

UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLAS DE HIDALGO

Instituto de Física y Matemáticas

“INTERACCIÓN QUARK-GLUON”

TESIS

Para obtener el título de:

MAESTRA EN CIENCIAS EN EL AREA DE FÍSICA

Presenta

Laura Xiomara Gutiérrez Guerrero

Asesor:

Dr Adnan Bashir

febrero de 2008

A MIS PADRES ...

Agradecimientos

A Enif que siempre esta conmigo...

Contenido

1. INTRODUCCIÓN.	2
Introducción	2
2. EL LAGRANGIANO EN QCD.	7
2.1. Introducción.	7
2.2. Grupo Unitario Especial SU(3).	8
2.3. Transformaciones de norma de SU(3).	10
2.4. Lagrangiano de QCD.	12
2.5. Las Reglas de Feynman.	14
3. El Vertice Quark-Gluon.	18
3.1. Introducción.	18
3.2. El vértice a un lazo.	18
3.3. Caso Simétrico.	24
4. Solución Numérica.	29
4.1. Resultados No Renormalizados.	32
4.2. Resultados Renormalizados.	36
4.3. Comparación con Lattice y ESD.	40
A. No se que va ir aki aun	41
Bibliografía	42

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

La Cromodinámica cuántica (QCD) es la teoría de la interacción fuerte (fuerza de color), la cual es una fuerza fundamental que describe las interacciones entre quarks y gluones dentro de los hadrones (como los protones, neutrones o el pión). QCD es una teoría cuántica no abeliana, que corresponde a una parte muy importante del modelo estándar de física de partículas. Ahora hay una gran cantidad de evidencia experimental para QCD.

QCD goza de dos propiedades notables:

- Libertad asintótica, lo que significa que a muy altas energías los quarks y los gluones interactúan muy débilmente. QCD predice este comportamiento que fue descubierto por David Politzer, Frank Wilczek y Davis Gross y gracias al cual obtuvieron el Premio Nobel de física en 2004. El descubrimiento de la libertad asintótica permitió a los físicos hacer predicciones más precisas usando la técnica de teoría de perturbaciones. La evidencia de gluons fue vista en 3 lugares primero en PETRA en 1979. Estos experimentos fueron cada vez más precisos, culminando en la verificación perturbativa de QCD en LEP y CERN.

- Confinamiento, lo que significa que la fuerza entre quarks no disminuye cuando la distancia entre ellos crece. Debido a esto se necesitaría una cantidad infinita de energía para separar dos quarks. Aunque no ha sido demostrado analíticamente se cree que el confinamiento es cierto ya que explica el fracaso de la búsqueda del quark libre. Uno de los problemas del premio del milenio del instituto de Matemáticas Clay pide a los concursantes producir dicha prueba. Otro de los aspectos de la QCD no perturbativa son generación dinámica de la masa de los quarks ligeros y la exploración de fases de la materia del quark, incluyendo el plasma quark-gluon.

Diversas técnicas se han desarrollado para trabajar con QCD. Algunas de ellas son examinadas a continuación:

- QCD perturbativa: Este enfoque se basa en la libertad asintótica. La validez de estos cálculos se limita a aquellos regímenes en los que el parámetro del desarrollo, en este caso la constante de acoplamiento α , tenga un valor pequeño. La libertad asintótica de QCD asegura que esto es cierto en los procesos en los que la energía de quarks y gluones es suficientemente elevada. De este modo, las colisiones hadrón-hadrón, leptón-nucleón o leptón-leptón a alta energía son el marco natural para la verificación experimental de QCD. El régimen perturbativo de QCD desciende hasta energías del orden de las masas de los hadrones, donde la constante de acoplamiento tiene un valor suficientemente elevado como para invalidar los desarrollos perturbativos. Por debajo de estas energías a las que se produce el fenómeno del confinamiento de quarks y gluones en hadrones, sólo los métodos no perturbativos permiten obtener resultados.

- Lattice QCD: Es la herramienta por excelencia para la obtención de predicciones en el régimen no perturbativo. Consiste en la utilización de poderosos computadores para simular la dinámica de QCD en un espacio-tiempo discretizado en los nodos de un retículo. Esto introduce una escala natural $1/a$ (donde a es la distancia entre dos puntos vecinos de la red) de momentos ultravioletas. Por lo tanto, QCD en la red es una teoría matemáticamente bien definida. Hoy en día la medida de α a partir de los resultados de QCD en el retículo es no sólo perfectamente consistente con el resto de las determinaciones, si no que resulta ser una de las determinaciones más precisas de la constante de acoplamiento de QCD. Esta es, en suma, una demostración clara del éxito de la teoría al reproducir los efectos de confinamiento a bajas energías y de la capacidad de los métodos no perturbativos para proporcionar predicciones de QCD en el régimen no perturbativo.

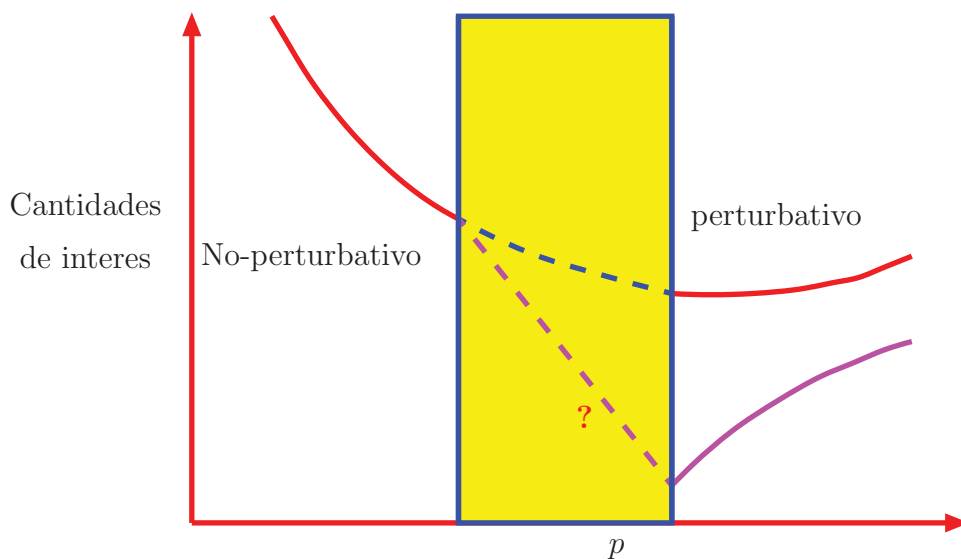
- Ecuaciones de Schwinger-Dyson(SDEs): Por el hecho de que la red tiene un volumen finito y la separación entre dos puntos cercanos de la red es también finita, es necesaria una extrapolación para conectar estos resultados con QCD continua. Por ejemplo las masas de los quarks ligeros son muy difíciles de tratar con QCD en la red. Un método complementario para investigar los aspectos no perturbativos de QCD son las Ecuaciones de Schwinger-Dyson. SDEs nos permiten tener una mejor comprensión de los fenómenos no perturbativos.

- Teorías efectivas: Para problemas específicos, estas teorías pueden dar resultados cualitativamente correctos. En el mejor de los casos estos pueden ser obtenidos con expansiones sistemáticas en algunos parámetros de el lagrangiano de QCD. Algunos ejemplos son:

1. El Esquema de aproximación $1/N$ parte de la premisa que el número N del grupo de norma es infinito, en otras palabras, $1/N$ es el parámetro de expansión para estudiar propiedades de un sistema representado por el grupo de norma $SU(N)$.
2. Otro ejemplo de las teorías efectivas es la teoría de perturbaciones quirales (usa como parámetro de expansión las masas de los quarks ligeros, las cuales estan cerca del cero).
3. El ultimo ejemplo es la teoría efectiva de quarks pesados en donde el parámetro de expansión es el inverso de la masa de los quarks pesados.

El estudio perturbativo y no perturbativo de QCD son complementarios. Sin embargo su dominio es distinto. Esperamos que en ciertos regimenes de energía, las dos descripciones de QCD coincidan. Mostramos esta situación en la fig (1). Por lo tanto, los cálculos perturbativos nos proveen una guía para verificar el comportamiento de las cantidades no perturbativas cuando las energías empiezan a aumentar y viceversa. En esta tesis, estudiamos los factores de forma asociados con el vértice quark-gluon. Estos factores se han calculado recientemente en el régimen infra-rojo através de los estudios en la red [1, 7] y también através de las ecuaciones de Schwinger-Dyson [8, 12]. Aprovechando que existen cálculos perturbativos del vértice de quark-gluon a un lazo en QCD, [13, 16], en esta tesis, calculamos nuéricamente el factor de forma λ_1 a un lazo en el punto simétrico, es decir, cuando los tres momentos externos son iguales. Presentamos la comparación con los resultados correspondientes obtenidos en la red y através de las SDEs. Hemos organizado nuestra tesis de la siguiente manera: En el capítulo 2, empezamos con una breve revisión del lagrangiano de QCD y las reglas de Feynman. En el capítulo 3, revisamos la descomposición general del vértice quark-gluon y

definimos la base de expansión basandonos en la identidad de Ward-Green-Fradkin-Takahashi. Empezando con los resultados perturbativos detallados en [13, 16] calculamos los factores de forma en el punto simétrico. En el capítulo 4, hacemos un análisis detallado de los resultados numéricos y hacemos una comparación con los resultados previamente obtenidos a través de la red y las ecuaciones de Schinger-Dyson. En el capítulo 5 presentamos nuestros resultados.



Esperamos que los resultados perturbativos y no perturbativos sean congruentes en una región intermedia de energía.

Capítulo 2

EL LAGRANGIANO EN QCD

2.1. Introducción

En 1940, se establece la electrodinámica cuántica (QED) como la teoría cuántica de campos que describe las interacciones electromagnéticas entre los leptones cargados y los campos electromagnéticos. En 1970, surge la cromodinámica cuántica (QCD) que es la teoría cuántica de campos de las interacciones fuertes, una de las cuatro fuerzas fundamentales de la naturaleza. Su estructura es similar a la de QED, pero con una diferencia importante: el grupo de norma no es abeliano. Tanto QCD como QED son teorías de campo renormalizables. Los campos fundamentales de QCD son:

- Campos espinoriales de Dirac que describen partículas de spin $1/2$, llamados quarks, con carga eléctrica fraccionaria.
- Campos normados correspondientes a partículas sin carga y sin masa de spin 1, llamados gluones, los cuales pueden interactuar con los quarks y entre sí.

Ahora establecemos la notación que usaremos:

- Denotamos los campos de los quarks como q_α^A donde $A = 1, 2, \dots, N_f$ se refiere al sabor.

$$q_\alpha^1 = u \quad q_\alpha^2 = d \quad q_\alpha^3 = s \quad (2.1)$$

$$q_\alpha^4 = c \quad q_\alpha^5 = b \quad q_\alpha^6 = t \quad (2.2)$$

Como sabemos existen 6 sabores.

- El índice $\alpha = 1, 2, \dots, N$ es el color. La evidencia experimental nos dice que hay tres colores. La notación usual es:

$$q_1^A = \text{rojo} \quad q_2^A = \text{azul} \quad q_3^A = \text{verde} \quad (2.3)$$

la densidad de lagrangiano para quarks libres sin masa puede ser escrita como:

$$\mathcal{L}_0 = \frac{i}{2} \bar{q}_\alpha^A(x) \gamma^\mu \partial_\mu q_\alpha^A(x) - \frac{i}{2} [\partial_\mu \bar{q}_\alpha^A(x)] \gamma^\mu q_\alpha^A(x) \quad (2.4)$$

donde hemos usado la métrica $g^{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)$ y hay una suma sobre los índices A y α . $SU(N)$ es el grupo del color, y los quarks se transforman como la representación fundamental de este grupo.

2.2. Grupo Unitario Especial $SU(N)$

$SU(N)$ es el grupo de las matrices unitarias $N \times N$ con determinante igual a uno.

$$G^\dagger G = GG^\dagger = 1 \quad \det(G) = 1 \quad (2.5)$$

Una matriz unitaria G puede ser escrita en términos de una matriz hermitiana H como e^{iH} . La identidad $\det(e^A) = e^{\text{Tr}(A)}$ se sigue que la $\text{Tr}(H) = 0$. Sabemos que para las matrices $N \times N$ existen $N^2 - 1$ matrices hermitianas

con traza nula. Ahora si consideramos el grupo $SU(3)$ tenemos $(3)^2 - 1 = 8$ matrices con traza nula. Esto corresponde a 8 gluones. Un elemento de $SU(N)$ puede ser escrito como:

$$G = \exp \left[i \sum_{a=1}^{N^2-1} \theta_a J_a \right] \quad (2.6)$$

donde θ_a son parametros reales del grupo. J_a son los generadores del grupo representados por las matrices hermitianas con traza nula. Unicamente $N - 1$ de los $N^2 - 1$ generadores son diagonales. Entonces decimos que $SU(N)$ es un grupo de rango $N - 1$. $SU(3)$ tiene 8 parametro de grupo. Y podemos escribir los elementos de G de $SU(3)$ como:

$$G(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_8) = \text{Exp}[i\theta_a T_a] \quad a = 1, \dots, 8 \quad (2.7)$$

$$\text{Tr}(T_a) = 0 \quad [T_a, T_b] = i f_{abc} T_c, \quad (2.8)$$

donde f_{abc} son totalmente antisimetricos. Los campos de los quarks se transforman bajo $SU(3)$ como la representación fundamental $T_a = \frac{1}{2}\lambda_a$ donde λ_a son matrices hermitianas 3×3 de traza nula. Podemos escoger estas matrices como:

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Estas matrices se llaman matrices de Gell-Mann. $SU(3)$ es de rango 2. Por lo tanto, solo existen dos matrices (λ_3 y λ_8 en este caso) que son diagonales. Los λ_i satisfacen:

$$Tr[\lambda_a \lambda_b] = 2\delta_{ab} . \quad (2.9)$$

2.3. Transformaciones de norma de $SU(3)$

Por el hecho de que los quarks se transforman como representaciones fundamentales del grupo $SU(3)$ podemos escribir:

$$q_\alpha^A(x) \longrightarrow q_\alpha^{A'}(x) = [e^{-igT_a\theta_a}]_{\alpha\beta} q_\beta^A(x) \quad (2.10)$$

donde g es una constante de acoplamiento real sin dimensiones. a es una constante que puede tomar valores de 1 a 8 para el caso de $SU(3)$. T_a son matrices hermitianas con traza igual a cero. α, β son índices de la matriz T_a . En notación compacta podemos escribir

$$q_\alpha^A(x) \longrightarrow q_\alpha^{A'}(x) = G_{\alpha\beta} q_\beta^A(x) . \quad (2.11)$$

Los parámetros θ_a no dependen de x en el caso de las interacciones globales. Los campos de los quarks se transforman exactamente de la misma manera para cada x . Se puede comprobar que el lagrangiano (2.4) es invariante bajo estas transformaciones globales. Cuando θ_a y consecuentemente G dependen de x , se dice que las transformaciones son locales:

$$q_\alpha^A(x) \longrightarrow q_\alpha^{A'}(x) = G_{\alpha\beta}(x) q_\beta^A(x) \quad (2.12)$$

Bajo estas transformaciones el lagrangiano (2.4) se modifica como sigue:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_0(x) &= \underbrace{\frac{i}{2} \bar{q}_\beta^A(x) \gamma^\mu \partial_\mu q_\beta^A(x) - \frac{i}{2} [\partial_\mu \bar{q}_\alpha^A(x)] \gamma^\mu q_\alpha^A(x)}_{\mathcal{L}_0} \\ &+ \underbrace{\frac{i}{2} \bar{q}_\beta^A(x) \gamma^\mu [G_{\beta\alpha}^\dagger(x) \partial_\mu G_{\alpha\gamma}(x)] q_\gamma^A(x) - \frac{i}{2} \bar{q}_\alpha^A(x) \gamma^\mu [(\partial_\mu G^\dagger(x)) G(x)]_{\alpha\beta}}_{\text{adicionales}} q_\beta^A(x) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Entonces concluimos que el lagrangiano para los quarks no es invariante bajo transformaciones locales de norma SU(3). El principio de norma nos genera interacciones. La manera de proceder en este caso es introducir la derivada covariante para SU(N) de la siguiente manera:

$$\delta_{\alpha\beta}\partial^\mu \longrightarrow D_{\alpha\beta}^\mu \equiv \delta_{\alpha\beta}\partial^\mu - igT_{\alpha\beta}^a B_a^\mu(x) \quad (2.14)$$

donde $B_a^\mu(x)$ son los $(N^2 - 1)$ campos gluonicos. Y ahora el nuevo lagrangiano será invariante bajo transformaciones locales de norma si q_α^A y $D_{\alpha\beta}^\mu q_\beta^A(x)$ se transforman de la misma forma:

$$D_{\alpha\beta}^\mu q_\beta^A \longrightarrow D'_{\alpha\beta}{}^\mu q_\beta'^A(x) = G_{\alpha\gamma}(x) D_{\gamma\delta}^\mu q_\delta^A(x) \quad (2.15)$$

donde la prima sobre D significa que $B_a^\mu(x)$ se transforma a $B_a'^\mu(x)$. Para deducir la expresión para los campos gluonicos reescribimos el lagrangiano sin interacciones como:

$$\mathcal{L}_0 = \frac{i}{2} \bar{q}_\alpha^A(x) \gamma^\mu \delta_{\alpha\beta} \partial_\mu q_\beta^A(x) - \frac{i}{2} [\delta_{\alpha\beta} \partial_\mu \bar{q}_\alpha^A(x)] \gamma^\mu q_\beta^A(x) \quad (2.16)$$

Considerando θ_a pequeña, sustituimos las expresiones (2.12) y (2.14) en la ecuación (2.16). Requiriendo que \mathcal{L} sea invariante bajo transformaciones locales, obtenemos:

$$B_a'^\mu(x) = B_a^\mu(x) + gf_{abc} \delta\theta_b(x) B_c^\mu(x) - \partial^\mu \delta\theta_a(x) \quad (2.17)$$

Asi que finalmente el lagrangiano con interacciones es:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \bar{q}_\alpha^A(x) \gamma^\mu \partial_\mu q_\alpha^A(x) - \frac{i}{2} [\partial_\mu \bar{q}_\alpha^A(x)] \gamma^\mu q_\alpha^A(x) + \frac{g}{2} \bar{q}_\alpha^A(x) \lambda_{\alpha\beta}^a \gamma_\mu q_\beta^A(x) B_a^\mu(x) \quad (2.18)$$

Este lagrangiano describe los quarks libres sin masa y sus interacciones con los campos gluonicos con una constante de acoplamiento g .

La densidad de lagrangiano dada por la ecuación (2.18) no nos da las ecuaciones de movimiento de los campos gluonicos, así que necesitamos agregar el término de energía cinética para los gluones. Para tal fin definimos:

$$F^{\mu\nu} = -[D^\mu, D^\nu] \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} f(x) &= -[D^\mu, D^\nu]f(x) = -[\partial^\mu - B^\mu, \partial^\nu - B^\nu]f(x) \\ &= (\partial^\mu B^\nu(x) - \partial^\nu B^\mu(x) - [B^\mu(x), B^\nu(x)]) f(x) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Entonces:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu B^\nu(x) - \partial^\nu B^\mu(x) - [B^\mu(x), B^\nu(x)] \quad (2.21)$$

y se satisface la identidad de Bianchi:

$$[D^\rho, F^{\mu\nu}] + [D^\mu, F^{\nu\rho}] + [D^\nu, F^{\rho\mu}] = 0. \quad (2.22)$$

Entonces el lagrangiano completo de QCD es:

$$\mathcal{L}_{QCD} = \frac{1}{2g^2} \text{Tr}[F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}] + \frac{1}{2} \bar{q}^A(x) \gamma_\mu D^\mu q_A - \frac{1}{2} [\overline{D^\mu q^A(x)}] \gamma_\mu q^A(x)$$

Este Lagrangiano contiene términos: (i) términos cinéticos (ii) términos de interacción entre gluones y (iii) términos de interacción entre quarks y gluones.

2.4. Lagrangiano de QCD

Es imposible dar masa a los gluones sin un rompimiento de la invarianza local de norma. El término en el lagrangiano que contine la masa del gluon debe ser de la forma:

$$m^2 B_\mu(x) B^\mu(x) \quad (2.23)$$

Empleando las transformaciones (2.17), es fácil de ver, que este término no es invariante bajo transformaciones de norma. Para los quarks primero definimos los left y right-handed quarks

$$q_{\alpha L,R} = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)q_\alpha(x) \quad (2.24)$$

Recordemos que el índice α se refiere al color. $q_\alpha(x)$ es una matriz de columna y $\gamma_5 = -i\gamma^0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$. Por lo tanto, $+$ es para quarks izquierdos y $-$ para quarks derechos. El término más general para la masa de los quarks sin romper la simetría de norma es:

$$\mathcal{L}_M = q_{\alpha L}^\dagger(x)\gamma^0 M q_{\alpha R}(x) + q_{\alpha R}^\dagger(x)\gamma^0 M^\dagger q_{\alpha L}(x) \quad (2.25)$$

donde M es una matriz arbitraria $N_f \times N_f$ y $\det M \neq 0$. En este caso podemos definir de manera única una matriz H definida positiva y una matriz U tal que:

$$M = M_H U \quad M M^\dagger = M_H M_H^\dagger \quad (2.26)$$

y entonces:

$$\mathcal{L}_M = q_{\alpha L}^\dagger(x)\gamma^0 M_H U q_{\alpha R}(x) + q_{\alpha R}^\dagger(x)\gamma^0 U^\dagger M_H^\dagger q_{\alpha L}(x) \quad (2.27)$$

Después de sustituciones sucesivas podemos conseguir:

$$\mathcal{L}_M = q_\alpha^{\prime\prime\prime\dagger} M_D q_\alpha^{\prime\prime\prime}(x) \quad (2.28)$$

donde $M_D = V M_H V^\dagger$ y $q_\alpha^{\prime\prime\prime} \equiv V q_\alpha^{\prime\prime}(x)$ con V una matriz unitaria. $q_\alpha^{\prime\prime}(x) = q_{\alpha R}^{\prime}(x) + q_{\alpha L}(x)$ y finalmente $q_\alpha^{\prime}(x) = U q_{\alpha R}(x)$. Y ahora el lagrangiano es invariante bajo el cambio $q(x) \rightarrow q^{\prime\prime\prime}(x)$. así que el término de masa de los quarks del lagrangiano se puede escribir como:

$$\mathcal{L}_M = q_\alpha^\dagger M_D q_\alpha(x) \quad (2.29)$$

Por lo tanto el Lagrangiano de QCD para quarks masivos es:

$$\mathcal{L}_{QCD} = \frac{1}{2g^2} Tr[F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}] + \frac{1}{2} \bar{q}^A(x) \gamma_\mu D^\mu q_A - \frac{1}{2} [\overline{D^\mu q^A(x)}] \gamma_\mu q^A(x) - m_A \bar{q}^A(x) q^A(x)$$

2.5. Las Reglas de Feynman

El Lagrangiano de la sección anterior puede descomponerse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QCD} &= \mathcal{L}_{quarks \text{ libres}} + \mathcal{L}_{interaccion \text{ quarks-gluones}} \\ &+ \mathcal{L}_{gluons \text{ libres}} + \mathcal{L}_{interaccion \text{ tres-gluones}} \\ &+ \mathcal{L}_{interaccion \text{ cuatro-gluones}} \end{aligned} \tag{2.30}$$

Ahora uno por uno, interpretamos varias componentes del lagrangiano:

- Para quarks libres:

$$\mathcal{L}_{quarks \text{ libres}} = \frac{i}{2} \bar{q}_\alpha^A(x) \gamma^\mu \partial_\mu q_\alpha^A(x) - \frac{i}{2} [\partial_\mu \bar{q}_\alpha^A(x)] \gamma^\mu q_\alpha^A(x) - m_A \bar{q}^A(x) q^A(x) \tag{2.31}$$

que en diagramas de Feynman podemos representar como:

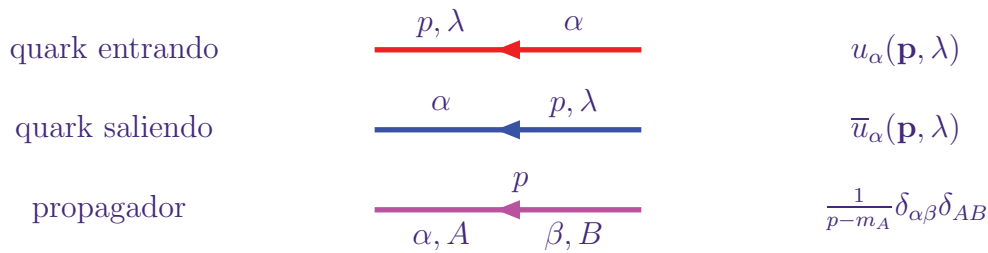


Figura 1: quarks.

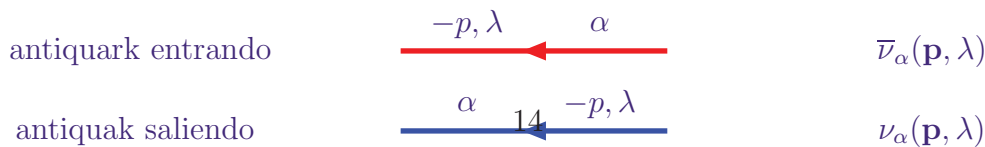


Figura 2: antiquarks.

- Las interacciones entre quarks y gluones:

$$\mathcal{L}_{interaccion\ quarks-gluones} = \frac{g}{2} \bar{q}_\alpha^A(x) \lambda_{\alpha\beta}^a \gamma_\mu q_\beta^A(x) B_a^\mu \quad (2.32)$$

y su diagrama de Feynman correspondiente es

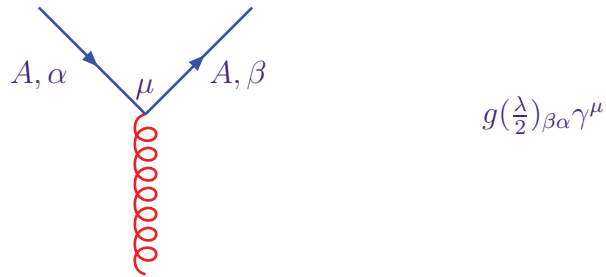


Figura 3: interacción entre quarks y gluones.

- Para los gluones libres el término de lagrangiano correspondiente es:

$$\mathcal{L}_{gluons\ libres} = -\frac{1}{4} [\partial^\mu B_a^\nu - \partial^\nu B_a^\mu] [\partial_\mu B_\nu^a - \partial_\nu B_\mu^a] \quad (2.33)$$

que podemos representar como:

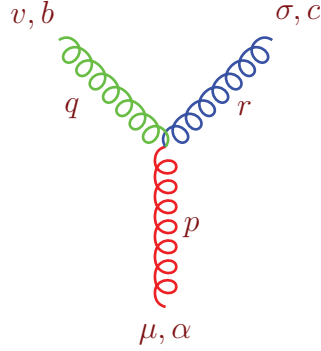
Gluon entrando	$k\sigma$ μ 	$\epsilon_\mu(\mathbf{k}, \sigma)$
Gluon saliendo	μ $k\sigma$ 	$\epsilon_\mu^*(\mathbf{k}, \sigma)$
Propagador	$\frac{1}{k}$ μ, a b, ν	$[g_{\mu\nu} - \xi \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}] \frac{\delta_{ab}}{k^2}$

Figura 4: gluones libres.

$\xi = 0$ corresponde a la norma de Feynman y $\xi = 1$ a la de Landau.

- Las interacciones entre tres gluones tienen el siguiente término en el lagrangiano:

$$\mathcal{L}_{interaccion \text{ tres-gluones}} = -\frac{1}{2}gf_{abc}[\partial_\mu B_\nu^a - \partial_\nu B_\mu^a]B_b^\mu B_c^\nu \quad (2.34)$$

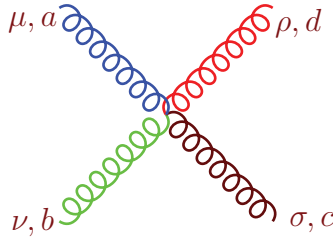


$$-igf_{abc}[g_{\mu\nu}(p-q)_\sigma + g_{\nu\sigma}(q-r)_\mu + g_{\sigma\mu}(r-p)_\nu]$$

Figura 5: interacción entre tres gluones.

- La interacción de cuatro gluones:

$$\mathcal{L}_{interaccion \text{ cuatro-gluones}} = -\frac{1}{4}f_{abc}f_{ade}B_b^\mu B_c^\nu B_\mu^d B_\nu^e \quad (2.35)$$



$$-g^2[f_{abe}f_{cde}(g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}) + f_{ace}f_{bde}(g_{\mu\nu}g_{\sigma\rho} - g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}) + f_{ade}f_{cbe}(g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho} - g_{\mu\nu}g_{\sigma\rho})]$$

Conociendo las reglas de Feynman, los cálculos perturbativos se pueden realizar aunque en muchos casos estos cálculos son extremadamente complejos. Por ejemplo, el vértice quark-gluon en dimensiones y normas arbitrarias se ha podido calcular solo recientemente [13]. En el próximo capítulo, veremos la estructura general del vértice quark-gluon y su expresión perturbativa a un lazo.

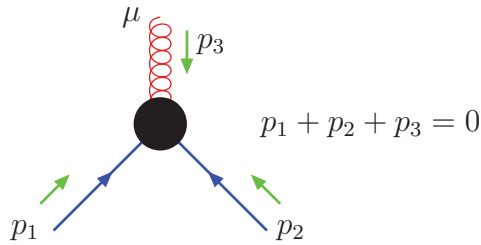
Capítulo 3

El Vertice Quark-Gluon

3.1. Introducción

3.2. El vértice a un lazo

El vértice quark-gluon de tres puntos en QCD, denotado por $\Gamma^\mu(p_1, p_2, p_3)$, se puede representar con el siguiente diagrama:



El vertice quark-gluon

Este vértice puede ser expresado en términos de doce amplitudes de espín formadas por los vectores $\gamma^\mu, \not{p}_1^\mu, \not{p}_2^\mu$ y los escalares $1, \not{p}_1, \not{p}_2$ y $\not{p}_1 \not{p}_2$. Entonces

podemos escribir:

$$\Gamma^\mu(p_1, p_2, p_3) = \sum_{i=1}^{12} \nu_i(p_1^2, p_2^2, p_3^2) V_i^\mu \quad (3.1)$$

donde los V_i^μ son:

$$\begin{aligned} V_1^\mu &= p_1^\mu \not{p}_1 & V_2^\mu &= p_2^\mu \not{p}_2 & V_3^\mu &= p_1^\mu \not{p}_2 & V_4^\mu &= p_2^\mu \not{p}_1 \\ V_5^\mu &= \gamma^\mu \not{p}_1 \not{p}_2 & V_6^\mu &= \gamma^\mu & V_7^\mu &= p_1^\mu & V_8^\mu &= p_2^\mu \\ V_9^\mu &= p_2^\mu \not{p}_1 \not{p}_2 & V_{10}^\mu &= p_1^\mu \not{p}_1 \not{p}_2 & V_{11}^\mu &= \gamma^\mu \not{p}_1 & V_{12}^\mu &= \gamma^\mu \not{p}_2 \end{aligned} \quad (3.2)$$

El vértice quark-gluon está relacionado con el propagador del quark a través de la identidad de Slanov-Taylor. La versión abeliana de esta identidad para QED (la identidad de Ward-Takahashi) ha sido usada en la literatura para dividir el vertice total de 3 puntos en dos partes: Longitudinal y transversal. En QED, la manera de hacerlo es la siguiente. Empezamos con la identidad WFGT

$$p_3^\mu \Gamma_\mu(p_1, p_2, p_3) = S^{-1}(-p_1) - S^{-1}(p_2) \quad (3.3)$$

Es fácil de ver que se satisface al nivel árbol

$$p_3^\mu \Gamma_\mu^L = p_3^\mu \gamma^\mu = (-p_1^\mu - p_2^\mu) \gamma_\mu = -\not{p}_1 - \not{p}_2 \quad (3.4)$$

y

$$S^{-1}(-p_1) - S^{-1}(p_2) = -\not{p}_1 - m - \not{p}_2 + m = -\not{p}_1 - \not{p}_2. \quad (3.5)$$

la versión límite de esta identidad cuando $-p_1 \rightarrow p_2 = p$ es

$$\frac{\partial}{\partial p_\mu} S^{-1}(p) = \Gamma_L^\mu \quad (3.6)$$

Si definimos

$$S^{-1}(p) = \alpha(p^2) \not{p} + \beta(p^2) \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned}
\implies \frac{\partial}{\partial p_\mu} [\alpha(p^2) \not{p} + \beta(p^2)] &= \alpha(p^2) \gamma^\mu + \not{p} \frac{\partial p^2}{\partial p_\mu} \frac{\partial}{\partial p^2} \alpha(p^2) + \frac{\partial p^2}{\partial p_\mu} \frac{\partial}{\partial p^2} \beta(p^2) \\
&= \alpha(p^2) \gamma^\mu + 2 \not{p} p^\mu \frac{\partial}{\partial p^2} \alpha(p^2) + 2 p^\mu \frac{\partial}{\partial p^2} \beta(p^2)
\end{aligned}$$

Sintetizando tenemos:

$$\begin{aligned}
\Gamma_L^\mu(p_1, p_2, p_3) &= \frac{1}{2} [\alpha(p_1^2) + \alpha(p_2^2)] \gamma^\mu + \frac{1}{2} \left[\frac{\alpha(p_1^2) - \alpha(p_2^2)}{p_1^2 - p_2^2} \right] (-\not{p}_1 + \not{p}_2)(-p_1^\mu + p_2^\mu) \\
&+ \frac{\beta(p_1^2) - \beta(p_2^2)}{p_1^2 - p_2^2} (-p_1^\mu + p_2^\mu) \\
&= \frac{1}{2} [\alpha(p_1^2) + \alpha(p_2^2)] \gamma^\mu + \frac{1}{2} \left[\frac{\alpha(p_1^2) - \alpha(p_2^2)}{p_1^2 - p_2^2} \right] (\not{p}_1 - \not{p}_2)(p_1^\mu - p_2^\mu) \\
&+ \frac{\beta(p_1^2) - \beta(p_2^2)}{p_1^2 - p_2^2} (p_1^\mu - p_2^\mu) \tag{3.8}
\end{aligned}$$

Por lo tanto la parte longitudinal se fija completamente por los propagadores fermionicos. Si transportamos esta descomposición del vértice tal cual al vértice del quark-gluon en QCD, podemos escribir

$$\Gamma_\mu = \Gamma_L^\mu + \Gamma_\mu^T \tag{3.9}$$

donde

$$p_3^\mu \Gamma_\mu^T = 0 \tag{3.10}$$

define la parte transversa. La parte longitudinal la escribimos como

$$\Gamma_L^\mu(p_1, p_2) = \sum_{i=1}^4 \lambda_i(p_1^2, p_2^2, p_3^2) L_i^\mu(p_1, p_2) \tag{3.11}$$

donde:

$$\begin{aligned}
L_1^\mu &= \gamma^\mu & L_2^\mu &= (\not{p}_1 - \not{p}_2)(p_1 - p_2)^\mu \\
L_3^\mu &= (p_1 - p_2)^\mu & L_4^\mu &= \sigma^{\mu\nu} (p_1 - p_2)_\nu
\end{aligned} \tag{3.12}$$

y

$$\Gamma_T^\mu(p_1, p_2) = \sum_{i=1}^8 \tau_i(p_1^2, p_2^2, p_3^2) T_i^\mu(p_1, p_2) \quad (3.13)$$

donde:

$$\begin{aligned} T_1^\mu &= p_1^\mu(p_2 p_3) - p_2^\mu(p_1 p_3), & T_2^\mu &= -[p_1^\mu(p_2 p_3) - p_2^\mu(p_1 p_3)](p_1 - p_2), \\ T_3^\mu &= p_3^2 \gamma^\mu - p_3^\mu \not{p}_3, & T_4^\mu &= [p_1^\mu(p_2 p_3) - p_2^\mu(p_1 p_3)] \sigma_{\nu\lambda} p_1^\nu p_2^\lambda, \\ T_5^\mu &= \sigma^{\mu\nu} p_{3\nu}, & T_6^\mu &= \gamma^\mu (p_1^2 - p_2^2) + (p_1 - p_2)^\mu \not{p}_3, \\ T_7^\mu &= -\frac{1}{2} (\not{p}_1^2 - \not{p}_2^2) [\gamma^\mu (p_1 - p_2) - (p_1 - p_2)^\mu] - (p_1 - p_2)^\mu \sigma_{\nu\lambda} p_1^\nu p_2^\lambda \\ T_8^\mu &= -\gamma^\mu \sigma_{\nu\lambda} p_1^\nu p_2^\lambda + p_1^\mu \not{p}_2 - p_2^\mu \not{p}_1 \end{aligned} \quad (3.14)$$

A un lazo tenemos dos contribuciones al vertice quark-gluon, la contribución abeliana que denotamos por 'a' y la de tres gluones que denotamos por 'b'.

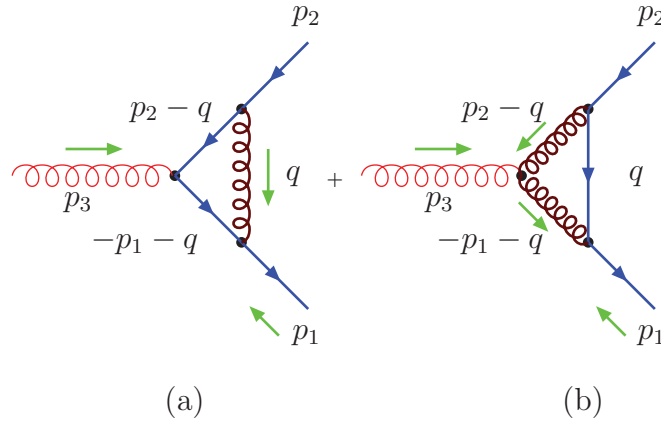


figura 7: diagramas de la interacción quark-gluon a un lazo

Sus factores de color son proporcionales a $(C_F - \frac{1}{2}C_A)$ y C_A respectivamente, donde C_F y C_A denotan los eigenvalores de los operadores cuadráticos

de Casimir en la representacion fundamental y adjunta respectivamente. Para el grupo $SU(N)$ tenemos que:

$$C_A = N, \quad C_F = \frac{N^2 - 1}{2N}. \quad (3.15)$$

La primera contribución "abeliana" es completamente similar a la correccion a un lazo del vertice del fermion-foton de QED. Formalmente podriamos conseguir el vertice de QED si en el vertice de QCD ponemos $C_A = 0$ y $C_F = 1$. El segundo diagrama en la figura 7 es no-abeliano y aparece debido a las interacciones entre gluones. El cálculo de estos diagramas para dimensiones y normas arbitrarias es un trabajo bastante involucrado y se ha reportado en la referencia [13]. Nosotros solo escribimos los resultados principales para nuestro proposito de su analisis numerico posteriormente. Si los quarks son masivos, es claro que los diagramas (a) y (b) en la figura 7 contienen integrales de tres puntos del tipo:

$$J_2(\nu_1, \nu_2, \nu_3) \equiv \int \frac{d^n q}{[(p_2 - q)^2 - m^2]^{\nu_1} [(p_1 + q)^2 - m^2]^{\nu_2} (q^2)^{\nu_3}}, \quad (3.16)$$

$$J_1(\nu_1, \nu_2, \nu_3) \equiv \int \frac{d^n q}{[(p_2 - q)^2]^{\nu_1} [(p_1 + q)^2]^{\nu_2} [q^2 - m^2]^{\nu_3}}. \quad (3.17)$$

donde ν_i son enteros, n es la dimension y para cuatro dimensiones escribimos $n = 4 - 2\varepsilon$. Podemos extraer el factor η de la expresi3n de las integrales a un lazo:

$$\eta = \frac{\Gamma^2\left(\frac{n}{2} - 1\right)}{\Gamma(n - 3)} \Gamma\left(3 - \frac{n}{2}\right) = \frac{\Gamma^2(1 - \varepsilon)}{\Gamma(1 - 2\varepsilon)} \Gamma(1 + \varepsilon). \quad (3.18)$$

Ahora podemos introducir la notaci3n $\varphi_i (i = 1, 2)$ tal que:

$$J_i(1, 1, 1) = i\pi^{n/2} \eta \varphi_i(p_1^2, p_2^2, p_3^2; m). \quad (3.19)$$

Integrales m3s simples de dos puntos tambi3n aparecen. En el c3lculo del v3rtice para describirlas, introducimos las funciones:

$$\kappa_i(p_l^2; m) \equiv \kappa_{i,l}, \quad (3.20)$$

donde $p_l (l = 1, 2, 3)$ es el momento externo de las funciones de dos puntos.

Por lo tanto, definimos:

$$\begin{aligned}
J_1(1, 1, 0) &= J_0(1, 1, 0) \equiv i\pi^{n/2}\eta\kappa_{0,3} , \\
J_1(0, 1, 1) &= J_2(0, 1, 1) \equiv i\pi^{n/2}\eta\kappa_{1,1} , \\
J_1(1, 0, 1) &= J_2(1, 0, 1) \equiv i\pi^{n/2}\eta\kappa_{1,2} , \\
J_2(1, 1, 0) &= J_3(1, 1, 0) = i\pi^{n/2}\eta\kappa_{2,3} ,
\end{aligned} \tag{3.21}$$

y

$$\tilde{\kappa} \equiv \kappa(m^2) \equiv \frac{\Gamma(1-2\varepsilon)}{\Gamma^2(1-\varepsilon)} \frac{1}{\varepsilon(1-\varepsilon)} (m^2)^\varepsilon . \tag{3.22}$$

Tambien usaremos la siguiente notación para los determinantes de Gram en los denominadores:

$$\mathcal{K} \equiv p_1^2 p_2^2 - (p_1 p_2)^2 , \tag{3.23}$$

$$\mathcal{M}_1 \equiv (p_1^2 - m^2)(p_2^2 - m^2) + m^2 p_3^2 , \tag{3.24}$$

$$\mathcal{M}_2 \equiv (p_1^2 - m^2)(p_2^2 - m^2)p_3^2 + m^2(p_1^2 - p_2^2)^2 . \tag{3.25}$$

Para λ_1 tenemos que:

$$\begin{aligned}
\lambda_1^a(p_1^2, p_2^2, p_3^2) &= \frac{g^2 \eta (C_F - \frac{1}{2} C_A)}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{(n-2)(1-\xi)}{4p_1^2 p_2^2} \left\{ p_2^2 (p_1^2 + m^2) \kappa_{1,1} + p_1^2 (p_2^2 + m^2) \kappa_{1,2} \right. \\
&\quad \left. - (p_1^2 + p_2^2) m^2 \tilde{\kappa} \right\} \tag{3.26}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_1^b(p_1^2, p_2^2, p_3^2) &= -\frac{g^2 \eta C_A}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{1}{16\mathcal{K}} \left\{ (2-\xi)\mathcal{K} [2(p_1^2 + p_2^2 - 2m^2)\varphi_1 - n\kappa_{1,1} - n\kappa_{1,2} - 4\kappa_{0,3}] \right. \\
&\quad + [2 + (n-3)\xi](p_1^2 - p_2^2)^2 [(p_1 p_2)\varphi_1 + m^2\varphi_1 + \kappa_{0,3}] + [2 + (n-3)\xi] \\
&\quad \times (p_1^2 - p_2^2)[p_2^2 \kappa_{1,2} - p_1^2 \kappa_{1,1} + (p_1 p_2)(\kappa_{1,1} - \kappa_{1,2})] - (n-2)(2-\xi)\mathcal{K} m^2 \\
&\quad \left. \times \left[\frac{\kappa_{1,1}}{p_1^2} + \frac{\kappa_{1,2}}{p_2^2} - \frac{p_1^2 + p_2^2}{p_1^2 p_2^2} \tilde{\kappa} \right] \right\} \tag{3.27}
\end{aligned}$$

3.3. Caso Simétrico

Ahora si hacemos el caso $p_1^2 = p_2^2 = p_3^2 = p$ podemos ver que $\kappa_{1,1} = \kappa_{1,2}$ y entonces λ_1^a es:

$$\lambda_1^a(p^2) = \frac{2g^2\eta(C_F - \frac{1}{2}C_A)(n-2)(1-\xi)}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}4p^2} \left\{ (p^2 + m^2)\kappa_{1,1} - m^2\tilde{\kappa} \right\}$$

Analogamente para λ_1^b en el caso simétrico tenemos que:

$$\begin{aligned} \lambda_1^b(p^2) &= -\frac{g^2\eta C_A}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{1}{8\mathcal{K}} \left\{ (2-\xi)\mathcal{K} [2(p^2 - m^2)\varphi_1 - n\kappa_{1,1} - 2\kappa_{0,3}] + \right. \\ &\quad \left. - (n-2)(2-\xi)\mathcal{K}m^2 \left[\frac{\kappa_{1,1} - \tilde{\kappa}}{p^2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Ahora ponemos $n = 4 - 2\varepsilon$ y expandemos todas las cantidades en potencias de ε . Así obtenemos:

$$\begin{aligned} \lambda_1^a(p^2) &= \frac{2^{-(n+2)}(C_A - 2C_F)g^2\pi^{-n/2}(\xi-1)}{p^2} \left\{ \frac{m^2(n-2)}{\varepsilon} \right. \\ &\quad + \frac{2(m^2 - p^2)\Gamma(2 - n/2)m^n + (n-2)(\ln(m^2) + \gamma - 1)m^6}{m^4} \\ &\quad + \frac{1}{12m^4p^2} \left[24(m^2 - p^2)\Gamma(2 - \frac{n}{2}) \left((p^2 + m^2) \ln \left(\frac{p^2 + m^2}{m^2} \right) - p^2 \right) m^n \right. \\ &\quad \left. + p^2(n-2)(6\ln(m^2)(\ln(m^2) + 2\gamma - 2) + \pi^2 + 6(-2 + \gamma)\gamma + 12)m^6 \right] \varepsilon \left. \right\} + O(\varepsilon^2) \\ \lambda_1^b(p^2) &= \frac{C_A g^2(\xi-2)\pi^{-n/2}}{p^2} \left\{ \frac{-2^{-n-3}m^2(n-2)}{\varepsilon} - 2^{-n-4} \left[n(p^2n - m^2(n-2)) \right. \right. \\ &\quad \times \Gamma\left(-\frac{n}{2}\right) m^{n-4} - 2(-1 + \gamma)(n-2)m^2 - 2(n-2)\ln(m^2)m^2 \\ &\quad \left. - \frac{2^{5-n}p^{n-2}\pi^{3/2}\csc(n\pi/2)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} - \frac{4iJp^2(p^2 + m^2)}{\pi^2} \right] - \frac{2^{-n-5}}{3(m^4p^4(n-2))} \\ &\quad \times \left[\left(24(m^2(n-2) - p^2n)\Gamma(2 - \frac{n}{2}) \left((p^2 + m^2) \ln \left(\frac{p^2 + m^2}{m^2} - p^2 \right) m^n \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + p^2(n-2)^2(6\ln(m^2)(\ln(m^2) + 2\gamma - 2) + \pi^2 + 6(-2 + \gamma)\gamma + 12)m^6 \right) \right] \varepsilon \left. \right\} \\ &\quad + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (3.29)$$

Notamos que hay una divergencia cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ de tipo $1/\varepsilon$. Estas son las cantidades no renormalizadas. Nosotros usamos el esquema \overline{MS} para renormalizar estas cantidades. Esto lo realizamos introduciendo un factor de renormalización:

$$F_R = \varepsilon \left(\frac{\mu^2}{4\pi} \right)^\varepsilon e^{\varepsilon\gamma} \quad (3.30)$$

Los lambda's renormalizadas se obtienen de la siguiente manera.:

$$\begin{aligned} F_R \lambda_1^a &= g^2 \frac{(-1 + \xi)}{96\pi^2 p^4} \left\{ \left[-p^4 \ln \left(\frac{m^2 - p^2}{m^2} \right) + 1 + p^2 m^2 + \ln \left(\frac{m^2 - p^2}{m^2} \right) m^4 \right] \varepsilon + 1 \right\} \\ F_R \lambda_1^b &= \frac{g^2(-2 + \xi)}{64\pi^4 p^4} \left\{ \left[-3ip^6 J_1(1, 1, 1) - 3\pi^2 p^4 \ln(m^2) + 6\pi^2 p^4 \ln \left(\frac{m^2 - p^4}{m^2} \right) \right. \right. \\ &\quad + 3p^4 \pi^2 \ln(-p^2) - 3p^4(5\pi^2 - im^2 J_1(1, 1, 1)) + -3\pi^2 p^2 m^2 \ln \left(\frac{m^2 - p^2}{m^2} \right) \\ &\quad \left. \left. - 2\pi^2 p^2 m^2 - 3\pi^2 \ln \left(\frac{m^2 - p^2}{m^2} \right) m^4 \right] \varepsilon - 9\pi^2 p^4 \right\} \end{aligned} \quad (3.31)$$

El coeficiente de ε en esta expresión nos da las λ 's renormalizadas

$$\lambda_{1ren}^a = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} [F_R \lambda_1^a] |_{\varepsilon=0} \quad \lambda_{1ren}^b = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} [F_R \lambda_1^b] |_{\varepsilon=0} \quad (3.32)$$

Hay que notar que estas expresiones dependen de la escala de renormalización μ . Sin embargo esta dependencia es muy débil, solo logarítmica. De hecho λ_i 's y τ_i 's no son observables físicos y por lo tanto no se espera que desaparezca la dependencia sobre μ .

para la parte transversal del vertice en norma y dimension arbitraria, las τ 's del diagrama (a) se pueden representar como:

$$\begin{aligned} \tau_i^{(1a)}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) &= \frac{g^2 \eta (C_F - \frac{1}{2} C_A)}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \left\{ t_{i,0}^{(1a)} \varphi_2 + t_{i,1}^{1a} [(p_1 p_3) \kappa_{1,1} + (p_2 p_3) \kappa_{1,2} + p_3^2 \kappa_{2,3}] \right. \\ &\quad + t_{i,2}^{(1a)} (\kappa_{1,1} + \kappa_{1,2} - 2\kappa_{2,3}) + t_{i,3}^{(1a)} (\kappa_{1,1} + \kappa_{1,2} - 2\tilde{\kappa}) + t_{i,4}^{(1a)} (\kappa_{1,1} + \kappa_{1,2}) \\ &\quad \left. + t_{i,5}^{(1a)} \frac{\kappa_{1,1} - \kappa_{1,2}}{p_1^2 - p_2^2} \right\} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Analogamente para el diagrama (b):

$$\begin{aligned}
\tau_i^{(1b)}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) &= \frac{g^2 \eta C_A}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \left\{ t_{i,0}^{(1b)} \varphi_1 + t_{i,1}^{1b} [(p_1 p_3) \kappa_{1,1} + (p_2 p_3) \kappa_{1,2} + p_3^2 \kappa_{0,3}] \right. \\
&+ t_{i,2}^{(1b)} (\kappa_{1,1} + \kappa_{1,2} - 2\kappa_{0,3}) + t_{i,3}^{(1b)} (\kappa_{1,1} + \kappa_{1,2} - 2\tilde{\kappa}) + t_{i,4}^{(1a)} (\kappa_{1,1} + \kappa_{1,2}) \\
&\left. + t_{i,5}^{(1b)} \frac{\kappa_{1,1} - \kappa_{1,2}}{p_1^2 - p_2^2} \right\} \quad (3.34)
\end{aligned}$$

donde $t_i^{(1a)}$ y $t_i^{(1b)}$ son funciones escalares que dependen de p_1^2, p_2^2 y p_3^2 . Es conveniente notar la divergencia que existe en el último término de las ecuaciones (3.33) y (3.34) cuando tomamos el caso simétrico, es decir $p_1^2 = p_2^2 = p_3^2 = p^2$.

$$\frac{\kappa_{1,1} - \kappa_{1,2}}{p_1^2 - p_2^2} = \text{divergente} \quad (3.35)$$

Para remover esta divergencia tomamos el límite de $n = 4 - 2\varepsilon$ y expandemos las integrales $\kappa_{1,1}$ y $\kappa_{1,2}$ alrededor de ε , esta operación se realiza usando el paquete "Hipexp", como una aplicación de mathematica 6.0 con lo cual las integrales $\kappa_{1,1}, \kappa_{1,2}$ resultan:

$$\kappa_{1,1} = \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{p_1^2} \left[-\ln(m^2) p_1^2 - \ln \left(1 - \frac{p_1^2}{m^2} \right) p_1^2 + m^2 \ln \left(1 - \frac{p_1^2}{m^2} \right) p_1^2 \right] \quad (3.36)$$

$$\kappa_{1,2} = \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{p_2^2} \left[-\ln(m^2) p_2^2 - \ln \left(1 - \frac{p_2^2}{m^2} \right) p_2^2 + m^2 \ln \left(1 - \frac{p_2^2}{m^2} \right) p_2^2 \right] \quad (3.37)$$

Ahora podemos usar la regla de L'Hopital y el límite $p_1^2 = p_2^2 = p_3^2 = p^2$ y obtenemos un término convergente:

$$\frac{\kappa_{1,1} - \kappa_{1,2}}{p_1^2 - p_2^2} = -\frac{1}{p^4} \left[p^4 + m^2 \ln \left(1 - \frac{p^4}{m^2} \right) \right] + \frac{\varepsilon}{p^4} \ln(m^2 - 1) \left[p^4 + m^2 \ln \left(\frac{1 - p^4}{m^2} \right) \right] \quad (3.38)$$

y ahora podemos sustituir los resultado dado por la ecuación (3.38) en $\tau_3^{(1a)}, \tau_3^{(1b)}, \tau_8^{(1a)}$

y $\tau_8^{(1b)}$:

$$\begin{aligned}
\tau_{3REN}^{(1a)} &= \frac{g^2}{288\pi^4 p^6} \left\{ \left[-\pi^2(m^2 - p^2)(m^2 + p^2) \ln\left(\frac{m^2 - p^2}{m^2}\right) - ip^2(2m^4 J_2(1, 1, 1) + 3i\pi^2 p^2 \right. \right. \\
&+ 4im^2 \pi^2 ff - 2ip^2 ff - 3im^2 \pi^2 - 2p^4 J_2(1, 1, 1)) \left. \right] \xi + \pi^2(m^2 - p^2)^2 \ln\left(\frac{m^2 - p^2}{m^2}\right) \\
&+ ip^2(-4p^2 m^2 J_2(1, 1, 1)) + 2m^4 J_2(1, 1, 1) - 3i\pi^2 p^2 + 2ip^2 \pi^2 ff - p^4 J_2(1, 1, 1) \\
&+ 4im^2 \pi^2 ff - 3im^2 \pi^2 \left. \right\} \varepsilon \tag{3.39}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r\tau_{3REN}^{(1b)} &= g^2 \left\{ \frac{1}{128\pi^2 p^6 (p^4 - m^2 p^2 + m^4)} \left[2p^2 \xi^2 (m^2 - p^2)(-p^2 + 2m^2)(m^2 + p^4) \ln\left(\frac{m^2 - p^2}{m^2}\right) \right. \right. \\
&- \xi^2 p^4 (-p^2 + 2m^2)(m^2 - 2p^2 \ln(m^2)) + \xi^2 p^2 (-p^2 + 2m^2)(m^2 - 2p^2 \ln(-p^2)) \\
&+ \xi(m^2 - p^2)(-5p^6 + 6p^4 m^2 + m^6) \ln\left(\frac{m^2 - p^2}{m^2}\right) + p^2 \xi(-9p^4 m^2 + 3p^2 m^4 + 2m^6 + 5p^6) \\
&\times (\ln(m^2) - \ln(-p^2)) \left. \right] + \frac{1}{128\pi^4 p^6} \left[\xi^2 p^4 i(2m^2 J_1(1, 1, 1) - p^2 J_1(1, 1, 1) + 6i\pi^2) \right. \\
&- 2i\xi p^2(2m^4 J_1(1, 1, 1) + 3im^2 \pi^2 + 4m^2 p^2 J_1(1, 1, 1) + 9ip^2 \pi^2 + 2p^4 J_1(1, 1, 1)) \left. \right] \\
&+ \frac{1}{32\pi^4 p^6} \left[\pi^2(m^2 - p^2)(m^2 + p^2) \ln\left(\frac{m^2 - p^2}{m^2}\right) + p^2 \pi^2(-p^2 + 2m^2)(\ln(-p^2) - \ln(m^2)) \right. \\
&+ ip^2(2M^4 J_1(1, 1, 1) - 2m^2 p^2 J_1(1, 1, 1) + 3im^2 \pi^2 + 2p^4 J_1(1, 1, 1) - 3i\pi^2 p^2) \left. \right] \left. \right\} \varepsilon \tag{3.40}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{8REN}^{(1a)} &= \frac{g^2}{144p^4 \pi^4} \left\{ -2\pi^2(-m^2 + p^2) \ln\left(-\frac{-m^2 + p^2}{m^2}\right) - p^2 m^2 i \left(2J_2(1, 1, 1) \right. \right. \\
&+ \left. \left. p^2 J_2(1, 1, 1) + 4i\pi^2 ff \right) \right\} \varepsilon \tag{3.41}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{8REN}^{(1b)} &= \frac{g^2}{64p^4\pi^4(p^4 - m^2p^2 + m^4)} \left\{ \left[-2p^2\pi^2\xi^2(-m^2 + p^2)(m^2 + p^2) \ln\left(-\frac{-m^2 + p^2}{m^2}\right) \right. \right. \\
&+ \xi^2\pi^2p^4(2p^2 - m^2)(\ln(-p^2) - \ln(m^2)) + 2\xi\pi^2(-m^2 + p^2)(-m^4 + 5m^2 + 3p^4) \\
&\times \left. \ln\left(-\frac{m^2 + p^2}{m^2}\right) + 2\xi p^2\pi^2(3p^4 - m^4 - m^2p^2)[\ln(m^2) - \ln(-p^2)] \right] + \frac{1}{64\pi^4p^4} \\
&\times \left[-ip^4\xi^2 J_1(1, 1, 1) + 2p^2i(3p^2 + m^2) J_1(1, 1, 1)\xi + 12\pi^2(-m^2 + p^2) \ln\left(-\frac{m^2 + p^2}{m^2}\right) \right. \\
&\left. \left. + 12\pi^2p^2[\ln(m^2 - \ln(-p^2))] - 12p^2i(m^2 + p^2)J_1(1, 1, 1) \right] \right\} \varepsilon
\end{aligned}$$

donde hemos usado:

$$ff \equiv \frac{1}{2\sqrt{z}} \ln\left(\frac{1 + \sqrt{z}}{1 - \sqrt{z}}\right) \quad z = \frac{p^2}{p^2 - 4m^2} \quad (3.42)$$

Capítulo 4

Solución Numérica

En este capítulo haremos el cálculo de las componentes del vértice, con el fin de compararlas con los resultados de lattice. Para tal propósito consideramos momentos de 1-3 GeV. y una masa del quark de $m \approx 115 \text{ MeV}$. Usaremos $\xi = 0, g = 1$. La constante de normalización es fijada como en [12]. Para $\lambda_1 = \lambda_1^a + \lambda_1^b$ tenemos que resolver las integrales:

$$\begin{aligned} J_1(1, 1, 1) &= \chi \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{d\xi d\eta}{\beta[m^2\eta\gamma - \eta p_1^2 - \xi\eta p_2^2 - \xi p_3^2]^{3-n/2}} \\ J_2(1, 1, 1) &= \chi \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{d\xi d\eta}{\beta[m^2\gamma(1+\eta) - \xi p_1^2 - \xi\eta p_2^2 - \eta p_3^2]^{3-n/2}} \end{aligned} \quad (4.1)$$

donde

$$\beta = (1 + \xi + \eta)^{n-3} \quad \gamma = 1 + \xi + \eta \quad \chi = -i\pi^{n/2}\Gamma\left(3 - \frac{n}{2}\right) \quad (4.2)$$

Para el caso $n = 4$ y $p_1^2 = p_2^2 = p_3^2 = p^2$ tenemos que las ecuaciones 4.1 se transforman de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} J_1(1, 1, 1) &= -i\pi^2 \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{d\xi d\eta}{\gamma[m^2\eta\gamma - \eta p^2 - \xi\eta p^2 - \xi p^2]} \\ J_2(1, 1, 1) &= -i\pi^2 \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{d\xi d\eta}{\gamma[m^2\gamma(1+\eta) - \xi p^2 - \xi\eta p^2 - \eta p^2]} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Resolver las integrales (4.3) no es tarea fácil pero se puede encontrar una solución numérica, esto se puede hacer por dos métodos distintos: el propuesto en [13] que usa funciones de Clausen y de manera directa usando Mathematica. Las funciones de Clausen son definidas como:

$$Cl_2(x) = - \int_0^x \ln \left[2 \sin \left(\frac{1}{2}t \right) \right] dt \quad (4.4)$$

Con esto las integrales (4.3) se pueden escribir como:

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{i\pi^2}{p^2\sqrt{3}} \left\{ 2Cl_2 \left(\frac{\pi}{3} \right) + 2Cl_2 \left(\frac{\pi}{3} + 2\theta_{s1} \right) + Cl_2 \left(\frac{\pi}{3} - 2\theta_{s1} \right) + Cl_2 \left(\pi - 2\theta_{s1} \right) \right\} \\ J_2 &= \frac{2i\pi^2}{p^2\sqrt{3}} \left\{ 2Cl_2 \left(\frac{2\pi}{3} \right) + Cl_2 \left(\frac{\pi}{3} + 2\theta_{s2} \right) + Cl_2 \left(\frac{\pi}{3} - 2\theta_{s1} \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.5)$$

donde:

$$\tan \theta_{s1} = \frac{\mu^2 + 2m^2}{\mu^2\sqrt{3}}, \quad \tan \theta_{s2} = \sqrt{\frac{\mu^2 + 4m^2}{3\mu^2}} \quad (4.6)$$

Así que los resultados para las integrales $J_1(1, 1, 1)$ y $J_2(1, 1, 1)$ son:

p	$J_1(1,1,1)$ Clausen	$J_1(1,1,1)$ Directo
0.2	797.53 - 126.585 <i>i</i>	-126.585 <i>i</i>
0.4	131.5 - 65.9475 <i>i</i>	-65.9475 <i>i</i>
0.6	35.8143 - 39.4478 <i>i</i>	-39.4478 <i>i</i>
0.8	12.8623 - 25.8337 <i>i</i>	-25.8337 <i>i</i>
1.	5.59159 - 18.07 <i>i</i>	-18.07 <i>i</i>
1.2	2.78468 - 13.2811 <i>i</i>	-13.2811 <i>i</i>
1.4	1.53227 - 10.1415 <i>i</i>	-10.1415 <i>i</i>
1.6	0.90938 - 7.98145 <i>i</i>	-7.98145 <i>i</i>
1.8	0.572531 - 6.43636 <i>i</i>	-6.43636 <i>i</i>
2.	0.377901 - 5.29531 <i>i</i>	-5.29531 <i>i</i>
2.2	0.259256 - 4.42995 <i>i</i>	-4.42995 <i>i</i>
2.4	0.183668 - 3.75879 <i>i</i>	-3.75879 <i>i</i>
2.6	0.133695 - 3.22817 <i>i</i>	-3.22817 <i>i</i>
2.8	0.0996034 - 2.80167 <i>i</i>	-2.80167 <i>i</i>
3.	0.0757083 - 2.45388 <i>i</i>	-2.45388 <i>i</i>

Figura 4.1: tabla 1

p	$J_2(1,1,1)$ Clausen	$J_2(1,1,1)$ Directo
0.2	1227.74 - 44.2776 <i>i</i>	-44.2776 <i>i</i>
0.4	193.21 - 34.2732 <i>i</i>	-34.2732 <i>i</i>
0.6	55.6259 - 25.3197 <i>i</i>	-25.3197 <i>i</i>
0.8	21.2721 - 18.7749 <i>i</i>	-18.7749 <i>i</i>
1.	9.69969 - 14.2061 <i>i</i>	-14.2061 <i>i</i>
1.2	4.99643 - 11.0052 <i>i</i>	-11.0052 <i>i</i>
1.4	2.81564 - 8.71925 <i>i</i>	-8.71925 <i>i</i>
1.6	1.69994 - 7.04864 <i>i</i>	-7.04864 <i>i</i>
1.8	1.08385 - 5.79963 <i>i</i>	-5.79963 <i>i</i>
2.	0.722215 - 4.84591 <i>i</i>	-4.84591 <i>i</i>
2.2	0.499094 - 4.10367 <i>i</i>	-4.10367 <i>i</i>
2.4	0.3556 - 3.51609 <i>i</i>	-3.51609 <i>i</i>
2.6	0.260025 - 3.04383 <i>i</i>	-3.04383 <i>i</i>
2.8	0.19443 - 2.65908 <i>i</i>	-2.65908 <i>i</i>
3.	0.148229 - 2.34181 <i>i</i>	-2.34181 <i>i</i>

Figura 4.2: tabla 2

solo la parte imaginaria de estas integrales va a contribuir en los calculos, y como podemos notar la contribución es igual en ambos métodos.

4.1. Resultados No Renormalizados

p	$\lambda_{1\text{NR}}^a$	$\lambda_{1\text{NR}}^b$
0.2	$-\frac{0.00105543}{\epsilon} - 0.0041573 - 0.00898128 \epsilon + O(\epsilon^2)$	$\frac{0.0284966}{\epsilon} + 0.118762 + 0.369747 \epsilon + O(\epsilon^2)$
0.4	$-\frac{0.00105543}{\epsilon} - 0.00384585 - 0.00787153 \epsilon + O(\epsilon^2)$	$\frac{0.0284966}{\epsilon} + 0.10701 + 0.280699 \epsilon + O(\epsilon^2)$
0.6	$-\frac{0.00105543}{\epsilon} - 0.00347854 - 0.00656271 \epsilon + O(\epsilon^2)$	$\frac{0.0284966}{\epsilon} + 0.094938 + 0.219393 \epsilon + O(\epsilon^2)$
0.8	$-\frac{0.00105543}{\epsilon} - 0.00311964 - 0.00528387 \epsilon + O(\epsilon^2)$	$\frac{0.0284966}{\epsilon} + 0.0839405 + 0.170995 \epsilon + O(\epsilon^2)$
1.2	$-\frac{0.00105543}{\epsilon} - 0.00249167 - 0.00304624 \epsilon + O(\epsilon^2)$	$\frac{0.0284966}{\epsilon} + 0.0656369 + 0.0976603 \epsilon + O(\epsilon^2)$
1.4	$-\frac{0.00105543}{\epsilon} - 0.00222319 - 0.0020896 \epsilon + O(\epsilon^2)$	$\frac{0.0284966}{\epsilon} + 0.0580255 + 0.068892 \epsilon + O(\epsilon^2)$
1.6	$-\frac{0.00105543}{\epsilon} - 0.00198048 - 0.00122476 \epsilon + O(\epsilon^2)$	$\frac{0.0284966}{\epsilon} + 0.0512161 + 0.0438361 \epsilon + O(\epsilon^2)$
1.8	$-\frac{0.00105543}{\epsilon} - 0.00175987 - 0.000438674 \epsilon + O(\epsilon^2)$	$\frac{0.0284966}{\epsilon} + 0.0450726 + 0.0217373 \epsilon + O(\epsilon^2)$
2.	$-\frac{0.00105543}{\epsilon} - 0.00155817 + 0.000280057 \epsilon + O(\epsilon^2)$	$\frac{0.0284966}{\epsilon} + 0.0394861 + 0.00203823 \epsilon + O(\epsilon^2)$
2.2	$-\frac{0.00105543}{\epsilon} - 0.00137268 + 0.000940992 \epsilon + O(\epsilon^2)$	$\frac{0.0284966}{\epsilon} + 0.0343702 - 0.0156819 \epsilon + O(\epsilon^2)$
2.4	$-\frac{0.00105543}{\epsilon} - 0.00120119 + 0.00155205 \epsilon + O(\epsilon^2)$	$\frac{0.0284966}{\epsilon} + 0.0296556 - 0.031747 \epsilon + O(\epsilon^2)$
2.6	$-\frac{0.00105543}{\epsilon} - 0.00104187 + 0.00211976 \epsilon + O(\epsilon^2)$	$\frac{0.0284966}{\epsilon} + 0.0252865 - 0.046411 \epsilon + O(\epsilon^2)$
2.8	$-\frac{0.00105543}{\epsilon} - 0.000893181 + 0.00264957 \epsilon + O(\epsilon^2)$	$\frac{0.0284966}{\epsilon} + 0.0212175 - 0.0598756 \epsilon + O(\epsilon^2)$
3.	$-\frac{0.00105543}{\epsilon} - 0.000753865 + 0.00314598 \epsilon + O(\epsilon^2)$	$\frac{0.0284966}{\epsilon} + 0.0174113 - 0.072304 \epsilon + O(\epsilon^2)$

Figura 4.3: tabla 2

p	$\lambda_{1\text{NR}}^a$	$\lambda_{1\text{NR}}^b$
0.2	-0.00898128	0.369747
0.4	-0.00787153	0.280699
0.6	-0.00656271	0.219393
0.8	-0.00528387	0.170995
1.2	-0.00304624	0.0976603
1.4	-0.0020896	0.068892
1.6	-0.00122476	0.0438361
1.8	-0.000438674	0.0217373
2.	0.000280057	0.00203823
2.2	0.000940992	-0.0156819
2.4	0.00155205	-0.031747
2.6	0.00211976	-0.046411
2.8	0.00264957	-0.0598756
3.	0.00314598	-0.072304

Figura 4.4: tabla 2

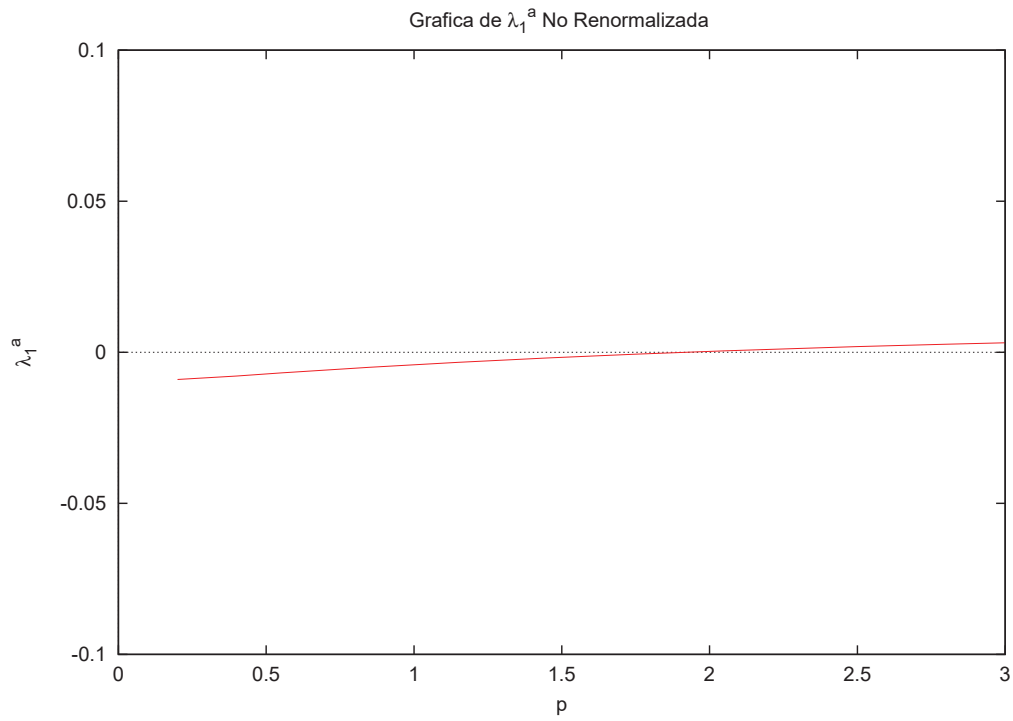


Figura 4.5: tabla 2

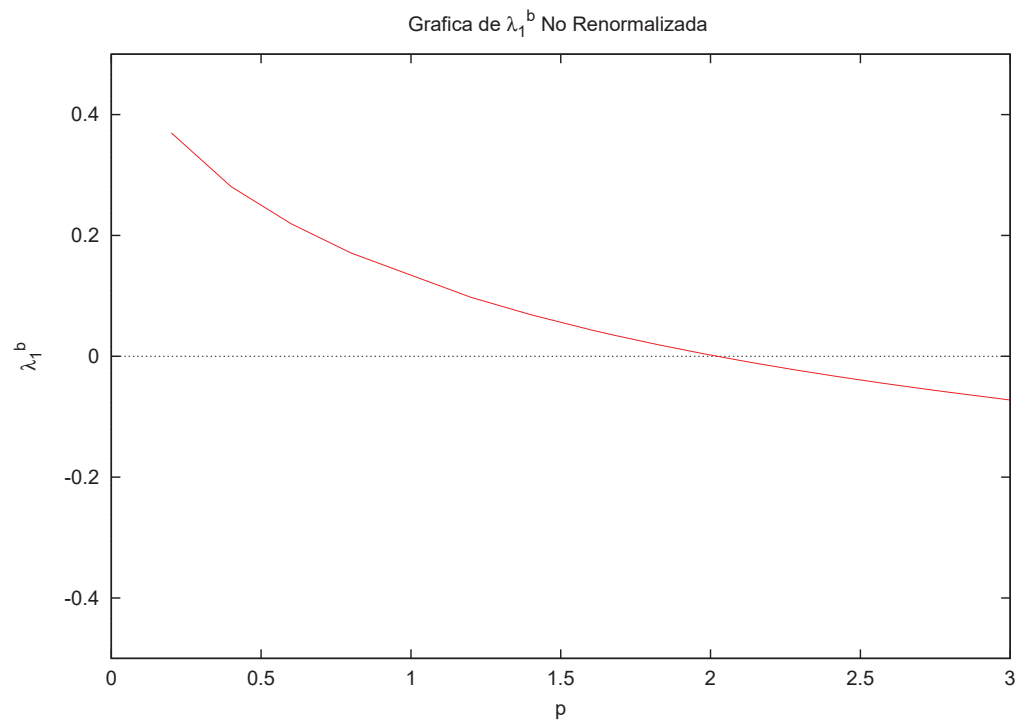


Figura 4.6: tabla 2

4.2. Resultados Renormalizados

Ahora para λ_1^a y λ_1^b obtenemos los siguientes resultados:

p	λ_1^a	λ_1^b
0.2	-0.0411313	1.11706
0.4	-0.0408199	1.10531
0.6	-0.0404526	1.09324
0.8	-0.0400937	1.08224
1.2	-0.0394657	1.06394
1.4	-0.0391972	1.05632
1.6	-0.0389545	1.04952
1.8	-0.0387339	1.04337
2.	-0.0385322	1.03779
2.2	-0.0383467	1.03267
2.4	-0.0381752	1.02795
2.6	-0.0380159	1.02359
2.8	-0.0378672	1.01952
3.	-0.0377279	1.01571

Figura 4.7: tabla 2

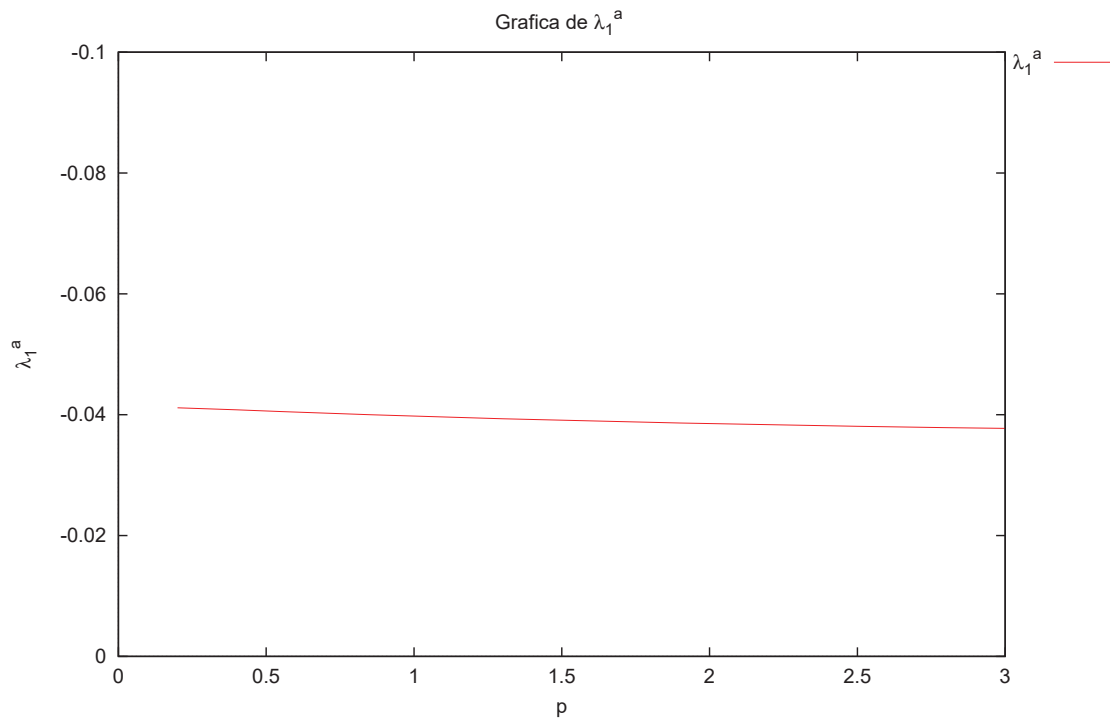


Figura 4.8: tabla 2

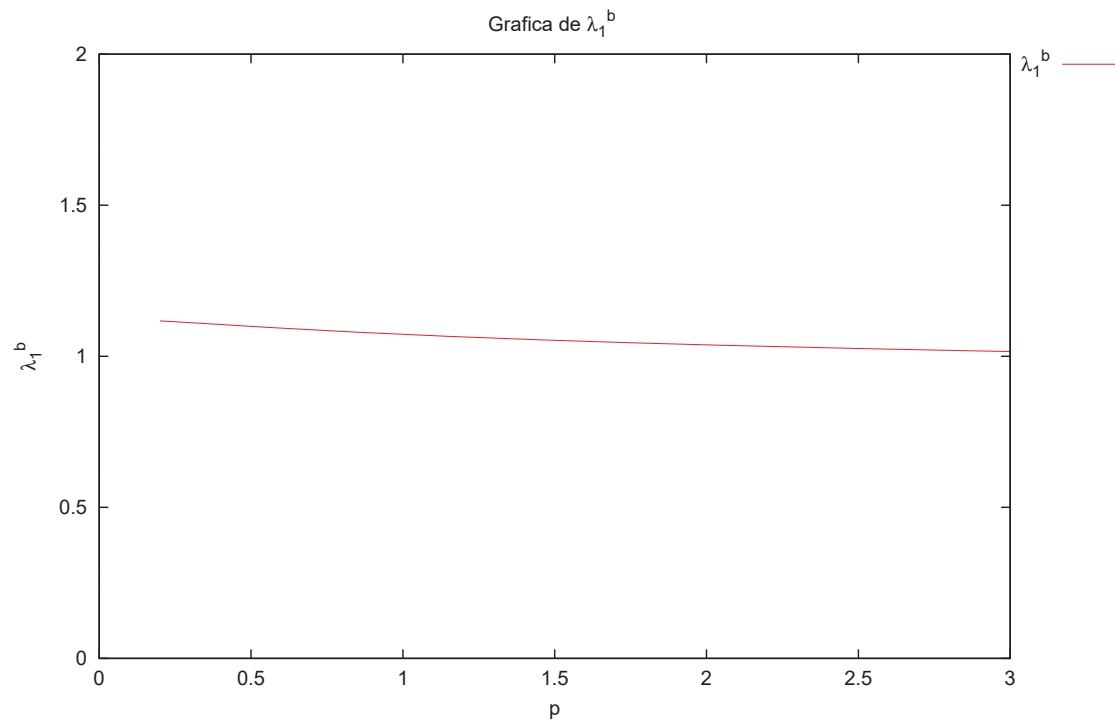


Figura 4.9: tabla 2

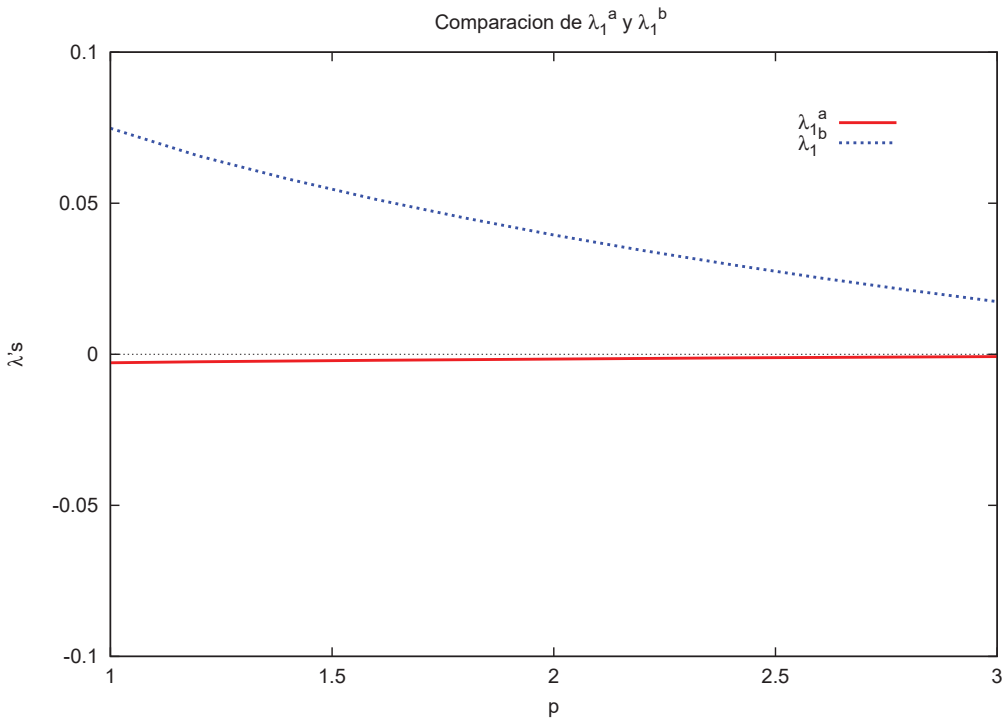


Figura 4.10: tabla 2

4.3. Comparación con Lattice y ESD

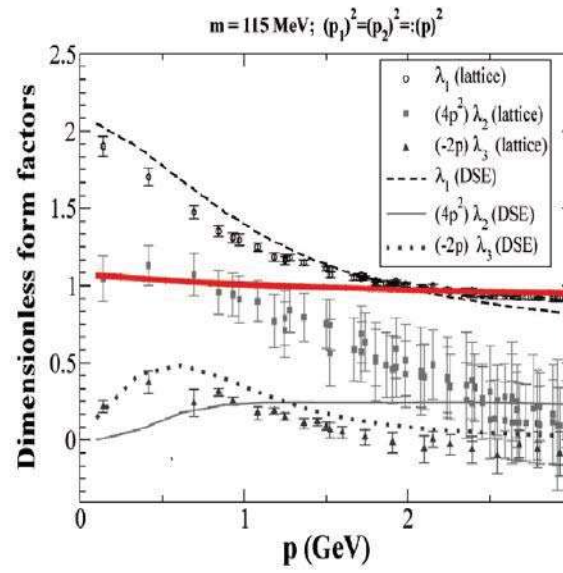
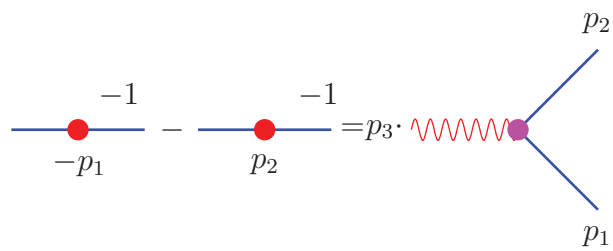


Figura 4.11: Mi Figura

Apéndice A

No se que va ir aki aun



Bibliografía

- [1] Quark-gluon vertex in general kinematics. Ayse Kizilersu, Derek B. Leinweber, Jon-Ivar Skullerud, Anthony G. Williams Eur.Phys.J.C50:871-875,2007. e-Print: hep-lat/0610078
- [2] Quark-gluon vertex in arbitrary kinematics. Jon-Ivar Skullerud (Trinity Coll., Dublin) , Patrick O. Bowman (Indiana U.) , Ayse Kizilersu, Derek B. Leinweber, Anthony G. Williams (Adelaide U.) . TRINLAT-04-03, Aug 2004. 6pp. Talk given at Workshop on QCD Down Under, Barossa Valley and Adelaide, Australia, 10-19 Mar 2004. Published in Nucl.Phys.Proc.Suppl.141:244-249,2005. Also in *Adelaide 2004, QCD down under* 244-249 e-Print: hep-lat/0408032
- [3] Looking inside the quark-gluon vertex. J.I. Skullerud (Trinity Coll., Dublin and Amsterdam U.) , A. Kizilersu, P.O. Bowman, D.B. Leinweber, A.G. Williams (Adelaide U.) . 2004. 8pp. Prepared for 2nd Cairns Topical Workshop on Lattice Hadron Physics 2003 (LHP 2003), Cairns, Australia, 22-30 Jul 2003. Published in Nucl.Phys.Proc.Suppl.128:117-124,2004. Al
- [4] Nonperturbative structure of the quark gluon vertex. Jonivar I. Skullerud (Amsterdam U.) , Patrick O. Bowman, Ayse Kizilersu, Derek B. Leinweber, Anthony G. Williams (Adelaide U.) . ITFA-2003-13, ADP-

03-108-T546, Mar 2003. 15pp. Published in JHEP 0304:047,2003. e-Print: hep-ph/0303176

- [5] The Nonperturbative quark gluon vertex. Jonivar Skullerud (Amsterdam U.) , Patrick O. Bowman, Ayse Kizilersu (Adelaide U.) . ITFA-2002-56, Dec 2002. 3pp. To appear in the proceedings of 5th International Conference on Quark Confinement and the Hadron Spectrum, Gargnano, Brescia, Italy, 10-14 Sep 2002. Published in *Gargnano 2002, Quark confinement and the hadron spectrum* 270-272 e-Print: hep-lat/0212011
- [6] Quark gluon vertex from lattice QCD. Jonivar Skullerud (Amsterdam U.) , Ayse Kizilersu (Adelaide U.) . ITFA-2002-18, ADP-02-72-T511, May 2002. 33pp. Published in JHEP 0209:013,2002. e-Print: hep-ph/0205318
- [7] Quark gluon vertex in a momentum subtraction scheme. Jonivar Skullerud (DESY) , Ayse Kizilersu, Anthony G. Williams (Adelaide U.) . Sep 2001. 3pp. Submitted to 19th International Symposium on Lattice Field Theory (Lattice 2001), Berlin, Germany, 19-24 Aug 2001. Published in Nucl.Phys.Proc.Suppl.106:841-843,2002. Also in *Berlin 2001, Lattice field theory* 841-843 e-Print: hep-lat/0109027
- [8] Aspects and consequences of a dressed quark gluon vertex. M.S. Bhagwat (Kent State U.) , A. Holl, A. Krassnigg (Argonne, PHY) , C.D. Roberts (Argonne, PHY and Rostock U.) , P.C. Tandy (Kent State U.) . ANL-PHY-10829-TH-2004, KSUCNR-204-01, MPG-VT-UR-245-04, Mar 2004. 22pp. Published in Phys.Rev.C70:035205,2004. e-Print: nucl-th/0403012

<http://www.slac.stanford.edu/spires/find/hep/www?eprint=nucl-th/0403012>

- [9] Quark-gluon vertex model and lattice-QCD data. M.S. Bhagwat, P.C. Tandy (Kent State U.) . KSUCNR-204-03, Jul 2004. 4pp. Published in Phys.Rev.D70:094039,2004. e-Print: hep-ph/0407163 <http://www.slac.stanford.edu/spires/find/hep/www?eprint=hep-ph/0407163>

- [10] Nonperturbative quark-gluon dynamics. Christian S. Fischer (Darmstadt, Tech. Hochsch.) , Reinhard Alkofer (Graz U.) , Felipe J. Llanes-Estrada (Madrid U.) , Kai Schwenzer (Graz U.) . Oct 2007. 4pp. Talk given at 11th International Conference on Meson-Nucleon Physics and the Structure of the Nucleon (MENU 2007), Julich, Germany, 10-14 Sep 2007. e-Print: arXiv:0710.1915 [hep-ph]

- [11] What the Infrared Behaviour of QCD Vertex Functions in Landau gauge can tell us about Confinement. Reinhard Alkofer (Graz U.) , Christian S. Fischer (Darmstadt, Tech. Hochsch.) , Felipe J. Llanes-Estrada (Madrid U.) , Kai Schwenzer (Graz U.) . May 2007. 13pp. To appear in the proceedings of 10th International Workshop on Hadron Physics (X Hadron Physics), Florianopolis, Brazil, 26-31 Mar 2007. Published in Int.J.Mod.Phys.E16:2720-2732,2007. e-Print: arXiv:0705.4402 [hep-ph]

- [12] Semiperturbative construction for the quark-gluon vertex. Felipe J. Llanes-Estrada (Madrid U.) , Christian S. Fischer (Durham U., IPPP) , Reinhard Alkofer (Tubingen U.) . UNITU-THEP-8-04, IPPP-04-43, DCPT-04-86, Jul 2004. 4pp. Talk given at 11th International Conference in Quantum Chromodynamics (QCD 04), Montpellier, France, 5-9 Jul 2004. Published in Nucl.Phys.Proc.Suppl.152:43-46,2006.

- [13] One loop results for the quark gluon vertex in arbitrary dimension. Andrei I. Davydychev (Mainz U., Inst. Phys.) , P. Osland, L. Saks (Bergen U.) . MZ-TH-00-23, Apr 2000. 6pp. Based on talk given at Zeuthen Workshop on Elementary Particle Theory: Loops and Legs in Quantum Field Theory, Koenigstein-Weissig, Germany, 9-14 Apr 2000. Published in Nucl.Phys.Proc.Suppl.89:277-282,2000. Also in *Bastei 2000, Loops and legs in quantum field theory* 277-282
- [14] Quark gluon vertex in arbitrary gauge and dimension. Andrei I. Davydychev (Mainz U., Inst. Phys.) , P. Osland, L. Saks (Bergen U.) . MZ-TH-99-63, Aug 2000. 50pp. Published in Phys.Rev.D63:014022,2001
- [15] THE INFLUENCE OF QUARK MASSES ON THE INFRARED BEHAVIOR OF α_s (Q^2) IN QCD. L.V. Dung, H.D. Phuoc, O.V. Tarasov (Dubna, JINR) . JINR-E2-89-415, Jun 1989. 18pp. Published in Sov.J.Nucl.Phys.50:1072-1079,1989, Yad.Fiz.50:1726-1738,1989.
- [16] ANALYTIC PROPERTIES OF THE VERTEX FUNCTION IN GAUGE THEORIES. 2. James S. Ball, Ting-Wai Chiu (Utah U.) . UU/HEP-80/3, (Received Jul 1980). 27pp. Published in Phys.Rev.D22:2550,1980, Erratum-ibid.D23:3085,1981.