \triangleleft z$, que contradice (3) del Lema 2.4.8. Por lo tanto debemos tener $z = (1, 2)$. Por otro lado, alguna flecha (z_2, w_2) de \mathcal{Z}_W es tal que $w_2 = (2, 4)$. Con un argumento análogo al anterior, vemos que $z_2 = (3, 3)$. Como \mathcal{Z}_W es

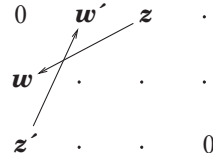


Figura 2.27: Situación en caso de que $\mathbf{z} = (1, 3)$.

un diagrama de flechas, los puntos $(1, 3)$ y $(3, 2)$ deben ser puntos finales de ciertas flechas de \mathcal{Z}_W . La situación se ilustra en la Figura 2.28. Sea $(\mathbf{z}_3, \mathbf{w}_3)$

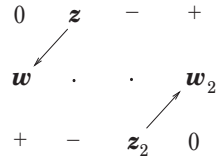


Figura 2.28: Situación en caso de que $\mathbf{z} = (1, 2)$.

una flecha de \mathcal{Z}_W tal que $\mathbf{w}_3 = (1, 3)$. Por (1) del Lema 2.4.8, \mathbf{z}_3 puede ser $(3, 1)$ ó $(2, 2)$. Si $\mathbf{z}_3 = (3, 1)$, entonces $((\mathbf{z}, \mathbf{w}), (\mathbf{z}_3, \mathbf{w}_3))$ es un cuasidiagrama de flechas contenido en \mathcal{Z}_W , pero \mathcal{Z}_W no contiene cuasidiagramas con dos flechas. Si $\mathbf{z}_3 = (2, 2)$, entonces $((\mathbf{z}_2, \mathbf{w}_2), (\mathbf{z}_3, \mathbf{w}_3))$ es un cuasidiagrama de flechas, pero \mathcal{Z}_W no contiene cuasidiagramas con dos flechas. Por lo tanto el caso *c*) no se da. La prueba de que el caso *d*) tampoco se da es similar (básicamene es el mismo argumento pero con las flechas invertidas). Esto concluye la prueba de la Afirmación 1.

Afirmación 2. El caso *a*) de la Figura 2.26 implica que $\mathcal{Z}_{34(a)}$ ó $\mathcal{Z}_{34(b)}$ es obstrucción de aditividad para A , y el caso *b*) implica que $-\mathcal{Z}_{34(a)}$ ó $-\mathcal{Z}_{34(b)}$ es obstrucción de aditividad para A .

Prueba de la Afirmación 2. Consideremos el caso *a*). Alguna flecha $(\mathbf{z}_1, \mathbf{w}_1)$ de \mathcal{Z}_W es tal que $\mathbf{w}_1 = (2, 1)$; alguna flecha $(\mathbf{z}_2, \mathbf{w}_2)$ de \mathcal{Z}_W es tal que $\mathbf{z}_2 = (3, 1)$; alguna flecha $(\mathbf{z}_3, \mathbf{w}_3)$ de \mathcal{Z}_W es tal que $\mathbf{w}_3 = (1, 4)$; y alguna flecha $(\mathbf{z}_4, \mathbf{w}_4)$ de \mathcal{Z}_W es tal que $\mathbf{z}_4 = (2, 4)$; como en la Figura 2.29

En principio no sabemos si las flechas antes mencionadas son todas distintas. Al final se verá que efectivamente son distintas dos a dos. Se afirma que tanto \mathbf{w}_2 como \mathbf{z}_3 se encuentran en el segundo renglón de $\mathbf{B}(3, 4)$. Probamos esto. Para \mathbf{w}_2 , por (1) del Lema 2.4.8, las opciones son $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$,

$$\begin{array}{cccc}
 0 & \cdot & \cdot & \mathbf{w}_3 \\
 \mathbf{w}_1 & \cdot & \cdot & \mathbf{z}_4 \\
 \mathbf{z}_2 & \cdot & \cdot & 0
 \end{array}$$

Figura 2.29: Para ciertos $\mathbf{w}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{w}_3$ y \mathbf{z}_4 .

(2, 2) y (2, 3). Debemos descartar las primeras tres. Por el Lema 2.4.9 \mathbf{w}_2 no puede ser (1, 2). Si \mathbf{w}_2 fuera (1, 3) ó (1, 4), el punto \mathbf{z}_1 (no determinado hasta ahora) debe ser tal que $\mathbf{z}_1 \triangleleft \mathbf{w}_2$. Pero entonces $((\mathbf{z}_1, \mathbf{w}_1), (\mathbf{z}_2, \mathbf{w}_2))$ es un cuasidiagrama con dos flechas contenido en \mathcal{Z}_W , lo que no puede ser. Por lo tanto \mathbf{w}_2 se encuentra en el segundo renglón de $B(3, 4)$. La prueba de que \mathbf{z}_3 también está en el segundo renglón es análoga. De esto se derivan los dos subcasos ilustrados en la Figura 2.30.

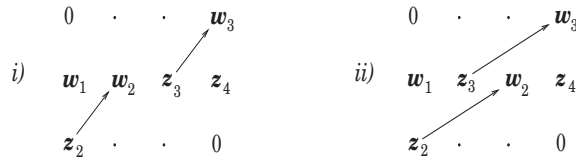


Figura 2.30: \mathbf{w}_2 y \mathbf{z}_3 en el segundo renglón de $B(3, 4)$.

Para el subcaso *i)*, donde $\mathbf{w}_2 = (2, 2)$ y $\mathbf{z}_3 = (2, 3)$, hay dos opciones para \mathbf{z}_1 que son (1, 2) y (1, 3). Si tuviéramos $\mathbf{z}_1 = (1, 3)$, entonces como \mathcal{Z}_W es diagrama de flechas, existe $(\mathbf{z}_s, \mathbf{w}_s)$ en \mathcal{Z}_W tal que $\mathbf{w}_s = (3, 3)$, pero entonces queda determinado $\mathbf{z}_s = (2, 4)$. Luego $((\mathbf{z}_1, \mathbf{w}_1), (\mathbf{z}_s, \mathbf{w}_s))$ es un cuasidiagrama con dos flechas contenido en \mathcal{Z}_W , lo que no puede ocurrir. Por lo tanto $\mathbf{z}_1 = (1, 2)$. Ahora, para \mathbf{w}_4 tenemos dos opciones que son (3, 2) y (3, 3). Si tuviéramos $\mathbf{w}_4 = (3, 2)$, entonces $((\mathbf{z}_1, \mathbf{w}_1), (\mathbf{z}_4, \mathbf{w}_4))$ es un cuasidiagrama con dos flechas contenido en \mathcal{Z}_W , lo que no puede ocurrir. Por lo tanto $\mathbf{w}_4 = (3, 3)$. Entonces el conjunto $\{(\mathbf{z}_i, \mathbf{w}_i) : i = 1, 2, 3, 4\}$, que es $\mathcal{Z}_{34(a)}$, es un diagrama de flechas contenido en \mathcal{Z}_W (de hecho por (5) del Lema 2.4.8, $\mathcal{Z}_{34(a)} = \mathcal{Z}_W$). Por el Lema 2.4.3, $\mathcal{Z}_{34(a)}$ es una obstrucción de aditividad para A .

Para el subcaso *ii)*, donde $\mathbf{z}_3 = (2, 2)$ y $\mathbf{w}_2 = (2, 3)$, hay dos opciones para \mathbf{z}_1 , que son (1, 2) y (1, 3). Si tuviéramos $\mathbf{z}_1 = (1, 2)$, entonces, como \mathcal{Z}_W es un

diagrama de flechas, existe (z_s, w_s) en \mathcal{Z}_W , tal que $w_s = (3, 2)$. Las opciones para z_s son $(1, 3)$ y $(2, 4)$; descartamos $(1, 3)$ por el Lema 2.4.9. Si $z_s = (2, 4)$ entonces $((z_1, w_1), (z_s, w_s))$ es un cuasidiagrama con dos flechas contenido en \mathcal{Z}_W , lo que no puede ocurrir. Por lo tanto $z_1 = (1, 3)$. Hay dos posibilidades para w_4 , que son $(3, 2)$ y $(3, 3)$. Descartamos $w_4 = (3, 3)$ porque en este caso $((z_1, w_1), (z_4, w_4))$ sería un cuasidiagrama con dos flechas contenido en \mathcal{Z}_W . Entonces $w_4 = (3, 2)$. Tenemos que el conjunto $\{(z_i, w_i) : i = 1, 2, 3, 4\}$, que es $\mathcal{Z}_{34(b)}$, es un diagrama de flechas contenido en \mathcal{Z}_W . Por el Lema 2.4.3, $\mathcal{Z}_{34(b)}$ es una obstrucción de aditividad para A . Por lo tanto, el caso $a)$ de la Figura 2.26 implica que $\mathcal{Z}_{34(a)}$ ó $\mathcal{Z}_{34(b)}$ es obstrucción de aditividad para A .

La prueba de que el caso $b)$ de la Figura 2.26 implica que $-\mathcal{Z}_{34(a)}$ ó $-\mathcal{Z}_{34(b)}$ es obstrucción de aditividad para A es totalmente análoga a la prueba del caso $a)$, pero considera las flechas invertidas respecto al caso $a)$. \diamond

2.7. F -aditividad y su relación con aditividad

Existe una noción de aditividad que ha sido estudiada desde hace mucho tiempo y que se aplica a órdenes parciales en el rectángulo $R = [p] \times [q]$, a la que en este trabajo nos referimos como F -aditividad en consideración a P.C. Fishburn, varios de cuyos resultados están relacionados con nuestro trabajo. Esta noción tiene cierta similitud con la noción de aditividad para matrices de dimensión 2 que consideramos en este trabajo, ver (2.9). Los Resultados 1, 2 y 3 fueron obtenidos, en parte, usando ciertas adaptaciones que hicimos a nuestro contexto de algunos resultados de Fishburn relativos a F -aditividad.

Por otro lado, los resultados que hemos obtenido a lo largo de este trabajo sobre obstrucciones de aditividad para matrices de dimensión 2, tienen consecuencias que se relacionan con resultados de Fishburn [6, 7] sobre F -aditividad. Esta sección tiene como propósito analizar dichas relaciones.

Como ya hemos observado, la noción de aditividad depende solamente del tipo de orden de cada matriz, y no de los valores específicos de sus entradas. Sean p y q enteros positivos. El conjunto de matrices de tamaño $p \times q$ con entradas en \mathbb{R} puede ser dividido en clases de equivalencia, donde dos matrices pertenecen a la misma clase si y sólo si tienen el mismo tipo de orden. En [6, 7] Fishburn considera F -aditividad para los tipos de orden, más que para las matrices. En este trabajo (adaptando a nuestro contexto) consideramos la noción de F -aditividad como aplicable a matrices.

Consideramos el rectángulo $R = B(p, q)$. Una matriz $A : R \rightarrow \mathbb{R}$ es *F-aditiva* [7, p. 3] ⁸ si existen vectores $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^q$ tales que para $(i, j), (k, l) \in R$ se tiene que ⁹

$$A(i, j) \geq A(k, l) \iff x_i + y_j \geq x_k + y_l, \quad (2.17)$$

(comparar con (2.9)). A es *no F-aditiva* si no es *F-aditiva*. Note que las nociones de aditividad y *F-aditividad* coinciden cuando se consideran para matrices sin entradas repetidas. De las definiciones podemos ver que si una matriz A es *F-aditiva* entonces A es aditiva. El recíproco no es cierto, como lo muestra el Ejemplo 2.7.2.

El siguiente teorema está implícito en [6, §1] y también en [7, §1]. ¹⁰

Teorema 2.7.1. *Sea $A : R \rightarrow \mathbb{R}$ una matriz. Entonces A es no *F-aditiva* si y sólo si existe un diagrama de flechas no necesariamente distintas $\mathcal{Z} = ((z_1, \mathbf{w}_1), \dots, (z_t, \mathbf{w}_t))$ tal que*

$$\begin{aligned} A(z_i) &\geq A(\mathbf{w}_i), \text{ para todo } i \in [t], \text{ y} \\ A(z_{i_0}) &> A(\mathbf{w}_{i_0}), \text{ para al menos un } i_0 \in [t]. \end{aligned} \quad (2.18)$$

El resultado en el Teorema 2.7.1 motiva a la siguiente definición: cuando una matriz $A : R \rightarrow \mathbb{R}$ es no *F-aditiva*, entonces a cualquier diagrama de flechas que satisface (2.18) le llamamos *obstrucción de F-aditividad* para A . El Teorema 2.7.1 dice que A es no *F-aditiva* si y sólo si existe una obstrucción de *F-aditividad* para A .

Ejemplo 2.7.2. Considere la matriz

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por el Teorema 2.1.10 A es aditiva. Sin embargo, el diagrama de flechas de la Figura 2.31 es una obstrucción de *F-aditividad* para A , entonces A es no *F-aditiva*. \diamond

⁸ En [7] *F-aditividad* corresponde a la propiedad para un tipo de orden de ser aditivamente representable.

⁹No tenemos conocimiento exacto de quién fue el primero en considerar la condición dada en (2.17); en [7, p. 3] se citan varias referencias de contribuciones importantes a esta condición, algunas de las cuales datan de la década de 1960.

¹⁰En ambas referencias el resultado se considera en el contexto más general de matrices (tipos de orden) de dimensión n , con $n \geq 2$.



Figura 2.31: Obstrucción de F -aditividad para A .

En [6, 7] Fishburn estudia F -aditividad para matrices de dimensión n , y considera el problema de determinar el número máximo de flechas distintas que puede tener una de las obstrucciones de F -aditividad que se deben considerar para determinar F -aditividad de una matriz arbitraria de tamaño $m_1 \times \cdots \times m_n$, y estudia este número como función de m_1, \dots, m_n , donde $m_i \geq 2$ para $i \in [n]$. De los resultados de Fishburn relativos a este problema, en este trabajo revisamos solamente los resultados que se relacionan con los resultados que nosotros presentamos sobre obstrucciones de aditividad; los cuales consideran únicamente matrices de dimensión 2.

Sean $p \geq 2, q \geq 2$ enteros positivos. Se define $f(p, q)$ [7, p. 5] como el único entero $K \geq 2$ tal que

1. Toda matriz de tamaño $p \times q$ que no tiene obstrucciones de F -aditividad con $k \leq K$ flechas distintas es F -aditiva.¹¹
2. Existe una matriz A de tamaño $p \times q$ que no tiene obstrucciones de F -aditividad con $k < K$ flechas distintas que es no F -aditiva.

Note que las condiciones 1 y 2 implican que la matriz A que existe por 2 tiene una obstrucción de F -aditividad con exactamente K flechas distintas. Note además que cuando decimos “ K flechas distintas”, consideramos que esas K flechas pueden tener multiplicidades.

La condición 1 dice que para determinar F -aditividad de matrices de tamaño $p \times q$ es suficiente considerar obstrucciones de F -aditividad (diagramas de flechas) con $k \leq K$ flechas distintas. La condición 2 dice que realmente es necesario considerar los diagramas que tienen exactamente K flechas distintas.

Ahora definimos el análogo de $f(p, q)$ para la noción de aditividad. Se define $h(p, q)$ como el único entero $K \geq 2$ tal que

¹¹ Note que el número total de flechas distintas en $\mathbf{B}(p, q)$ es $(pq)^2 - pq$, por lo tanto, para cualesquiera p y q , $f(p, q) < \infty$.

1. Toda matriz de tamaño $p \times q$ que no tiene obstrucciones de aditividad con $k \leq K$ flechas distintas es aditiva (ver nota 11 a pie de página).
2. Existe una matriz de tamaño $p \times q$ que es no aditiva y que no tiene obstrucciones de aditividad con $k < K$ flechas distintas.

Las observaciones que hicimos enseguida de la definición de $f(p, q)$ también son válidas para $h(p, q)$.

Teorema 2.7.3. [6, Teo. 2] $f(p, q) \leq p + q - 1$.¹²

El resultado análogo al Teorema 2.7.3 también es válido para $h(p, q)$, esto es consecuencia del siguiente lema, que está implícito en la prueba del Teorema 2 en [6], y que enunciamos sin demostración

Lema 2.7.4. Sea $\mathcal{Z} = (n_1\varphi_1, \dots, n_l\varphi_l)$ un diagrama de flechas en $\mathbf{B}(p, q)$, con $l \geq p + q$, donde las flechas $\varphi_1, \dots, \varphi_l$ son todas distintas. Entonces existe un subconjunto propio no vacío $\{\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_s}\} \subsetneq \{\varphi_1, \dots, \varphi_l\}$, y enteros positivos b_{i_1}, \dots, b_{i_s} , tales que la sucesión $(b_{i_1}\varphi_{i_1}, \dots, b_{i_s}\varphi_{i_s})$ es un diagrama de flechas.
13

El lema anterior implica que cualquier matriz $A : \mathbf{B}(p, q) \rightarrow \mathbb{R}$ que sea no aditiva tiene una obstrucción de aditividad con $l \leq p + q - 1$ flechas distintas (con ciertas multiplicidades). Por lo tanto $h(p, q) \leq p + q - 1$.

El siguiente teorema proviene de [15, pp. 427-428], y ha sido considerado en los trabajos de Fishburn (ver [6, Teo. 1] y [7, Teo. 2.4]).

Teorema 2.7.5. [15, pp. 427-428] $f(2, q) = 2$, para todo entero $q \geq 2$.

Comentario 2.7.6. Si una matriz $A : \mathbf{B}(2, q) \rightarrow \mathbb{R}$, con $q \geq 2$, es no aditiva, entonces por el Teorema 2.1.10 A no es doblemente graduada. Es fácil ver que en este caso A tiene una obstrucción de aditividad con 2 flechas distintas. Se sigue de esto que $h(2, q) = 2$ para $q \geq 2$.

Teorema 2.7.7. [7, Teo 2.8] $f(3, 3) = 3$ y $f(3, 4) = 4$.

¹²El resultado del Teorema 2 en [6] es más general; esto es, que $f(m_1, \dots, m_n) \leq \sum_{i=1}^n m_i - (n - 1)$.

¹³Este lema dice que un diagrama de flechas en $\mathbf{B}(p, q)$ que tenga $l \geq p + q$ flechas distintas no tiene soporte mínimo (en la Sección 2.5 se definió soporte mínimo).

Comentario 2.7.8. Sea A una matriz de tamaño 3×3 que no tiene obstrucciones de aditividad con $k \leq 3$ flechas distintas. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que A tiene 1-márgenes débilmente decrecientes y entradas en \mathbb{N}_0 . Entonces por el Lema 2.4.7 A es partición plana. Tenemos por el Teorema 2.6.2 que A es aditiva. Por otro lado, la matriz A del Ejemplo 2.6.3 es partición plana y por lo tanto no tiene obstrucciones de aditividad con $k < 3$ flechas distintas; pero es no aditiva porque \mathcal{Z}_{33} es obstrucción de aditividad para A . Esto muestra que $h(3, 3) = 3$ (y por el teorema anterior $f(3, 3) = 3$). \diamond

Comentario 2.7.9. Supongamos por un momento que el resultado de la Conjetura 2 es cierto (ver p. 79). Sea A una matriz de tamaño 3×4 que no tiene obstrucciones de aditividad con $k \leq 4$ flechas distintas. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que A tiene 1-márgenes débilmente decrecientes y entradas en \mathbb{N}_0 . Entonces por el Lema 2.4.7 A es partición plana. Tenemos por el Teorema 2.6.7 (y la Conjetura 2) que A es aditiva. Por otro lado, la matriz A del Ejemplo 2.6.6 es no aditiva y no tiene obstrucciones de aditividad con $k < 4$ flechas distintas (porque entonces tendría una submatriz de tamaño 3×3 no aditiva). En esta situación tenemos que $h(3, 4) = 4$ (y por el Teorema 2.7.7 $f(3, 4) = 4$).

En los siguientes dos teoremas la cota superior para $f(3, q)$ sigue del Teorema 2.7.3, mientras que la cota inferior se prueba en la Sección 3 de [6]. Estos dos teoremas se enuncian como uno solo en [7, Teo. 2.5].

Teorema 2.7.10. [6, 7] $q - 1 \leq f(3, q) \leq q + 2$ para todo entero impar $q \geq 3$.

Teorema 2.7.11. [6, 7] $q \leq f(3, q) \leq q + 2$ para todo entero par $q \geq 4$.

No se tiene evidencia de que $q \leq f(3, q)$ para $q \geq 5$ impar. La cota superior, $f(3, q) \leq q + 2$ para $q \geq 5$ es la mejor que se conoce.

La información que por los Teoremas 2.7.10 y 2.7.11 tenemos para $f(3, q)$ también es cierta para $h(3, q)$, esto lo vemos en el Comentario 2.7.13, para el cual necesitamos la siguiente proposición.

Proposición 2.7.12. *Para cada entero impar $q \geq 5$ existe una partición plana B_q de tamaño $3 \times q$, que es no aditiva, tal que B_q tiene una obstrucción de aditividad con $q - 1$ flechas distintas y no tiene obstrucciones de aditividad con menos de $q - 1$ flechas distintas.*

Demostración. Sea $q \geq 5$ impar. En el Ejemplo 2.5.6 se prueba que existe una partición plana A_{q-1} , que es no aditiva, que tiene una obstrucción de aditividad con $q - 1$ flechas distintas y no tiene obstrucciones de aditividad con menos de $q - 1$ flechas distintas. Note que $A_{q-1}(1, 1)$ tiene valor máximo entre las entradas de A_{q-1} . Sean $A := A_{q-1}$ y $a := A_{q-1}(1, 1)$. Definimos la matriz B_q como sigue

$$B_q := \begin{pmatrix} a + 3 & A(1, 1) & \cdots & A(1, q - 1) \\ a + 2 & A(2, 1) & \cdots & A(2, q - 1) \\ a + 1 & A(3, 1) & \cdots & A(3, q - 1) \end{pmatrix}.$$

Es claro que B_q es no aditiva y que B_q tiene una obstrucción de aditividad con $q - 1$ flechas distintas. Resta probar que toda obstrucción de aditividad para B_q tiene al menos $q - 1$ flechas distintas. Habremos probado esto si mostramos que toda obstrucción de aditividad para B_q está contenida en la últimas $q - 1$ columnas de B_q . Sea \mathcal{Z} una obstrucción de aditividad para B_q . Como las entradas en la primera columna de B_q son mayores que todas las demás entradas, ninguna flecha de \mathcal{Z} tiene como punto inicial un punto fuera de la primera columna de B_q y como punto final un punto de la primera columna. Consecuentemente, tampoco existe ninguna flecha de \mathcal{Z} que inicie en la primera columna de B_q y termine fuera de ésta. Por lo tanto \mathcal{Z} está contenida en las últimas $q - 1$ columnas de B_q . \diamond

Comentario 2.7.13. Enseguida del Lema 2.7.4 se observó que en general $h(p, q) \leq p + q - 1$ (para cualesquiera enteros p y q mayores o iguales que 2). De esto sigue que para todo entero $q \geq 5$, $h(3, q) \leq q + 2$ (ya sabemos que $h(3, 3) = f(3, 3) = 3$ y que $h(3, 4) = f(3, 4) = 4$). En el Ejemplo 2.5.6 se construyó, para cada entero par $q \geq 4$, una partición plana A_q de tamaño $3 \times q$, que es no aditiva, que tiene una obstrucción de aditividad con q flechas distintas y no tiene obstrucciones de aditividad con menos de q flechas distintas. Por lo tanto, para cada entero par $q \geq 4$, $q \leq h(3, q)$. Finalmente, por la Proposición 2.7.12, para cada entero impar $q \geq 5$, $q - 1 \leq h(3, q)$. \diamond

2.8. Configuraciones débilmente malas de peso 3

Las configuraciones malas de peso 3 para pirámides fueron clasificadas en [24, Teo. 5.1], donde se muestra que cada una de tales configuraciones es

esencialmente la configuración mostrada en la Figura 2.18 (ver también las configuraciones débilmente malas: W_2 de la Figura 2.5 y \widehat{W} de la Figura 2.6). En esta sección mostramos que toda configuración débilmente mala de peso 3 para una pirámide es de hecho una configuración mala (Proposición 2.8.1); y damos una prueba diferente a la que se da en [24] de la clasificación de las configuraciones (débilmente) malas de peso 3 para pirámides (Teorema 2.8.2).

Fijamos la notación para esta sección. Sean p, q y r enteros positivos. En esta sección consideramos $(0,1)$ -matrices de dimensión 3, que las vemos como $X : \mathbf{B}(p, q, r) \rightarrow \{0, 1\}$, y sus configuraciones débilmente malas que son matrices de dimensión 3, que se ven como $W : \mathbf{B}(p, q, r) \rightarrow \mathbb{Z}$. Una *sección en la tercera dirección* de una matriz de dimensión 3, $Y : \mathbf{B}(p, q, r) \rightarrow \mathbb{Z}$, es una matriz Y de dimensión 2 que se obtiene restringiendo Y a $[p] \times [q] \times \{k\}$ para algún $k \in [r]$ (ver Comentario 2.1.6). Similarmente se definen secciones en la primera y segunda direcciones. Decir que una matriz Y pertenece a $\mathbf{F}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ es equivalente a decir que la suma de las entradas de Y en cada sección, para cada una de las tres direcciones, es cero. Sea W una configuración débilmente mala para una $(0,1)$ -matriz X de dimensión 3. Denotamos por $W_1(1), \dots, W_p(1)$ las p secciones de W en la primera dirección, por $W_1(2), \dots, W_q(2)$ a las q secciones de W en la segunda dirección y por $W_1(3), \dots, W_r(3)$ a las r secciones de W en la tercera dirección.

Proposición 2.8.1. *Si W es una configuración débilmente mala de peso 3 para una pirámide X entonces W es de hecho una configuración mala para X .*

El siguiente Teorema se puede probar combinando el Teorema 5.1 en [24] y la Proposición 2.8.1. Aquí presentamos una prueba que no depende de la prueba del Teorema 5.1 en [24]. De manera que el Teorema 5.1 en [24] se puede obtener del siguiente teorema.

Teorema 2.8.2. *Sea W una configuración débilmente mala con $w(W) = 3$ para una pirámide X . Entonces existen $i_1 < i_2 < i_3 \in [p]$, $j_1 < j_2 < j_3 \in [q]$ y $k_1 < k_2 < k_3 \in [r]$, tal que W ó $-W$ tiene la forma*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1[k_3] & -1[k_2] \\ -1[k_3] & 0 & 1[k_1] \\ 1[k_2] & -1[k_1] & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Aquí los 3 renglones de la matriz representan las secciones $W_{i_1}(1), W_{i_2}(1)$ y $W_{i_3}(1)$; las 3 columnas representan las secciones $W_{j_1}(2), W_{j_2}(2)$ y $W_{j_3}(2)$; las demás secciones de W en la primera y segunda direcciones serán idénticamente cero.

El siguiente corolario (que considera configuraciones débilmente malas) es similar al Corolario 5.2 en [24] (que considera configuraciones malas).

Corolario 2.8.3. *Sea X la gráfica $G(A)$ de una partición plana A de tamaño $p \times q$. Entonces X tiene una configuración débilmente mala de peso 3 si y sólo si A tiene una submatriz B de tamaño 3×3 tal que \mathcal{Z}_{33} ó $-\mathcal{Z}_{33}$ es obstrucción de aditividad para B .*

El resto de la sección estará dedicado a las pruebas. Los Lemas 2.8.4, 2.8.6 y 2.8.7 se requieren para probar la Proposición 2.8.1.

Lema 2.8.4. *Sea W una configuración débilmente mala de peso mínimo para una pirámide X . Entonces W es diferente de cero en al menos dos secciones en la primera dirección y también en al menos dos secciones en la segunda dirección.*

Demostración. Supongamos que para algún $i_0 \in [p]$, $W_{i_0}(1)$ es la única sección en la primera dirección de W que no es idénticamente cero. Sea j_0 tal que $W_{j_0}(2)$ no es idénticamente cero (recuerde que $W \neq 0$). Entonces todas las entradas distintas de cero de $W_{j_0}(2)$ ocurren en $W_{j_0}(2) \cap W_{i_0}(1)$, y este último conjunto contiene al menos una entrada positiva y al menos una entrada negativa. Como W tiene peso mínimo, esto contradice el resultado del Lema 2.2.3. Por lo tanto W es diferente de cero en al menos dos secciones en la primera dirección. De manera similar se concluye que W es diferente de cero en al menos dos secciones en la segunda dirección. \diamond

Comentario 2.8.5. El resultado de Lema 2.8.4 también es cierto sin la hipótesis de que W tenga peso mínimo. La prueba en este caso depende del Teorema 2 en [8] y del Teorema 4.10 en [29]. Pero tener acceso a esos resultados nos implica más definiciones (las nociones de (0,1)-aditividad, pirámide y configuración débilmente mala para dimensión 2, además de la versión para dimensión 2 del Teorema 2.1.3), que en este trabajo preferimos omitir. La versión que presentamos del Lema 2.8.4 basta para los propósitos de esta sección. \diamond

Lema 2.8.6. *Sea X una $(0,1)$ -matriz de dimensión 3. Si W es una configuración débilmente mala de peso 2 para X , entonces W es una configuración mala.*

Demostración. Debemos probar que W tiene dos entradas distintas positivas con valor 1, y dos entradas distintas negativas con valor -1 . Supongamos que W tiene una única entrada positiva con valor 2, digamos, que $W(i_0, j_0, k_0) = 2$. Note que entonces $X(i_0, j_0, k_0) = 1$. Como $W \in \mathbf{F}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ entonces la suma de las entradas de $W_{i_0}(1)$ es cero; esto implica que la suma de las entradas negativas de $W_{i_0}(1)$ es -2 . Similarmente, la suma de las entradas negativas de $W_{j_0}(2)$ es -2 ; y suma de las entradas de $W_{k_0}(3)$ también debe ser -2 . Como la suma de todas las entradas negativas de W es -2 , esto implica que $W(i_0, j_0, k_0) = -2$. Pero esto no puede ser porque W es configuración débilmente mala para X y $X(i_0, j_0, k_0) = 1$. Por lo tanto no pasa que W tenga solo una entrada positiva con valor 2; esto es, W tiene dos entradas positivas distintas con valor 1 cada una. Similarmente se prueba que W tiene dos entradas negativas distintas con valor -1 cada una. Por lo tanto W es configuración mala. \diamond

El lema a continuación sigue directamente de la Proposición 2.1.1 y del Lema 2.8.6.

Lema 2.8.7. *Sea X una $(0,1)$ -matriz de dimensión 3. Entonces X es una pirámide si y sólo X no tiene configuraciones débilmente malas de peso 2.*

Demostración (de la Proposición 2.8.1). Sea W una configuración débilmente mala de peso 3 para una pirámide X . Por el Lema 2.8.7 W tiene peso mínimo. Por el Lema 2.8.4 W es diferente de cero en al menos dos secciones en la primera dirección. Por demostrar que W es diferente de cero en al menos 3 secciones en la primera dirección. Supongamos que W es diferente de cero en exactamente 2 secciones en la primera dirección. Entonces podemos ver a W como una configuración débilmente mala para una pirámide X' de tamaño $2 \times q \times r$ (contenida en X). X' resulta ser la gráfica de una partición plana $B : \mathbf{B}(2, q) \rightarrow \mathbb{N}_0$. Por el Teorema 2.1.3, X' no es $(0,1)$ -aditiva; y por el Teorema 2.1.12, B es no aditiva. Esto contradice el resultado del Teorema 2.1.10. Por lo tanto W es diferente de cero en al menos 3 secciones en la primera dirección. Como W tiene peso 3, entonces W es diferente de cero en a lo más 3 secciones en la primera dirección. Por lo tanto W es diferente de cero en exactamente 3 secciones en la primera dirección. Esto fuerza a que W tenga en cada una de esas tres secciones exactamente una entrada positiva

con valor 1 y exactamente una entrada negativa con valor -1 . Concluimos que W es una configuración mala. \diamond

Demostración (del Teorema 2.8.2). Sea W una configuración débilmente mala de peso 3 para una pirámide X . Podemos ver a X como la gráfica $G(A)$ de una partición plana $A : \mathbf{B}(p, q) \rightarrow \mathbb{N}_0$. Por el Lema 2.8.7 W tiene peso mínimo. En la prueba de la Proposición 2.8.1 se muestra que W es diferente de cero exactamente en 3 secciones en la primera dirección. Sean $W_{i_1}(1)$, $W_{i_2}(1)$ y $W_{i_3}(1)$ las tres secciones en la primera dirección de W que no son idénticamente cero. Como la primera, la segunda y la tercera direcciones juegan roles simétricos, también exactamente 3 secciones en la segunda (resp. tercera) dirección de W no son idénticamente cero. Sean $W_{j_1}(2)$, $W_{j_2}(2)$ y $W_{j_3}(2)$ las 3 secciones en la segunda dirección en las que W no es idénticamente cero. Sea Y la submatriz de dimensión 3 que se obtiene restringiendo X a $\{i_1, i_2, i_3\} \times \{j_1, j_2, j_3\} \times [r]$. Entonces W es configuración débilmente mala para Y . La matriz Y es una pirámide, y es la gráfica $G(B)$ para una partición plana $B : \mathbf{B}(3, 3) \rightarrow \{0, 1\}$ que es submatriz de A . Sigue de la prueba del Teorema 2.6.2 que si \mathcal{Z}_W es un diagrama de flechas asociado a W , entonces $\mathcal{Z}_W = \mathcal{Z}_{33}$ ó $\mathcal{Z}_W = -\mathcal{Z}_{33}$ (note que W tiene peso mínimo). Por el Lema 2.4.3, \mathcal{Z}_W es obstrucción de aditividad para B ¹⁴. De esto sigue que W ó $-W$ tiene la forma definida en (2.19). Es claro por construcción que $i_1 < i_2 < i_3$ y que $j_1 < j_2 < j_3$. Resta probar que $k_1 < k_2 < k_3$. Esto es consecuencia de que hay exactamente 3 secciones en la tercera dirección en las que W no es idénticamente cero. \diamond

Demostración (del Corolario 2.8.3). Si X tiene una configuración débilmente mala W de peso tres, entonces la submatriz B que aparece en la prueba del Teorema 2.8.2 es tal que \mathcal{Z}_{33} ó $-\mathcal{Z}_{33}$ es obstrucción de aditividad para B (ver nota al pie de página 14). Para el converso, suponga que A tiene una submatriz B de tamaño 3×3 tal que \mathcal{Z}_{33} ó $-\mathcal{Z}_{33}$ es obstrucción de aditividad para B . Sea W la configuración débilmente mala para $G(B)$ asociada a \mathcal{Z}_{33} (ó a $-\mathcal{Z}_{33}$) mediante el Lema 2.4.4, que por el mismo lema tiene peso 3. Entonces W es también configuración débilmente mala para $X = G(A)$ (agregando a W algunas secciones en la primera y segunda direcciones que son idénticamente cero, para ajustar dimensiones). \diamond

¹⁴ En esta prueba no necesitamos considerar la matriz B ni la afirmación de que \mathcal{Z}_W es obstrucción de aditividad para B , se usan en la prueba del Corolario 2.8.3.

2.9. Obstrucciones de aditividad para matrices con entradas repetidas

En esta sección consideramos el rectángulo $R = B(p, q)$ donde p y q son enteros positivos.

Es claro que si una lista de diagramas de flechas en $B(p, q)$ es una lista completa de obstrucciones de aditividad para particiones planas de tamaño $p \times q$ que pueden tener entradas repetidas, entonces esa lista también es una lista completa de obstrucciones de aditividad para particiones planas de tamaño $p \times q$ que no tienen entradas repetidas. El recíproco no necesariamente es cierto (Comentario 2.6.12), aunque no tenemos evidencia de que efectivamente no es cierto (Comentario 2.9.4).

Para cualquier matriz $A : R \rightarrow \mathbb{R}$ con entradas repetidas existe un número finito de tipos de orden de matrices sin entradas repetidas cuyas matrices extienden el orden de A ¹⁵. En esta sección presentamos un resultado que dice que una matriz $A : R \rightarrow \mathbb{R}$ doblemente graduada es aditiva si y sólo si existe una matriz doblemente graduada B , que extiende el orden de A , que es aditiva y que no tiene entradas repetidas (Teorema 2.9.1). Luego presentamos un ejemplo de cómo este resultado puede ayudar a determinar aditividad para algunas matrices de tamaño 3×4 (con algunas entradas repetidas) para las que aditividad no puede ser determinada usando el Teorema 2.6.7 (que requiere que las matrices no tengan entradas repetidas). Esto tiene razón de ser, ya que, como se explica en el Comentario 2.6.12, para determinar aditividad de una partición plana que posiblemente tiene entradas repetidas, puede ser necesario considerar alguna obstrucción de aditividad que no es necesario considerar para determinar aditividad de particiones planas sin entradas repetidas.

Usamos la notación que se ha definido en las secciones anteriores.

Teorema 2.9.1. *Sea $A : R \rightarrow \mathbb{R}$ una matriz doblemente graduada. Entonces A es aditiva si y sólo si existe una matriz $D : R \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface:*

- a) D es aditiva y doblemente graduada.
- b) D extiende el orden de A .
- c) D no tiene entradas repetidas.

¹⁵Dadas matrices A y B del mismo tamaño, decimos que B extiende el orden de A si para $\mathbf{h}, \mathbf{k} \in B(p, q)$, $A(\mathbf{h}) > A(\mathbf{k}) \implies B(\mathbf{h}) > B(\mathbf{k})$.

El siguiente ejemplo muestra cómo en algunas ocasiones se puede usar el Teorema 2.9.1 en combinación con el Teorema 2.6.7 para determinar aditividad de una partición plana de tamaño 3×4 que tiene algunas entradas repetidas. Los diagramas a que se refiere el Ejemplo se ilustran en las Figuras 2.19 y 2.20.

Ejemplo 2.9.2. Considere la partición plana $A : \mathbf{B}(3, 4) \rightarrow \mathbb{N}_0$ definida por

$$A := \begin{pmatrix} 11 & 10 & 9 & 5 \\ 8 & 7 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si usamos el Teorema 2.6.7 y asumimos como cierto el resultado de la Conjetura 2, como todas las submatrices de tamaño 3×3 de A son aditivas, y como $\mathcal{Z}_{34(a)}$, $\mathcal{Z}_{34(b)}$, $-\mathcal{Z}_{34(a)}$ y $-\mathcal{Z}_{34(b)}$ no son obstrucciones de aditividad para A , concluimos que A es aditiva. Ahora argumentamos que A es aditiva usando solamente los resultados que aquí presentamos; esto es, sin usar el resultado de la Conjetura 2, y usando el Teorema 2.9.1. Primeramente, por las relaciones de orden que hay entre las entradas de A , se puede ver que ninguna partición plana sin entradas repetidas que extienda el orden de A tiene por obstrucciones de aditividad a $\mathcal{Z}_{34(1)}$, $\mathcal{Z}_{34(3)}$, $\mathcal{Z}_{34(4)}$, $\mathcal{Z}_{34(a)}$, $\mathcal{Z}_{34(b)}$, ni a los negativos de estos diagramas, ni a $-\mathcal{Z}_{34(2)}$. Ahora, el diagrama $\mathcal{Z}_{34(2)}$ es obstrucción de aditividad de una partición plana C que extienda el orden de A , si y sólo si $C(3, 1) > C(1, 4)$. Por lo tanto, por el Teorema 2.6.7, toda partición plana C que extienda el orden de A , que no tenga entradas repetidas, y que sea tal que $C(3, 1) < C(1, 4)$, es aditiva. La matriz C_0 definida a continuación es una de tales matrices:

$$C_0 := \begin{pmatrix} 11 & 10 & 9 & 6 \\ 8 & 7 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como existe una partición plana (que en este caso es C_0) que es aditiva, que extiende el orden de A y no tiene entradas repetidas, por el Teorema 2.9.1 concluimos que A es aditiva. \diamond

Sin embargo no siempre es muy práctico usar el Teorema 2.9.1 en combinación con el Teorema 2.6.7 para determinar aditividad de una partición plana de tamaño 3×4 con entradas repetidas. Esto se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.9.3. Considere la partición plana $A : \mathbb{B}(3, 4) \longrightarrow \mathbb{N}_0$ definida por

$$A := \begin{pmatrix} 11 & 11 & 10 & 9 \\ 10 & 10 & 10 & 8 \\ 10 & 9 & 8 & 6 \end{pmatrix}.$$

Para decidir si A es aditiva (mediante los Teoremas 2.6.7 y 2.9.1) debemos, o bien encontrar una partición plana sin entradas repetidas que sea aditiva y que extienda el orden de A , o bien mostrar que toda partición plana que extiende el orden de A y no tiene entradas repetidas, es no aditiva. Considerando el resultado de la Conjetura 2 sabemos que va a ocurrir lo primero; pero no damos aquí la prueba de ello (sin usar el resultado de la Conjetura 2), note que hay que considerar varios casos. Este ejemplo sólo pretende ilustrar que tratar de argumentar como en el caso anterior, a veces no es muy práctico. \diamond

Comentario 2.9.4. Sería interesante dar un ejemplo de una partición plana A de algún tamaño $p \times q$ con algunas entradas repetidas, tal que cualquier partición plana que extiende el orden de A es no aditiva (y entonces, por el Teorema 2.9.1 A es no aditiva); pero tal que toda obstrucción de aditividad para A (ver Teo. 2.4.5) no pertenece a una lista completa de obstrucciones de aditividad para particiones planas sin entradas repetidas. Sin embargo no tenemos elementos para dar tal ejemplo, y no sabemos si existe; porque para particiones planas de tamaño 3×3 la lista completa de obstrucciones de aditividad es la misma lista que para particiones planas que no tienen entradas repetidas, y que consta de los elementos \mathcal{Z}_{33} y $-\mathcal{Z}_{33}$ (ver Figura 2.17); y para tamaño 3×4 estas listas también coinciden (asumiendo el resultado de la Conjetura 2, en ambos casos la lista es la que se da en la Proposición 2.6.9). Por lo tanto, en tamaños 3×3 y 3×4 tal ejemplo no existe. Y no se conocen listas completas de obstrucciones de aditividad para particiones planas sin entradas repetidas (y menos con entradas repetidas) de otros tamaños. \diamond

El resto de la sección está dedicado a la prueba del Teorema 2.9.1. La prueba del Teorema requiere de los siguientes lemas.

Lema 2.9.5. *Sea $A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una matriz aditiva que tiene 1-márgenes débilmente decrecientes. Entonces existe una solución de aditividad para A , (\mathbf{x}, \mathbf{y}) , tal que $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^q$ son vectores débilmente decrecientes.*

Demostración. Combinando el hecho de que A tiene 1-márgenes débilmente decrecientes y es aditiva, con los Lemas 2.1.8 y 2.1.9, es fácil probar que A es doblemente graduada. Sea $((c_1, \dots, c_p), (d_1, \dots, d_q))$ una solución de aditividad para A . Supongamos que los renglones k y l de A no son iguales, y que $k < l$. Entonces existe $j_0 \in [q]$ tal que $A(k, j_0) > A(l, j_0)$, por lo que

$$c_k + d_{j_0} > c_l + d_{j_0} \implies c_k > c_l. \quad (2.20)$$

Sigue de que A es doblemente graduada, que los renglones idénticos de A aparecen en A de manera consecutiva. Sea $\{i_1, \dots, i_k\} \subseteq [p]$ un conjunto de índices que representa todos los renglones distintos de A , y sea n_{i_j} el número de renglones de A iguales al renglón i_j , para $j = 1, \dots, k$. Definimos $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$ como

$$(x_1, \dots, x_p) := \underbrace{(c_{i_1}, \dots, c_{i_1})}_{n_1}, \dots, \underbrace{(c_{i_k}, \dots, c_{i_k})}_{n_k}.$$

No es difícil ver que $((x_1, \dots, x_p), (d_1, \dots, d_q))$ es una solución de aditividad para A , y por (2.20) $x_1 \geq \dots \geq x_p$. Aplicando el mismo procedimiento a las columnas de A , se obtiene la solución de aditividad para A deseada. \diamond

Lema 2.9.6. Sean \mathbf{h} y $\mathbf{k} \in \mathbb{R}$ tales que $\mathbf{h} \triangleleft \mathbf{k}$ ó \mathbf{h} y \mathbf{k} no son comparables en \mathbb{R} . Entonces existen vectores débilmente decrecientes $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^p$ y $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^q$, tales que la matriz $\mathbf{S}(\mathbf{c}, \mathbf{d})$ satisface que $\mathbf{S}(\mathbf{c}, \mathbf{d})(\mathbf{h}) > \mathbf{S}(\mathbf{c}, \mathbf{d})(\mathbf{k})$.

Demostración. Es trivial. \diamond

Lema 2.9.7. Consideremos la matriz $C = \mathbf{S}(\mathbf{c}, \mathbf{d})$ para ciertos vectores débilmente decrecientes $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^p$ y $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^q$. Supongamos que existen $\mathbf{h}_0 \neq \mathbf{k}_0 \in \mathbb{R}$ tales que $C(\mathbf{h}_0) = C(\mathbf{k}_0)$. Entonces existen vectores débilmente decrecientes $\mathbf{c}_2 \in \mathbb{R}^p$ y $\mathbf{d}_2 \in \mathbb{R}^q$ tales que la matriz $C_2 = \mathbf{S}(\mathbf{c}_2, \mathbf{d}_2)$ satisface las siguientes condiciones:

- i) C_2 extiende el orden de C .
- ii) $C_2(\mathbf{h}_0) \neq C_2(\mathbf{k}_0)$.

Demostración. Como $\mathbf{h}_0 \neq \mathbf{k}_0$, tenemos que, o bien \mathbf{h}_0 y \mathbf{k}_0 no son comparables en \mathbb{R} , o bien uno de los dos es menor que el otro en el orden parcial definido en \mathbb{R} , y en este caso suponemos sin pérdida de generalidad que $\mathbf{h}_0 \triangleleft \mathbf{k}_0$. Por el Lema 2.9.6 existen vectores débilmente decrecientes $\widehat{\mathbf{c}} \in \mathbb{R}^p$ y $\widehat{\mathbf{d}} \in \mathbb{R}^q$, tales que la matriz $\widehat{C} := \mathbf{S}(\widehat{\mathbf{c}}, \widehat{\mathbf{d}})$ satisface que $\widehat{C}(\mathbf{h}_0) > \widehat{C}(\mathbf{k}_0)$. Sea

$\alpha := \min\{|C(\mathbf{h}) - C(\mathbf{k})| : \mathbf{h}, \mathbf{k} \in \mathbb{R} \text{ y } C(\mathbf{h}) \neq C(\mathbf{k})\}$ si al menos dos entradas de C son distintas, y $\alpha := 0$ si todas las entradas de C son iguales. Si $\alpha > 0$, sea $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño tal que

$$\epsilon \cdot \max\{|\widehat{C}(\mathbf{h}) - \widehat{C}(\mathbf{k})| : \mathbf{h}, \mathbf{k} \in \mathbb{R}\} < \alpha; \quad (2.21)$$

y si $\alpha = 0$ sea $\epsilon := 1$. Note que en cualquier caso ϵ es positivo. Sean $\mathbf{c}_2 := \mathbf{c} + \epsilon \widehat{\mathbf{c}}$ y $\mathbf{d}_2 := \mathbf{d} + \epsilon \widehat{\mathbf{d}}$, de tal manera que

$$C_2 := C + \epsilon \widehat{C} = S(\mathbf{c}_2, \mathbf{d}_2).$$

Como ϵ es positivo (independientemente de que α sea positivo o cero), \mathbf{c}_2 y \mathbf{d}_2 son vectores débilmente decrecientes porque son sumas de vectores débilmente decrecientes. Por demostrar que C_2 satisface *i*) y *ii*). Probamos que C_2 satisface *i*); para esto debemos mostrar que para $\mathbf{z}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}$ se tiene que $C(\mathbf{z}) > C(\mathbf{w}) \implies C_2(\mathbf{z}) > C_2(\mathbf{w})$. Consideramos los casos $\alpha = 0$ y $\alpha > 0$. Si $\alpha = 0$, C_2 satisface *i*) por vacuidad. Supongamos que $\alpha > 0$. Sean $\mathbf{z}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}$ tales que $C(\mathbf{z}) > C(\mathbf{w})$. Entonces por (2.21)

$$|\epsilon(\widehat{C}(\mathbf{z}) - \widehat{C}(\mathbf{w}))| \leq \epsilon \cdot \max\{|\widehat{C}(\mathbf{h}) - \widehat{C}(\mathbf{k})| : \mathbf{h}, \mathbf{k} \in \mathbb{R}\} < \alpha. \quad (2.22)$$

Por la definición de α , la definición de C_2 , la ecuación (2.22) y el hecho de que $C(\mathbf{z}) > C(\mathbf{w})$ tenemos que

$$\begin{aligned} C_2(\mathbf{z}) - C_2(\mathbf{w}) &= C(\mathbf{z}) - C(\mathbf{w}) + \epsilon(\widehat{C}(\mathbf{z}) - \widehat{C}(\mathbf{w})) \\ &\geq \alpha + \epsilon(\widehat{C}(\mathbf{z}) - \widehat{C}(\mathbf{w})) > 0. \end{aligned}$$

Concluimos que C_2 satisface *i*). Probamos que C_2 satisface *ii*). Independientemente de que α sea positivo o cero, ϵ es positivo (en particular es diferente de cero). Entonces, en cualquier caso, $C_2 = C + \epsilon \widehat{C}$ satisface *ii*) porque $C(\mathbf{h}_0) = C(\mathbf{k}_0)$ y $\widehat{C}(\mathbf{h}_0) > \widehat{C}(\mathbf{k}_0)$. \diamond

Sea $C : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una matriz, definimos

$$\eta(C) := \#\{\{\mathbf{z}, \mathbf{w}\} \subset \mathbb{R} : \mathbf{z} \neq \mathbf{w} \text{ y } C(\mathbf{z}) = C(\mathbf{w})\}.$$

Demostración del Teorema 2.9.1. Supongamos que existe una matriz D que satisface *a*), *b*) y *c*). Por *a*) D es aditiva. Entonces existen vectores $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^q$, tales que si definimos $\widehat{D} := S(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, entonces para $\mathbf{z}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}$

$$D(\mathbf{z}) > D(\mathbf{w}) \implies \widehat{D}(\mathbf{z}) > \widehat{D}(\mathbf{w}).$$

De esto y de *b*) tenemos que, para $\mathbf{z}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}$

$$A(\mathbf{z}) > A(\mathbf{w}) \implies \widehat{D}(\mathbf{z}) > \widehat{D}(\mathbf{w}).$$

Por lo tanto (\mathbf{x}, \mathbf{y}) es una solución de aditividad para A ; luego, A es aditiva.

Ahora probamos el recíproco. Por hipótesis A es aditiva, y como A es doblemente graduada, A tiene 1-márgenes débilmente decrecientes. Entonces por el Lema 2.9.5 existe una solución de aditividad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) para A , donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^q$ son vectores débilmente decrecientes. Así que la matriz $A_0 := \mathbf{S}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ satisface que para $\mathbf{z}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}$

$$A(\mathbf{z}) > A(\mathbf{w}) \implies A_0(\mathbf{z}) > A_0(\mathbf{w}). \quad (2.23)$$

Si A_0 no tiene entradas repetidas, es fácil ver que A_0 satisface las condiciones *a*), *b*) y *c*) del teorema; en este caso la prueba concluye con $D = A_0$. Supongamos ahora que A_0 tiene entradas repetidas, esto es $\eta(A_0) > 0$. Sean $\mathbf{h}_0, \mathbf{k}_0 \in \mathbb{R}$, tales que $\mathbf{h}_0 \neq \mathbf{k}_0$ y $A_0(\mathbf{h}_0) = A_0(\mathbf{k}_0)$. Entonces por el Lema 2.9.7 existen vectores débilmente decrecientes $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{y}_1 \in \mathbb{R}^q$ tales que la matriz $A_1 := \mathbf{S}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1)$ satisface las siguientes condiciones

- i*) A_1 extiende el orden de A_0 .
- ii*) $A_1(\mathbf{h}_0) \neq A_1(\mathbf{k}_0)$.

Es claro que A_1 satisface *a*). Por (2.23) y *i*) tenemos que A_1 satisface *b*). Por *ii*), $\eta(A_1) < \eta(A_0)$. Si todas las entradas de A_1 son distintas, entonces A_1 satisface también *c*) y la prueba concluye con $D = A_1$. Si A_1 tiene entradas repetidas, aplicamos nuevamente el Lema 2.9.7. Continuamos este procedimiento hasta obtener una matriz A_k tal que $\eta(A_k) = 0$. Es fácil ver A_k satisface *a*), *b*) y *c*). \diamond

Capítulo 3

Una matriz mínima-real en $\mathbb{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$

Este capítulo está dedicado a la obtención del Resultado 4 mencionado en la introducción de la tesis; esto es

Resultado 4. *Dados vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} con entradas en \mathbb{N}_0 y cuyas sumas de coordenadas coinciden, se da un método para construir una matriz mínima-real en $\mathbb{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.*

Por la Proposición 5.8 en [18], la matriz de norma mínima en $\mathbb{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ es una matriz mínima-real. En este capítulo damos un método para obtener la matriz de norma mínima en $\mathbb{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, dados los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} (Sección 3.3, complementada con el Apéndice A).

El Capítulo está distribuido de la siguiente manera. En la Sección 3.1, cuyo contenido proviene de [18], estudiamos algunos resultados sobre matrices mínimas-reales que se usan en la Sección 3.3.

En la Sección 3.2 introducimos un par de bases para el espacio afín $F(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ y presentamos varios resultados relativos a ellas. Estos resultados, que son interesantes por sí mismos, serán usados en el Apéndice A que contiene las demostraciones de los resultados importantes de la Sección 3.3. Un resultado que sobresale de la Sección 3.2 es el Teorema 3.2.4, que afirma que si $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_p)$ y $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_q)$ son vectores con entradas en \mathbb{N}_0 , cuyas sumas de coordenadas coinciden (denotamos por N el valor común de estas sumas),

entonces la matriz $P : \mathbb{B}(p, q) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$P(i, j) = \frac{a_i}{q} + \frac{b_j}{p} - \frac{N}{pq},$$

es la proyección ortogonal del origen de $\mathbb{M}_{p \times q}$ (el espacio de matrices reales de tamaño $p \times q$) en el espacio afín $\mathbb{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, y por lo tanto P es la matriz de norma mínima en $\mathbb{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Este resultado juega un papel importante en la Sección 3.3.

En la Sección 3.3 damos el método para obtener la matriz de norma mínima en $\mathbb{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Partimos de la matriz P recién definida. Si $P \in \mathbb{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ entonces P es también la matriz de norma mínima en $\mathbb{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Suponiendo que $P \notin \mathbb{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ (esto es, que P tiene alguna entrada negativa), damos una manera de obtener, a partir de P , una matriz P_l en $\mathbb{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, con $1 \leq l \leq (p-1)(q-1)$. Esta forma de obtener P_l consiste en un procedimiento recursivo que está implícito en la demostración del Teorema 3.3.2. El Teorema 3.3.3 afirma que P_l es la matriz de norma mínima en $\mathbb{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Como ya hemos comentado, P_l resulta ser una matriz mínima-real.

Las demostraciones de los Teoremas 3.3.2 y 3.3.3 requieren trabajo técnico y son presentadas en el Apéndice A. El procedimiento recursivo para la obtención de P_l es implementable a un algoritmo computacional, presentamos dicho algoritmo también en el Apéndice A.

Fijamos la notación para este capítulo. Consideramos, como ya hemos mencionado, el rectángulo $\mathbb{R} = \mathbb{B}(p, q)$, donde p y q son enteros positivos. Sean $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_p)$ y $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_q)$ vectores con coordenadas en \mathbb{N}_0 tales que $|\mathbf{a}| = N = |\mathbf{b}|$. Consideramos varias nociones que hemos definido a lo largo de este trabajo: la definición de matriz de tamaño $p \times q$ con entradas en \mathbb{R} ($A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$), las nociones para una matriz $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de ser aditiva y ser doblemente graduada, las definiciones de $\mathbb{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ y $\mathbb{M}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, y la definición de la π -sucesión, $\boldsymbol{\pi}(A)$ para una matriz $A \in \mathbb{M}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Denotamos por $\mathbb{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ ¹ al subconjunto de $\mathbb{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ que consta de las matrices con entradas no negativas. $\mathbb{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ es un politopo, que se conoce como el *politopo de transporte*. Note que $\mathbb{M}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \subset \mathbb{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Denotamos por

¹Existen en la literatura las correspondientes definiciones de $\mathbb{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ y $\mathbb{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ para vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} con coordenadas reales, en este trabajo consideramos estas definiciones exclusivamente para vectores con coordenadas en \mathbb{N}_0 .

$\mathbb{M}_{p \times q}$ al espacio lineal formado por las matrices de tamaño $p \times q$ con entradas en \mathbb{R} .

3.1. Matrices mínimas-reales

En esta sección revisamos algunos resultados sobre matrices mínimas-reales que usaremos en la Sección 3.3. El contenido de esta sección fue tomado de [18].²

Fijamos un poco más de notación. Sea \mathbf{x} un vector de longitud m con coordenadas reales. Denotamos por $\boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}) = (x_1^*, \dots, x_m^*)$ al vector formado por las coordenadas de \mathbf{x} arregladas en orden débilmente decreciente; esto es, $x_1^* \geq \dots \geq x_m^*$. Denotamos por $|\mathbf{x}|$ a la suma de las coordenadas de \mathbf{x} ; esto es $|\mathbf{x}| = \sum_{i=1}^m x_i$. Decimos que \mathbf{x} es mayorizado por $\mathbf{y} = (y_i)$, y lo denotamos por $\mathbf{x} \preceq \mathbf{y}$, si

$$|\mathbf{x}| = |\mathbf{y}|, \text{ y } \sum_{i=1}^k x_i^* \leq \sum_{i=1}^k y_i^*, \text{ para todo } 1 \leq k < m.$$

Si $\mathbf{x} \preceq \mathbf{y}$ y $\boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}) \neq \boldsymbol{\pi}(\mathbf{y})$, entonces escribimos $\mathbf{x} \prec \mathbf{y}$, ver [12, 17].

Sea $A \in \mathbb{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. La π -sucesión de A , denotada por $\boldsymbol{\pi}(A)$, es el vector de longitud pq formado por las entradas de A arregladas en orden débilmente decreciente. Decimos que A es *mínima-real* si no existe otra matriz $B \in \mathbb{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ tal que $\boldsymbol{\pi}(B) \prec \boldsymbol{\pi}(A)$; si $A \in \mathbb{M}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, A es *mínima* si no existe otra matriz $B \in \mathbb{M}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ tal que $\boldsymbol{\pi}(B) \prec \boldsymbol{\pi}(A)$. Es claro que si una matriz $A \in \mathbb{M}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ es mínima-real, entonces A es mínima, el recíproco no es cierto, como lo ilustra el Ejemplo 3.1.6.

La siguiente proposición es análoga a la parte (ii) del Teorema 1 en [23].

Proposición 3.1.1. [18, Lema 5.5] *Supongamos que \mathbf{a} y \mathbf{b} son débilmente decrecientes. Si $A \in \mathbb{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ es mínima-real, entonces A es doblemente graduada.*

Proposición 3.1.2. [18, Prop. 5.8] *Sea A^* la solución óptima al problema*

²Los autores de [18] consideran $\mathbb{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ y $\mathbb{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ para vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} con coordenadas en \mathbb{R} , los resultados de esta sección son válidos en este contexto. Existen generalizaciones de estos resultados que se aplican a matrices de dimensión n , ver [28, 29].

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}} A(\mathbf{k})^2 \\ \text{sujeto a} & A \in \mathbb{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b}). \end{array}$$

Entonces A^* es mínima-real.

Proposición 3.1.3. [18, Prop. 5.9] *Sea A^* la solución óptima al problema*

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}} A(\mathbf{k})^2 \\ \text{sujeto a} & A \in \mathbb{M}(\mathbf{a}, \mathbf{b}). \end{array}$$

Entonces A^* es mínima.

Teorema 3.1.4. [18, Teo. 6.2] *Sea $A \in \mathbb{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Entonces A es mínima-real si y sólo si A es aditiva.*

El siguiente ejemplo tiene parte del contenido del Ejemplo 2.1 en [18].

Ejemplo 3.1.5. [18, Ej. 2.1] Sean

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Las tres matrices A , B y C son particiones planas. La matriz A es mínima, esto puede verificarse directamente haciendo algunos cálculos. Sin embargo A no es mínima-real. Para ver esto note que el diagrama de flechas \mathcal{Z}_{33} de la Figura 2.17 es una obstrucción de aditividad para A . Entonces A es no aditiva y, por el Teorema 3.1.4, A no es mínima-real³. La matriz B no es mínima porque la matriz C tiene los mismos 1-márgenes que B y $\pi(C) \prec \pi(B)$. Finalmente, la matriz C es aditiva. Para ver esto, tomamos $x_1 = 7$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$, $y_1 = 6$, $y_2 = 3$, $y_3 = 0$. Por el Teorema 3.1.4, C es una matriz mínima-real. \diamond

Ejemplo 3.1.6. [29, Ej. 15] La matriz A del ejemplo anterior es mínima, pero no es mínima-real. Puede construirse una matriz B con los mismos 1-márgenes que A tal que $\pi(B) \prec \pi(A)$ tomando una combinación convexa de A con su transpuesta; esto es, $B = \epsilon A + (1 - \epsilon)A^T$ para $0 < \epsilon < 1$. \diamond

Ejemplo 3.1.7. Considere la matriz D del Ejemplo 2.1.13. D es una matriz no aditiva. Entonces por el Teorema 3.1.4 D no es mínima-real. \diamond

³En el Ejemplo 2.1 en [18] se justifica de manera distinta que A no es mínima-real.

3.2. Dos bases para $F(\mathbf{0}, \mathbf{0})$

En esta sección introducimos un par de bases para el espacio afín $F(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ y presentamos varios resultados relativos a ellas. Estos resultados, que son interesantes por sí mismos, serán usados en el Apéndice A que contiene las demostraciones de los resultados importantes de la Sección 3.3. Un resultado que sobresale de esta sección es el Teorema 3.2.4, que afirma que la matriz P definida en (3.2) es la proyección ortogonal del origen de $\mathbf{M}_{p \times q}$ en el espacio afín $F(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Este resultado juega un papel importante en la Sección 3.3 (y en el Apéndice A que complementa dicha sección).

Además de la notación que fijamos al principio de este capítulo y en la sección anterior requerimos la siguiente notación. Consideramos el subconjunto de $\mathbb{R} = \mathbb{B}(p, q)$

$$\mathbb{R}^\diamond = \{(i, j) \in \mathbb{R} : 2 \leq i \leq p, 2 \leq j \leq q\}.$$

\mathbb{R}^\diamond es un conjunto parcialmente ordenado con el orden parcial heredado de \mathbb{R} . Un subconjunto $J \subseteq \mathbb{R}^\diamond$ es una *escalera* si

$$\forall \mathbf{k} \in J \text{ y } \forall \mathbf{l} \in \mathbb{R}^\diamond, \mathbf{k} \trianglelefteq \mathbf{l} \implies \mathbf{l} \in J.$$

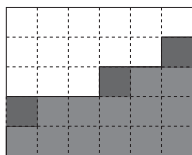
Considere un conjunto escalera $J \subseteq \mathbb{R}^\diamond$ y sea $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^\diamond - J$, entonces \mathbf{h} es *añadible* a J si $J \cup \{\mathbf{h}\}$ es nuevamente un conjunto escalera. Decimos que J es *rectangular* si existe \mathbf{h}_0 en J tal que

$$J = \{\mathbf{h} \in \mathbb{R}^\diamond : \mathbf{h}_0 \trianglelefteq \mathbf{h}\}.$$

Dada una matriz $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y un conjunto escalera $J \subseteq \mathbb{R}^\diamond$, decimos que A es *doblemente graduada fuera de J* si A satisface (2.8) para cualesquiera $\mathbf{h}, \mathbf{k} \in \mathbb{R} - J$.

Ejemplo 3.2.1. Considere el rectángulo $\mathbb{R}_1 = \mathbb{B}(5, 6)$, que lo pensamos como una cuadrícula de tamaño 5×6 . En la Figura 3.1 se ilustra un conjunto escalera $J \subseteq \mathbb{R}_1^\diamond$, J está representado por el área de color gris. Los tres cuadritos de color más oscuro no pertenecen a J , dichos cuadritos representan los puntos añadibles a J . La matriz $A : \mathbb{R}_1 \rightarrow \mathbb{Z}$ definida por

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & -1 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$


 Figura 3.1: Subconjunto escalera J y sus puntos añadibles.

es idénticamente cero en J (aunque también tiene algunas entradas iguales a cero fuera de J), y es doblemente graduada fuera de J . \diamond

Sea $\mathbf{h} \in \mathbb{R}$, recuerde que la matriz $M_{\mathbf{h}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ está definida de manera que para $\mathbf{k} \in \mathbb{R}$, $M_{\mathbf{h}}(\mathbf{k}) = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{h}}$. Para $(i, j) \in \mathbb{R}^{\circ}$, se define $\mathbf{d}_{ij} \in F(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ como

$$\mathbf{d}_{ij} := M_{(1,1)} + M_{(i,j)} - M_{(1,j)} - M_{(i,1)}.$$

Lema 3.2.2. *El conjunto*

$$\mathcal{D} = \{\mathbf{d}_{\mathbf{h}} : \mathbf{h} \in \mathbb{R}^{\circ}\}$$

es base de $F(\mathbf{0}, \mathbf{0})$.

Demostración. Para ver que $F(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ está generado por \mathcal{D} , simplemente observe que para cualquier matriz $A \in F(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ se tiene que

$$A = \sum_{\mathbf{h} \in \mathbb{R}^{\circ}} A(\mathbf{h}) \mathbf{d}_{\mathbf{h}}.$$

Como $\dim(F(\mathbf{0}, \mathbf{0})) = (p-1)(q-1)$, que es exactamente el número de elementos de \mathcal{D} , los elementos de \mathcal{D} son linealmente independientes. \diamond

Para (i, j) en \mathbb{R}° sea Q_{ij} la matriz de tamaño $p \times q$ definida por

$$Q_{ij}(r, s) = \begin{cases} 1 & \text{si } (r, s) = (i, j); \\ -\frac{1}{i-1} & \text{si } 1 \leq r \leq i-1 \text{ y } s = j; \\ -\frac{1}{j-1} & \text{si } r = i \text{ y } 1 \leq s \leq j-1; \\ \frac{1}{(i-1)(j-1)} & \text{si } 1 \leq r \leq i-1 \text{ y } 1 \leq s \leq j-1; \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (3.1)$$

Es fácil ver que $Q_{ij} \in \mathbb{F}(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ para todo (i, j) en \mathbb{R}^\diamond . Por ejemplo, si $p = 5$ y $q = 6$, entonces la matriz $Q_{45} \in \mathbb{M}_{5 \times 6}$ es

$$Q_{45} = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lema 3.2.3. *El conjunto*

$$\mathcal{B} = \{Q_{\mathbf{h}} : \mathbf{h} \in \mathbb{R}^\diamond\}$$

es base ortogonal de $\mathbb{F}(\mathbf{0}, \mathbf{0})$.

Demostración. Probamos primero que \mathcal{B} es base de $\mathbb{F}(\mathbf{0}, \mathbf{0})$. Para ver que \mathcal{B} genera a $\mathbb{F}(\mathbf{0}, \mathbf{0})$, tomamos una matriz A en $\mathbb{F}(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ y mostramos que A se puede escribir en términos de los elementos de \mathcal{B} . Considere los elementos $\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_{(p-1)(q-1)}$ de \mathbb{R}^\diamond listados en orden lexicográfico inverso (del último al primero), como se ilustra en el siguiente diagrama, donde los elementos representados por $*$ son los que no pertenecen a \mathbb{R}^\diamond :

$$\begin{array}{cccccc} * & * & \cdots & * & & * \\ * & \mathbf{h}_{(p-1)(q-1)} & \cdots & \cdots & & \mathbf{h}_{(p-2)(q-1)+1} \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ * & \mathbf{h}_{3(q-1)} & \cdots & \mathbf{h}_{2(q-1)+2} & & \mathbf{h}_{2(q-1)+1} \\ * & \mathbf{h}_{2(q-1)} & \cdots & \mathbf{h}_{q+1} & & \mathbf{h}_q \\ * & \mathbf{h}_{q-1} & \cdots & \mathbf{h}_2 & & \mathbf{h}_1 \end{array}$$

Entonces la matriz A se obtiene de manera constructiva como sigue: sea $A_1 = A(\mathbf{h}_1)Q_{\mathbf{h}_1}$, y para $k = 2, \dots, (p-1)(q-1)$ sea

$$A_k = A_{k-1} + (A(\mathbf{h}_k) - A_{k-1}(\mathbf{h}_k))Q_{\mathbf{h}_k}.$$

No es difícil ver que $A_{(p-1)(q-1)} = A$. Concluimos que A se puede escribir en términos de los elementos de \mathcal{B} . Por lo tanto \mathcal{B} genera a $\mathbb{F}(\mathbf{0}, \mathbf{0})$. Como $\dim(\mathbb{F}(\mathbf{0}, \mathbf{0})) = (p-1)(q-1)$, que es exactamente el número de elementos de \mathcal{B} , entonces los elementos de \mathcal{B} son linealmente independientes. Así que \mathcal{B} es una base de $\mathbb{F}(\mathbf{0}, \mathbf{0})$. Probamos que \mathcal{B} es ortogonal; esto es, que si (i, j)

y (k, l) son elementos distintos de \mathbb{R}° , entonces $\langle Q_{ij}, Q_{kl} \rangle = 0$; hacemos esto por casos. Los casos a considerar son los siguientes:

- a) (i, j) y (k, l) no son comparables.
- b) Uno de (i, j) y (k, l) es menor que el otro y están en el mismo renglón.
- c) Uno de (i, j) y (k, l) es menor que el otro y están en la misma columna.
- d) Uno de (i, j) y (k, l) es menor que el otro y no están ni en el mismo renglón ni en la misma columna.

En los casos b), c) y d) suponemos sin perder generalidad que $(i, j) \triangleleft (k, l)$.

Para el caso a), suponemos que (i, j) y (k, l) no son comparables, y suponemos sin perder generalidad que $i < k$ y $j > l$. Tenemos que

$$\langle Q_{ij}, Q_{kl} \rangle = \sum_{r=1}^p \sum_{t=1}^q Q_{ij}(r, t) \cdot Q_{kl}(r, t).$$

De los términos de la suma anterior, son distintos de cero sólo aquellos en los que tanto $Q_{ij}(r, t) \neq 0$ como $Q_{kl}(r, t) \neq 0$, que corresponden a los $(r, t) \in \mathbb{R}$ tales que $1 \leq r \leq i$ y $1 \leq t \leq l$. Note que como $l < j$

$$Q_{ij}(r, 1) = Q_{ij}(r, 2) = \cdots = Q_{ij}(r, l), \text{ para } r = 1, \dots, i;$$

y que, como $Q_{kl} \in \mathbb{F}(\mathbf{0}, \mathbf{0})$, entonces $\sum_{t=1}^l Q_{kl}(r, t) = 0$ para $r = 1, \dots, k$, en particular para $r = 1, \dots, i$. De lo anterior sigue que

$$\begin{aligned} \langle Q_{ij}, Q_{kl} \rangle &= \sum_{r=1}^i \left[\sum_{t=1}^l Q_{ij}(r, t) \cdot Q_{kl}(r, t) \right] \\ &= \sum_{r=1}^i \left[Q_{ij}(r, 1) \sum_{t=1}^l Q_{kl}(r, t) \right] \\ &= \sum_{r=1}^i \left[Q_{ij}(r, 1) \cdot 0 \right] = 0. \end{aligned}$$

Para el caso b) consideramos Q_{ij} y Q_{il} , con $j < l$. Entonces

$$Q_{il}(r, 1) = \cdots = Q_{il}(r, j), \text{ para } r = 1, \dots, i;$$

y como $Q_{ij} \in \mathbb{F}(\mathbf{0}, \mathbf{0})$, entonces $\sum_{t=1}^j Q_{ij}(r, t) = 0$ para $r = 1, \dots, i$. De lo

anterior tenemos que

$$\begin{aligned}
 \langle Q_{ij}, Q_{il} \rangle &= \sum_{r=1}^i \left[\sum_{t=1}^j Q_{ij}(r, t) \cdot Q_{il}(r, t) \right] \\
 &= \sum_{r=1}^i \left[Q_{il}(r, 1) \sum_{t=1}^j Q_{ij}(r, t) \right] \\
 &= \sum_{r=1}^i \left[Q_{il}(r, 1) \cdot 0 \right] = 0.
 \end{aligned}$$

La prueba para el caso $c)$ es similar a la prueba para $b)$ proque los renglones y las columnas juegan papeles simétricos.

Para el caso $d)$ consideramos Q_{ij} y Q_{kl} con $i < k$ y $j < l$. Entonces, como $Q_{ij} \in \mathbf{F}(\mathbf{0}, \mathbf{0})$, $\sum_{r=1}^i \sum_{t=1}^j Q_{ij}(r, t) = 0$. Como $i < k$ y $j < l$ tenemos que Q_{kl} es constante, digamos con valor λ , en el conjunto $\{(r, t) \in \mathbb{R} : r \leq i, t \leq j\}$. De lo anterior tenemos que

$$\begin{aligned}
 \langle Q_{ij}, Q_{kl} \rangle &= \sum_{r=1}^i \sum_{t=1}^j Q_{ij}(r, t) \cdot Q_{kl}(r, t) \\
 &= \lambda \sum_{r=1}^i \sum_{t=1}^j Q_{ij}(r, t) \\
 &= \lambda \cdot 0 = 0. \quad \diamond
 \end{aligned}$$

Como algunos resultados de esta sección se relacionan con $\mathbf{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, fijamos para el resto de esta sección vectores $\mathbf{a} = (a_i)_{i \in [p]} \in \mathbb{N}_0^p$, $\mathbf{b} = (b_j)_{j \in [q]} \in \mathbb{N}_0^q$, donde $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| =: N$.

Sea $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la matriz definida por

$$P(i, j) = \frac{a_i}{q} + \frac{b_j}{p} - \frac{N}{pq}. \quad (3.2)$$

Una construcción análoga a la matriz P aparece en [20]. El siguiente Teorema es uno de los principales resultados de esta sección.

Teorema 3.2.4. *Considere la matriz P recién definida. Entonces*

i) $P \in \mathbf{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

ii) P es la proyección ortogonal del origen de $\mathbb{M}_{p \times q}$ en el espacio afín $\mathbb{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$; esto es, P es la (única) matriz de norma mínima en $\mathbb{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

iii) Si \mathbf{a} y \mathbf{b} son débilmente decrecientes, entonces P es doblemente graduada.

La siguiente observación se usa en la prueba del teorema.

Observación 3.2.5. $\mathbb{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = A_0 + \mathbb{F}(\mathbf{0}, \mathbf{0})$, donde A_0 es un elemento cualquiera de $\mathbb{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$; esto es, $\mathbb{F}(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ es el espacio lineal paralelo al espacio afín $\mathbb{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

◇

Demostración (del Teorema 3.2.4). Probamos *i)*. Tenemos que para $i = 1, 2, \dots, p$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^q P(i, j) &= \sum_{j=1}^q \left(\frac{a_i}{q} + \frac{b_j}{p} - \frac{N}{pq} \right) = a_i + \sum_{j=1}^q \frac{b_j}{p} - \frac{N}{p} \\ &= a_i + \frac{N}{p} - \frac{N}{p} = a_i. \end{aligned}$$

Similarmente, para $j = 1, 2, \dots, q$, $\sum_{i=1}^p P(i, j) = b_j$. Por lo tanto $P \in \mathbb{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Probamos *ii)*. Debemos mostrar que P es ortogonal a $\mathbb{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, que por la Observación 3.2.5, equivale a probar que P es ortogonal a $\mathbb{F}(\mathbf{0}, \mathbf{0})$. Por el Lema 3.2.2 basta probar que $\langle P, \mathbf{d}_{ij} \rangle = 0$ para $(i, j) \in \mathbb{R}^\diamond$. Sea $(i, j) \in \mathbb{R}^\diamond$, entonces

$$\begin{aligned} \langle P, \mathbf{d}_{ij} \rangle &= P(1, 1) + P(i, j) - P(i, 1) - P(1, j) \\ &= \frac{a_1}{q} + \frac{b_1}{p} - \frac{N}{pq} + \frac{a_i}{q} + \frac{b_j}{p} - \frac{N}{pq} \\ &\quad - \frac{a_i}{q} - \frac{b_1}{p} + \frac{N}{pq} - \frac{a_1}{q} - \frac{b_j}{p} + \frac{N}{pq} = 0. \end{aligned}$$

La parte *iii)* sigue de la definición de P y de que \mathbf{a} y \mathbf{b} son débilmente decrecientes. ◇

El siguiente lema se requiere en la prueba del Lema 3.2.7.

Lema 3.2.6. Sean $\mathbf{h}, \mathbf{k} \in \mathbb{R}^\diamond$ tales que no ocurre que $\mathbf{k} \leq \mathbf{h}$. Entonces $\langle Q_{\mathbf{k}}, \mathbf{d}_{\mathbf{h}} \rangle = 0$.

Demostración. Escribimos $\mathbf{h} = (i, j)$ y $\mathbf{k} = (r, t)$. Tenemos que

$$\langle Q_{rt}, \mathbf{d}_{ij} \rangle = Q_{rt}(1, 1) + Q_{rt}(i, j) - Q_{rt}(1, j) - Q_{rt}(i, 1). \quad (3.3)$$

Por hipótesis, $(i, j) \triangleleft (r, t)$, ó (i, j) no es comparable con (r, t) . Supongamos que $(i, j) \triangleleft (r, t)$. Entonces $i \leq r$ y $j \leq t$, y al menos una de las desigualdades es estricta, sin perder generalidad supongamos que $i < r$ y $j \leq t$. En este caso tenemos que

$$Q_{rt}(1, 1) = Q_{rt}(i, 1) \text{ y } Q_{rt}(1, j) = Q_{rt}(i, j);$$

de esto y de (3.3) sigue que $\langle Q_{rt}, \mathbf{d}_{ij} \rangle = 0$. Si (i, j) y (r, t) no son comparables, hay dos posibles casos: primero $i < r$ y $j > t$, y segundo $i > r$ y $j < t$, probamos el resultado para el primer caso, para el segundo la prueba es similar. Suponemos que $i < r$ y $j > t$. Como $i < r$ entonces

$$Q_{rt}(1, 1) = Q_{rt}(i, 1), \quad (3.4)$$

y como $j > t$ tenemos que

$$Q_{rt}(1, j) = 0 = Q_{rt}(i, j); \quad (3.5)$$

en este caso, tenemos de (3.3), (3.4) y (3.5) que $\langle Q_{rt}, \mathbf{d}_{ij} \rangle = 0$. \diamond

Para cada $\mathbf{h} \in \mathbb{R}$ definimos el hiperplano de $\mathbf{M}_{p \times q}(\mathbb{R})$

$$H_{\mathbf{h}} := \{A \in \mathbf{M}_{p \times q}(\mathbb{R}) : A(\mathbf{h}) = 0\}.$$

Sea $J \subseteq \mathbb{R}^\circ$ un conjunto escalera. Asociamos a J el subespacio afín de $\mathbf{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ definido por

$$\mathbf{U}(J) := \begin{cases} \mathbf{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \cap [\cap_{\mathbf{h} \in J} H_{\mathbf{h}}] & \text{si } J \neq \emptyset; \\ \mathbf{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) & \text{si } J = \emptyset; \end{cases} \quad (3.6)$$

esto es, $\mathbf{U}(J)$ es el subespacio afín de $\mathbf{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ que consta de todas las matrices que son idénticamente cero en J . Como el espacio lineal paralelo a $\mathbf{U}(J)$ está generado por el conjunto $\{\mathbf{d}_{\mathbf{h}} : \mathbf{h} \in \mathbb{R}^\circ \setminus J\}$, entonces

$$\dim(\mathbf{U}(J)) = (p-1)(q-1) - |J|. \quad (3.7)$$

El Lema 3.2.7 será necesario en la Sección A.2.

Lema 3.2.7. *Sea $J \subseteq \mathbb{R}^\diamond$ un conjunto escalera no vacío y considere del subespacio $\mathbf{U}(J) \subset \mathbf{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ asociado a J . Entonces, para todo \mathbf{k} en J se tiene que $Q_{\mathbf{k}}$ es ortogonal a $\mathbf{U}(J)$.*

Demostración. Sea $X_0 \in \mathbf{U}(J)$, entonces

$$\mathbf{U}(J) = X_0 + \langle \mathbf{d}_{\mathbf{h}} : \mathbf{h} \in \mathbb{R}^\diamond - J \rangle;$$

esto es, el subespacio lineal $\mathbf{V} = \langle \mathbf{d}_{\mathbf{h}} : \mathbf{h} \in \mathbb{R}^\diamond - J \rangle$ es paralelo al espacio afín $\mathbf{U}(J)$. Por lo tanto basta probar que para todo $\mathbf{k} \in J$, $Q_{\mathbf{k}}$ es ortogonal a \mathbf{V} . Fijamos $\mathbf{k} \in J$. Para todo $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^\diamond - J$ la condición $\mathbf{k} \trianglelefteq \mathbf{h}$ no se da. Entonces por el Lema 3.2.6, para todo $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^\diamond - J$, $\langle Q_{\mathbf{k}}, \mathbf{d}_{\mathbf{h}} \rangle = 0$. Por lo tanto $Q_{\mathbf{k}}$ es ortogonal a \mathbf{V} . \diamond

Los Lemas 3.2.8 y 3.2.9 se usan en la demostración del Lema 3.2.12.

Lema 3.2.8. *Sea (k, l) en \mathbb{R}^\diamond , entonces*

$$\langle Q_{kl}, Q_{kl} \rangle = \frac{kl}{(k-1)(l-1)}.$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \langle Q_{kl}, Q_{kl} \rangle &= \frac{(k-1)(l-1)}{(k-1)^2(l-1)^2} + \frac{k-1}{(k-1)^2} + \frac{l-1}{(l-1)^2} + 1 \\ &= \frac{1}{(k-1)(l-1)} + \frac{1}{k-1} + \frac{1}{l-1} + 1 \\ &= \frac{1 + (l-1) + (k-1) + (k-1)(l-1)}{(k-1)(l-1)} \\ &= \frac{kl}{(k-1)(l-1)}. \diamond \end{aligned}$$

Lema 3.2.9. *Sea $A \in \mathbf{F}(\mathbf{0}, \mathbf{0})$. Escribimos a A en términos de la base $\mathcal{B} = \{Q_{\mathbf{h}} : \mathbf{h} \in \mathbb{R}^\diamond\}$ de $\mathbf{F}(\mathbf{0}, \mathbf{0})$:*

$$A = \sum_{\mathbf{h} \in \mathbb{R}^\diamond} s_{\mathbf{h}} Q_{\mathbf{h}}, \text{ para ciertos } s_{\mathbf{h}} \in \mathbb{R}.$$

Fijamos $(k, l) \in \mathbb{R}^\diamond$. Entonces

$$s_{kl} = A(k, l) + \frac{1}{kl} S_{kl} + \frac{1}{l} \lambda_{kl} + \frac{1}{k} \mu_{kl},$$

donde

$$S_{kl} := \sum_{i=k+1}^p \sum_{j=l+1}^q A(i, j), \quad \lambda_{kl} := \sum_{j=l+1}^q A(k, j) \text{ y}$$

$$\mu_{kl} := \sum_{i=k+1}^p A(i, l)$$

(ver Figura 3.2).

En la Figura 3.2 está señalada con S_{kl} (resp. λ_{kl} y μ_{kl}) la región de \mathbb{R} sobre la que se toma la suma S_{kl} (resp. λ_{kl} y μ_{kl}).

	(k, l)	λ_{kl}
	μ_{kl}	S_{kl}

Figura 3.2: Regiones de \mathbb{R} consideradas en los términos de s_{kl} .

Observación 3.2.10. En el Lema 3.2.9, si $k = p$ entonces $\mu_{kl} = S_{kl} = 0$, y si $l = q$ entonces $\lambda_{kl} = S_{kl} = 0$. \diamond

Ejemplo 3.2.11. Sea $\mathbb{R}_2 = \mathbb{B}(3, 3)$, y sea $A : \mathbb{R}_2 \rightarrow \mathbb{N}_0$ la matriz definida por

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 2 & -7 & 5 \\ -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Es claro que $A \in \mathbb{F}(\mathbf{0}, \mathbf{0})$. A continuación determinamos, con ayuda del Lema 3.2.9, los coeficientes de la expresión $A = \sum_{\mathbf{h} \in \mathbb{R}_2^\circ} s_{\mathbf{h}} Q_{\mathbf{h}}$. Para cada $(k, l) \in \mathbb{R}_2^\circ$ calculamos, según el resultado del Lema 3.2.9

$$s_{kl} = A(k, l) + \frac{1}{kl} S_{kl} + \frac{1}{l} \lambda_{kl} + \frac{1}{k} \mu_{kl}.$$

Calculamos s_{22} . Los datos son: $k = 2$, $l = 2$, $A(2, 2) = -7$, $\lambda_{22} = 5$, $\mu_{22} = 4$ y $S_{22} = -3$. Entonces

$$s_{22} = -7 + \frac{1}{4}(-3) + \frac{1}{2}(5) + \frac{1}{2}(4) = \frac{-28 - 3 + 10 + 8}{4} = -\frac{13}{4}.$$

Calculamos s_{23} . Los datos son: $k = 2$, $l = 3$, $A(2, 3) = 5$, $\lambda_{23} = 0$, $\mu_{23} = -3$ y $S_{23} = 0$. Entonces

$$s_{23} = 5 + \frac{1}{6}(0) + \frac{1}{3}(0) + \frac{1}{2}(-3) = \frac{10 - 3}{2} = \frac{7}{2}.$$

Calculamos s_{32} . Los datos son: $k = 3$, $l = 2$, $A(3, 2) = 4$, $\lambda_{32} = -3$, $\mu_{32} = 0$ y $S_{32} = 0$. Entonces

$$s_{32} = 4 + \frac{1}{6}(0) + \frac{1}{2}(-3) + \frac{1}{3}(0) = \frac{8 - 3}{2} = \frac{5}{2}.$$

Calculamos s_{33} . Los datos son: $k = 3$, $l = 3$, $A(3, 3) = -3$, $\lambda_{33} = 0$, $\mu_{33} = 0$ y $S_{33} = 0$. Entonces

$$s_{33} = -3.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} A &= s_{22}Q_{22} + s_{23}Q_{23} + s_{32}Q_{32} + s_{33}Q_{33} \\ &= -\frac{13}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{7}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + \frac{5}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}. \diamond \end{aligned}$$

Demostración (del Lema 3.2.9). La prueba se desglosa en las siguientes afirmaciones.

Afirmación 1. $s_{kl} = \frac{(k-1)(l-1)}{kl} \langle A, Q_{kl} \rangle$

Prueba de la Afirmación 1.

$$\begin{aligned}
 \langle A, Q_{kl} \rangle &= \left\langle \sum_{(i,j) \in \mathbb{R}^\diamond} s_{ij} Q_{ij}, Q_{kl} \right\rangle \\
 &= \sum_{(i,j) \in \mathbb{R}^\diamond} s_{ij} \langle Q_{ij}, Q_{kl} \rangle \\
 &= s_{kl} \langle Q_{kl}, Q_{kl} \rangle \\
 &= s_{kl} \frac{kl}{(k-1)(l-1)}.
 \end{aligned}$$

La tercera igualdad es por el Lema 3.2.3, y la última por el Lema 3.2.8. El resultado sigue de despejar s_{kl} . \diamond

Afirmación 2.

$$\begin{aligned}
 \langle A, Q_{kl} \rangle &= \frac{1}{(k-1)(l-1)} \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{l-1} A(i, j) \\
 &\quad - \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^{k-1} A(i, l) \\
 &\quad - \frac{1}{l-1} \sum_{j=1}^{l-1} A(k, j) + A(k, l).
 \end{aligned}$$

Prueba de la Afirmación 2. Sigue directamente de la definición de Q_{kl} . \diamond

Las Afirmaciones 3 y 4 se refieren ya a las sumas S_{kl} , λ_{kl} y μ_{kl} del enunciado del Lema (ver Figura 3.2). Para simplificar la notación, y dado que (k, l) está fijo, por el resto de esta prueba (Afirmaciones 3 y 4) denotamos estas sumas simplemente por S , λ y μ respectivamente.

Afirmación 3. Las siguientes identidades respecto a los términos de la ex-

presión en la Afirmación 2, se cumplen:

$$\sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{l-1} A(i, j) = S + \lambda + \mu + A(k, l); \quad (3.8)$$

$$- \sum_{i=1}^{k-1} A(i, l) = \mu + A(k, l); \quad (3.9)$$

$$- \sum_{j=1}^{l-1} A(k, j) = \lambda + A(k, l). \quad (3.10)$$

Prueba de la Afirmación 3. Probamos la primera identidad. Mostramos primero que

$$\sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{l-1} A(i, j) = \sum_{i=k}^p \sum_{j=l}^q A(i, j). \quad (3.11)$$

Como $A \in \mathbb{F}(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ tenemos que

$$\sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^q A(i, j) = 0, \text{ y } \sum_{i=1}^p \sum_{j=l}^q A(i, j) = 0.$$

Entonces

$$\sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{l-1} A(i, j) = - \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=l}^q A(i, j) = \sum_{i=k}^p \sum_{j=l}^q A(i, j).$$

Entonces (3.8) sigue de que el lado derecho de (3.11) es igual a $S + \lambda + \mu + A(k, l)$ (ver Figura 3.2). Las identidades (3.9) y (3.10) siguen de que $A \in \mathbb{F}(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ y de las definiciones de λ y μ . \diamond

Afirmación 4.

$$s_{kl} = \frac{1}{kl}S + \frac{1}{l}\lambda + \frac{1}{k}\mu + A(k, l).$$

Prueba de la Afirmación 4. Combinando las Afirmaciones 2 y 3, tenemos que

$$\begin{aligned} \langle A, Q_{kl} \rangle &= \frac{1}{(k-1)(l-1)}[S + \lambda + \mu + A(k, l)] + \frac{1}{k-1}[\mu + A(k, l)] \\ &\quad + \frac{1}{l-1}[\lambda + A(k, l)] + A(k, l). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Por la Afirmación 1 y (3.12) tenemos que

$$\begin{aligned}
 s_{kl} &= \frac{(k-1)(l-1)}{kl} \langle A, Q_{kl} \rangle \\
 &= \frac{(k-1)(l-1)}{kl} \left[\frac{1}{(k-1)(l-1)} [S + \lambda + \mu + A(k, l)] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{k-1} [\mu + A(k, l)] + \frac{1}{l-1} [\lambda + A(k, l)] + A(k, l) \right] \\
 &= \frac{1}{kl} \left[S + \lambda + \mu + A(k, l) + (l-1)[\mu + A(k, l)] \right. \\
 &\quad \left. + (k-1)[\lambda + A(k, l)] + (k-1)(l-1)A(k, l) \right] \\
 &= \frac{1}{kl} \left[S + k \cdot \lambda + l \cdot \mu \right. \\
 &\quad \left. + [1 + (l-1) + (k-1) + (k-1)(l-1)]A(k, l) \right] \\
 &= \frac{1}{kl} \left[S + k \cdot \lambda + l \cdot \mu + (kl) \cdot A(k, l) \right] \\
 &= \frac{1}{kl} S + \frac{1}{l} \lambda + \frac{1}{k} \mu + A(k, l). \diamond
 \end{aligned}$$

El Lema 3.2.12 también se requiere en la Sección A.2.

Lema 3.2.12. *Sea $J \subseteq \mathbb{R}^\diamond$ un conjunto escalera y sea A una matriz en $\mathbb{F}(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ tal que $A(r, t) \geq 0$ para todo $(r, t) \in J$. Entonces*

1) *Al escribir A en términos de la base $\mathcal{B} = \{Q_{ij} : (i, j) \in \mathbb{R}^\diamond\}$ como*

$$A = \sum_{(i,j) \in \mathbb{R}^\diamond} s_{ij} Q_{ij}, \text{ para ciertos } s_{ij} \in \mathbb{R},$$

se tiene que $s_{ij} \geq 0$ para todo $(i, j) \in J$.

2) *Si además existe $(i_0, j_0) \in J$ tal que $A(i_0, j_0) > 0$, entonces $s_{i_0 j_0} > 0$.*

Demostración. Por el Lema 3.2.9, y usando la notación de ese Lema, para cualquier $(i, j) \in \mathbb{R}^\diamond$ se tiene que

$$s_{ij} = A(i, j) + \frac{1}{ij} S_{ij} + \frac{1}{j} \lambda_{ij} + \frac{1}{i} \mu_{ij}.$$

Entonces, para $(i, j) \in \mathbb{R}^\diamond$, s_{ij} es combinación lineal con coeficientes positivos, de los valores de $A(r, t)$, con $(i, j) \trianglelefteq (r, t)$. Si $(i, j) \in J$, entonces $(r, t) \in J$ para todo (r, t) tal que $(i, j) \trianglelefteq (r, t)$. De esto y de la hipótesis de que $A(r, t) \geq 0$ para todo $(r, t) \in J$ sigue la parte 1) del lema. Para la parte 2), aplicando a $s_{i_0 j_0}$ el Lema 3.2.9 tenemos que

$$s_{i_0 j_0} = A(i_0, j_0) + \frac{1}{i_0 j_0} S_{i_0 j_0} + \frac{1}{j_0} \lambda_{i_0 j_0} + \frac{1}{i_0} \mu_{i_0 j_0}. \quad (3.13)$$

Como $A(i_0, j_0) > 0$, y los demás términos de $s_{i_0 j_0}$ en (3.13), por el argumento anterior son no negativos, concluimos que $s_{i_0 j_0} > 0$. \diamond

3.3. La matriz de norma mínima en $\mathsf{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$

En esta sección damos un método para, dados vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} con entradas en \mathbb{N}_0 , y cuyas sumas de coordenadas coinciden, obtener la matriz de norma mínima en $\mathsf{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Partimos de la matriz $P : \mathsf{B}(p, q) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$P(i, j) = \frac{a_i}{q} + \frac{b_j}{p} - \frac{N}{pq}.$$

Por el Teorema 3.2.4, P es la proyección ortogonal del origen de $\mathsf{M}_{p \times q}$ en el espacio afín $\mathsf{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, y por lo tanto P es la matriz de norma mínima en $\mathsf{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Si $P \in \mathsf{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ entonces P es también la matriz de norma mínima en $\mathsf{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Suponiendo que $P \notin \mathsf{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ (esto es, que P tiene alguna entrada negativa), damos una manera de obtener, a partir de P , una matriz P_l en $\mathsf{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, con $1 \leq l \leq (p-1)(q-1)$. Esta forma de obtener P_l consiste en un procedimiento recursivo que está implícito en la demostración del Teorema 3.3.2. El Teorema 3.3.3 afirma que P_l es la matriz de norma mínima en $\mathsf{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. El Corolario 3.3.5 (que usa la Proposición 3.1.2) afirma que P_l es una matriz mínima-real. Al final de la sección presentamos algunos ejemplos que ilustran la matriz P_l para diferentes parejas de vectores \mathbf{a}, \mathbf{b} .

Las demostraciones de los Teoremas 3.3.2 y 3.3.3 requieren trabajo técnico y son presentadas en el Apéndice A.

Fijamos para esta sección dos vectores $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_p)$ y $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_q)$ con coordenadas en \mathbb{N} (positivas) tales que $|\mathbf{a}| = N = |\mathbf{b}|$ (note que no se pierde generalidad en suponer que \mathbf{a} y \mathbf{b} tienen entradas estrictamente positivas). En esta sección trabajamos con el espacio afín $\mathsf{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ y con el

politopo $\mathsf{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \subset \mathsf{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Por otro lado, también consideramos el espacio afín $\mathsf{F}(\mathbf{0}, \mathbf{0})$.

Comentario 3.3.1. Considere permutaciones $\sigma \in \mathsf{S}_p$ y $\rho \in \mathsf{S}_q$, y sean \mathbf{a}_σ y \mathbf{b}_ρ los vectores que se obtienen permutando las entradas de \mathbf{a} , resp. \mathbf{b} , por medio de σ , resp. ρ . Dada una matriz $A \in \mathsf{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ sea $(\sigma, \rho)A$ la matriz que se obtiene de permutar los renglones, resp. las columnas de A por medio de σ , resp. ρ . Entonces es claro que Y es la (única) matriz de norma mínima en $\mathsf{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ si y sólo si $(\sigma, \rho)Y$ es la (única) matriz de norma mínima en $\mathsf{T}(\mathbf{a}_\sigma, \mathbf{b}_\rho)$. \diamond

A lo largo de esta sección \mathbf{a} y \mathbf{b} serán vectores débilmente decrecientes; por el comentario anterior, esto no causa pérdida de generalidad. Seguimos considerando la notación que se ha fijado en lo que va del capítulo.

A lo largo de esta sección consideramos las siguientes propiedades para la matriz P , que se obtienen del Teorema 3.2.4:

- $P \in \mathsf{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.
- P es la proyección ortogonal del origen de $\mathsf{M}_{p \times q}$ en el espacio afín $\mathsf{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$; esto es, P es la (única) matriz de norma mínima en $\mathsf{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.
- P es doblemente graduada.

Para cada conjunto escalera $J \subseteq \mathbb{R}^\diamond$ consideramos el subespacio afín asociado $\mathsf{U}(J) \subseteq \mathsf{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ que se define en (3.6). Dados una matriz $Q \in \mathsf{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ y un conjunto escalera $J \subseteq \mathbb{R}^\diamond$ consideramos para la pareja (Q, J) las siguientes condiciones:

- (a) $\forall \mathbf{h} \in J \exists s_{\mathbf{h}} \in \mathbb{R}, s_{\mathbf{h}} > 0 : Q = P + \sum_{\mathbf{h} \in J} s_{\mathbf{h}} Q_{\mathbf{h}}$.
 - (b) Q es la proyección ortogonal del origen de $\mathsf{M}_{p \times q}$ en espacio afín $\mathsf{U}(J)$; esto es, $Q \in \mathsf{U}(J)$ y es la (única) matriz de norma mínima en $\mathsf{U}(J)$.
 - (c) Q es doblemente graduada fuera de J .
- (3.14)

La matriz P_l del siguiente teorema resultará ser la matriz de norma mínima en $\mathsf{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Note que este teorema es considerado para el caso en que $P \notin \mathsf{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Teorema 3.3.2. *Supongamos que $P \notin \mathbb{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Entonces, para algún $1 \leq l \leq (p-1)(q-1)$ existe una sucesión de parejas $(P_0, I_0), \dots, (P_l, I_l)$, donde para $0 \leq j \leq l$, $P_j \in \mathbb{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ e I_j es un subconjunto escalera de \mathbb{R}^\diamond ; y tal que*

- (1) $\forall k \in \{0, \dots, l\}$ la pareja (P_k, I_k) satisface las condiciones en (3.14).
- (2) $\emptyset = I_0 \subsetneq I_1 \subsetneq \dots \subsetneq I_l \subseteq \mathbb{R}^\diamond$.
- (3) $P_0 = P$ y P_l es la primera de las matrices que pertenece a $\mathbb{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

La demostración del Teorema 3.3.2 se basa en un procedimiento recursivo por medio del cual se obtiene la sucesión de parejas $(P_0, I_0), \dots, (P_l, I_l)$, $1 \leq l \leq (p-1)(q-1)$. Dicha demostración requiere trabajo técnico y la presentamos en la Sección A.1.

Por el resto de este trabajo, cuando hagamos referencia a una sucesión de parejas $(P_0, I_0), \dots, (P_l, I_l)$, $1 \leq l \leq (p-1)(q-1)$, que se obtiene por medio del Teorema 3.3.2, asumiremos que dicha sucesión ha sido obtenida mediante el algoritmo de la demostración del teorema.

Teorema 3.3.3. *Sea $(P_0, I_0), \dots, (P_l, I_l)$, $1 \leq l \leq (p-1)(q-1)$, una sucesión de parejas obtenida por medio del Teorema 3.3.2. Entonces P_l es la matriz de norma mínima en $\mathbb{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.*

La demostración de este teorema también requiere trabajo técnico y será presentada en la Sección A.2.

El algoritmo que está implícito en la prueba del Teorema 3.3.2 fue descubierto de manera independiente por D. Romero, por un lado, y por el autor y el asesor de esta tesis por otro. D. Romero lo obtuvo primero (comunicación privada a E. Vallejo [21]) utilizando métodos de optimización; sin embargo no lo ha publicado. Nosotros sin conocer aún el algoritmo de D. Romero lo redescubrimos utilizando ideas puramente geométricas (proyecciones en subespacios). Es interesante notar que aunque ambos enfoques son muy diferentes, al final se obtiene el mismo algoritmo.

Comentario 3.3.4. El Teorema 3.3.3 nos garantiza que, aunque la sucesión de parejas $(P_0, I_0), \dots, (P_l, I_l)$, $1 \leq l \leq (p-1)(q-1)$, que se obtiene por medio del Teorema 3.3.2, no es única (depende de algunas elecciones), la matriz P_l (la última matriz) está determinada de manera única. \diamond

El siguiente corolario es consecuencia del Teorema 3.3.3 y la Proposición 3.1.2.

Corolario 3.3.5. Sea $(P_0, I_0), \dots, (P_l, I_l)$, $1 \leq l \leq (p-1)(q-1)$, una sucesión de parejas que se obtiene por medio del Teorema 3.3.2. Entonces P_l es una matriz mínima-real.

Finalizamos esta sección presentando algunos ejemplos.

Ejemplo 3.3.6. Sean $\mathbf{a} := (14, 13, 10, 9)$ y $\mathbf{b} := (15, 12, 8, 6, 5)$. Entonces la matriz P definida en (3.2), que por el Teorema 3.2.4, es la proyección ortogonal del origen de $M_{4 \times 5}(\mathbb{R})$ al espacio afín $F(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ es

$$P = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 85 & 70 & 50 & 40 & 35 \\ 81 & 66 & 46 & 36 & 31 \\ 69 & 54 & 34 & 24 & 19 \\ 65 & 50 & 30 & 20 & 15 \end{pmatrix}.$$

$P \in \mathbb{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Por lo tanto P es la matriz de norma mínima en $\mathbb{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Por el Corolario 3.3.5, P es una matriz mínima-real. Finalmente, por el Teorema 3.1.4, P es una matriz aditiva. El cuadrado de la norma de P es 126.9. \diamond

Ejemplo 3.3.7. Sean $\mathbf{a} := (11, 7, 2, 1)$ y $\mathbf{b} := (9, 7, 3, 2)$. Entonces

$$P = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 59 & 51 & 35 & 31 \\ 43 & 35 & 19 & 15 \\ 23 & 15 & -1 & -5 \\ 19 & 11 & -5 & -9 \end{pmatrix}.$$

$P \notin \mathbb{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. La matriz $P_l \in \mathbb{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ que aparece en la última pareja de la sucesión de parejas del Teorema 3.3.2 es

$$P_l = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 16 & 14 & 8 & 6 \\ 12 & 10 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por el Teorema 3.3.3, P_l es la matriz de norma mínima en $\mathbb{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$; por el Corolario 3.3.5, P_l es una matriz mínima-real; y por el Teorema 3.1.4, P_l es aditiva. Los cuadrados de las normas de P y P_l son respectivamente 51.9375 y 53.75. \diamond

Ejemplo 3.3.8. Sean $\mathbf{a} := (26, 22, 18, 4)$ y $\mathbf{b} := (29, 27, 8, 3, 2, 1)$. Entonces

$$P = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 104 & 98 & 41 & 26 & 23 & 20 \\ 96 & 90 & 33 & 18 & 15 & 12 \\ 88 & 82 & 25 & 10 & 7 & 4 \\ 60 & 54 & -3 & -18 & -21 & -24 \end{pmatrix}.$$

$P \notin \mathbb{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. La matriz P_l de la última pareja de la sucesión de parejas del Teorema 3.3.2 es

$$P_l = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 231 & 219 & 81 & 41 & 32 & 20 \\ 215 & 203 & 65 & 25 & 16 & 4 \\ 196 & 184 & 46 & 6 & 0 & 0 \\ 54 & 42 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como en los ejemplos anteriores, P_l es la matriz de norma mínima en $\mathbb{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, P_l es una matriz mínima-real y aditiva. Los cuadrados de las normas de P y P_l son respectivamente $\frac{2747}{6} \sim 457.8333$ y $\frac{11777}{24} \sim 490.7083$. \diamond

En la Sección A.1 retomamos los Ejemplos 3.3.7 y 3.3.8 en los Ejemplos A.1.3 y A.1.4, donde presentamos las sucesiones completas de parejas $(P_0, I_0), \dots, (P_l, I_l)$ del Teorema 3.3.2.

Observación 3.3.9. En general, cuando $P \notin \mathbb{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, $|P| < |P_l|$. Esto es claro porque tanto P como P_l pertenecen a $\mathbb{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ y P es la matriz de norma mínima en $\mathbb{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Esto se puede ver en los Ejemplos 3.3.7 y 3.3.8. Ver también Comentario A.1.5. \diamond

Observación 3.3.10. En el conjunto de entradas positivas de P_l puede ocurrir que P y P_l no tengan el mismo tipo de orden. Para ilustrar eso considere el Ejemplo 3.3.8, donde

$$P(1, 3) = \frac{41}{12} < \frac{54}{12} = P(4, 2), \text{ mientras que}$$

$$P_l(1, 3) = \frac{81}{24} > \frac{42}{24} = P_l(4, 2). \diamond$$

Observación 3.3.11. El conjunto de coordenadas en las que P_l toma el valor cero tiene cierta similitud con el conjunto de coordenadas en las que P toma valores negativos. En general no son iguales. El primer conjunto siempre contiene al segundo (Proposición A.2.9), y en ocasiones la contención es propia, como en el Ejemplo 3.3.8. Ver Comentarios A.1.6 y A.1.7. \diamond

Apéndice A

Complemento de la Sección 3.3

En la Sección A.1 presentamos la demostración del Teorema 3.3.2, que se basa en un procedimiento recursivo por medio del cual se obtiene una sucesión de parejas $(P_0, I_0), \dots, (P_l, I_l)$, $1 \leq l \leq (p-1)(q-1)$, que cumple las condiciones de dicho teorema. También analizamos algunos aspectos interesantes sobre el comportamiento de las matrices y conjuntos escalera que se obtienen por medio de dicho procedimiento.

En la sección A.2 presentamos la demostración del Teorema 3.3.3 que afirma que la matriz P_l que se obtiene por el Teorema 3.3.2 es la matriz de norma mínima en $\mathbb{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Presentamos también algunos resultados técnicos que se usan la Sección A.1.

Como se comentó al principio del Capítulo 3, el procedimiento recursivo que está implícito en la demostración del Teorema 3.3.2, y que da como resultado la matriz $P_l \in \mathbb{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, puede implementarse a un algoritmo computacional. Dicho algoritmo es el contenido de la Sección A.3.

Consideramos para este Apéndice la notación que se usó en el Capítulo 3.

A.1. Prueba del Teorema 3.3.2

Para la prueba del Teorema 3.3.2, recordamos que los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} respecto a los que consideramos $\mathbb{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ y $\mathbb{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \subset \mathbb{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ están fijos, que son débilmente decrecientes, que sus entradas son enteros positivos y que sus sumas de coordenadas coinciden. Recordamos también que la matriz P de

la Sección 3.3, por el Teorema 3.2.4, es la proyección ortogonal del origen de $\mathbf{M}_{p \times q}$ en $\mathbf{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, y que P es doblemente graduada.

Teorema (3.3.2). *Supongamos que $P \notin \mathbf{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Entonces, para algún $1 \leq l \leq (p-1)(q-1)$ existe una sucesión de parejas $(P_0, I_0), \dots, (P_l, I_l)$, donde para $0 \leq j \leq l$, $P_j \in \mathbf{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ e I_j es un subconjunto escalera de \mathbb{R}° ; y tal que*

(1) $\forall k \in \{0, \dots, l\}$ la pareja (P_k, I_k) satisface las condiciones en (3.14).

(2) $\emptyset = I_0 \subsetneq I_1 \subsetneq \dots \subsetneq I_l \subseteq \mathbb{R}^\circ$.

(3) $P_0 = P$ y P_l es la primera de las matrices que pertenece a $\mathbf{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Demostración. La construcción de las parejas $(P_0, I_0), \dots, (P_l, I_l)$, $1 \leq l \leq (p-1)(q-1)$ que cumplen las condiciones del teorema es mediante un procedimiento recursivo.

El dato inicial es la pareja (P_0, I_0) , donde $P_0 := P$ e $I_0 = \emptyset$. Entonces la pareja (P_0, I_0) satisface las condiciones en (3.14): satisface (a) porque $P_0 = P$, (b) porque P es la proyección ortogonal del origen de $\mathbf{M}_{p \times q}$ en el espacio afín $\mathbf{U}(\emptyset) = \mathbf{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ (ver (3.6)), y (c) porque P es doblemente graduada. Entonces la pareja (P_0, I_0) cumple (1) del teorema con $l = 0$. Trivialmente, también (2). Note que $P_0 \notin \mathbf{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Este procedimiento terminará en el momento que obtengamos una matriz $P_l \in \mathbf{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ (es decir, que se cumpla también la condición (3) del teorema).

El paso recursivo es como sigue. Sea $0 \leq j < (p-1)(q-1)$ y supongamos que hemos construido las parejas $(P_0, I_0), \dots, (P_j, I_j)$, y que para estas parejas se cumplen (1) y (2) del teorema; es decir, que para $k = 0, \dots, j$, (P_k, I_k) satisface las condiciones en (3.14) y que $\emptyset = I_0 \subsetneq I_1 \subsetneq \dots \subsetneq I_j \subseteq \mathbb{R}^\circ$. Supongamos también que $P_0, \dots, P_j \notin \mathbf{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Entonces existe $\mathbf{k} \in \mathbb{R}$ tal que $P_j(\mathbf{k}) < 0$; y por el Lema A.2.5, cualquiera de tales \mathbf{k} 's pertenece a \mathbb{R}° . Como P_j es doblemente graduada fuera de I_j (por (c) de (3.14)), podemos seleccionar \mathbf{k}_j añadible a I_j tal que $P_j(\mathbf{k}_j) < 0$ ¹. Definimos entonces $I_{j+1} := I_j \cup \{\mathbf{k}_j\} \subseteq \mathbb{R}^\circ$ ². Entonces $\emptyset = I_0 \subsetneq I_1 \subsetneq \dots \subsetneq I_{j+1} \subseteq \mathbb{R}^\circ$. Por lo tanto los conjuntos escalera I_k , $0 \leq k \leq j+1$, cumplen (2) del teorema, y además $j+1 \leq (p-1)(q-1) = |\mathbb{R}^\circ|$. Sea $s_{\mathbf{k}_j} = -P(\mathbf{k}_j) > 0$. Sea $P_{j+1} = P_j + s_{\mathbf{k}_j} Q_{\mathbf{k}_j} \in \mathbf{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Así construimos la pareja (P_{j+1}, I_{j+1}) . Para ver que se cumple la condición (1) del teorema, debemos mostrar que (P_{j+1}, I_{j+1}) satisface las condiciones (a), (b) y (c) de (3.14).

¹ \mathbf{k}_j es máximo en $\mathbb{R}^\circ \setminus I_j$.

²Note que para $j = 0, 1, 2, \dots$ se tiene que $|I_j| = j$.

Probamos que (P_{j+1}, I_{j+1}) satisface (a). Esto sigue de que (P_j, I_j) satisface (a) y las definiciones de P_{j+1} e I_{j+1} .

Probamos que (P_{j+1}, I_{j+1}) satisface (b). Tanto P_j como $Q_{\mathbf{k}_j}$ son idénticamente cero en I_j . Por lo tanto P_{j+1} es idénticamente cero en I_j . Además, como $s_{\mathbf{k}_j} = -P(\mathbf{k}_j)$

$$P_{j+1}(\mathbf{k}_j) = [P_j + s_{\mathbf{k}_j} Q_{\mathbf{k}_j}](\mathbf{k}_j) = P_j(\mathbf{k}_j) - P_j(\mathbf{k}_j) \cdot 1 = 0.$$

Por lo tanto P_{j+1} es idénticamente cero en I_{j+1} ; esto es, $P_{j+1} \in \mathbf{U}(I_{j+1})$. Por otro lado, por el Lema 3.2.7, $Q_{\mathbf{k}_j}$ es ortogonal a $\mathbf{U}(I_{j+1})$. Como $P_{j+1} - P_j = s_{\mathbf{k}_j} Q_{\mathbf{k}_j}$, P_{j+1} es la proyección ortogonal de P_j en $\mathbf{U}(I_{j+1})$. Pero P_j es la proyección ortogonal del origen de $\mathbf{M}_{p \times q}(\mathbb{R})$ en el espacio afín $\mathbf{U}(I_j)$, así que por el Lema A.2.6, P_{j+1} es la proyección ortogonal del origen en el espacio $\mathbf{U}(I_{j+1})$. Por lo tanto la pareja (P_{j+1}, I_{j+1}) satisface (b).

Probamos que (P_{j+1}, I_{j+1}) satisface (c). Por (a), $P_{j+1} = P + \sum_{\mathbf{h} \in I_{j+1}} s_{\mathbf{h}} Q_{\mathbf{h}}$, donde, para todo $\mathbf{h} \in I_{j+1}$, $s_{\mathbf{h}}$ es un real positivo. Sea $M := \sum_{\mathbf{h} \in I_{j+1}} s_{\mathbf{h}} Q_{\mathbf{h}}$. Entonces M satisface la hipótesis (1) del Lema A.2.4. Como P_{j+1} es idénticamente cero en I_{j+1} , entonces para todo $\mathbf{h} \in I_{j+1}$, $M(\mathbf{h}) = -P(\mathbf{h})$; y como P es doblemente graduada, entonces M es débilmente creciente en renglones y columnas en I_{j+1} . Luego, M satisface la hipótesis (2) del Lema A.2.4. Aplicando dicho lema, concluimos que M es doblemente graduada fuera de I_{j+1} . Como P es doblemente graduada, entonces $P_{j+1} = P + M$ es doblemente graduada fuera de I_{j+1} . Por lo tanto la pareja (P_{j+1}, I_{j+1}) satisface (c).

Si $P_{j+1} \in \mathbb{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ el procedimiento termina. Si no, aplicamos nuevamente el paso recursivo. Note que si $j + 1 = (p - 1)(q - 1)$ necesariamente $P_{j+1} \in \mathbb{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Por lo tanto, existe $1 \leq l \leq (p - 1)(q - 1)$, tal que el procedimiento termina en l pasos. \diamond

Comentario A.1.1. Para $0 \leq j \leq l - 1$ la elección del punto \mathbf{k}_j añadible a I_j tal que $P_j(\mathbf{k}_j) < 0$ no es única. Por lo tanto, dependiendo de estas elecciones, del procedimiento recursivo de la prueba del teorema se pueden obtener diferentes sucesiones de parejas $(P_0, I_0), \dots, (P_l, I_l)$, $1 \leq l \leq (p - 1)(q - 1)$, posiblemente para diferentes valores de l , que cumplen las condiciones (1), (2) y (3). \diamond

Comentario A.1.2. Por el Teorema 3.3.3, para cualquier sucesión de parejas $(P_0, I_0), \dots, (P_l, I_l)$, $1 \leq l \leq (p - 1)(q - 1)$, que se obtenga por medio del Teorema 3.3.2, la matriz P_l (la que aparece en la última pareja de la sucesión) es siempre la misma (y es la única matriz de norma mínima en $\mathbb{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$).

También, por la Proposición A.2.8, para cualquier sucesión de parejas que se obtenga por medio del Teorema 3.3.2, el conjunto escalera I_l (el que aparece en la última pareja) es siempre el mismo. \diamond

A continuación presentamos un par de ejemplos de sucesiones de parejas $(P_0, I_0), \dots, (P_l, I_l)$, que se obtienen por medio del Teorema 3.3.2. Versiones sintetizadas de los Ejemplos A.1.3 y A.1.4 fueron presentadas en la Sección 3.3 (Ejemplos 3.3.7 y 3.3.8). Los ejemplos a continuación sirven para ilustrar varios comentarios que enseguida hacemos.

Ejemplo A.1.3. Sean $\mathbf{a} := (11, 7, 2, 1)$ y $\mathbf{b} := (9, 7, 3, 2)$. Entonces la matriz P definida en (3.2), que por el Teorema 3.2.4 es la proyección del origen de $\mathbb{M}_{4 \times 4}(\mathbb{R})$ al espacio afín $F(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ es

$$P = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 59 & 51 & 35 & 31 \\ 43 & 35 & 19 & 15 \\ 23 & 15 & -1 & -5 \\ 19 & 11 & -5 & -9 \end{pmatrix}.$$

Ahora aplicamos el procedimiento recursivo partiendo de $P_0 = P$ y de $I_0 = \emptyset$ para determinar la matriz $P_l \in \mathbb{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Como $P_0 \notin \mathbb{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, debemos elegir $\mathbf{k}_0 \in \mathbb{R}^\diamond$ añadible a I_0 , tal que $P_0(\mathbf{k}_0) < 0$. La única opción es $\mathbf{k}_0 = (4, 4)$. Entonces $s_{\mathbf{k}_0} := -P_0(\mathbf{k}_0) = \frac{9}{16}$. Con esto determinamos la pareja

$$I_1 := I_0 \cup \{\mathbf{k}_0\} = \{(4, 4)\},$$

$$P_1 := P_0 + s_{\mathbf{k}_0} Q_{\mathbf{k}_0} = P_0 + \frac{9}{16} Q_{44} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 15 & 13 & 9 & 7 \\ 11 & 9 & 5 & 3 \\ 6 & 4 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Note que aunque $P_1(3, 3) = 0$, $(3, 3) \notin I_1$, y que P_1 es doblemente graduada fuera de I_1 . Como $P_1 \notin \mathbb{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, debemos elegir $\mathbf{k}_1 \in \mathbb{R}^\diamond$ añadible a I_1 , tal que $P_1(\mathbf{k}_1) < 0$. Tenemos dos opciones que son $(3, 4)$ y $(4, 3)$. Como P_l no depende de esta elección (Comentario A.1.2) podemos elegir la que sea. Elegimos $\mathbf{k}_1 = (3, 4)$. Entonces $s_{\mathbf{k}_1} := -P_1(\mathbf{k}_1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Con esto determinamos la pareja

$$I_2 := I_1 \cup \{\mathbf{k}_1\} = \{(4, 4), (3, 4)\},$$

$$P_2 := P_1 + s_{\mathbf{k}_1} Q_{\mathbf{k}_1} = P_1 + \frac{1}{2} Q_{34} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 23 & 20 & 14 & 9 \\ 17 & 14 & 8 & 3 \\ 8 & 5 & -1 & 0 \\ 6 & 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como $P_2 \notin \mathbb{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, debemos elegir $\mathbf{k}_2 \in \mathbb{R}^\diamond$ añadible a I_2 , tal que $P_2(\mathbf{k}_2) < 0$. La única opción es $\mathbf{k}_2 = (4, 3)$. Entonces $s_{\mathbf{k}_2} := -P_2(\mathbf{k}_2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Con esto determinamos la pareja

$$I_3 := I_2 \cup \{\mathbf{k}_2\} = \{(4, 4), (3, 4), (4, 3)\},$$

$$P_3 := P_2 + s_{\mathbf{k}_2} Q_{\mathbf{k}_2} = P_2 + \frac{1}{2} Q_{43} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 47 & 41 & 26 & 18 \\ 35 & 29 & 14 & 6 \\ 17 & 11 & -4 & 0 \\ 9 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como $P_3 \notin \mathbb{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, debemos elegir $\mathbf{k}_3 \in \mathbb{R}^\diamond$ añadible a I_3 , tal que $P_3(\mathbf{k}_3) < 0$. La única opción es $\mathbf{k}_3 = (3, 3)$. Entonces $s_{\mathbf{k}_3} := -P_3(\mathbf{k}_3) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$. Con esto determinamos la pareja

$$I_4 := I_3 \cup \{\mathbf{k}_3\} = \{(4, 4), (3, 4), (4, 3), (3, 3)\},$$

$$P_4 := P_3 + s_{\mathbf{k}_3} Q_{\mathbf{k}_3} = P_3 + \frac{1}{3} Q_{33} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 16 & 14 & 8 & 6 \\ 12 & 10 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$P_l = P_4 \in \mathbb{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Los cuadrados de las normas de las matrices P_0, \dots, P_4 son respectivamente 51.9375, 52.5, 53, 53.5 y 53.75. Por el Teorema 3.3.3, P_4 es la matriz de norma mínima en $\mathbb{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$; por el Corolario 3.3.5, P_4 es una matriz mínima-real; finalmente, por el Teorema 3.1.4, P_4 es una matriz aditiva. \diamond

En el siguiente ejemplo omitimos los detalles, que se justifican como en el ejemplo anterior.

Ejemplo A.1.4. Sean $\mathbf{a} := (26, 22, 18, 4)$ y $\mathbf{b} := (29, 27, 8, 3, 2, 1)$. Una sucesión de parejas $(P_0, I_0), \dots, (P_l, I_l)$ que se obtiene aplicando el procedimiento recursivo es

$$P_0 = P = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 104 & 98 & 41 & 26 & 23 & 20 \\ 96 & 90 & 33 & 18 & 15 & 12 \\ 88 & 82 & 25 & 10 & 7 & 4 \\ 60 & 54 & -3 & -18 & -21 & -24 \end{pmatrix},$$

$$I_0 = \emptyset.$$

$$P_1 = \frac{1}{60} \begin{pmatrix} 528 & 498 & 213 & 138 & 123 & 60 \\ 488 & 458 & 173 & 98 & 83 & 20 \\ 448 & 418 & 133 & 58 & 43 & -20 \\ 276 & 246 & -39 & -114 & -129 & 0 \end{pmatrix},$$

$$I_1 = \{(4,6)\}.$$

$$P_2 = \frac{1}{60} \begin{pmatrix} 530 & 500 & 215 & 140 & 125 & 50 \\ 490 & 460 & 175 & 100 & 85 & 10 \\ 444 & 414 & 129 & 54 & 39 & 0 \\ 276 & 246 & -39 & -114 & -129 & 0 \end{pmatrix},$$

$$I_2 = \{(4,6), (3,6)\}.$$

$$P_3 = \frac{1}{240} \begin{pmatrix} 2163 & 2043 & 903 & 603 & 328 & 200 \\ 2003 & 1883 & 743 & 443 & 168 & 40 \\ 1819 & 1699 & 559 & 259 & -16 & 0 \\ 975 & 855 & -285 & -585 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$I_3 = \{(4,6), (3,6), (4,5)\}.$$

$$P_4 = \frac{1}{48} \begin{pmatrix} 433 & 409 & 181 & 121 & 64 & 40 \\ 401 & 377 & 149 & 89 & 32 & 8 \\ 363 & 339 & 111 & 51 & 0 & 0 \\ 195 & 171 & -57 & -117 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$I_4 = \{(4,6), (3,6), (4,5), (3,5)\}.$$

$$P_5 = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 223 & 211 & 97 & 41 & 32 & 20 \\ 207 & 195 & 81 & 25 & 16 & 4 \\ 188 & 176 & 62 & 6 & 0 & 0 \\ 78 & 66 & -48 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$I_5 = \{(4,6), (3,6), (4,5), (3,5), (4,4)\}.$$

$$P_6 = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 231 & 219 & 81 & 41 & 32 & 20 \\ 215 & 203 & 65 & 25 & 16 & 4 \\ 196 & 184 & 46 & 6 & 0 & 0 \\ 54 & 42 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$I_6 = \{(4,6), (3,6), (4,5), (3,5), (4,4), (4,3)\}.$$

$P_l = P_6 \in \mathbb{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Los cuadrados de las normas de P_0, \dots, P_6 son respectivamente (redondeando en la cuarta cifra) 457.8333, 464.2333, 464.4333, 472.1375, 472.1458, 482.7083 y 490.7083. Como en el ejemplo anterior, P_6 es la matriz de norma mínima en $\mathbb{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, es una matriz mínima-real y es una matriz aditiva. \diamond

Considere una sucesión de parejas $(P_0, I_0), \dots, (P_l, I_l)$, $1 \leq l \leq (p-1)(q-1)$ obtenida mediante el procedimiento recursivo de la prueba del Teorema 3.3.2. Escribimos

$$I_l = \{\mathbf{k}_0, \dots, \mathbf{k}_{l-1}\}, \quad (\text{A.1})$$

donde para $0 \leq j \leq l-1$, \mathbf{k}_j es el punto añadible a I_j considerado en el $j+1$ -ésimo paso recursivo; esto es, \mathbf{k}_j es tal que

$$\begin{aligned} (1) & P_j(\mathbf{k}_j) < 0. \\ (2) & I_{j+1} = I_j \cup \{\mathbf{k}_j\}. \\ (3) & P_{j+1} = P_j + s_{\mathbf{k}_j} Q_{\mathbf{k}_j}, \text{ donde } s_{\mathbf{k}_j} := -P_j(\mathbf{k}_j). \\ (4) & P_{j+1}(\mathbf{k}_j) = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Por el resto de esta sección, cada vez que nos refiramos a una sucesión de parejas $(P_0, I_0), \dots, (P_l, I_l)$, $l \leq (p-1)(q-1)$, que se obtiene por medio del procedimiento recursivo, consideramos a I_l como en (A.1), donde para $0 \leq j \leq l-1$, \mathbf{k}_j es como en (A.2).

Comentario A.1.5. Sea $(P_0, I_0), \dots, (P_l, I_l)$, $1 \leq l \leq (p-1)(q-1)$, una sucesión de parejas que se obtiene por el procedimiento recursivo de la prueba del Teorema 3.3.2. Sea $0 \leq j \leq l-1$ y sea \mathbf{k}_j el elemento de I_l que satisface (A.2). Por (1) del Teorema 3.3.2, las parejas (P_j, I_j) y (P_{j+1}, I_{j+1}) satisfacen las condiciones en (3.14). Por (b) de (3.14), P_j es ortogonal a $\mathbf{U}(I_j)$, y $P_{j+1} \in \mathbf{U}(I_{j+1}) \subseteq \mathbf{U}(I_j)$. Como $P_{j+1} - P_j = s_{\mathbf{k}_j} Q_{\mathbf{k}_j}$ es la diferencia de dos elementos de $\mathbf{U}(I_j)$, y como P_j es ortogonal a $\mathbf{U}(I_j)$, P_j es ortogonal a $Q_{\mathbf{k}_j}$. Por lo tanto, como $s_{\mathbf{k}_j} > 0$

$$\forall 0 \leq j \leq l-1, |P_{j+1}|^2 = |P_j|^2 + s_{\mathbf{k}_j}^2 |Q_{\mathbf{k}_j}|^2 > |P_j|^2;$$

esto es

$$|P_0| < |P_1| < \dots < |P_l|.$$

Esto puede verse en los Ejemplos A.1.3 y A.1.4. \diamond

La notación que presentamos a continuación se usa en los siguientes comentarios.

Para cada matriz $A \in \mathbf{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ definimos

$$\mathcal{N}(A) := \{\mathbf{h} \in \mathbb{R} : A(\mathbf{h}) < 0\}.$$

Considere una sucesión de parejas $(P_0, I_0), \dots, (P_l, I_l)$, $1 \leq l \leq (p-1)(q-1)$, que se obtiene por medio del procedimiento de la prueba del Teorem 3.3.2. Para todo $0 \leq j \leq l$, la pareja (P_j, I_j) satisface las condiciones en (3.14). En el procedimiento recursivo se observa que, para $0 \leq j \leq l-1$, $\mathcal{N}(P_j) \subseteq \mathbb{R}^\circ$ (por el Lema A.2.5). Para $j = l$, $\emptyset = \mathcal{N}(P_j) \subseteq \mathbb{R}^\circ$; así que

$$\forall 0 \leq j \leq l, \mathcal{N}(P_j) \subseteq \mathbb{R}^\circ.$$

Sea $0 \leq j \leq l$. Como P_j es idénticamente cero en I_j y doblemente graduada fuera de I_j , $\mathcal{N}(P_j) \cup I_j$ es un subconjunto escalera de \mathbb{R}° .

Comentario A.1.6. Sea $(P_0, I_0), \dots, (P_l, I_l)$, $1 \leq l \leq (p-1)(q-1)$, una sucesión de parejas que se obtiene por medio del procedimiento recursivo. Entonces $P \notin \mathbf{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ y $l \geq 1$. Por un lado, $P_0 = P$ tiene entradas negativas en el conjunto escalera $\mathcal{N}(P)$; por otro lado, P_l es idénticamente cero en el conjunto escalera I_l porque la pareja (P_l, I_l) satisface (b) de (3.14). Resulta interesante comparar los conjuntos escalera $\mathcal{N}(P)$ e I_l . Primeramente observamos que I_l puede tener elementos que no pertenecen a $\mathcal{N}(P)$, como podemos ver en el Ejemplo A.1.4, donde $(3, 5)$ y $(3, 6)$ pertenecen a I_6 pero no a $\mathcal{N}(P)$. Queda entonces la cuestión de si existen puntos en $\mathcal{N}(P)$ que no pertenezcan a I_l , la respuesta es que no; esto es, $\mathcal{N}(P) \subseteq I_l$. Este es un caso particular de la Proposición A.2.9, que asegura que para $0 \leq s \leq l-1$, $\mathcal{N}(P_s) \subseteq I_l$. \diamond

En el Ejemplo A.1.4, $\mathcal{N}(P) \subsetneq I_l$; en el Ejemplo A.1.3 se da la igualdad.

Comentario A.1.7. Sea $(P_0, I_0), \dots, (P_l, I_l)$, $1 \leq l \leq (p-1)(q-1)$, una sucesión de parejas que se obtiene por medio del procedimiento recursivo. Entonces, pueden existir $0 < s < l$ y $\mathbf{h}_0 \in \mathbb{R}^\circ$, tales que $P(\mathbf{h}_0) \geq 0$ y que $P_s(\mathbf{h}_0) < 0$; tal es el caso en el Ejemplo A.1.4, donde $P(3, 6) > 0$ y $P_1(3, 6) < 0$. En esta situación, como $\mathbf{h}_0 \in \mathcal{N}(P_s)$, por la Proposición A.2.9, $\mathbf{h}_0 \in I_l$.

También puede ocurrir que existan $0 < s < l$ y $\mathbf{h}_0 \in \mathbb{R}^\circ \setminus I_s$ tales que $P(\mathbf{h}_0) < 0$ pero $P_s(\mathbf{h}_0) \geq 0$; esto se puede ver en el Ejemplo A.1.3: el punto

$\mathbf{h}_0 = (3, 3) \in \mathbb{R}^\diamond \setminus I_1$, $P(3, 3) < 0$ pero $P_1(3, 3) = 0$. En esta situación, como $\mathbf{h}_0 \in \mathcal{N}(P)$, por la Proposición A.2.9, $\mathbf{h}_0 \in I_l$, esto es, $P_l(\mathbf{h}_0) = 0$. En el Ejemplo A.1.3, $P_3(3, 3) < 0$ y $P_4(3, 3) = 0$. \diamond

A.2. Algunas demostraciones

En esta sección presentamos algunos resultados técnicos que respaldan la prueba del Teorema 3.3.2, y presentamos la prueba del Teorema 3.3.3. Se incluyen también dos resultados que respaldan comentarios de la Sección A.1 (Proposiciones A.2.8 y A.2.9). Los siguientes lemas se usaron en la prueba del Teorema 3.3.2.

Lema A.2.1. *Sea $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^\diamond$ y sea $I \subseteq \mathbb{R}^\diamond$ el conjunto escalera rectangular*

$$I = \{\mathbf{h} \in \mathbb{R}^\diamond : \mathbf{h} \succeq \mathbf{k}\}.$$

Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Entonces existe una única matriz $M \in \langle Q_{\mathbf{h}} : \mathbf{h} \in I \rangle \subseteq \mathbf{F}(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ tal que para todo $\mathbf{h} \in I$, $M(\mathbf{h}) = \alpha(\mathbf{h})$.

Demostración. Escribimos $\mathbf{k} = (k, l)$. Sean

$$\begin{aligned} R_i &= \sum_{s=l}^q \alpha(i, s), \quad k \leq i \leq p; \\ C_j &= \sum_{r=k}^p \alpha(r, j), \quad l \leq j \leq q; \\ \Theta &= \sum_{(i,j) \in I} \alpha(i, j). \end{aligned}$$

Definimos M , de manera que para $(i, j) \in \mathbb{R}$

$$M(i, j) = \begin{cases} \frac{\Theta}{(k-1)(l-1)} & \text{si } 1 \leq i \leq k-1 \text{ y } 1 \leq j \leq l-1; \\ -\frac{C_j}{k-1} & \text{si } 1 \leq i \leq k-1, \text{ y } l \leq j \leq q; \\ -\frac{R_i}{l-1} & \text{si } k \leq i \leq p, \text{ y } 1 \leq j \leq l-1; \\ \alpha(i, j) & \text{si } (i, j) \in I; \end{cases}$$

esto es

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\Theta}{(k-1)(l-1)} & \cdots & \frac{\Theta}{(k-1)(l-1)} & -\frac{C_l}{k-1} & \cdots & -\frac{C_q}{k-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\Theta}{(k-1)(l-1)} & \cdots & \frac{\Theta}{(k-1)(l-1)} & -\frac{C_l}{k-1} & \cdots & -\frac{C_q}{k-1} \\ -\frac{R_k}{l-1} & \cdots & -\frac{R_k}{l-1} & \alpha(k, l) & \cdots & \alpha(k, q) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\frac{R_p}{l-1} & \cdots & -\frac{R_p}{l-1} & \alpha(p, l) & \cdots & \alpha(p, q) \end{pmatrix}.$$

Probamos que $M \in \langle Q_{\mathbf{h}} : \mathbf{h} \in I \rangle$. Por definición $M \in \mathbf{F}(\mathbf{0}, \mathbf{0})$, por lo tanto, para todo $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^\diamond$ existe $s_{\mathbf{h}} \in \mathbb{R}$ tal que

$$M = \sum_{\mathbf{h} \in \mathbb{R}^\diamond} s_{\mathbf{h}} Q_{\mathbf{h}}.$$

Por demostrar que para todo $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^\diamond - I$, $s_{\mathbf{h}} = 0$. Escribimos $\mathbf{h} = (i, j)$ y consideramos tres casos:

- caso 1.* $i \geq k, j < l$;
- caso 2.* $i < k, j \geq l$;
- caso 3.* $i < k, j < l$.

Por el Lema 3.2.9, y considerando la notación en dicho Lema tenemos que

$$s_{ij} = M(i, j) + \frac{1}{ij} S_{ij} + \frac{1}{j} \lambda_{ij} + \frac{1}{i} \mu_{ij}. \quad (\text{A.3})$$

Para el caso 1 tenemos las siguientes identidades que siguen de que $M \in \mathbf{F}(\mathbf{0}, \mathbf{0})$, de la definición de M y de que $i \geq k, j < l$.

$$\begin{aligned} M(i, j) &= -\frac{R_i}{l-1}. \\ \lambda_{ij} &= \sum_{t=j+1}^q M(i, t) = -\sum_{t=1}^j M(i, t) = j \cdot \frac{R_i}{l-1}. \\ \mu_{ij} &= \sum_{r=i+1}^p M(r, j) = -\sum_{r=i+1}^p \frac{R_r}{l-1}. \\ S_{ij} &= \sum_{r=i+1}^p \sum_{t=j+1}^q M(r, t) = -\sum_{r=i+1}^p \sum_{t=1}^j M(r, t) = j \sum_{r=i+1}^p \frac{R_r}{l-1}. \end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores en la expresión para s_{ij} en (A.3) tenemos que

$$s_{ij} = -\frac{R_i}{l-1} + \frac{1}{i} \sum_{r=i+1}^p \frac{R_r}{l-1} + \frac{R_i}{l-1} - \frac{1}{i} \sum_{r=i+1}^p \frac{R_r}{l-1} = 0.$$

El caso 2 es simétrico, así que la prueba es similar.

Para el caso 3 tenemos las siguientes identidades que siguen de que $M \in \mathbf{F}(\mathbf{0}, \mathbf{0})$, de la definición de M y de que $i < k$ y $j < l$.

$$\begin{aligned} M(i, j) &= \frac{\Theta}{(k-1)(l-1)}. \\ \lambda_{ij} &= \sum_{t=j+1}^q M(i, t) = -\sum_{t=1}^j M(i, t) = -j \cdot \frac{\Theta}{(k-1)(l-1)}. \\ \mu_{ij} &= \sum_{r=i+1}^p M(r, j) = -\sum_{r=1}^i M(r, j) = -i \cdot \frac{\Theta}{(k-1)(l-1)}. \\ S_{ij} &= \sum_{r=i+1}^p \sum_{t=j+1}^q M(r, t) = \sum_{r=1}^i \sum_{t=1}^j M(r, t) = ij \cdot \frac{\Theta}{(k-1)(l-1)}. \end{aligned}$$

Sustituyendo en A.3 tenemos que

$$\begin{aligned} s_{ij} &= \frac{\Theta}{(k-1)(l-1)} + \frac{\Theta}{(k-1)(l-1)} \\ &\quad - \frac{\Theta}{(k-1)(l-1)} - \frac{\Theta}{(k-1)(l-1)} = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto $M \in \langle Q_{\mathbf{h}} : \mathbf{h} \in I \rangle$. Para concluir, probamos la unicidad de M . Supongamos que existe otra matriz $M' \in \langle Q_{\mathbf{h}} : \mathbf{h} \in I \rangle$ tal que para todo $\mathbf{h} \in I$, $M'(\mathbf{h}) = \alpha(\mathbf{h})$. Por demostrar que $M' = M$. Tenemos que

$$\forall \mathbf{h} \in I, M'(\mathbf{h}) = \alpha(\mathbf{h}) = M(\mathbf{h}). \quad (\text{A.4})$$

Por el Lema 3.2.9, los coeficientes $s_{\mathbf{h}}$ de M tales que $M = \sum_{\mathbf{h} \in I} s_{\mathbf{h}} Q_{\mathbf{h}}$, están determinados por los valores de M en I . Similarmente para los coeficientes $s'_{\mathbf{h}}$ de M' . Entonces por (A.4), para todo $\mathbf{h} \in I$, $s'_{\mathbf{h}} = s_{\mathbf{h}}$. Por lo tanto $M' = M$. \diamond

Sea $I \subseteq \mathbb{R}^\diamond$ un conjunto escalera no vacío contenido en $\{2, \dots, p\} \times \{q-1, q\}$. Sea $t := \min\{i \in [p] : (i, q) \in I\}$. Como $I \neq \emptyset$, $(p, q) \in I$, por lo tanto $2 \leq t \leq p$. Si $\{i \in [p] : (i, q-1) \in I\} = \emptyset$, definimos los subconjuntos G_1 y G_2 de I como

$$G_1 := \emptyset \text{ y } G_2 := \{t, \dots, p\} \times \{q\}.$$

Si $\{i \in [p] : (i, q-1) \in I\} \neq \emptyset$, sea r su elemento mínimo. Entonces $2 \leq t \leq r \leq p$. En este caso definimos

$$G_1 := \{r, \dots, p\} \times \{q-1, q\} \text{ y } G_2 := \begin{cases} \{t, \dots, r-1\} \times \{q\} & \text{si } t < r, \\ \emptyset & \text{si } t = r. \end{cases}$$

Note que en cualquier caso $I = G_1 \cup G_2$ y esta unión es disjunta, y como $I \neq \emptyset$, también en cualquier caso al menos uno de G_1 , G_2 es no vacío. En la Figura A.1 se ilustra un ejemplo donde $G_1 \neq \emptyset$ y $G_2 \neq \emptyset$.

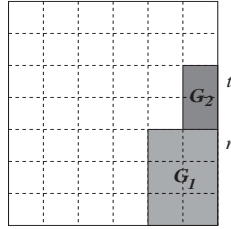


Figura A.1: $I = G_1 \cup G_2$.

Lema A.2.2. Sea $I \subseteq \mathbb{R}^\diamond$ un conjunto escalera no vacío de la forma $G_1 \cup G_2$ (como en la definición anterior). Sea $M \in \langle Q_{\mathbf{h}} : \mathbf{h} \in I \rangle \subseteq \mathbf{F}(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ tal que

i) $\forall \mathbf{h} \in G_2, s_{\mathbf{h}} > 0$.

ii) Si $G_1 \neq \emptyset$, $\forall r \leq i \leq p, M(i, q-1) \leq M(i, q)$.

Entonces $\forall 1 \leq i \leq t-1, M(i, q-1) \geq M(i, q)$.

Observación A.2.3. Una versión transpuesta del Lema A.2.2 también es válida: Considere un conjunto escalera $I \subseteq \mathbb{R}^\diamond$ y suponga que I está contenido en $\{p-1, p\} \times \{2, \dots, q\}$. Definimos para I los correspondientes subconjuntos G_1 y G_2 (la versión transpuesta de la definición anterior, con el correspondiente significado para t y r). Si $M \in \langle Q_{\mathbf{h}} : \mathbf{h} \in I \rangle \subseteq \mathbf{F}(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ es tal que

i) $\forall \mathbf{h} \in G_2, s_{\mathbf{h}} > 0$;

ii) si $G_1 \neq \emptyset$, $\forall r \leq j \leq q, M(p-1, j) \leq M(p, j)$.

Entonces $\forall 1 \leq j \leq t-1, M(p-1, j) \geq M(p, j)$.

Demostración (del Lema A.2.2). Sean

$$A := \sum_{\mathbf{h} \in G_1} s_{\mathbf{h}} Q_{\mathbf{h}} \text{ y } B := \sum_{\mathbf{h} \in G_2} s_{\mathbf{h}} Q_{\mathbf{h}},$$

de manera que $M = A + B$.

Si $G_1 \neq \emptyset$: Por el Lema A.2.1 existe una única matriz $Y \in \langle Q_{\mathbf{h}} : \mathbf{h} \in G_1 \rangle$ tal que para todo $\mathbf{h} \in G_1$, $Y(\mathbf{h}) = A(\mathbf{h})$; por lo tanto $A = Y$. De la forma de la matriz Y en la demostración del Lema A.2.1 sigue que las últimas dos columnas de $A = Y$ son de la forma

$$\begin{pmatrix} -\frac{C_{q-1}}{r-1} & -\frac{C_q}{r-1} \\ \vdots & \vdots \\ -\frac{C_{q-1}}{r-1} & -\frac{C_q}{r-1} \\ A(r, q-1) & A(r, q) \\ \vdots & \vdots \\ A(p, q-1) & A(p, q) \end{pmatrix},$$

donde para $j = q-1, q$, $C_j = \sum_{i=r}^p A(i, j)$. Como para todo $\mathbf{h} \in G_1$ $M(\mathbf{h}) = A(\mathbf{h})$ porque $B(\mathbf{h}) = 0$, entonces

$$C_{q-1} = \sum_{i=r}^p M(i, q-1) \text{ y } C_q = \sum_{i=r}^p M(i, q).$$

Por la hipótesis *ii*) del lema, $C_{q-1} \leq C_q$, entonces $-\frac{C_{q-1}}{r-1} \geq -\frac{C_q}{r-1}$, por lo tanto

$$\forall 1 \leq i \leq r-1, A(i, q-1) \geq A(i, q). \quad (\text{A.5})$$

Si $G_2 \neq \emptyset$: Para todo $t \leq l \leq r-1$ y para todo $1 \leq i \leq t-1$

$$Q_{lq}(i, q-1) = \frac{1}{(l-1)(q-1)} > 0 > -\frac{1}{l-1} = Q_{lq}(i, q).$$

Por definición $B = \sum_{l=t}^{r-1} s_{lq} Q_{lq}$, para ciertos reales s_{lq} , $t \leq l \leq r-1$. Por la hipótesis *i*) del lema, para $t \leq l \leq r-1$, $s_{lq} > 0$. Por lo tanto

$$\forall 1 \leq i \leq t-1, B(i, q-1) > B(i, q). \quad (\text{A.6})$$

Como al menos uno de G_1 y G_2 es no vacío y como $M = A + B$, sigue de (A.5) y (A.6) que

$$\forall 1 \leq i \leq t-1, M(i, q-1) \geq M(i, q). \quad \diamond$$

Lema A.2.4. Sea $I \subseteq \mathbb{R}^\circ$ un conjunto escalera no vacío. Sea $M \in \langle Q_{\mathbf{h}} : \mathbf{h} \in I \rangle \subseteq \mathbf{F}(\mathbf{0}, \mathbf{0})$. Suponga que M satisface

(1) Si $M = \sum_{\mathbf{h} \in I} s_{\mathbf{h}} Q_{\mathbf{h}}$ entonces para todo $\mathbf{h} \in I$, $s_{\mathbf{h}} > 0$. Alternativamente, $\forall \mathbf{h} \in I$, $\langle M, Q_{\mathbf{h}} \rangle > 0$.

(2) Para cualesquiera $\mathbf{k}, \mathbf{l} \in I$ con $\mathbf{k} \leq \mathbf{l}$ se tiene que $M(\mathbf{k}) \leq M(\mathbf{l})$. Entonces M es doblemente graduada fuera de I .

Demostración. Debemos probar que fuera de I , M es débilmente decreciente en renglones y en columnas. Trabajamos el caso de renglones (usamos el Lema A.2.2), el caso de columnas es similar (se usa la versión transpuesta del Lema A.2.2, ver Obs. A.2.3). Sea $(k, l) \in \mathbb{R}$ tal que $\{(k, l), (k, l+1)\} \cap I = \emptyset$. Por demostrar que $M(k, l) \geq M(k, l+1)$. Partimos a I en dos conjuntos

$$I_1 := \{(i, j) \in I : j \in \{l, l+1\}\}, \quad I_2 := I \setminus I_1.$$

Note que alguno de I_1, I_2 (pero no ambos) puede ser vacío. Sean

$$A := \sum_{\mathbf{h} \in I_1} s_{\mathbf{h}} Q_{\mathbf{h}}, \quad \text{y} \quad B := \sum_{\mathbf{h} \in I_2} s_{\mathbf{h}} Q_{\mathbf{h}},$$

de manera que $M = A + B$.

Si $I_2 \neq \emptyset$: Para todo $\mathbf{k} \in I_2$ y para todo $i \in [p]$

$$Q_{\mathbf{k}}(i, l) = Q_{\mathbf{k}}(i, l+1).$$

Por lo tanto

$$\forall i \in [p], \quad B(i, l) = B(i, l+1). \quad (\text{A.7})$$

Si $I_1 \neq \emptyset$: La matriz A toma valores diferentes de cero únicamente en puntos $(i, j) \in \mathbb{R}$ tales que $j \leq l+1$, por lo tanto, podemos restringir A a $\widehat{\mathbf{R}} := [p] \times [l+1]$ ($l+1$ podría ser q). Por lo tanto I_1 está contenido en las últimas dos columnas de $\widehat{\mathbf{R}}$. Partimos a I_1 como la unión disjunta de subconjuntos G_1 y G_2 como en la definición previa al Lema A.2.2. Siguiendo la notación de dicha definición, sea $t = \min\{i \in [p] : (i, l+1) \in I_1\}$. Como $\emptyset \neq I_1 \subseteq \mathbb{R}^\circ$, $2 \leq t \leq p$. Por la hipótesis (1), para todo $\mathbf{h} \in I$, $s_{\mathbf{h}} > 0$, en particular, para todo $\mathbf{h} \in G_2 \subseteq I_1 \subseteq I$, $s_{\mathbf{h}} > 0$. Por lo tanto A satisface la hipótesis *i*) del Lema A.2.2. Como $M = A + B$, para todo $\mathbf{h} \in \mathbb{R}$

$$A(\mathbf{h}) = \begin{cases} M(\mathbf{h}) - B(\mathbf{h}) & \text{si } I_2 \neq \emptyset; \\ M(\mathbf{h}) & \text{si } I_2 = \emptyset. \end{cases}$$

De la identidad anterior, de la hipótesis (2) y de (A.7), sigue que si $G_1 \neq \emptyset$, independientemente de que I_2 sea o no vacío

$$\forall i \in [p] : (i, l) \in G_1, A(i, l) \leq A(i, l + 1).$$

Por lo tanto A satisface la condición *ii*) del Lema A.2.2. Aplicando dicho lema, concluimos que

$$\forall 1 \leq i < t, A(i, l) \geq A(i, l + 1). \quad (\text{A.8})$$

Como $M = A + B$ y al menos uno de I_1, I_2 es no vacío, sigue de (A.7) y (A.8) que

$$\forall 1 \leq i < t, M(i, l) \geq M(i, l + 1).$$

Como $\{(k, l), (k, l + 1)\} \cap I = \emptyset$ y como $I_1 \subseteq I$, $\{(k, l), (k, l + 1)\} \cap I_1 = \emptyset$. Entonces por definición de t , $k < t$. Por lo tanto $M(k, l) \geq M(k, l + 1)$. \diamond

En el siguiente Lema usamos la consideración que se hizo al principio de este apéndice de que $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_p)$ y $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_q)$ tienen coordenadas positivas.

Lema A.2.5. *Sea $I \subseteq \mathbb{R}^\circ$ un conjunto escalera. Sea $M \in F(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ una matriz tal que*

- a) M es doblemente graduada fuera de I .
- b) $\forall \mathbf{h} \in I, M(\mathbf{h}) = 0$.
- c) $M \notin \mathbb{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Entonces $\{\mathbf{h} \in \mathbb{R} : M(\mathbf{h}) < 0\} \subseteq \mathbb{R}^\circ$.

Demostración. Probamos que las entradas del primer renglón y de la primera columna de M son positivas, esto implica el resultado del lema. Lo probamos para las entradas del primer renglón, para las entradas de la primera columna la prueba es similar. Supongamos que existe $j_0 \in [q]$ tal que $M(1, j_0) \leq 0$. Como M es doblemente graduada fuera de I y M es idénticamente cero en I , esto implica que $b_{j_0} = \sum_{i=1}^p M(i, j_0) \leq 0$. Esto es una contradicción porque b_{j_0} es positivo. Por lo tanto todas las entradas del primer renglón de M son positivas. \diamond

Lema A.2.6. *Sea \mathbf{A} un espacio afín en \mathbb{R}^m y $\widehat{\mathbf{A}}$ un subespacio afín de \mathbf{A} . Sean \mathbf{y} un punto en \mathbb{R}^m , \mathbf{a} la proyección ortogonal de \mathbf{y} en \mathbf{A} , y $\widehat{\mathbf{a}}$ la proyección ortogonal de \mathbf{a} en $\widehat{\mathbf{A}}$. Entonces $\widehat{\mathbf{a}}$ es la proyección ortogonal de \mathbf{y} en $\widehat{\mathbf{A}}$.*

Demostración. Debemos probar que $\widehat{\mathbf{a}} - \mathbf{y}$ es ortogonal a $\widehat{\mathbf{A}}$. Tenemos que

$$\widehat{\mathbf{a}} - \mathbf{y} = (\widehat{\mathbf{a}} - \mathbf{a}) + (\mathbf{a} - \mathbf{y}).$$

El vector $\widehat{\mathbf{a}} - \mathbf{a}$ es ortogonal a $\widehat{\mathbf{A}}$ porque $\widehat{\mathbf{a}}$ es la proyección de \mathbf{a} en $\widehat{\mathbf{A}}$; y el vector $(\mathbf{a} - \mathbf{y})$ es ortogonal a $\widehat{\mathbf{A}}$ porque, siendo \mathbf{a} la proyección de \mathbf{y} en \mathbf{A} , $(\mathbf{a} - \mathbf{y})$ es ortogonal a \mathbf{A} , y $\widehat{\mathbf{A}} \subseteq \mathbf{A}$. Por lo tanto $\widehat{\mathbf{a}} - \mathbf{y}$ es ortogonal a $\widehat{\mathbf{A}}$. \diamond

El siguiente Lema se requiere para probar el Teorema 3.3.3.

Lema A.2.7. *Sea $(P_0, I_0), \dots, (P_l, I_l)$, $1 \leq l \leq (p-1)(q-1)$, una sucesión de parejas que se obtiene por medio del Teorema 3.3.2. Sea $X \in \mathbb{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Si existe $\mathbf{k}_0 \in I_l$ tal que $X(\mathbf{k}_0) > 0$ entonces $|X| > |P_l|$.*

Demostración. Como la pareja (P_l, I_l) satisface (a) de (3.14) por la condición (1) del Teorema 3.3.2, para todo $\mathbf{k} \in I_l$ existe $s_{\mathbf{k}} \in \mathbb{R}$, $s_{\mathbf{k}} > 0$ tal que

$$P_l = P + \sum_{\mathbf{k} \in I_l} s_{\mathbf{k}} Q_{\mathbf{k}}.$$

Sea $Y = X - P_l \in \mathbb{F}(\mathbf{0}, \mathbf{0})$. Como (P_l, I_l) satisface (b) de (3.14), $P_l \in \mathbf{U}(I_l)$; esto es P_l es idénticamente cero en I_l . Como $X \in \mathbb{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ y $X(\mathbf{k}_0) > 0$ entonces

$$\forall \mathbf{k} \in I_l, Y(\mathbf{k}) \geq 0 \text{ y } Y(\mathbf{k}_0) > 0. \quad (\text{A.9})$$

Escribimos a Y en términos de la base $\mathcal{B} = \{Q_{\mathbf{k}} : \mathbf{k} \in \mathbb{R}^\diamond\}$ de $\mathbb{F}(\mathbf{0}, \mathbf{0})$; esto es

$$Y = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^\diamond} t_{\mathbf{k}} Q_{\mathbf{k}}, \text{ para ciertos } t_{\mathbf{k}} \in \mathbb{R}.$$

Por (A.9) y por el Lema 3.2.12

$$\forall \mathbf{k} \in I_l, t_{\mathbf{k}} \geq 0 \text{ y } t(\mathbf{k}_0) > 0.$$

Ahora

$$\begin{aligned} X &= P_l + Y = P + \sum_{\mathbf{k} \in I_l} s_{\mathbf{k}} Q_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{k} \in I_l} t_{\mathbf{k}} Q_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^\diamond \setminus I_l} t_{\mathbf{k}} Q_{\mathbf{k}} \\ &= P + \sum_{\mathbf{k} \in I_l} (s_{\mathbf{k}} + t_{\mathbf{k}}) Q_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^\diamond \setminus I_l} t_{\mathbf{k}} Q_{\mathbf{k}}. \end{aligned}$$

Como para todo $\mathbf{k} \in I_l$, $s_{\mathbf{k}} > 0$ y $t_{\mathbf{k}} \geq 0$, y como $t_{\mathbf{k}_0} > 0$ entonces

$$\forall \mathbf{k} \in I_l, |s_{\mathbf{k}} + t_{\mathbf{k}}| \geq |s_{\mathbf{k}}|, \text{ y } |s_{\mathbf{k}_0} + t_{\mathbf{k}_0}| > |s_{\mathbf{k}_0}|.$$

Por el Teorema 3.2.4 P es ortogonal a $\mathbf{F}(\mathbf{0}, \mathbf{0})$, entonces

$$|X|^2 = |P|^2 + \left| \sum_{\mathbf{k} \in I_l} (s_{\mathbf{k}} + t_{\mathbf{k}}) Q_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^\circ \setminus I_l} t_{\mathbf{k}} Q_{\mathbf{k}} \right|^2;$$

y como, por el Lema 3.2.3, \mathcal{B} es un conjunto ortogonal

$$\begin{aligned} |X|^2 &= |P|^2 + \sum_{\mathbf{k} \in I_l} (s_{\mathbf{k}} + t_{\mathbf{k}})^2 \cdot |Q_{\mathbf{k}}|^2 + \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^\circ \setminus I_l} (t_{\mathbf{k}})^2 \cdot |Q_{\mathbf{k}}|^2 \\ &> |P|^2 + \sum_{\mathbf{k} \in I_l} (s_{\mathbf{k}})^2 \cdot |Q_{\mathbf{k}}|^2 \\ &= \left| P + \sum_{\mathbf{k} \in I_l} s_{\mathbf{k}} Q_{\mathbf{k}} \right|^2 \\ &= |P_l|^2. \diamond \end{aligned}$$

Demostración (del Teorema 3.3.3). Consideramos una sucesión de parejas $(P_0, I_0), \dots, (P_l, I_l)$, $1 \leq l \leq (p-1)(q-1)$, que se obtiene por medio del Teorema 3.3.2 (note que en particular $P_l \in \mathbb{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$). Sea $X \in \mathbb{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, $X \neq P_l$. Por demostrar que $|X| > |P_l|$.

Si $X \notin \mathbf{U}(I_l)$, entonces existe $\mathbf{k}_0 \in I_l$ tal que $X(\mathbf{k}_0) > 0$. Luego, por el Lema A.2.7 $|X| > |P_l|$.

Si $X \in \mathbf{U}(I_l)$. Por la condición (b) de (3.14) P_l es la proyección ortogonal del origen de $\mathbf{M}_{p \times q}(\mathbb{R})$ en el espacio afín $\mathbf{U}(I_l)$; por lo tanto $|X| > |P_l|$. \diamond

Para la siguiente proposición queremos enfatizar el hecho de que (como se especificó al principio de este apéndice) los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} respecto a los que consideramos $\mathbf{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ y $\mathbb{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ están fijos.

Proposición A.2.8. *Para cualquier sucesión de parejas $(P_0, I_0), \dots, (P_l, I_l)$, $1 \leq l \leq (p-1)(q-1)$, que se obtenga por medio del Teorema 3.3.2, el conjunto escalera I_l (el último de cada sucesión) es siempre el mismo.*

Demostración. Supongamos que tenemos dos sucesiones $(P_0, I_0), \dots, (P_l, I_l)$ y $(P'_0, I'_0), \dots, (P'_s, I'_s)$, $l, s \leq (p-1)(q-1)$, que cumplen las condiciones del Teorema 3.3.2. Por demostrar que $I_l = I_s$. Por el Teorema 3.3.3, P_l , resp.

P_s , es la matriz de norma mínima en $\mathbb{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Por lo tanto $P_l = P_s$. Como las parejas (P_l, I_l) y (P_s, I_s) satisfacen (a) de (3.14) por la condición (1) del Teorema 3.3.2, entonces para todo $\mathbf{h} \in I_l$, resp. para todo $\mathbf{k} \in I_s$ existen reales positivos $s_{\mathbf{h}}$, resp. $r_{\mathbf{k}}$ tales que

$$\begin{aligned} P_l &= P + \sum_{\mathbf{h} \in I_l} s_{\mathbf{h}} Q_{\mathbf{h}}, \\ P_s &= P + \sum_{\mathbf{k} \in I_s} r_{\mathbf{k}} Q_{\mathbf{k}}. \end{aligned}$$

Si $I_l \neq \emptyset$, como para todo $\mathbf{h} \in I_l$, $s_{\mathbf{h}} > 0$, y $\{Q_{\mathbf{h}} : \mathbf{h} \in \mathbb{R}^\diamond\}$ es una base de $\mathbb{F}(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ (en particular es un conjunto linealmente independiente), entonces $\sum_{\mathbf{h} \in I_l} s_{\mathbf{h}} Q_{\mathbf{h}} \neq 0$, y $P_l \neq P_0 = P$. Similarmente si $I_s \neq \emptyset$, $P_s \neq P_0$. Por lo tanto, suponiendo que $P_l = P_s$ es igual a $P_0 = P$, entonces $I_l = I_s = \emptyset$.

Supongamos ahora que $P_l = P_s$ no es igual a $P_0 = P$. Entonces I_l e I_s son no vacíos. En este caso, (como $P_l = P_s$)

$$\sum_{\mathbf{h} \in I_l} s_{\mathbf{h}} Q_{\mathbf{h}} = \sum_{\mathbf{k} \in I_s} r_{\mathbf{k}} Q_{\mathbf{k}}.$$

Como $\{Q_{\mathbf{h}} : \mathbf{h} \in \mathbb{R}^\diamond\}$ es una base de $\mathbb{F}(\mathbf{0}, \mathbf{0})$, entonces $I_l = I_s$ (y para todo $\mathbf{h} \in I_l = I_s$, $s_{\mathbf{h}} = r_{\mathbf{h}}$). \diamond

Proposición A.2.9. *Sea $(P_0, I_0), \dots, (P_l, I_l)$, $1 \leq l \leq (p-1)(q-1)$, una sucesión de parejas que se obtiene por medio del Teorema 3.3.2. Supongamos que existen $0 \leq s < l$ y $\mathbf{h}_0 \in \mathbb{R}^\diamond$ tal que $P_s(\mathbf{h}_0) < 0$. Entonces $\mathbf{h}_0 \in I_l$.*

Note que en las hipótesis de la proposición pedimos $s < l$, esto es porque para $s = l$, $P_s = P_l \in \mathbb{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ por (3) del Teorema 3.3.2. Note también que el punto \mathbf{h}_0 en las hipótesis de la proposición puede ser tal que $P(\mathbf{h}_0) \geq 0$ (ver Comentario A.1.7).

Demostración. La prueba se hará por contradicción. Supongamos que existen $0 \leq s < l$ y $\mathbf{h}_0 \in \mathbb{R}^\diamond \setminus I_l$ tal que $P_s(\mathbf{h}_0) < 0$, y que \mathbf{h}_0 es máximo con esta propiedad; esto es,

$$\nexists \mathbf{h}_1 \in \mathbb{R}^\diamond \setminus I_l, \mathbf{h}_1 \triangleright \mathbf{h}_0 : P_s(\mathbf{h}_1) < 0; \tag{A.10}$$

probamos que entonces $P_l(\mathbf{h}_0) < 0$. Esto dará la contradicción ya que, por (3) del Teorema 3.3.2, $P_l \in \mathbb{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Como (P_l, I_l) satisface (a) de 3.14 por la condición (1) del Teorema 3.3.2,

$$\forall \mathbf{h} \in I_l \exists s_{\mathbf{h}} \in \mathbb{R}, s_{\mathbf{h}} > 0 : P_l = P + \sum_{\mathbf{h} \in I_l} s_{\mathbf{h}} Q_{\mathbf{h}}. \quad (\text{A.11})$$

Como $s < l$, por la condición (2) del Teorema 3.3.2, $I_s \subsetneq I_l$. Entonces

$$\begin{aligned} P_l &= P + \sum_{\mathbf{h} \in I_l} s_{\mathbf{h}} Q_{\mathbf{h}} \\ &= P + \sum_{\mathbf{h} \in I_s} s_{\mathbf{h}} Q_{\mathbf{h}} + \sum_{\mathbf{h} \in I_l \setminus I_s} s_{\mathbf{h}} Q_{\mathbf{h}} \\ &= P_s + \sum_{\mathbf{h} \in I_l \setminus I_s} s_{\mathbf{h}} Q_{\mathbf{h}}. \end{aligned}$$

Sea $C = \sum_{\mathbf{h} \in I_l \setminus I_s} s_{\mathbf{h}} Q_{\mathbf{h}}$, de manera que $P_l = P_s + C$. Para probar que $P_l(\mathbf{h}_0) < 0$ basta mostrar que $C(\mathbf{h}_0) \leq 0$ porque $P_s(\mathbf{h}_0) < 0$. La prueba se reduce entonces a mostrar que $C(\mathbf{h}_0) \leq 0$.

Se afirma que \mathbf{h}_0 es un punto añadible a I_l ; de lo contrario existiría en $\mathbb{R}^\circ \setminus I_l \subseteq \mathbb{R}^\circ \setminus I_s$ un $\mathbf{h}_1 \triangleright \mathbf{h}_0$. Como P_s es doblemente graduada fuera de I_s y $P_s(\mathbf{h}_0) < 0$, esto implica que $P_s(\mathbf{h}_1) < 0$, pero esto contradice (A.10).

Con las consideraciones anteriores, escribimos a $I_l \setminus I_s$ como la unión disjunta de los subconjuntos R_1, R_2 y U definidos de la siguiente manera, donde $\mathbf{h}_0 = (i_0, j_0)$:

$$\begin{aligned} R_1 &:= \{(i, j) \in I_l \setminus I_s : j = j_0\}; \\ R_2 &:= \{(i, j) \in I_l \setminus I_s : i \geq i_0, j \geq j_0 + 1\}; \\ U &:= \{(i, j) \in I_l \setminus I_s : i < i_0 \text{ ó } j < j_0\}; \end{aligned}$$

ver Figura A.2. Como $I_s \subsetneq I_l$, alguno de R_1, R_2 y U debe ser no vacío. Sean

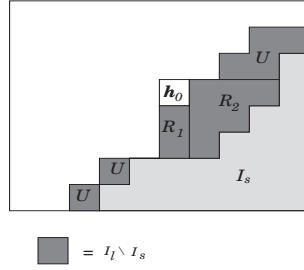
$$C_{R_1} := \sum_{\mathbf{h} \in R_1} s_{\mathbf{h}} Q_{\mathbf{h}}, \quad C_{R_2} := \sum_{\mathbf{h} \in R_2} s_{\mathbf{h}} Q_{\mathbf{h}} \text{ y } C_U := \sum_{\mathbf{h} \in U} s_{\mathbf{h}} Q_{\mathbf{h}}.$$

De manera que

$$C = C_{R_1} + C_{R_2} + C_U;$$

y como $P_l = P_s + C$

$$P_l = P_s + C_{R_1} + C_{R_2} + C_U.$$


 Figura A.2: $I_l \setminus I_s = R_1 \cup R_2 \cup U$.

Supongamos que $U \neq \emptyset$. Para todo $\mathbf{h} \in U$, $Q_{\mathbf{h}}(\mathbf{h}_0) = 0$. Por lo tanto

$$C_U(\mathbf{h}_0) = 0. \quad (\text{A.12})$$

Supongamos que $R_1 \neq \emptyset$. Para todo $\mathbf{h} \in R_1$, $Q_{\mathbf{h}}(\mathbf{h}_0) < 0$. Por (A.11), $s_{\mathbf{h}} > 0$ para todo $\mathbf{h} \in I_l$, y $R_1 \subseteq I_l$; por lo tanto

$$C_{R_1}(\mathbf{h}_0) < 0. \quad (\text{A.13})$$

Supongamos que $R_2 \neq \emptyset$. Si el punto $(i_0, j_0 + 1)$ no perteneciera a R_2 , sólo puede ser por alguna de las siguientes dos razones: o bien \mathbf{h}_0 pertenece a la última columna de \mathbb{R} (en cuyo caso $(i_0, j_0 + 1)$ no existe), o bien, $(i_0, j_0 + 1) \in I_s$. Cualquiera de las dos posibilidades implica que $R_2 = \emptyset$. Como $R_2 \neq \emptyset$, entonces el punto $(i_0, j_0 + 1)$ existe y pertenece a $R_2 \subseteq I_l \setminus I_s \subseteq I_l$. Considere el subconjunto escalera rectangular de \mathbb{R}^\diamond

$$J := \{\mathbf{h} \in \mathbb{R}^\diamond : \mathbf{h} \succeq (i_0, j_0 + 1)\} \subseteq I_l.$$

Por definición de R_2 y de J tenemos que $R_2 = I_l \setminus I_s \cap J$; de esto y de que $J \subseteq I_l$ sigue que para todo $\mathbf{h} \in J$

$$\begin{aligned} \mathbf{h} \in I_s &\implies \mathbf{h} \in J \cap I_s \\ \mathbf{h} \notin I_s &\implies \mathbf{h} \in I_l \setminus I_s \cap J = R_2. \end{aligned}$$

Por lo tanto $J = R_2 \cup (J \cap I_s)$ y esta unión es disjunta.

Afirmación. Para todo $\mathbf{h} \in J$, $C_{R_2}(\mathbf{h}) \geq 0$.

Prueba de la Afirmación. Primeramente probamos que para todo $\mathbf{h} \in J$, $P_s(\mathbf{h}) \leq 0$. Si $\mathbf{h} \in R_2$ entonces $\mathbf{h} \triangleright \mathbf{h}_0$ y $\mathbf{h} \notin I_s$. Como $P_s(\mathbf{h}_0) < 0$ y P_s es

doblemente graduada fuera de I_s (por (c) de (3.14)), $P_s(\mathbf{h}) < 0$. Si $\mathbf{h} \notin R_2$, como $J = R_2 \cup (J \cap I_s)$, entonces $\mathbf{h} \in I_s$, y como la pareja (P_s, I_s) satisface (b) de (3.14), $P_s(\mathbf{h}) = 0$. Por lo tanto, para todo $\mathbf{h} \in J$, $P_s(\mathbf{h}) \leq 0$.

Por otro lado, como la pareja (P_l, I_l) satisface (b) de (3.14), P_l es idénticamente cero en I_l , y como $J \subseteq I_l$, P_l es idénticamente cero en J . Por lo tanto

$$\forall \mathbf{h} \in J, C(\mathbf{h}) = (P_l - P_s)(\mathbf{h}) \geq 0. \quad (\text{A.14})$$

Note que para todo $\mathbf{k} \in (U \cup R_1)$ y para todo $\mathbf{h} \in J$, $Q_{\mathbf{k}}(\mathbf{h}) = 0$. Por lo tanto, para todo $\mathbf{h} \in J$, si $U \neq \emptyset$, $C_U(\mathbf{h}) = 0$, y si $R_1 \neq \emptyset$, $C_{R_1}(\mathbf{h}) = 0$. Por lo tanto, para todo $\mathbf{h} \in J$, $C(\mathbf{h}) = C_{R_2}(\mathbf{h})$. De esto y de (A.14) sigue que para todo $\mathbf{h} \in J$, $C_{R_2}(\mathbf{h}) \geq 0$. \diamond

Continuamos con la prueba del Lema, estamos en el supuesto de que $R_2 \neq \emptyset$. Como J es un conjunto rectangular, por el Lema A.2.1, existe una única matriz $Y \in \langle Q_{\mathbf{h}} : \mathbf{h} \in J \rangle$ tal que para todo $\mathbf{h} \in J$, $Y(\mathbf{h}) = C_{R_2}(\mathbf{h})$. Como $C_{R_2} \in \langle Q_{\mathbf{h}} : \mathbf{h} \in J \rangle$ porque $R_2 \subseteq J$, entonces $C_{R_2} = Y$. Por la forma de la matriz Y en el Lema A.2.1 y por la posición relativa de \mathbf{h}_0 respecto a J , tenemos que $C_{R_2}(\mathbf{h}_0) = -\frac{\sum_{j=j_0+1}^q C_{R_2}(i_0, j)}{j_0}$. Por la Afirmación tenemos que, para $j = j_0 + 1, \dots, q$, $C_{R_2}(i_0, j) \geq 0$. Por lo tanto

$$C_{R_2}(\mathbf{h}_0) \leq 0. \quad (\text{A.15})$$

Resumiendo: tenemos que $C = \sum_{\mathbf{h} \in I_l \setminus I_s} s_{\mathbf{h}} Q_{\mathbf{h}}$, que $I_l \setminus I_s = U \cup R_1 \cup R_2$, y que $C = C_U + C_{R_1} + C_{R_2}$. Como $I_s \subsetneq I_l$, $I_l \setminus I_s \neq \emptyset$. Por lo tanto al menos uno de U, R_1 y R_2 es no vacío. Entonces, por (A.12), (A.13) y (A.15) concluimos que $C(\mathbf{h}_0) \leq 0$. \diamond

A.3. El Algoritmo (Teorema 3.3.2)

En el Comentario A.1.2 se observa que mediante el procedimiento recursivo de la prueba del Teorema 3.3.2 se pueden obtener diferentes sucesiones de parejas $(P_0, I_0), \dots, (P_l, I_l)$, $1 \leq l \leq (p-1)(q-1)$, dependiendo de cómo elegimos, para $0 \leq j \leq l-1$, el punto $\mathbf{k}_j \in \mathbb{R}^\diamond$ añadible a I_j , tal que $P_j(\mathbf{k}_j) < 0$. En el mismo comentario se observa que, para cualquier sucesión de parejas que se obtenga mediante el procedimiento recursivo, la matriz P_l (la que aparece en la última pareja) es siempre la misma (por el Teorema

3.3.3, ver también Comentario 3.3.4). Esta matriz P_l es la que nos interesa en este trabajo, no tanto la sucesión de parejas. Por lo tanto, basta precisar una manera de elegir, para $0 \leq j \leq l-1$, un punto $\mathbf{k}_j \in \mathbb{R}^\diamond$ añadible a I_j tal que $P_j(\mathbf{k}_j) < 0$, para poder implementar este procedimiento recursivo a un algoritmo computacional.

Note que para cualquier conjunto escalera $J \subseteq \mathbb{R}^\diamond$, el conjunto de puntos añadibles a J no tiene dos elementos en la misma columna (el de arriba no sería añadible a J).

Ahora, sea $0 \leq j \leq l-1$. Entonces el conjunto

$$A_j := \{\mathbf{h} \in \mathbb{R}^\diamond : \mathbf{h} \text{ es añadible a } I_j \text{ y } P_j(\mathbf{h}) < 0\}$$

no tiene dos elementos en una misma columna. Entonces elegimos como \mathbf{k}_j al elemento de A_j cuya segunda coordenada sea la mayor (el que esté más a la derecha), este elemento está bien definido. Esta manera precisa de elegir, para $0 \leq j \leq l-1$, el elemento \mathbf{k}_j , nos permite implementar el procedimiento recursivo a un algoritmo computacional, que enseguida presentamos.

El algoritmo trabaja de la siguiente manera. Tiene por entrada dos vectores débilmente decrecientes \mathbf{a} y \mathbf{b} , con coordenadas en \mathbb{N} (positivas), tales que $|\mathbf{a}| = N = |\mathbf{b}|$. Primeramente calcula la matriz P (ver Teorema 3.2.4). En este momento se crean un par de listas: la lista LP que inicialmente tiene como único elemento a $P_1 = P$, y que finalmente será la lista de todas las matrices P_1, \dots, P_l (note que para el algoritmo el primer valor de los subíndices es 1); y la lista LI , que inicialmente tiene como único elemento a $I_1 = \emptyset$, y que finalmente será la lista de todos los conjuntos escalera I_1, \dots, I_l . Luego entra en un ciclo. Dentro de este ciclo considera la última matriz P_n y el último conjunto escalera I_n de las listas LP y LI respectivamente (la rutina entra varias veces a este ciclo, y cada vez que entra, con excepción de la última, agrega un elemento a LP y uno a LI). Ya en el ciclo hay una toma de decisión. Si $P_n \in \mathbb{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ el algoritmo termina y da por salida las listas LP y LI . Si $P_n \notin \mathbb{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, entonces hace varias cosas:

- a) Calcula la lista de puntos añadibles a I_n .
- b) Escoge entre los elementos del inciso a), aquellos en los que P_n toma valores negativos.
- c) Define como \mathbf{k} , entre los elementos del inciso b), el que tenga segunda coordenada mayor (que esté más a la derecha).
- d) Define $s_{\mathbf{k}} := -P_n(\mathbf{k})$.

- e) Calcula la matriz $Q_{\mathbf{k}}$ (ver la definición en (3.1)).
- f) Define $I\text{-nueva} := I_n \cup \{\mathbf{k}\}$ y $P\text{-nueva} := P_n + s_{\mathbf{k}}Q_{\mathbf{k}}$.
- g) Agrega $I\text{-nueva}$ a LI y $P\text{-nueva}$ a LP .
- h) Vuelve a entrar al ciclo.

En la demostración del Teorema 3.3.2 se prueba que eventualmente se obtiene una matriz $P_l \in \mathbb{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Por lo tanto este algoritmo tiene fin. El algoritmo tiene por salida las listas LP y LI .

El algoritmo consta de cinco rutinas, las primeras cuatro son auxiliares y la quinta es el algoritmo propiamente dicho. Las rutinas son

- 1.- **es-en-tab** (M)
- 2.- **añadibles** (I, p, q)
- 3.- **proyeccion** (\mathbf{a}, \mathbf{b})
- 4.- **matQ_{ij}** (\mathbf{h}, p, q)
- 5.- **algoritmo** (\mathbf{a}, \mathbf{b})

A continuación presentamos las rutinas y explicamos lo que hace cada una.

1.- **es-en-tab**(M)

Entrada: Una matriz M con entradas en \mathbb{Q} (en esta rutina no se usa que la matriz M tiene entradas en \mathbb{Q} , pero en la rutina del algoritmo, las matrices que se consideran tienen entradas en \mathbb{Q}).

Salida: 1 si M tiene entradas no negativas. -1 si M tiene alguna entrada negativa.

```
es-en-tab := function( $M$ )
local  $L, min, resultado$ ;
```

```
 $L$  := Concatenation( $M$ );
```

```
 $min$  := Minimum( $L$ );
```

```
if ( $min < 0$ ) then
```

```
     $resultado$  :=  $-1$ ;
```

```
else
```

```
     $resultado$  :=  $1$ ;
```

```
fi;
```

```
return  $resultado$ ;
```

```
end;
```

2.- **añadibles**(I, p, q)

Entrada: Un conjunto escalera $I \subseteq \mathbb{R}^\diamond$, y las dimensiones p y q de $\mathbf{B}(p, q)$.

Salida: La lista de los puntos de \mathbb{R}^\diamond que son añadibles a I .

```

añadibles:=function( $I, p, q$ )
local  $TI, bpq1, i, j, candidatos, Tbpq1, k, c, list-añad, Tcandidatos$ ;

 $TI := \text{Length}(I)$ ;
#  $bpq1$  será la lista de todos los puntos de  $\mathbb{R}^\diamond$ .
 $bpq1 := [ ]$ ;
for  $i$  in  $[2..p]$  do
  for  $j$  in  $[2..q]$  do
    Add( $bpq1, [i, j]$ );
  od;
od;
#  $candidatos$  será la lista de elementos de  $\mathbb{R}^\diamond \setminus I$ .
 $candidatos := [ ]$ ;
 $Tbpq1 := \text{Length}(bpq1)$ ;
for  $k$  in  $[1..Tbpq1]$  do
  if ( $bpq1[k]$  in  $I$ ) then
     $c := 0$ ;
    #  $c := 0$  equivale a indicar que no haga nada.
  else
    Add( $candidatos, bpq1[k]$ );
  fi;
od;
#  $list-añad$  será la lista de puntos en  $\mathbb{R}^\diamond$  añadibles a  $I$ .
 $list-añad := [ ]$ ;
 $Tcandidatos := \text{Length}(candidatos)$ ;
for  $k$  in  $[1..Tcandidatos]$  do
   $i := candidatos[k][1]$ ;
   $j := candidatos[k][2]$ ;
  if ( $i < p$ ) and ( $j < q$ ) then
    if ( $[i + 1, j]$  in  $I$ ) and ( $[i, j + 1]$  in  $I$ ) then
      Add( $list-añad, candidatos[k]$ );
    fi;
  fi;
  if ( $i = p$ ) and ( $j < q$ ) then
    if ( $[i, j + 1]$  in  $I$ ) then

```

```

    Add(list-añad, candidatos[k]);
  fi;
fi;
if (i < p) and (j = q) then
  if ([i + 1, j] in I) then
    Add(list-añad, candidatos[k]);
  fi;
fi;
if (i = p) and (j = q) then
  if (TI = 0) then
    Add(list-añad, candidatos[k]);
  fi;
fi;
od;
return list-añad;
end;

```

3.– **proyeccion(a, b)**

Entrada: Dos vectores débilmente decrecientes \mathbf{a} y \mathbf{b} , con coordenadas en \mathbb{N} , tales que $|\mathbf{a}| = N = |\mathbf{b}|$.

Salida: La matriz (lista de listas) $P = P[i][j]$, tal que para $1 \leq i \leq p$ y $1 \leq j \leq q$, $P[i][j] := \frac{a_i}{q} + \frac{b_j}{p} - \frac{N}{pq}$ (ver Teorema 3.2.4).

```

proyeccion:=function(a, b)
local p, q, N, i, j, R, P, Pij;

```

```

p := Length(a);
q := Length(b);
N := Sum(a);
P := [ ];
for i in [1..p] do
  # R será el i-ésimo renglón de P.
  R := [ ];
  for j in [1..q] do
    Pij := a[i]/q + b[j]/p - N/(p * q);
    Add(R, Pij);
  od;
  Add(P, R);
od;

```

```
return P;
end;
```

4.- **matQ_{ij}(**h**, *p*, *q*)**

Entrada: Un punto $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^\diamond$ y las dimensiones *p* y *q*. Si $\mathbf{h} = (i, j)$, entra como la lista $\mathbf{h} := [i, j]$.

Salida: La matriz $Q_{\mathbf{h}}$, como una lista de listas (ver definición de $Q_{\mathbf{h}}$ en (3.1)).

```
matQij:=function(h, p, q)
```

```
local i, j,  $Q_{\mathbf{h}}$ , k, l, N,  $N_l$ ;
```

```
i := h[1];
```

```
j := h[2];
```

```
 $Q_{\mathbf{h}}$  := [ ];
```

```
# Construimos los primeros i - 1 renglones de  $Q_{\mathbf{h}}$ .
```

```
for k in [1..i - 1] do
```

```
  # N será el k-ésimo renglón de  $Q_{\mathbf{h}}$ , se construye en tres partes,
```

```
  # 1.- para l < j, 2.- para l = j, 3.- para l > j.
```

```
  N := [ ];
```

```
  for l in [1..j - 1] do
```

```
    #  $N_l$  es la l-ésima entrada de N.
```

```
     $N_l := 1/((i - 1)*(j - 1))$ ;
```

```
    Add(N,  $N_l$ );
```

```
  od;
```

```
   $N_l := -1/(i - 1)$ ;
```

```
  Add(N,  $N_l$ );
```

```
  for l in [j + 1..q] do
```

```
    Add(N, 0);
```

```
  od;
```

```
  Add( $Q_{\mathbf{h}}$ , N);
```

```
od;
```

```
# En el siguiente paso definimos el renglón i en tres partes,
```

```
# 1.- para l < j, 2.- para l = j, 3.- para l > j.
```

```
N := [ ];
```

```
for l in [1..j - 1] do
```

```
   $N_l := -1/(j - 1)$ ;
```

```
  Add(N,  $N_l$ );
```

```
od;
```

```
Add(N, 1);
```

```

for  $l$  in  $[j + 1..q]$  do
  Add( $N$ , 0);
od;
Add( $Q_h$ ,  $N$ );
# Los renglones  $i + 1, \dots, p$  de  $Q_h$  serán idénticamente cero.
for  $k$  in  $[i + 1..p]$  do
   $N := [ ]$ ;
  for  $l$  in  $[1..q]$  do
    Add( $N$ , 0);
  od;
  Add( $Q_h$ ,  $N$ );
od;
return  $Q_h$ ;
end;

```

5.– algoritmo(\mathbf{a} , \mathbf{b})

Entrada: Dos vectores débilmente decrecientes \mathbf{a} y \mathbf{b} , con coordenadas en \mathbb{N} , tales que $|\mathbf{a}| = N = |\mathbf{b}|$.

Salida: Dos listas, la lista $LP := [P_1, \dots, P_l]$ de matrices en $\mathbb{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, y la lista $LI := [I_1, \dots, I_l]$ de subconjuntos escalera de \mathbb{R}° , que cumplen las condiciones del Teorema 3.3.2, donde $l \leq (p - 1)(q - 1)$. En particular $P_l \in \mathbb{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Por cuestión práctica de programación, los elementos iniciales de las listas son $P_1 := P$ (en vez de P_0) e $I_1 := \emptyset$ (en vez de I_0).

algoritmo := function(\mathbf{a} , \mathbf{b})

local p , q , P , LP , LI , Z , n , *signo*, *pts-añad*, *añad-neg*, *Tañad*, t , *Tañad-neg*, *lista-ys*, *maximo-ys*, \mathbf{k} , i , j , $s_{\mathbf{k}}$, $Q_{\mathbf{k}}$, *I-nueva*, *P-nueva*, *Dos-Listas*;

$p := \text{Length}(\mathbf{a})$;

$q := \text{Length}(\mathbf{b})$;

$P := \text{proyeccion}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$;

LP será finalmente la lista $[P_1, P_2, \dots, P_l]$ y LI será finalmente la lista

$[I_1, I_2, \dots, I_l]$.

$LP := [P]$;

$LI := [[]]$;

El siguiente "while.^{es} el paso recursivo. La rutina siempre

entra en este "while", pero cuando el último elemento de la lista LP

pertenece a $\mathbb{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, entonces indica "break";z termina el procedimiento.

$Z := 1$;

```

while ( $Z = 1$ ) do
   $n := \text{Length}(LP)$ ;
   $signo := \mathbf{es-en-tab}(LP[n])$ ;
  if ( $signo = 1$ ) then
    break;
  else
    # Si  $LP[n]$  no está en  $\mathbb{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ , ahora determinamos los puntos
    # añadibles a  $LI[n]$  en los que  $LP[n]$  toma valores negativos.
     $pts-añad := \mathbf{añadibles}(LI[n], p, q)$ ;
    #  $añad-neg$  será la lista de puntos añadibles a  $LI[n]$  en los que
    #  $LP[n]$  toma valores negativos.
     $añad-neg := [ ]$ ;
     $Tañad := \text{Length}(pts-añad)$ ;
    for  $t$  in  $[1..Tañad]$  do
       $i := pts-añad[t][1]$ ;
       $j := pts-añad[t][2]$ ;
      if ( $LP[n][i][j] < 0$ ) then
        Add( $añad-neg$ ,  $pts-añad[t]$ );
      fi;
    od;
     $Tañad-neg := \text{Length}(añad-neg)$ ;
    # Aquí determinamos el (único) punto cuya segunda coordenada es la
    # mayor entre los elementos de  $añad-neg$  (el que está más a la derecha).
    # Representamos este punto con la variable  $\mathbf{k}$ .
    #  $lista-ys$  será la lista de los valores de las segundas coordenadas de
    # los elementos de  $añad-neg$ .
     $lista-ys := [ ]$ ;
    for  $t$  in  $[1..Tañad-neg]$  do
      Add( $lista-ys$ ,  $añad-neg[t][2]$ );
    od;
     $maximo-ys := \text{Maximum}(lista-ys)$ ;
    for  $t$  in  $[1..Tañad-neg]$  do
      if ( $añad-neg[t][2] = maximo-ys$ ) then
         $\mathbf{k} := añad-neg[t]$ ;
      fi;
    od;
     $i := \mathbf{k}[1]$ ;
     $j := \mathbf{k}[2]$ ;

```

```
 $s_{\mathbf{k}} := -LP[n][i][j];$   
 $Q_{\mathbf{k}} := \mathbf{mat}Q_{ij}(\mathbf{k}, p, q);$   
 $I\text{-nueva} := \text{Concatenation}(LI[n], [\mathbf{k}]);$   
 $P\text{-nueva} := LP[n] + s_{\mathbf{k}} * Q_{\mathbf{k}};$   
Add(LI, I-nueva);  
Add(LP, P-nueva);  
fi;  
od;  
Dos-Listas := [LP, LI];  
return Dos-Listas;  
end;
```

Bibliografía

- [1] D. Avella-Alaminos, E. Vallejo: Kronecker products and RSK-correspondences for 3-dimensional matrices. En preparación.
- [2] A. Brøndsted: *An Introduction to Convex Polytopes*. Springer Verlag, New York Inc. (1983).
- [3] R.A. Brualdi: Minimal nonnegative integral matrices and uniquely determined (0,1)-matrices. *Linear Algebra Appl.* **341**, 351-356 (2002).
- [4] S. Brunetti, A. Del Lungo, Y. Gerard: On the computational complexity for reconstructing three-dimensional lattice sets from their two-dimensional X-rays. *Linear Algebra Appl.* **339**, 59-73 (2001).
- [5] P.C. Fishburn: *Mathematics of Decision Theory*, Mouton, Paris (1972).
- [6] P.C. Fishburn: Cancellation conditions for multiattribute preferences on finite sets. In: M.H. Karwan, J. Spronk, J. Wallenius (Eds), *Essays in Decision Making*. Berlin, Springer, pp. 157-167 (1997).
- [7] P.C. Fishburn: Cancellation conditions for finite two-dimensional additive measurement. *Journal of Mathematical Psychology* **45**, 2-26 (2001).
- [8] P.C. Fishburn, J.C. Lagarias, J.A. Reeds, L.A. Shepp: Sets uniquely determined by projections on axes II, Discrete case. *Discrete Mathematics* **91**, 149-159 (1991).
- [9] P.C. Fishburn, L.A. Shepp: Sets of uniqueness and additivity in integer lattices. In: G.T. Herman, A. Kuba (eds), *Discrete Tomography: Foundations, Algorithms and Applications*, Birkhäuser, Boston, pp. 35-58 (1999).

- [10] P. Gritzmann, S. de Vries: On the algorithmic inversion of the discrete Radon transform. *Theor. Comp. Science* **281**, 455-469 (2001).
- [11] B. Grünbaum: *Convex Polytopes*. Springer Verlag, 2nd. ed., Graduate Texts in Mathematics 221, (2003).
- [12] G. Hardy, J.E. Littlewood, G. Pólya: *Inequalities*. Cambridge Univ. Press, Second ed., (1952).
- [13] T.Y. Kong, G.T. Herman: On which grids can tomographic equivalence of binary pictures be characterized in terms of elementary switching operations?, *Int. J. Imaging Syst. Technol.* **9**, 118-125 (1998).
- [14] T.Y. Kong, G.T. Herman: Tomographic equivalence and switching operations. In: G.T. Herman, A. Kuba (eds), *Discrete Tomography: Foundations, Algorithms and Applications*, Birkhäuser, Boston, pp. 59-84 (1999).
- [15] D.H. Krantz, R.D. Luce, P. Suppes, A. Tversky: *Foundations of Measurement (Vol I)*. Academic Press, New York (1971).
- [16] A. Kuba, G.T. Herman: Discrete tomography: A historical overview. In: G.T. Herman, A. Kuba (eds), *Discrete Tomography. Foundations, Algorithms and Applications*, Birkhäuser, Boston, pp. 3-34 (1999).
- [17] A.W. Marshall, I. Olkin: *Inequalities: Theory of Majorization and its Applications*, Academic Press (1979).
- [18] S. Onn, E. Vallejo: Permutohedra and minimal matrices. *Linear Algebra Appl.* **412**, 471-489 (2006).
- [19] C.H. Papadimitriou, K. Steiglitz, *Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity*. Prentice Hall, (1982).
- [20] D. Romero: Easy transportation-like problems on K -dimensional arrays. *Journal of Optimization Theory and Applications* **66**, 137-147 (1990).
- [21] D. Romero (comunicación privada a E. Vallejo).
- [22] M. Santoyo, E. Vallejo: Additivity obstructions for integral matrices and pyramids. *Theoretical Computer Science* **406**, 136-145 (2008).

- [23] A. Torres-Cházaro, E. Vallejo: Sets of uniqueness and minimal matrices. *Journal of Algebra* **208**, 444-451 (1998).
- [24] E. Vallejo: Reductions of additive sets, sets of uniqueness and pyramids. *Discrete Mathematics* **173**, 257-267 (1997).
- [25] E. Vallejo: Plane partitions and characters of the symmetric group. *Journal of Algebraic Combinatorics* **11**, 79-88 (2000).
- [26] E. Vallejo: The classification of minimal matrices of size $2 \times q$. *Linear Algebra and its Applications* **340**, 169-181 (2002).
- [27] E. Vallejo: A characterization of additive sets. *Discrete Mathematics* **259**, 201-210 (2002).
- [28] E. Vallejo: Minimal matrices and discrete tomography. *Electronic Notes in Discrete Mathematics* **20**, 113-132 (2005).
- [29] E. Vallejo: Uniqueness and additivity for n -dimensional binary matrices with respect to their 1-marginals. In: G.T. Herman, A. Kuba (eds), *Advances in Discrete Tomography and its Applications*, Birkhäuser, Boston, pp. 83-112 (2007).
- [30] G.M. Ziegler: *Lectures on Polytopes*. Springer Verlag, New York Inc. (1995).

Índice alfabético

- F -aditiva, 88
 - no -, 88
- F -aditividad, XIII, 87
 - obstrucción de -, 88
- π -sucesión, XV, 105
- 1-márgenes
 - de matriz de dimensión 2, XI, 36
 - de matriz de dimensión 3, VIII, 30
- añadible, XVII, 107
- aditividad
 - obstrucción de -, XII, 58
 - solución de -, 37
- afínmente
 - dependiente, 3
 - independiente, 3
- afín
 - base, 3
 - dimensión, 3
 - envolvente, 3
 - subespacio
 - de \mathbb{R}^m , 2
 - de otro subesp. afín, 2
 - generado, 3
- algoritmo, 145
- base de una matriz, 6
- cardinalidad mínima, 59
- condición de Fishburn, 66
- configuración
 - débilmente mala, IX, 31
 - de peso mínimo, 39
 - peso de una -, IX, 32
 - mala, IX, 32
- cono
 - generado, 5
 - subconjunto de \mathbb{R}^m , 5
- convexo(a)
 - combinación, 4
 - envolvente, 4
 - subconjunto de \mathbb{R}^m , 4
- cuasidiagrama de flechas, 52
 - flecha que completa un -, 52
- diagrama de flechas, XII, 52
 - cardinalidad de un -, 59
 - disconexo, 66
- doblemente graduada, XI, 36
 - fuera de un conjunto, 107
- escalera, XVI, 107
 - rectangular, 107
- extiende el orden, 97
- flecha, XII, 51
 - punto final de una -, XII, 51
 - punto inicial de una -, XII, 51
- fusión
 - de dos vectores, 54
 - de tres vectores, 33

hiperplano, 4

línea por dos puntos, 2

lista completa de obstrucciones, 72

matriz

de dimensión 2, XI, 36

aditiva, XI, 36

mínima, XV, 105

mínima-real, XV, 105

de dimensión 3, VIII, 30

(0,1)-, VIII, 30

(0,1)-aditiva, VIII, 31

(0,1)-aditiva*, 32

de unicidad, VIII, 31

partición, 30

longitud de una -, 30

partición plana, XI, 36

pirámide, VIII, 31

politopo, 5

de transporte, XV, 104

sección de matriz de dimensión 3, 35,
93

segmento cerrado, 4

separa, 18

estrictamente, 18

solución

básica, 7

factible, 7

factible, 6

soporte mínimo, 66

tipo de orden, 37