



**UNIVERSIDAD MICHOACANA  
DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO**



**FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA**

**DIAGNÓSTICO DE FALLAS EN SISTEMAS DINÁMICOS  
BASADO EN TÉCNICAS DE INVERSIÓN**

**TESIS**

Que para obtener el grado de

**MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA**

Presenta

**Rogelio Martínez Hernández**

Director de Tesis

**José Juan Rincón Pasaye**

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo  
Mayo 2012



# DIAGNÓSTICO DE FALLAS EN SISTEMAS DINÁMICOS BASADO EN TÉCNICAS DE INVERSIÓN

Los miembros del Jurado de Examen de Grado aprueban la tesis de maestría de *Rogelio Martínez Hernández*.

Dr. José Juan Rincón Pasaye  
*Asesor*

---

Dr. Gilberto González Ávalos

---

Dr. Juan Anzures Marín

---

Dr. J. Jesús Rico Melgoza

---

Dr. Basilio Del Muro Cuéllar

---

Dr. Aurelio Medina Ríos  
*Jefe de la División de Estudios de  
Posgrado de la Facultad de Ingeniería  
Eléctrica.*

---

UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

Enero de 2012



# Contenido

<b>LISTA DE ABREVIATURAS .....</b>	<b>VIII</b>
<b>LISTA DE FIGURAS.....</b>	<b>IX</b>
<b>LISTA DE TABLAS.....</b>	<b>XI</b>
<b>LISTA DE SÍMBOLOS.....</b>	<b>XII</b>
<b>AGRADECIMIENTOS.....</b>	<b>XV</b>
<b>RESUMEN.....</b>	<b>XVII</b>
<b>ABSTRACT.....</b>	<b>XIX</b>
<b>CAPÍTULO 1            INTRODUCCIÓN .....</b>	<b>1</b>
1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA .....	1
1.2 REVISIÓN DEL ESTADO DEL ARTE .....	3
1.2.1 FDI con el filtro de Beard-Jones .....	3
1.2.2 Enfoques estocásticos .....	3
1.2.3 Enfoque basado en observadores .....	4
1.2.4 Enfoque basado en relaciones de paridad.....	5
1.2.5 Estimación de parámetros .....	6
1.2.6 FDI basado en el proceso de dos etapas .....	7
1.2.7 Sistemas inversos .....	7
1.2.8 Enfoque algebraico y estimación de derivadas .....	9
1.3 JUSTIFICACIÓN .....	10
1.4 OBJETIVOS .....	10
1.5 APORTACIONES .....	11
1.6 DESCRIPCIÓN DE CAPÍTULOS .....	12
1.7 PUBLICACIONES .....	14
<b>CAPÍTULO 2            EL PROBLEMA DE DIAGNÓSTICO DE FALLAS.....</b>	<b>15</b>
2.1 IMPORTANCIA DEL DIAGNÓSTICO DE FALLAS .....	15
2.2 TERMINOLOGÍA .....	16
2.3 REDUNDANCIA FÍSICA Y REDUNDANCIA ANALÍTICA.....	17
2.4 DIAGNÓSTICO DE FALLAS BASADO EN EL MODELO.....	18
2.4.1 Generación de residuos .....	19

2.4.2 Toma de decisiones.....	20
2.4 ENFOQUES PARA LA GENERACIÓN DE RESIDUOS .....	21
<b>CAPÍTULO 3          INVERSIÓN DE SISTEMAS DINÁMICOS APLICADO AL</b>	
<b>DIAGNÓSTICO DE FALLAS.....</b>	<b>23</b>
3.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVERSIÓN EN GENERAL.....	24
3.1.1 Inversión de sistemas por la izquierda .....	24
3.1.2 Inversión de sistemas por la derecha .....	25
3.2 EL PROBLEMA DE INVERSIÓN DE SISTEMAS EN EL CONTEXTO DE DIAGNÓSTICO DE FALLAS .....	26
3.3 MODELADO DE SISTEMAS CON FALLAS .....	27
3.3.1 Fallas aditivas en sensores.....	28
3.3.2 Fallas aditivas en actuadores.....	28
3.4 CONDICIONES DE DIAGNOSTICABILIDAD E INVERTIBILIDAD POR LA IZQUIERDA.....	30
3.5 CASO LINEAL .....	32
3.5.1 Enfoque en función de transferencia .....	32
3.5.2 Enfoque en espacio de estado basado en la metodología de Silverman.....	37
3.5.3 Metodología de Zheng y Cao.....	43
3.6 CASO NO LINEAL .....	51
3.6.1 Metodología de Zheng y Cao.....	52
3.6.2 Metodología modificada de Hirschorn.....	58
3.7 DERIVADORES.....	66
3.7.1 El derivador ideal.....	67
3.7.2 Derivador lineal de primer y segundo orden.....	68
3.7.3 Otros derivadores.....	72
<b>CAPÍTULO 4          CASOS DE ESTUDIO EN SIMULACIÓN.....</b>	<b>73</b>
4.1 CASOS TEÓRICOS .....	73
4.2 CASOS PRÁCTICOS.....	78
<b>CAPÍTULO 5          DIAGNÓSTICO DE FALLAS EN UN SISTEMA EXPERIMENTAL DE</b>	
<b>BOLA Y BARRA.....</b>	<b>93</b>
5.1 DESCRIPCIÓN DEL PROTOTIPO DE BOLA Y BARRA.....	93
5.2 MODELADO MATEMÁTICO DEL PROTOTIPO DE BOLA Y BARRA .....	95
5.3 CONTROL DEL PROTOTIPO DE BOLA Y BARRA.....	99

5.4 FALLAS EN ACTUADORES .....	100
5.5 FALLAS EN SENSORES.....	102
5.6 FALLAS EN SENSORES Y EN ACTUADORES .....	105
<b>CAPÍTULO 6                    CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS.....</b>	<b>107</b>
6.1 CONCLUSIONES .....	107
6.2 TRABAJOS FUTUROS.....	109
<b>APÉNDICE A. INVERSIÓN DE SISTEMAS NO LINEALES: APLICACIÓN AL DIAGNÓSTICO DE FALLAS EN UN PÉNDULO INVERTIDO.....</b>	<b>111</b>
<b>APÉNDICE B. FAULT DIAGNOSIS IN LINEAR MULTIVARIABLE SYSTEMS, AN INVERSION APPROACH.....</b>	<b>119</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA.....</b>	<b>127</b>

# Lista de abreviaturas

FDI	Detección y Aislamiento de Fallas
MIT	Massachusetts Institute of Technology
GLR	Generalized Likelihood Ratio
PDF	Función de Densidad Probabilística
SLIT	Sistema Lineal Invariante en el Tiempo
SAFEPROCESS	Fault Detection, Supervision and Safety for Technical Processes
IFAC	International Federation of Automatic Control

# Lista de figuras

Figura 1.1: Sistema original y su inverso por la izquierda.....	2
Figura 1.2: Inversión respecto a entradas desconocidas .....	2
Figura 1.3: Generación de residuos por medio de observadores .....	5
Figura 1.4: Esquema de FDI basado en estimación de parámetros.....	7
Figura 2.1: Redundancia física vs redundancia analítica .....	18
Figura 2.2: Estructura del diagnóstico de fallas basado en el modelo. ....	19
Figura 3.1: Sistema inverso por la izquierda en cascada con el sistema original .....	24
Figura 3.2: Sistema inverso por la derecha en cascada con el sistema original.....	26
Figura 3.3: Inversión respecto a entradas desconocidas .....	26
Figura 3.4: Diagrama de bloques de un sistema en lazo abierto.....	27
Figura 3.5: Dinámica del sistema.....	27
Figura 3.6: Sensores, salida real y salida medida.....	28
Figura 3.7: Actuadores, entradas y entradas de control. ....	29
Figura 3.8: Comparación entre la falla 1 y su reconstrucción con condiciones iniciales conocidas, ejemplo 3.1 .....	36
Figura 3.9: Comparación entre la falla 2 y su reconstrucción con condiciones iniciales conocidas, ejemplo 3.1 .....	36
Figura 3.10: Comparación entre la falla 1 y su reconstrucción con condiciones iniciales desconocidas, ejemplo 3.1.....	37
Figura 3.11: Comparación entre la falla 2 y su reconstrucción con condiciones iniciales desconocidas, ejemplo 3.1.....	37
Figura 3.12: Comparación entre la falla 1 y su reconstrucción, ejemplo 3.2.....	42
Figura 3.13: Comparación entre la falla 2 y su reconstrucción, ejemplo 3.2.....	42
Figura 3.14: Comparación entre la falla 1 y su reconstrucción, ejemplo 3.3.....	51
Figura 3.15: Comparación entre la falla 2 y su reconstrucción, ejemplo 3.3.....	51
Figura 3.16: Comparación entre la falla 1 y su reconstrucción, ejemplo 3.5.....	57
Figura 3.17: Comparación entre la falla 2 y su reconstrucción, ejemplo 3.5.....	58

Figura 3.18: Derivador ideal .....	67
Figura 3.19: Respuesta de frecuencia del derivador ideal.....	68
Figura 3.20: Respuesta de frecuencia del derivador lineal de primer orden .....	69
Figura 3.21: Respuesta de frecuencia del derivador lineal de segundo orden .....	70
Figura 3.22: Derivada de una señal senoidal con ruido Gaussiano .....	71
Figura 4.1: Comparación entre la falla real 1 y su reconstrucción, ejemplo 4.1.....	77
Figura 4.2: Comparación entre la falla real 2 y su reconstrucción, ejemplo 4.1.....	77
Figura 4.3: Salidas del sistema controlado, ejemplo 4.2.....	79
Figura 4.4: Salidas con ruido del sistema original, ejemplo 4.2 .....	81
Figura 4.5: Comparación entre las fallas reales y su reconstrucción, ejemplo 4.2 .....	82
Figura 4.6: Comparación entre las fallas reconstruidas y las reales, ejemplo 4.3.....	84
Figura 4.7: Péndulo invertido traslacional .....	85
Figura 4.8: Salidas con ruido de medición, ejemplo 4.4 .....	88
Figura 4.9: Comparación entre la falla y su reconstrucción, ejemplo 4.4.....	88
Figura 4.9: Salidas sin fallas, ejemplo 4.5.....	89
Figura 4.10: Salidas con ruido de medición, ejemplo 4.5 .....	91
Figura 4.11: Comparación entre la falla y su reconstrucción, ejemplo 4.5.....	92
Figura 5.1: Prototipo físico de bola y barra.....	94
Figura 5.2: Diagrama del sistema experimental de bola y barra.....	95
Figura 5.3: Relación entre la posición del servomotor y la posición de la barra .....	98
Figura 5.4: Retroalimentación lineal de estados incluyendo una acción integral .....	99
Figura 5.5: Respuesta en simulación del sistema.....	100
Figura 5.6: Comparación entre la falla reconstruida sobre el sistema real y la falla reconstruida con datos simulados.....	102

# Lista de Tablas

Tabla 4.1: Datos del péndulo invertido traslacional.....	85
Tabla 5.1: Datos del prototipo de bola y barra.....	94

# Lista de Símbolos

$u(t)$	Entrada del sistema dinámico
$y(t)$	Salida del sistema dinámico
$f(t)$	Fallas
$d(t)$	Perturbaciones actuando sobre el sistema
$\infty$	Infinito
$\rightarrow$	Tiende a
$\hat{y}(t)$	Salida estimada
$\hat{\Theta}$	Parámetros estimados
$t_0$	Tiempo inicial
$x_0$	Condiciones iniciales de los estados
$\Sigma$	Sistema dinámico
$\Sigma_L^{-1}$	Sistema inverso por la izquierda
$\Sigma_R^{-1}$	Sistema inverso por la derecha
$y_{ref}$	Salida deseada
$u_R$	Entrada real
$y_R$	Salida real
$f_c(t)$	Falla actuando sobre el sistema
$f_s(t)$	Fallas en sensores
$f_a(t)$	Fallas en actuadores
$\bar{u}(t)$	Vector de entradas conocidas y desconocidas
$p$	Número de salidas del sistema
$m$	Número de entradas del sistema

$l$	Número de fallas
$n$	Número de estados
$\oplus$	Suma directa
$\subset$	Contenido en
$\perp$	Complemento ortogonal
$O^*$	Espacio cotangente observable
$AO^*$	Espacio cotangente completamente observable
$X^*$	Espacio de estados cotangente
$Y^*$	Espacio cotangente de salidas
$U^*$	Espacio cotangente de entradas
$F^*$	Espacio cotangente de las fallas
$\mu$	Media
$\sigma^2$	Varianza



# Agradecimientos

Al Dr. José Juan Rincón Pasaye por su gran apoyo como Asesor para la elaboración de esta Tesis y por su gran labor como profesor la cual me ayudó a adquirir una gran cantidad de nuevos conocimientos.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología CONACYT por haberme apoyado económicamente durante todo el desarrollo de esta maestría.

A la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo por haberme brindado la oportunidad de cursar estos estudios de Maestría en Ciencias en Ingeniería Eléctrica.

A mis padres y hermanos por apoyarme siempre en cada etapa de mi desarrollo profesional.

A mi esposa Ana Gabriela Armas Díaz y a mi hijo Dustin Alexander Martínez Armas por estar siempre a mi lado y motivarme a seguir superándome cada día.

Al profesor Félix Jiménez Pérez, al alumno Abraham Jaime Origel, al Dr. Gilberto González Ávalos por su gran apoyo para mis prácticas en prototipos físicos.

A mis compañeros de generación por su valioso apoyo y su valiosa amistad.



# Resumen

En esta tesis se aborda el problema de FDI basado en técnicas de inversión por la izquierda respecto a las fallas de sistemas lineales y no lineales. Se da un panorama preliminar de lo que son los sistemas inversos por la derecha y por la izquierda. Se revisan varias técnicas de inversión respecto a las entradas conocidas y se adaptan para su funcionamiento como técnicas de inversión respecto a las entradas desconocidas o fallas.

En el transcurso de la investigación surgen problemáticas tales como la de derivar señales de entrada y salidas del sistema original que actúan como entradas para el sistema inverso. Un problema práctico que se presenta es el ruido de medición el cual es amplificado por un derivador ideal, para ello se analizan algunos derivadores y se utilizan los que mejor respuesta dan ante la presencia de ruido.

Cada metodología que se presenta es ilustrada con un ejemplo para mostrar su funcionamiento, se dan además los resultados en simulación y se mencionan los aspectos más importantes de dichas simulaciones.

Se presentan además una serie de casos de estudio que incluyen casos totalmente teóricos y otros que tienen aplicaciones prácticas, para estos casos de estudio se analizan los resultados obtenidos en simulación.

Finalmente, se presenta una aplicación en un prototipo físico de Bola y Barra sobre el cual se aplica una técnica de control para partir de un modelo matemático estable. Sobre este prototipo físico, el cual puede ser representado por un modelo no lineal se lleva a cabo un estudio de fallas en actuadores y en sensores aplicando la metodología de inversión de Zheng y Cao adaptada para su funcionamiento para el caso con fallas.



# Abstract

This thesis deals with the problem of FDI based on left inverse techniques with respect to the faults acting in linear and nonlinear systems. A preliminary overview about the left and right inverse systems is given. Several techniques of system inversion with respect to the known inputs are analyzed and adapted to work with respect to the faults.

Some problems arise in this investigation; one of them is the calculation of the inputs and outputs derivatives of the original system, which act as inputs to the left inverse system. The amplified measurement noise yielded by the ideal differentiator becomes a practical problem; therefore it is necessary to analyze some differentiators, choosing only those with the best results when obtaining the derivatives in presence of noise.

All the methodologies presented here are illustrated by an example that shows the overall procedure, also the simulation results are presented and the most important aspects of the simulation are analyzed.

Several study cases which include theoretical and practical applications are presented and the results of the simulations are also discussed.

Finally, an application in a Ball and Beam physical prototype is presented in which a control technique is applied to depart of a stable mathematical model. In this physical prototype, which can be represented by a non linear model, the Zheng and Cao inversion methodology is adapted and applied to study some faults acting in the sensors and actuators of the system.



# Capítulo 1

## Introducción

En la presente investigación se aborda el problema de inversión por la izquierda de sistemas dinámicos aplicado al diagnóstico de fallas en sistemas lineales y no lineales. Se analizan diferentes metodologías para el caso libre de fallas y se realiza su adaptación para el caso con fallas. El funcionamiento de cada una de ellas se hace mediante una serie de casos de estudio, además se presenta una aplicación en tiempo real en un prototipo físico.

Este capítulo se inicia con el planteamiento del problema en general y se menciona el esquema propuesto para atacar el problema de diagnóstico de fallas con el uso de sistemas inversos por la izquierda. En seguida se da una breve descripción de trabajos previos relacionados con el diagnóstico de fallas. A continuación se mencionan los objetivos que se pretenden alcanzar al término de esta investigación. Posteriormente, se mencionan las aportaciones realizadas y finalmente se da una descripción de cada uno de los capítulos.

### 1.1 Planteamiento del problema

A continuación se muestra una breve descripción del funcionamiento de los sistemas inversos por la izquierda en general y posteriormente se muestra la adaptación que se propone para el diagnóstico de fallas, lo cual se pretende desarrollar en este

trabajo de investigación. La Figura 1.1 muestra esquemáticamente el funcionamiento de los sistemas inversos para la reconstrucción de entradas conocidas  $u(t)$ .

Un sistema inverso por la izquierda se puede entender como aquel sistema dinámico que conectado en cascada con el sistema original puede reconstruir las entradas que actúan sobre el primero, utilizando únicamente información de su salida.

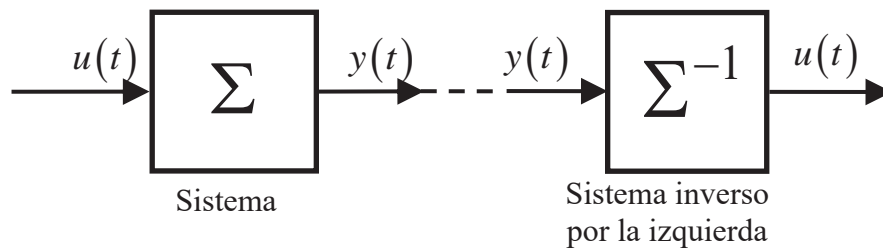


Figura 1.1: Sistema original y su inverso por la izquierda

La Figura 1.2 muestra esquemáticamente las modificaciones que se proponen para la reconstrucción de fallas  $f(t)$  (consideradas como entradas desconocidas) que actúan sobre el sistema original. Se puede apreciar que las entradas del sistema inverso son información conocida del sistema original, esto es; son entradas conocidas y salidas y posiblemente derivadas de ambas. Con el uso de los sistemas inversos por la izquierda se pretende llevar a cabo el diagnóstico de fallas que actúan sobre un sistema ya sea lineal o no lineal, siempre y cuando el sistema inverso correspondiente se pueda construir.

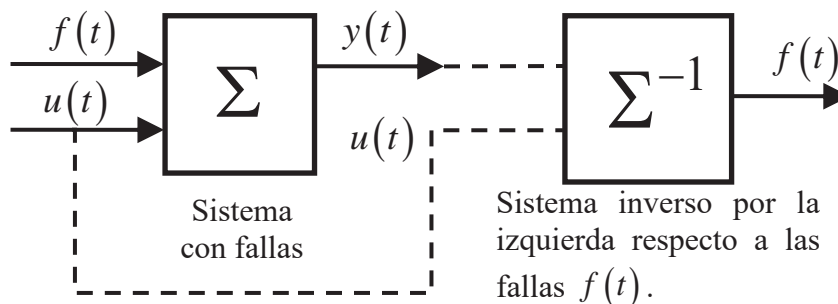


Figura 1.2: Inversión respecto a entradas desconocidas

## 1.2 Revisión del estado del arte

La problemática concerniente a la detección y aislamiento de fallas (FDI) se ha abordado desde una gran variedad de enfoques los cuales se describen a continuación.

### 1.2.1 FDI con el filtro de Beard-Jones

El problema de detección y aislamiento de fallas (FDI) basado en el modelo matemático se desarrolló paralelamente en varios lugares y por diferentes investigadores desde la década de los 70's. La idea de reemplazar la redundancia física por la redundancia analítica fue originada en el MIT por Beard (1971), en donde se desarrolló un filtro generador de residuos direccionales para la detección de fallas. Este enfoque fue redefinido en una interpretación geométrica por Jones (1973) y Massoumnia (1986). Esta línea de investigación ha llevado a lo que se conoce como *filtro de detección de fallas de Beard-Jones* o *filtro de detección de fallas de Beard*. El problema de diseño fue posteriormente resuelto por White and Speyer (1987), Park and Rizzoni (1994a), Park, Rizzoni and Ribbens (1994) y recientemente revisado por Liu y Si (1997), Chung y Speyer (1998), Chen y Speyer (1999) y Balas, Bokor y Szabó (2002). Este enfoque sólo se menciona como parte de la literatura disponible para FDI, sin embargo; en el presente trabajo no se profundizará en él.

### 1.2.2 Enfoques estocásticos

Los enfoques estadísticos también fueron desarrollados a principios de los 70's. Mehra y Peschon (1971) introdujeron un procedimiento general para FDI basado en innovaciones generadas por el filtro de Kalman. Las fallas son diagnosticadas en base a la blancura, media y covarianza de los residuos. Willsky y Jones (1974) y (1976) desarrollaron una estrategia para FDI la cual usa un análisis de la razón generalizada de verosimilitud (GLR por sus siglas en inglés) sobre un residuo generado por un filtro de Kalman para diagnosticar las fallas. Basseville (1988) condujo el problema de detección,

estimación y diagnóstico de cambios en propiedades dinámicas de las señales o sistemas, con particular énfasis en métodos estadísticos para la detección, para proveer un marco general para detección de cambios en señales y sistemas.

El desarrollo de enfoques estadísticos fue más tarde resumido en un documento por Tzafestas y Watanabe (1990). La característica más distinguible de este documento fue la excelente forma de resumir las técnicas estocásticas. Los métodos fundamentales y recientes desarrollos de los enfoques estadísticos se pueden encontrar en Basseville y Nikiforov (1993), Da y Lin (1995) y Keller, Summerer, Boutayeb y Darouach (1996). Guo y Wang (2004) consideran un algoritmo para la detección de fallas para sistemas estocásticos cuya salida es descrita como funciones de densidad probabilística (PDFs) en lugar de la clásica función de transferencia entrada-salida o el modelo en espacio de estado; los autores utilizan la técnica de expansión B-spline para aproximar la salida de PDFs. Al igual que el enfoque anterior, el enfoque estocástico sólo se menciona y no se profundizará en este trabajo.

### **1.2.3 Enfoque basado en observadores**

Los enfoques basados en observadores fueron utilizados a partir de mediados de los 70's. Clark y colaboradores aplicaron observadores de Luenberger para la detección de fallas (1975); varios esquemas de sensores para el aislamiento de fallas fueron desarrollados más tarde (Clark, 1978a), (Clark, 1978b) y (Clark, 1979). El comprensivo compendio de Frank (1987) estableció la posición de los métodos basados en observadores en el FDI basado en el modelo. En este compendio se revisan diferentes esquemas tanto para observadores lineales como para no lineales, además fueron presentadas algunas aplicaciones.

Commault, Dion, Sename y Motyeian (2002) presentan un método para FDI en sistemas lineales con fallas y perturbaciones; los generadores de residuos están basados en el diseño de un conjunto de observadores de tal manera que la función de transferencia de las perturbaciones a los residuos es cero y la función de transferencia de las fallas a los residuos permite el aislamiento de la falla; básicamente buscan una función de

transferencia de las fallas a los residuos con una estructura diagonal, esto es posible si el sistema a considerar es estructurado, es decir; las entradas de las matrices del sistema son ya sea ceros o parámetros libres. Dapeng, Chunliang y Paul (2009) atacan el problema de FDI en sistemas no lineales con el uso de observadores de estados extendidos y lógica difusa; la mayoría de los métodos de diagnóstico basados en el modelo requieren un conocimiento matemático del modelo nominal del sistema, sin embargo; el observador de estados extendido puede proveer información vital para la detección de fallas con información parcial de la planta, lo cual no se puede llevar a cabo con ningún método basado en observadores existente; el procedimiento propuesto se basa en la generación de firmas de las fallas, las cuales se utilizan como residuos, la generación de residuos se evalúa a través de un sistema de decisión difuso para realizar la toma de decisiones. La Figura 1.3 muestra esquemáticamente como se lleva a cabo la generación de residuos basado en observadores.

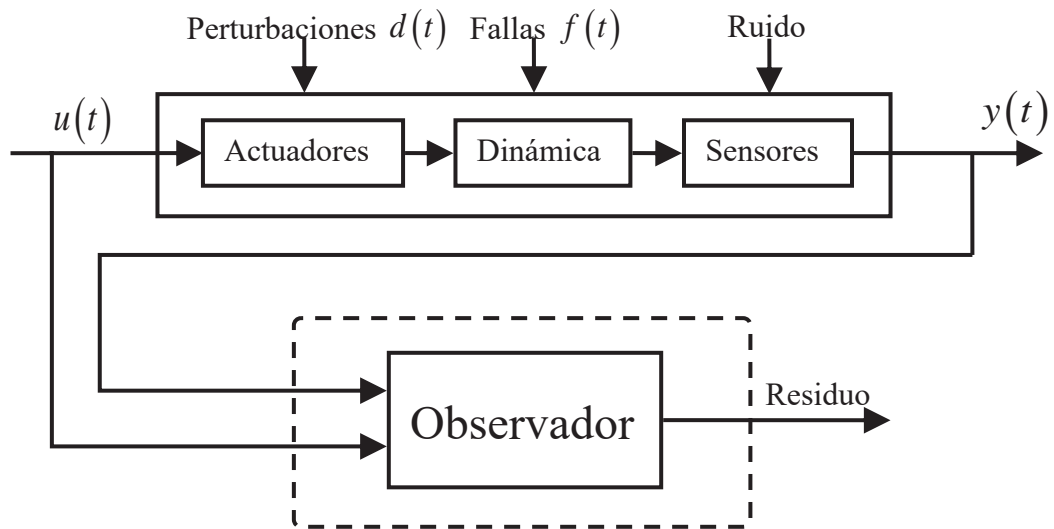


Figura 1.3: Generación de residuos por medio de observadores

#### 1.2.4 Enfoque basado en relaciones de paridad

El enfoque basado en relaciones de paridad para la generación de residuos (o vectores de paridad), fue originalmente propuesto por Mironovski (1979) y (1980)

aunque él utilizó una terminología diferente. Sin embargo, su documento no recibió suficiente interés debido a su limitada disponibilidad. Este enfoque fue propuesto independientemente más tarde por Chow y Willsky (1984) y ha sido expresado en algunas diferentes versiones, por ejemplo, Gertler (1988) dio un método para el diseño de las relaciones de paridad en el dominio  $z$ . Chen y Zhang (1990) desarrollaron un enfoque estocástico para FDI basado en un desarrollo directo del concepto de vector de paridad usando redundancia física. El último desarrollo referente al enfoque de relaciones de paridad se puede encontrar en Gertler (1997) , (Gertler, 1998) y Ye, Zhang, Ding, Wang (2000), en éste último ellos hacen uso de un diseño simple en el dominio del tiempo de las relaciones de paridad y un análisis en el dominio de la frecuencia conocido por el enfoque de  $H_2$ -óptimo, muestran que el vector de paridad converge al post-filtro  $H_2$ -óptimo cuando  $s \rightarrow \infty$ , haciendo uso del hecho de que el post-filtro  $H_2$ -óptimo es un filtro de banda angosta y de las propiedades del dominio tiempo-frecuencia de la transformación Wavelet; las propiedades significativas de dichas clases de generadores de residuos son: una forma simple, bajo orden y alto desempeño.

### 1.2.5 Estimación de parámetros

Uno de los enfoques para FDI consiste en la estimación de los parámetros del sistema basado directamente en técnicas de identificación. Este enfoque fue inicialmente ilustrado por Bakiotis, Raymond y Rault (1979) y Geiger (1982). Isermann y colaboradores siguieron esta línea de investigación desde los 80's. Isermann mostró que el diagnóstico de fallas en un proceso se puede lograr usando la estimación de parámetros no medibles del proceso y variables de estado en su compendio (1984).

Este documento dio una estructura generalizada de FDI basada en el modelo del proceso y cantidades no medibles. Esta estructura ha sido referenciada en muchos documentos subsecuentes, por ejemplo Frank (1990). Isermann y Freyermuth (1990) estudiaron FDI en sistemas en tiempo real utilizando una combinación entre estimación de parámetros y conocimientos heurísticos del proceso. Isermann (1991a) presenta una revisión orientada

a una aplicación de los métodos de estimación de parámetros para FDI basado en un número de aplicaciones reales de laboratorio. Los desarrollos y aplicaciones de los enfoques de estimación de parámetros para FDI más recientes en esta época se pueden encontrar en Isermann (1997) y Isermann y Ballé (1997). La Figura 1.4 muestra la forma en la que se utiliza la estimación de parámetros para la generación de residuos en el esquema de FDI.

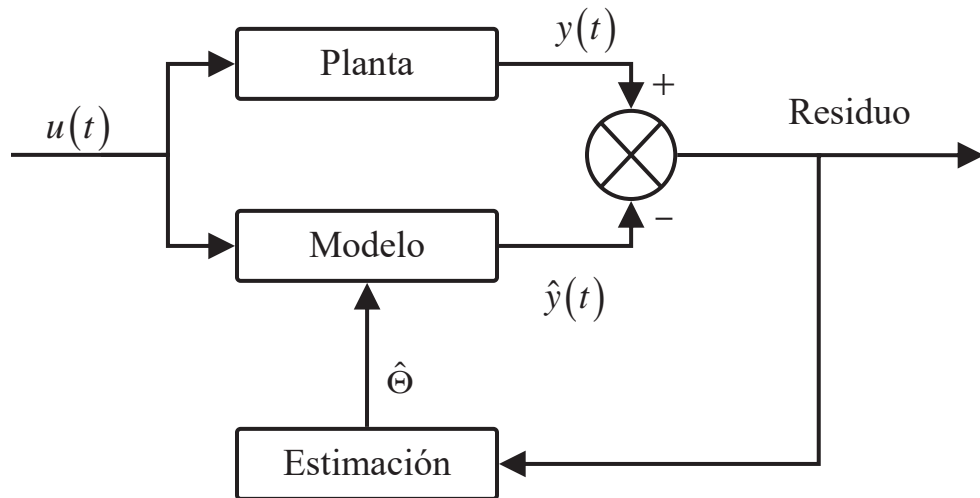


Figura 1.4: Esquema de FDI basado en estimación de parámetros

### 1.2.6 FDI basado en el proceso de dos etapas

Chow y Willsky (1980) y (1984) fueron los primeros en definir lo que se le conoce como el proceso de dos etapas basado en el modelo para FDI y consiste en: (1) generación de residuos, (2) toma de decisión (incluyendo evaluación de los residuos). Este proceso de dos etapas es aceptado hoy en día como un procedimiento estándar para FDI basado en el modelo.

### 1.2.7 Sistemas inversos

La problemática concerniente a la inversión de sistemas ha sido de gran interés desde la década de los 60's. Algunos algoritmos clásicos para la obtención del sistema

inverso en el caso de sistemas lineales son el de Silverman (1969), y el de Sain y Massey (1969) así como en el caso no lineal el de Hirschorn (1979). El problema de inversión de sistemas es un problema fundamental en la teoría de sistemas dinámicos Nijmeijer y Van der Shaft (1990), Isidori (1989) y Fliess (1986) y ha alcanzado muchas aplicaciones interesantes, entre otras, el control por pre alimentación Enns, Bugajski, Hendrick y Stein (1994) y en Guarino, Piazzzi (2002).

La aplicación de sistemas inversos por la izquierda para FDI es un concepto reciente, Szigeti, Ríos y Tarantino (2000) presentaron un esquema para FDI basado en el diseño de un filtro por inversión para sistemas lineales, el método está basado en dos condiciones necesarias: una es la observabilidad débil de las fallas y otra es la condición débil de separabilidad de las fallas. Si estas dos condiciones se cumplen, el filtro se puede diseñar vía observadores de Luenberger y un post filtro dinámico. El post filtro es diseñado por inversión de la dinámica del sistema. Szigeti, Bokor y Edelmayer (2001) proponen la elaboración de un algoritmo para SLIT que puede ser utilizado para el diseño de un detector que puede ser representado como un sistema dinámico estable y de orden reducido. Las salidas de este detector son las señales de falla, lo cual hace que no sólo sea posible la detección y aislamiento de las fallas sino también la estimación de dichas fallas.

Posteriormente, Edelmayer, Vera y Szigeti (2002) proponen también un esquema para FDI utilizando inversión de sistemas, aunque lo hacen en un enfoque geométrico y profundizan en las propiedades del inverso de un sistema lineal multivariable utilizando espacios invariantes y la teoría geométrica de sistemas. Szigeti y Ríos-Bolívar (2002) presentaron un procedimiento de diseño de filtros para FDI en sistemas no lineales afines con fallas.

Szigeti, Bokor y Edelmayer (2002) presentan un procedimiento para la obtención de la inversa tanto en sistemas lineales como en no lineales, hacen especial énfasis en las propiedades de observabilidad de la entrada, la principal contribución es que dan un algoritmo para la obtención de la inversa y puede verse como la generalización del algoritmo de 1-paso presentado por Isidori (1995). Edelmayer, Bokor, Szabó (2003) también presentaron un procedimiento basado en herramientas geométricas para la caracterización del sistema inverso, utilizaron el concepto de grado relativo, su

metodología incluye los sistemas lineales y no lineales, no se lleva a cabo un análisis de estabilidad ni consideraciones a cerca del efecto de las incertidumbres en el modelo. Fliess y Join (2003) dan una definición algebraica intrínseca de detectabilidad y aislamiento de fallas, ecuaciones de paridad, y generadores de residuos para SLIT. Richard, Addison y Eduardo (2004) presentan un enfoque en función de transferencia para el diagnóstico de fallas en SLIT con la ayuda de filtros pasa bajas, utilizan el concepto de ecuaciones de paridad; la idea que presentan es la obtención de las ecuaciones de paridad a través de un paquete computacional, luego aseguran la estabilidad de los generadores de residuos con la ayuda de filtros pasa bajas que además sirven para eliminar el efecto del ruido de medición, finalmente mencionan el efecto de las condiciones iniciales y las condiciones para que su efecto desaparezca. Edelmayer, Bokor y Szigeti (2004) presentan un breve resumen de las propiedades y condiciones de existencia del sistema inverso utilizando la teoría de subespacios invariantes y teoría de sistemas de geometría clásica para sistemas lineales y no lineales; una consideración importante que hacen en el desarrollo de su metodología para la obtención del sistema inverso es que tratan con sistemas que tengan dinámica cero estable; muestran además que los métodos de solución obtenidos para sistemas no lineales pueden ser aplicados directamente a sistemas lineales y a su vez las soluciones para sistemas lineales pueden verse como un caso especial de los sistemas no lineales; la metodología presentada garantiza una inversa de orden reducido siempre y cuando se cumpla con las siguientes condiciones: que el sistema esté dado en la forma de espacio de estado afín respecto a la entrada, que la representación tenga grado relativo y que cumpla con la condición de invertibilidad.

### **1.2.8 Enfoque algebraico y estimación de derivadas**

Otro de los enfoques utilizados para FDI es el enfoque algebraico el cual consiste en expresar las fallas en términos de información conocida del sistema, esto es en términos de las entradas y salidas así como de sus derivadas respecto del tiempo. Ibrir (2003) propone un enfoque para el diseño de observadores algebraicos no lineales, para

ello da la noción de observabilidad algebraica y debido a que se requiere obtener derivadas tanto de las entradas como de las salidas, se lleva a cabo la estimación de derivadas usando un algoritmo de derivación exacto. Los autores Martínez-Guerra, Luviano-Juárez y Rincón-Pasaye (2007) realizan la estimación de fallas en sistemas no lineales utilizando un observador no lineal como reconstructor de las fallas llamado observador algebraico, el cual requiere que se cumpla la condición de observabilidad algebraica para ser implementado. La estimación de derivadas la llevan a cabo utilizando el derivador lineal variante en el tiempo de segundo orden. Fliess, Join y Sira-Ramírez (2007) llevan a cabo la estimación de estados, estimación de parámetros, diagnóstico de fallas y atenuación de perturbaciones a través de un método basado en derivación numérica. La derivación numérica la realizan vía integración, esto es muy práctico ya que el ruido de medición es atenuado debido a que los integradores actúan como filtros pasa bajas.

En este enfoque al igual que el basado en inversión por la izquierda de sistemas para FDI se requiere la estimación de derivadas de entradas y salidas del sistema original, por ello el tema de derivadores es tratado en general en el capítulo 3, en donde se mencionan algunos derivadores y se realizan algunas comparaciones entre ellos.

### **1.3 Justificación**

La reconstrucción de entradas de control aplicadas a un sistema puede ser realizada bajo ciertas condiciones con la ayuda de sistemas inversos por la izquierda. Se plantea la hipótesis para desarrollarse en esta tesis que debido a que las fallas pueden considerarse como entradas, en este caso desconocidas, entonces también pueden diagnosticarse o reconstruirse con el uso de sistemas inversos por la izquierda.

### **1.4 Objetivos**

Los objetivos que se plantean alcanzar son los siguientes:

- Adaptar al menos una metodología para la inversión de sistemas respecto a las fallas para el caso lineal y también para el caso no lineal.
- Aplicar dichas metodologías para casos teóricos.
- Realizar al menos una aplicación a un prototipo físico.
- Publicar en congresos internacionales los resultados de la investigación desarrollada.

## 1.5 Aportaciones

Como resultados en el desarrollo de esta investigación se lograron las siguientes aportaciones:

- Se logró formular tres metodologías para inversión de sistemas lineales y dos para no lineales respecto a las fallas que actúan sobre ellos, las aportaciones a estos métodos se describen a continuación

**Metodología basada en el algoritmo de Silverman:** Se propone una nueva metodología para la obtención del sistema inverso por la izquierda respecto a las fallas que actúan sobre un SLIT basada en el algoritmo clásico de inversión respecto a las entradas conocidas de Silverman (1969).

**Enfoque en función de transferencia:** También se propone una nueva metodología basada en la función de transferencia del sistema respecto a las fallas, con la cual se pueden obtener generadores de residuos para el diagnóstico de fallas en sistemas lineales multivariantes.

**Metodología de Zheng y Cao (Caso lineal):** Esta metodología fue reformulada para el caso de sistemas lineales multivariantes con fallas, se basa en el uso de espacios diferenciales y permite obtener el inverso por la izquierda de orden reducido respecto a las fallas.

**Metodología de Hirschorn:** Esta metodología es una generalización del método presentado por Silverman (1969), se llevó a cabo un análisis para adaptarlo en el caso de

sistemas no lineales con fallas, sin embargo; sólo es posible utilizarla en casos particulares de orden pequeño.

**Metodología de Zheng y Cao (Caso no lineal):** En el caso no lineal también fue posible proponer una nueva metodología basada en el trabajo de Zheng y Cao (1993) para tratar sistemas con fallas, como resultado se obtiene un sistema inverso de orden reducido respecto a las fallas.

- Se realizó la aplicación de la metodología obtenida para el caso de sistemas no lineales basada en el trabajo de Zheng y Cao para un prototipo experimental de bola y barra en el cual se estudian fallas en sensores y en actuadores, en ambos casos se considera un modelo no lineal del sistema.
- Se presenta una gran colección de casos de estudio en simulación para ilustrar el funcionamiento de cada una de las metodologías descritas, con la intención de verificar el funcionamiento de dichos métodos en casos teóricos y también en aplicaciones prácticas.

## 1.6 Descripción de capítulos

En el capítulo 1 se presenta la problemática que se abordará en esta investigación explicando la noción más básica de inversión de sistemas por la izquierda y posteriormente planteando el problema a resolver en el contexto de diagnóstico de fallas. Se da una breve revisión histórica de los enfoques utilizados para FDI haciendo énfasis en los sistemas inversos. Luego se da una justificación y los objetivos que se plantean alcanzar en el transcurso de la investigación. Finalmente se presenta un listado de las contribuciones que se lograron.

En el capítulo 2 se describe la importancia que tiene la detección, diagnóstico y aislamiento de las fallas especialmente en la industria. Se darán las definiciones y la terminología más utilizada en este documento. Posteriormente, se hablará sobre los

problemas que tienen cuando se hace diagnóstico de fallas basado en el modelo del sistema. Se mencionarán también las ventajas que tiene la redundancia analítica sobre la redundancia física. Finalmente, se tratará el tema de generación de residuos así como las diferentes técnicas que existen para su generación.

En el capítulo 3 se inicia con la teoría sobre inversión por la izquierda de sistemas dinámicos. Primeramente, se plantea la inversión respecto a entradas conocidas, luego se generalizará para inversión respecto a las fallas. A continuación se presentarán diferentes metodologías adaptadas para el diagnóstico de fallas utilizando los sistemas inversos para sistemas lineales y también para no lineales, se darán además algunos ejemplos sencillos para ilustrar el uso de estas metodologías. Debido a que en la mayoría de los métodos adaptados para FDI basados en técnicas de inversión es necesario llevar a cabo la estimación de derivadas tanto de entradas como de salidas del sistema original se estudia un poco sobre algunos derivadores y se hacen algunas comparaciones entre ellos.

En el capítulo 4 se presentan un conjunto de casos de estudio abordados con las diferentes metodologías, estos ejemplos se dividen en teóricos, es decir; ejemplos que no precisamente tienen una aplicación física y en casos prácticos, es decir; ejemplos que tienen una aplicación real, aunque en este caso sólo se va a tratar el problema desde punto de vista matemático.

En el capítulo 5 se presenta una aplicación a un prototipo físico de “Bola y Barra”, en este caso se realiza el diagnóstico de fallas en actuadores y debido a las restricciones físicas que se tienen sobre el modelo sólo se realiza el diagnóstico para una falla que aparece en los actuadores, para esto se iniciará con el desarrollo del modelo del sistema, se diseña un controlador estabilizante y posteriormente se aplicará una técnica de diagnóstico directamente para el modelo no lineal.

En el capítulo 6 se dan las conclusiones de esta investigación así como los posibles trabajos futuros que pudieran complementar esta tesis.

## 1.7 Publicaciones

Como resultado de esta investigación se realizaron las siguientes publicaciones:

“Fault Diagnosis in Linear Multivariable Systems, an Inversion Approach”, presentado en el congreso internacional: *Conferencia de Electrónica, Robótica y Mecánica Automotriz* (CERMA 2011), realizado del 15 al 18 de Noviembre de 2011 en Cuernavaca, Morelos.

“Inversión de sistemas no lineales: aplicación al diagnóstico de fallas en un péndulo invertido”, presentado en el congreso internacional: *Reunión de Otoño de Potencia, Electrónica y Computación* (ROPEC 2011), realizado del 9 al 11 de noviembre de 2011 en Morelia, Michoacán.

# Capítulo 2

## El problema de diagnóstico de fallas

En este capítulo se presenta una serie de generalidades sobre el diagnóstico de fallas basado en el modelo. Se comienza mencionando la importancia que tiene el diagnóstico de fallas en diferentes aspectos de la actividad humana, desde aplicaciones sencillas donde no se tiene en juego más que bienes materiales hasta aplicaciones donde la integridad humana está de por medio. También, se presenta la terminología que se utilizará en este trabajo de investigación. Posteriormente, se menciona brevemente en qué consiste el diagnóstico de fallas basado en el modelo, se explican las dos etapas en las que se basa este enfoque. Luego se presenta una comparación entre la redundancia física y la redundancia analítica. Finalmente, se mencionan algunos enfoques que existen para la generación de residuos.

### 2.1 Importancia del diagnóstico de fallas

Los sistemas de control modernos están siendo cada vez más complejos y a su vez los algoritmos de control más sofisticados. Consecuentemente, los problemas de disponibilidad, costo, eficiencia, confiabilidad, seguridad de operación y protección ambiental son de mayor importancia.

Estos problemas son importantes, no sólo para sistemas de seguridad crítica tales como reactores nucleares, plantas químicas y aeronaves, sino también otros sistemas avanzados empleados en carros, trenes rápidos, etc. Para sistemas de seguridad crítica, las consecuencias debido a fallas pueden ser extremadamente serias en términos de pérdidas humanas, impacto ambiental y pérdidas económicas. Por tanto, existe una creciente necesidad de diagnóstico de fallas en tiempo real para incrementar la confiabilidad de tales sistemas de seguridad crítica. Las primeras indicaciones concernientes a cuáles fallas se están presentando pueden ayudar a evitar averías en los sistemas, detener algún proceso o catástrofes. Para sistemas que no son de seguridad crítica, las técnicas de diagnóstico de fallas se pueden usar para mejorar la eficiencia de los procesos, mantenimiento, disponibilidad y confiabilidad (Chen & Patton, 1999). Por tal razón, la industria está comenzando a considerar las implicaciones del uso de herramientas para mantenimiento predictivo y está buscando métodos alternativos para asegurar la disponibilidad y seguridad de las plantas. Desde principios de los 70's, la investigación sobre diagnóstico de fallas ha tenido un incremento considerable en todo el mundo tanto en teoría como en aplicación (Patton y Chen, 1998; Frank y Ding, 1997). Este desarrollo fue principalmente estimulado por la tendencia de la automatización hacia una mayor complejidad y la creciente demanda de una mayor disponibilidad y seguridad de los sistemas de control.

## **2.2 Terminología**

A través de la literatura sobre detección y aislamiento de fallas se puede percibir que no existe una terminología consistente. Esto hace difícil entender y comparar resultados obtenidos bajo diferentes enfoques. Atendiendo a esta necesidad el IFAC Technical Committee: SAFEPROCESS tuvo la iniciativa de encontrar definiciones comúnmente aceptadas, algunas de las cuales se pueden encontrar en Isermann y Ballé (1997). A continuación se listan las definiciones que se utilizarán en la presente investigación.

**Definición 2.1** Una *falla* es una desviación no permitida de al menos una propiedad, característica o parámetro del sistema respecto a la condición aceptable o usual.

**Definición 2.3** Un *residuo* es un indicador de falla, basado en la desviación entre mediciones y cálculos basados en las ecuaciones del modelo.

**Definición 2.4** *Detección de fallas* es la determinación de la presencia de fallas en un sistema y el instante en el que se presentan.

**Definición 2.5** *Aislamiento de fallas* es la determinación del tipo, ubicación y el instante en el que se presenta una falla.

**Definición 2.6** *Diagnóstico de fallas* es la determinación del tipo, magnitud, ubicación y tiempo de detección de una falla. Incluye detección de fallas, aislamiento e identificación.

### 2.3 Redundancia física y redundancia analítica

Un enfoque tradicional para diagnóstico de fallas en muchas aplicaciones está basado en métodos de “redundancia física” los cuales utilizan múltiples grupos de sensores, actuadores, computadoras y software para medir y controlar una variable en particular. Típicamente, se aplica un esquema de “votación” al sistema con hardware redundante para decidir si ha ocurrido una falla y su probable localización. Los mayores problemas encontrados con redundancia física son la necesidad de equipo adicional, costos de mantenimiento y además el espacio adicional requerido para colocar este equipo.

En vista del conflicto entre la confiabilidad y el costo de agregar más hardware, es sensible tratar de usar diferentes conjuntos de mediciones para verificar unos con otros, en lugar de replicar cada hardware individualmente; a esto se le conoce como “redundancia analítica” la cual utiliza relaciones analíticas redundantes entre muchas variables medidas del proceso monitoreado (pueden ser entradas/salidas; salidas/salidas; entradas/entradas). La Figura 2.1 ilustra los conceptos de redundancia física y analítica. En el esquema de redundancia analítica no es necesario agregar hardware adicional, por

tanto, es potencialmente más confiable que la redundancia física (Van Schrick, 1991) y (Van Schrick, 1993).

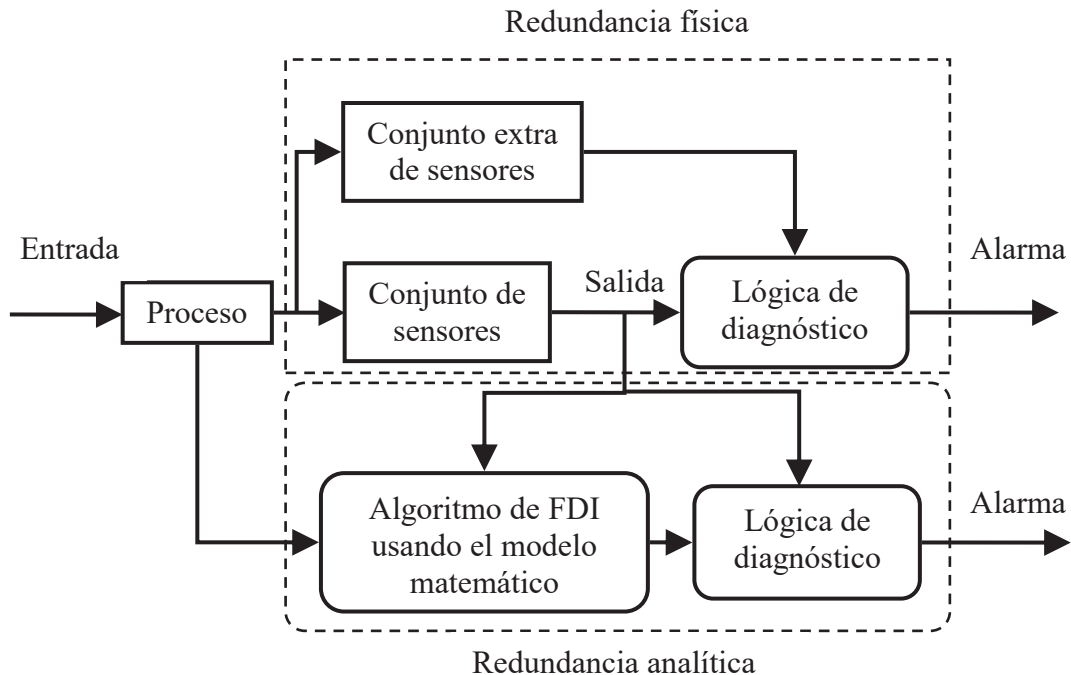


Figura 2.1: Redundancia física vs redundancia analítica

## 2.4 Diagnóstico de fallas basado en el modelo

En la práctica, la metodología más comúnmente utilizada para el diagnóstico de fallas consiste en monitorear el nivel (o tendencia) de una señal en particular, y tomar alguna acción cuando la señal alcance un umbral dado. Este método, aunque es simple de implementar, tiene serios problemas, el primero consiste en la posibilidad de falsas alarmas debido al ruido, variaciones en la entrada y cambios en los puntos de operación. El segundo problema es que una sola falla puede causar que muchas señales excedan sus límites y se detecten múltiples fallas, y por tanto el aislamiento de la falla se hace muy difícil.

Para resolver estos problemas es necesario contar con un modelo matemático el cual proporcione relaciones entre las diferentes señales del sistema. El diagnóstico de fallas basado en el modelo puede definirse como la detección, aislamiento y caracterización de

las fallas en componentes de un sistema a través de la comparación entre mediciones disponibles del sistema, con información a priori representada por el modelo matemático del sistema. Las fallas son detectadas estableciendo un umbral (fijo o variable) sobre un residuo generado por la diferencia entre mediciones reales y estimaciones de estas mediciones utilizando el modelo matemático.

La Figura 2.2 ilustra la estructura general de un sistema de diagnóstico de fallas basado en el modelo, la cual comprende dos etapas principales: la generación de residuos y la toma de decisiones.

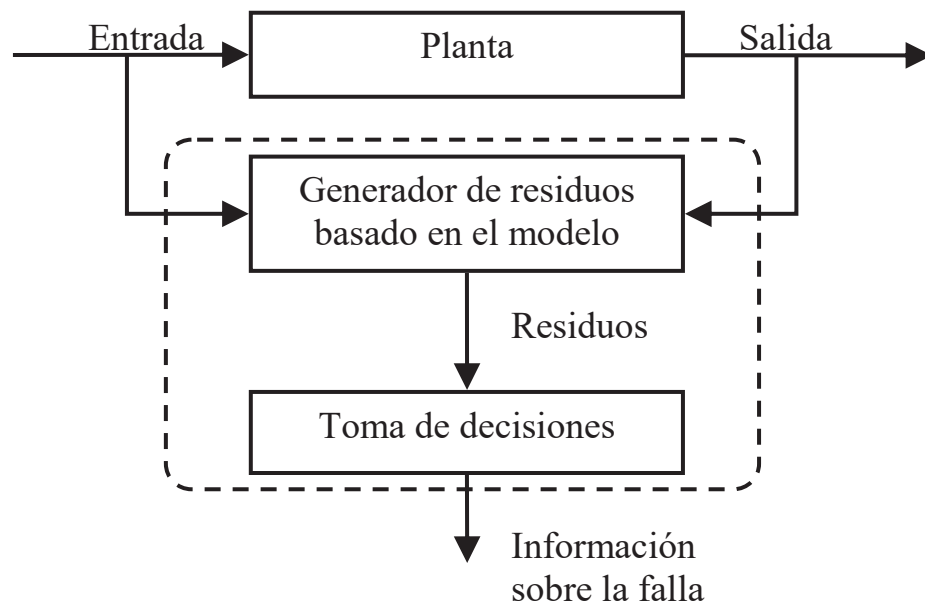


Figura 2.2: Estructura del diagnóstico de fallas basado en el modelo.

### 2.4.1 Generación de residuos

En el esquema de redundancia analítica, el resultado de la diferencia generada entre las variables reales y su consistencia se le conoce como señal de residuo. El residuo debería ser cero cuando el sistema trabaja bajo condiciones normales, y debería divergir de cero cuando ocurre una falla sobre el sistema. Esta propiedad del residuo de mantenerse en cero o diferir de cero es utilizada para determinar si ha ocurrido o no una falla. La redundancia analítica hace uso del modelo matemático del proceso monitoreado

y por tanto siempre se le refiere a ella como “Enfoque basado en el modelo” para el diagnóstico de fallas. La revisión de la consistencia en la redundancia analítica es normalmente lograda a través de una comparación entre la señal medida y su estimación. La estimación es generada por el modelo matemático del sistema considerado. La comparación se hace usando las magnitudes del residuo el cual da la diferencia entre las señales medidas y las señales generadas por el modelo matemático.

Por tanto, el diagnóstico basado en el modelo se puede definir como la determinación de las fallas de un sistema mediante la comparación de las mediciones disponibles del sistema con información conocida a priori representada por el modelo matemático del sistema, a través de la generación de residuos y su respectivo análisis. Un residuo es un indicador de falla o una señal acentuada la cual refleja la situación de falla de un sistema monitoreado. La mayor ventaja del enfoque basado en el modelo para FDI es que no se requieren componentes de hardware adicionales a los que se requieren para realizar el control del sistema. Un algoritmo de FDI basado en el modelo se puede implementar en software en la computadora que controla el proceso. Además, las mediciones necesarias para el control del proceso son, en muchos casos, suficientes para el algoritmo de FDI de tal forma que no se requiere instalar sensores adicionales. Bajo estas circunstancias, solamente se requiere una mayor capacidad de almacenamiento de datos y posiblemente mayor poder computacional para la implementación de algoritmos de FDI basados en el modelo.

### **2.4.2 Toma de decisiones**

En esta etapa se examinan los residuos, para ello se aplica una regla de decisión para determinar si ha ocurrido alguna falla. Un proceso de decisión puede consistir en una simple prueba de umbral con valores instantáneos o los promedios cambiantes de los residuos, o puede consistir en la toma de decisiones en base a teorías de métodos estadísticos. La mayoría de los trabajos en el campo del diagnóstico de fallas cuantitativo basado en el modelo se enfocan en el problema de generación de residuos ya que la toma de decisiones basada en residuos bien generados es relativamente fácil.

## 2.4 Enfoques para la generación de residuos

La contribución más significativa de los enfoques modernos basados en el modelo es la introducción de residuos los cuales son independientes del estado de operación del sistema y responden ante las fallas de una manera característica. Los residuos son cantidades que representan la inconsistencia entre las variables actuales del sistema y las del modelo matemático. Existe una gran cantidad de métodos para la generación de residuos, algunos de los cuales fueron mencionados en el capítulo 1 y estos están basados en: el filtro de Beard-Jones, métodos estocásticos, observadores, relaciones de paridad, identificación de parámetros, proceso de dos etapas, inversión de sistemas además se pueden mencionar el diseño de residuos en el dominio de la frecuencia y evaluación de residuos con umbral adaptivo. Cabe mencionar que en este trabajo de investigación sólo se tratarán los residuos basados en inversión de sistemas tanto para el caso lineal como para el no lineal.



## Capítulo 3

# **Inversión de sistemas dinámicos aplicado al diagnóstico de fallas**

En este capítulo se plantea el problema de inversión por la izquierda de sistemas dinámicos respecto a las entradas, posteriormente se extiende este planteamiento para la inversión por la izquierda pero respecto a las fallas que actúan sobre un sistema. Un sistema inverso por la izquierda tiene la propiedad de poder reconstruir bajo ciertas condiciones cualquier entrada que actúa sobre el sistema original, ya sea una entrada conocida o desconocida, es decir; puede reconstruir una falla, la cual puede ser modelada como una entrada desconocida. En este capítulo se estudiará un poco sobre la inversión por la derecha, sin embargo; en lo que concierne al problema de diagnóstico de fallas se abordará utilizando sistemas inversos por la izquierda. En el transcurso del capítulo se desglosan metodologías que proporcionan condiciones suficientes y necesarias para determinar la invertibilidad de un sistema, además estas metodologías proporcionan un procedimiento para obtener el sistema inverso.

### 3.1 Planteamiento del problema de inversión en general

El problema de inversión de sistemas dinámicos se puede dividir en dos problemáticas distintas que se han atacado y resueltos por diversos investigadores y empleando distintas metodologías:

- i. El problema de invertibilidad, es decir, el problema de establecer bajo que condiciones un sistema tiene o no tiene inverso.
- ii. La construcción del sistema inverso, es decir; la obtención de las ecuaciones dinámicas que definen al sistema inverso.

Por otro lado, la inversión de sistemas se puede realizar de dos maneras dependiendo del objetivo que se persigue al construir el sistema inverso: por la izquierda o por la derecha. Para plantear el problema de inversión de sistemas es conveniente representar un sistema dinámico  $\Sigma$  por su mapeo entrada-salida.

$$y = \Sigma(t_0, x_0, u) \quad (3.1)$$

Donde  $u = u(t)$  es la señal de entrada,  $y = y(t)$  es la señal de respuesta del sistema  $t_0, x_0$  son parámetros dados por las condiciones iniciales.

#### 3.1.1 Inversión de sistemas por la izquierda

Dado un sistema  $\Sigma$ , decimos que  $\Sigma_L^{-1}$  es un sistema inverso por la izquierda de  $\Sigma$  si al conectar la salida de  $\Sigma$  a la entrada de  $\Sigma_L^{-1}$  éste produce como respuesta la entrada de  $\Sigma$  como se ilustra en la Figura 3.1

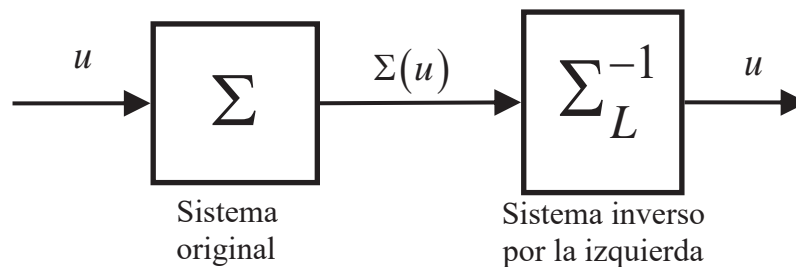


Figura 3.1: Sistema inverso por la izquierda en cascada con el sistema original

En términos de mapeos entrada-salida esto significa que existe un mapeo  $\Sigma_L^{-1}$  tal que para toda señal  $u$  de entrada al sistema  $\Sigma$  se cumple que

$$\Sigma_L^{-1}(y) = \Sigma_L^{-1}(\Sigma(t_0, x_0, u)) = u \quad (3.2)$$

Para alguna condición inicial  $t_0, x_0$  y para todo  $t \geq t_0$ .

Lo anterior obviamente sería imposible si existieran dos señales  $u_1 \neq u_2$  tales que  $y = \Sigma(u_1) \equiv \Sigma(u_2)$ , (Dos señales distintas que produjeran respuestas idénticas).

Es decir, para que el sistema  $\Sigma$  sea invertible por la izquierda, su mapeo entrada-salida debe ser inyectivo, esto es que a cada valor de entrada diferente le corresponda un valor distinto en el mapeo de salida, lo cual se puede expresar de la siguiente manera

$$\Sigma(t_0, x_0, u_1) \neq \Sigma(t_0, x_0, u_2) \quad (3.3)$$

Para todo par de entradas  $u_1 \neq u_2$  para algún  $t \geq t_0$ .

### 3.1.2 Inversión de sistemas por la derecha

En forma similar el sistema  $\Sigma_R^{-1}$  se dice inverso por la derecha del sistema  $\Sigma$ , si al conectar la entrada de  $\Sigma$  a la salida de  $\Sigma_R^{-1}$ , la respuesta de  $\Sigma$  es la entrada de  $\Sigma_R^{-1}$  como se ilustra en la Figura 3.2.

En términos de mapeos entrada-salida, dado el mapeo  $\Sigma$  existe un mapeo  $\Sigma_R^{-1}$  tal que para toda señal  $y_{ref}$  de entrada a  $\Sigma_R^{-1}$  se cumple que

$$\Sigma(u) = \Sigma(\Sigma_R^{-1}(t_0, x_0, y_{ref})) = y_{ref} \quad (3.4)$$

Para alguna condición inicial  $t_0, x_0$  y para todo  $t \geq t_0$ .

Nuevamente resulta evidente que lo anterior no sería posible si el mapeo  $\Sigma$  no puede producir alguna señal  $y_{ref}$ , es decir; para que exista  $\Sigma_R^{-1}$ ,  $\Sigma$  debe ser un mapeo suprayectivo, es decir, que para cada señal de entrada  $u$  al sistema  $\Sigma$  le corresponda al menos un valor en el mapeo de su salida,

$$\Sigma(t_0, x_0, u) = y_{ref} \quad (3.5)$$

Para todo  $y_{ref}$ , para alguna señal de entrada  $u$  y para alguna condición inicial  $t_0, x_0$ .

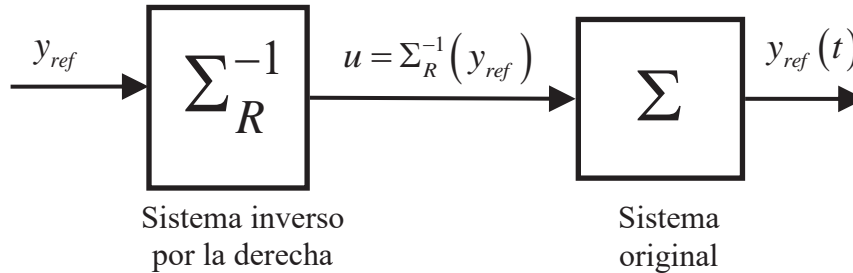


Figura 3.2: Sistema inverso por la derecha en cascada con el sistema original

### 3.2 El problema de inversión de sistemas en el contexto de diagnóstico de fallas

Si observamos la Figura 3.1 podemos interpretar el sistema inverso por la izquierda  $\Sigma_L^{-1}$  como un reconstructor de entradas. En el caso de sistemas con fallas podemos separar las entradas en dos conjuntos: entradas conocidas  $u(t)$  y entradas desconocidas o fallas  $f(t)$ , entonces podemos definir el sistema inverso por la izquierda de tres maneras: respecto a todas las entradas, respecto a las entradas conocidas y respecto a las entradas desconocidas y por lo tanto, podemos utilizar la inversión de sistemas por la izquierda respecto a las fallas para la reconstrucción de las entradas desconocidas, como se había anticipado en el capítulo 1 y se ilustra en la Figura 3.3

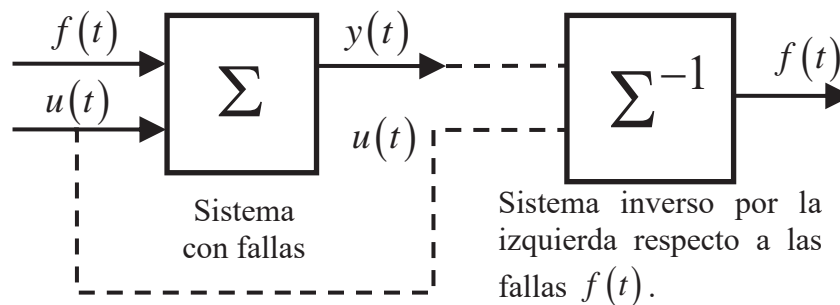


Figura 3.3: Inversión respecto a entradas desconocidas

### 3.3 Modelado de sistemas con fallas

Para llevar a cabo el diagnóstico de fallas basado en el modelo se requiere primeramente obtener un modelo matemático que represente al sistema el cual se va a monitorear. La Figura 3.4 muestra el diagrama de bloques de un sistema en lazo abierto cuya dinámica puede ser descrita para el caso lineal por la siguiente representación en espacio de estado.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu_R(t) \\ y_R(t) &= Cx(t) + Du_R(t)\end{aligned}\quad (3.6)$$

Donde  $x \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estados,  $u_R \in \mathbb{R}^m$  es el vector de entradas y  $y_R \in \mathbb{R}^p$  es el vector de salidas reales del sistema; las matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  son matrices conocidas de dimensión apropiada.

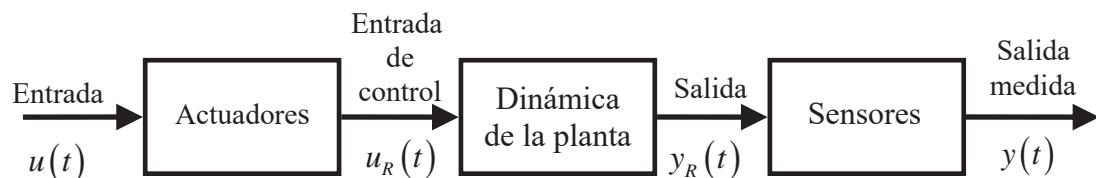


Figura 3.4: Diagrama de bloques de un sistema en lazo abierto.

Cuando ocurre una falla en el sistema (ver Figura 3.5), el modelo dinámico del sistema puede ser descrito como:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu_R(t) + f(t)$$

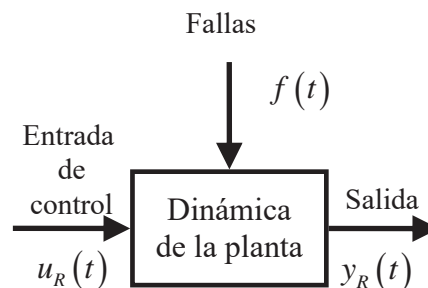


Figura 3.5: Dinámica del sistema.

### 3.3.1 Fallas aditivas en sensores

Debido a que la salida real de un sistema físico no se puede conocer sin el uso de sensores, éstos son requeridos para poder medir las variables de salida, esto se ilustra en la Figura 3.6

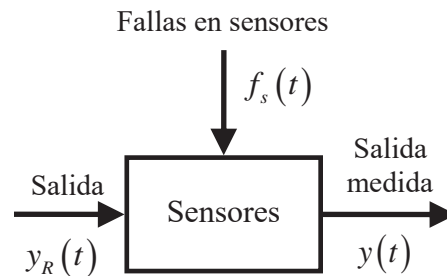


Figura 3.6: Sensores, salida real y salida medida.

Cuando ocurre una falla en algún sensor ésta puede ser modelada de manera aditiva como sigue

$$y_R(t) = y(t) + f_s(t)$$

Donde  $f_s$  es el vector de fallas actuando sobre los sensores.

Si se escoge correctamente el vector  $f_s$  se pueden cubrir las posibles fallas en todos los sensores. Cuando un sensor se queda detenido en alguna lectura en particular por ejemplo cero, esa salida medida será  $y(t) = 0$  y el vector de fallas será  $f_s(t) = -y_R(t)$ .

### 3.3.2 Fallas aditivas en actuadores

También es cierto que la entrada de control  $u_R$  no está directamente accesible. Para sistemas controlados,  $u_R$  es la respuesta del actuador a una señal  $u(t)$ . Cuando ocurre una falla en los actuadores como en la Figura 3.7, ésta puede ser modelada de manera aditiva como sigue

$$u_R(t) = u(t) + f_a(t)$$

Donde  $f_a$  es el vector de fallas en los actuadores y  $u(t)$  es la entrada que se quiere aplicar sobre el sistema. Al igual que en los sensores, diferentes situaciones de falla pueden ser representadas por una apropiada función de fallas  $f_a(t)$ .

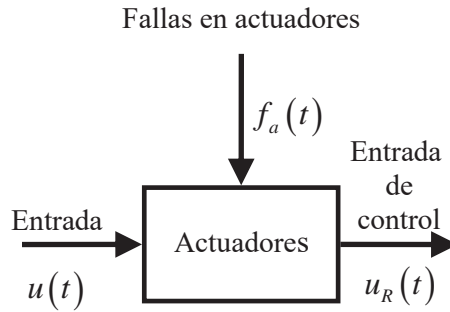


Figura 3.7: Actuadores, entradas y entradas de control.

Cuando el sistema está expuesto a todas las posibles fallas en sensores, componentes y actuadores el modelo del sistema para el caso lineal se describe como

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Bf_a(t) + f_c(t) \\ y_R(t) &= Cx(t) + Du(t) + Df_a(t) + f_s(s)\end{aligned}$$

Considerando el caso general, un sistema lineal con todas las posibles fallas puede ser descrito por el modelo en espacio de estados siguiente

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + R_1 f(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) + R_2 f(t)\end{aligned}\tag{3.7}$$

Donde  $f(t) \in \mathbb{R}^l$  es el vector de fallas, cada elemento  $f_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, l$  corresponde a una falla específica ya sea en sensores o en actuadores y son funciones dependientes del tiempo consideradas como desconocidas. Las matrices  $R_1$  y  $R_2$  representan el efecto de las fallas sobre el sistema. El vector  $u(t)$  es la entrada al actuador y el vector  $y(t)$  es la salida medida, las cuales para propósitos de FDI se consideran como vectores conocidos. En el caso no lineal el modelo de espacio de estado correspondiente al caso general con fallas es

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x, u) + \sum_{i=1}^l Q_i(x, u) f_i \\ y(t) &= h(x, u) + \sum_{i=1}^l G_i(x, u) f_i\end{aligned}$$

Donde  $f$ ,  $Q$ ,  $h$ ,  $G$  son funciones analíticas y  $x(t) \in X \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  son el vector de estados, el vector de entradas y el vector de salidas del sistema respectivamente,  $f(t)$  son las señales de falla  $(f_1, \dots, f_l)^T$ .

### 3.4 Condiciones de diagnosticabilidad e invertibilidad por la izquierda

Para cada sistema de control se tiene un mapeo de entrada-salida y para fines de FDI surge la pregunta si el sistema es invertible por la izquierda respecto a las fallas. Para el caso lineal esto puede ser fácilmente expresado en términos de la matriz de funciones de transferencia respecto a las fallas  $G(s)$ . Se dice que un sistema lineal es invertible por la izquierda respecto a las fallas si su matriz de transferencia  $G(s)$  es invertible por la izquierda, es decir; que diferentes entradas (fallas) produzcan diferentes salidas o bien que el mapeo de fallas-salida sea inyectivo.

En el trabajo de Isidori, 1985 se considera la invertibilidad por la izquierda desde el enfoque de mapeos de entrada-salida y para el caso de sistemas con fallas se puede reformular como sigue:

Un sistema no lineal es invertible por la izquierda respecto a las fallas en un punto de operación  $x_0$  si para cualquier función de entrada  $f^a$  y  $f^b$  se cumple que

$$y(t, x_0, u, f^a) \neq y(t, x_0, u, f^b)$$

Para al menos un valor de  $t \geq 0$

Para el caso de sistemas con una falla de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u + q(x)f \\ y_j &= h_j(x) \quad 1 \leq j \leq p\end{aligned} \tag{3.8}$$

Una condición simple para la invertibilidad en un punto de operación  $x_0$  es la siguiente:

El sistema (3.8) es invertible por la izquierda en  $x_0$  respecto a las fallas si para algún entero  $k_0 \geq 0$  y algún  $1 \leq j \leq p$

$$L_q L_f^k h_j(x) = 0 \quad (3.9)$$

$$L_q L_f^{k_0} h_j(x_0) \neq 0 \quad (3.10)$$

Para todo  $x \in N$  y para todo  $0 \leq k < k_0$ .

La ecuación (3.9) es una representación en derivadas de Lie para las derivadas respecto del tiempo de la salida y se refiere a que aun no ha aparecido información de la falla en las derivadas de la salida. Mientras que la ecuación (3.10) afirma el hecho de que la falla está presente en las derivadas de la salida y basta con realizar un despeje para tener una representación de la falla en términos de los estados, entradas, salidas y derivadas de entradas y salidas.

Una condición necesaria de diagnosticabilidad, la dan Martínez-Guerra, Luviano-Juárez & Rincón Pasaye, 2007 para sistemas no lineales de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(x, \bar{u}) \\ y(t) &= h(x, u) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Donde

$x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estados

$u = (u_1, \dots, u_m)^T \in \mathbb{R}^m$  es el vector de entradas conocidas

$f = (f_1, \dots, f_\mu)^T \in \mathbb{R}^\mu$  es el vector de entradas desconocidas

$\bar{u} = (u, f) \in \mathbb{R}^{m+\mu}$  es el vector de entradas conocidas y desconocidas

$y(t) \in \mathbb{R}^p$  es el vector de salidas

Si el sistema (3.11) es diagnosticable, entonces el número de fallas es menor o igual al número de salidas, i. e.

$$\mu \leq p \quad (3.12)$$

Donde  $\mu$  representa el número de fallas presentes en el sistema y  $p$  es el número de salidas del sistema. Esto en otras palabras, si un sistema tiene mas fallas que salidas, no puede ser diagnosticable.

### 3.5 Caso lineal

El modelo lineal de un sistema con fallas dado por la ecuación (3.7) en el caso invariante en el tiempo es el siguiente

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + R_1 f(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) + R_2 f(t) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Donde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estados,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  es el vector de entradas conocidas,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  es el vector de salidas medidas,  $f(t) \in \mathbb{R}^l$  es el vector de fallas, consideradas como entradas desconocidas, y las matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $R_1$  y  $R_2$  son del orden apropiado. Se asume que se tienen disponibles al menos el mismo número de salidas que de fallas ( $p \geq l$ ), de tal forma que la condición necesaria de diagnosticabilidad (3.12) se satisface.

#### 3.5.1 Enfoque en función de transferencia

En este caso se propone un algoritmo basado en la matriz de funciones de transferencia para la construcción de generadores de residuos respecto a las fallas para el sistema dado por (3.13).

Aplicando transformada de Laplace al sistema (3.13) se tiene

$$\begin{aligned} sx(s) - x_0 &= Ax(s) + Bu(s) + R_1 f(s) \\ y(s) &= Cx(s) + Du(s) + R_2 f(s) \end{aligned} \quad (3.14)$$

El sistema de ecuaciones (3.14) se puede escribir en términos de  $x(s)$  y  $f(s)$  consideradas como incógnitas, como sigue

$$\begin{bmatrix} sI - A & -R_1 \\ C & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(s) \\ f(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B \\ -D \end{bmatrix} u(s) + \begin{bmatrix} x_0 \\ y(s) \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Sea  $M$  la matriz  $(n+p) \times (n+l)$  definida por

$$M = \begin{bmatrix} sI - A & -R_1 \\ C & R_2 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Note que la matriz  $M$  no es cuadrada en general por lo que será necesario utilizar la matriz pseudo-inversa por la izquierda para calcular los residuos como sigue

$$\begin{bmatrix} x(s) \\ f(s) \end{bmatrix} = M^\dagger \begin{bmatrix} B \\ -D \end{bmatrix} u(s) + M^\dagger \begin{bmatrix} x_0 \\ y(s) \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

$$\text{Donde } M^\dagger = \left( M^T M \right)^{-1} M^T$$

Para que se puedan despejar los estados y las fallas en la ecuación (3.17) es necesario que la matriz  $\left( M^T M \right)$  sea invertible, es decir; que su determinante sea una función racional diferente de cero (J. Rugh, 1996).

De acuerdo a (3.17) el sistema inverso por la izquierda respecto a las fallas se puede construir siempre y cuando  $\left( M^T M \right)$  sea no singular lo cual es posible solo si  $l \leq p$  y tiene la forma siguiente

$$f = R(s)u + Q(s)y + T(s)x_0 \quad (3.18)$$

Donde  $R(s)$ ,  $Q(s)$  y  $T(s)$  son funciones de transferencia que en general no son propias, esto significa que pueden contener derivadas de las entradas y salidas.

Debido a que las condiciones iniciales son desconocidas en general, es necesario asegurarse de que su efecto desaparecerá conforme el tiempo tiende a infinito, esto ocurrirá si todos los polos de  $M^\dagger$  tienen parte real negativa y  $T(s)$  sólo contiene funciones racionales propias. Si  $T(s)$  contiene alguna función racional impropia puede ser preferible hacer una reconstrucción aproximada mediante

$$f' = R'(s)u + Q'(s)y + T'(s)x_0$$

Donde  $R'(s) = \frac{R(s)}{W(s)}$ ,  $Q'(s) = \frac{Q(s)}{W(s)}$ ,  $T'(s) = \frac{T(s)}{W(s)}$ ,  $f'(s) = \frac{f(s)}{W(s)}$  y donde  $W(s)$  se

elige como un polinomio Hurwitz de manera que  $T(s)$  sea función propia y  $f'(t) \rightarrow f(t)$  rápidamente conforme  $t \rightarrow \infty$ .

**Ejemplo 3.1** Considere el siguiente sistema dinámico estable sujeto a dos fallas, al cual se le aplicará la metodología previamente descrita para encontrar un sistema inverso en función de transferencia para la reconstrucción de las fallas que actúan sobre él.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.5 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Se requiere inicialmente formar la matriz  $M$  utilizando la expresión (3.16)

$$M = \begin{bmatrix} s-0.5 & -2 & -3 & -1 & -1 \\ -1 & s+1 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & s+2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Debido a que  $M$  es invertible se puede continuar con el procedimiento.

Se expresa el sistema en la forma (3.15), se tiene que

$$\begin{bmatrix} s-0.5 & -2 & -3 & -1 & -1 \\ -1 & s+1 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & s+2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Ahora basta con despejar las fallas  $f_1$  y  $f_2$  del sistema de ecuaciones (3.20), por lo que los residuos son,

$$f_1 = \frac{1}{2} y_1 + \frac{s}{2s+4} y_2 - \frac{1}{2s+4} u - \frac{1}{2s+4} x_{20} - \frac{1}{2s+4} x_{30}$$

$$f_2 = \frac{2s^2 + 3s - 2}{4s + 2} y_1 - \frac{2s^3 + 7s^2 + 16s + 16}{4s^2 + 10s + 4} y_2 - \frac{4s^3 + 24s^2 + 35s + 12}{8s^3 + 24s^2 + 18s + 4} u - \frac{2}{2s + 1} x_{10} - \frac{2s^2 + 7s + 4}{4s^2 + 10s + 4} x_{20} + \frac{2s^2 - s - 8}{4s^2 + 10s + 4} x_{30}$$

El efecto de las condiciones iniciales  $x_{20}$  y  $x_{30}$  no se puede despreciar en el residuo para  $f_2$ , ya que aunque las funciones de transferencia de éstas tienen raíces con parte real negativa son funciones impropias. Además se puede observar que aparecen algunas funciones de transferencia impropias multiplicando entradas y salidas, por lo que será necesario incluir algunas derivadas de éstas, las expresiones para las fallas se pueden reescribir como sigue

$$f_1 = \frac{1}{2} y_1 + \frac{s}{2s + 4} y_2 - \frac{1}{2s + 4} u \quad (3.21)$$

$$f_2 = \frac{2s}{4s + 2} \dot{y}_1 + \frac{3s - 2}{4s + 2} y_1 - \frac{2s^2}{4s^2 + 10s + 4} \dot{y}_2 - \frac{7s^2 + 16s + 16}{4s^2 + 10s + 4} y_2 - \frac{4s^3 + 24s^2 + 35s + 12}{8s^3 + 24s^2 + 18s + 4} u - \left[ \frac{1}{2} + \frac{2s + 2}{4s^2 + 10s + 4} \right] x_{20} + \left[ \frac{1}{2} - \frac{6s + 10}{4s^2 + 10s + 4} \right] x_{30} \quad (3.22)$$

Observe que estos residuos quedan en términos de información conocida del sistema original, esto es en términos de salidas y entradas, así como algunas derivadas de ellas y también en términos de las condiciones iniciales. Para llevar a cabo la reconstrucción de las fallas de manera exacta será necesario conocer las condiciones iniciales.

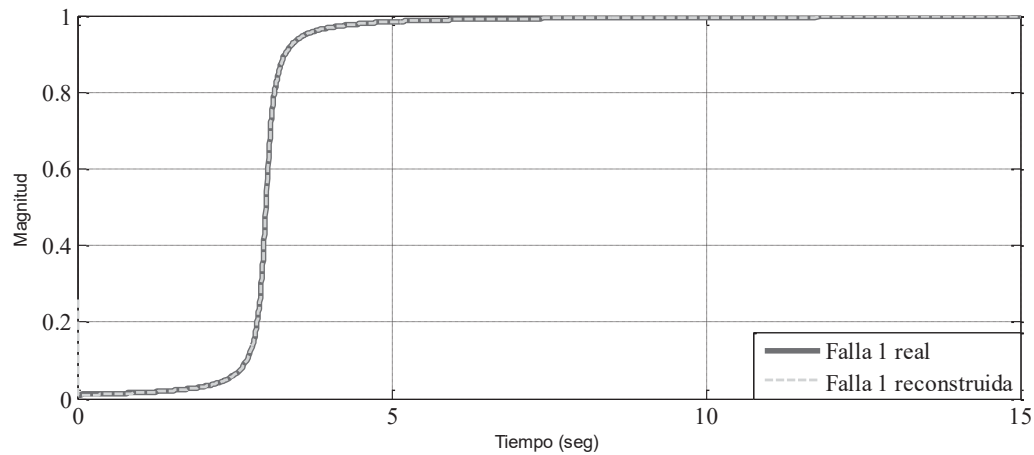
A continuación se presentan los resultados en simulación obtenidos en Simulink, suponiendo primeramente que se conocen las condiciones iniciales y éstas son:

$x_{10} = 0.1$ ,  $x_{20} = 0.2$  y  $x_{30} = 0.3$ , con una entrada suave tipo escalón unitario definida por

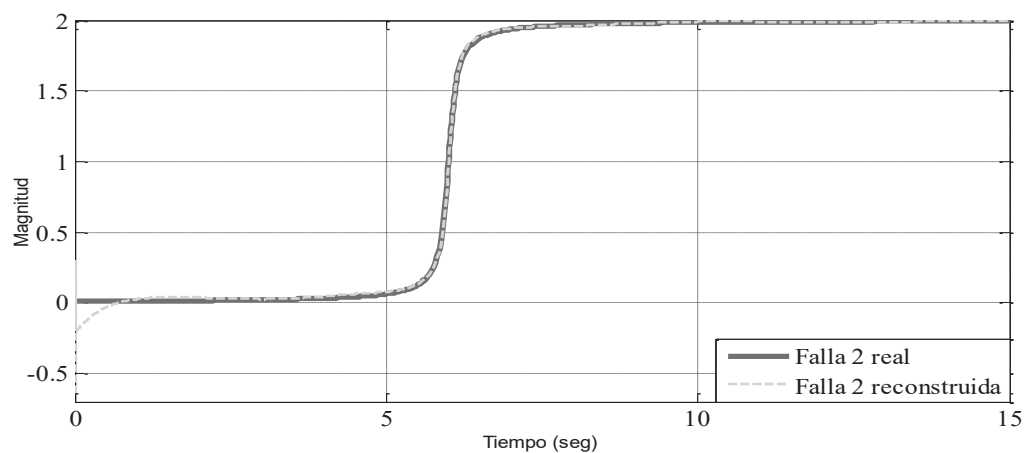
$$u = \frac{\tan^{-1} 10t + \pi / 2}{\pi}.$$

La Figura 3.8 y la Figura 3.9 muestran la reconstrucción de las fallas 1 y 2 respectivamente, en ellas se puede apreciar que debido a que las condiciones iniciales se conocen se puede hacer una mejor reconstrucción en comparación a la reconstrucción cuando no se conocen.

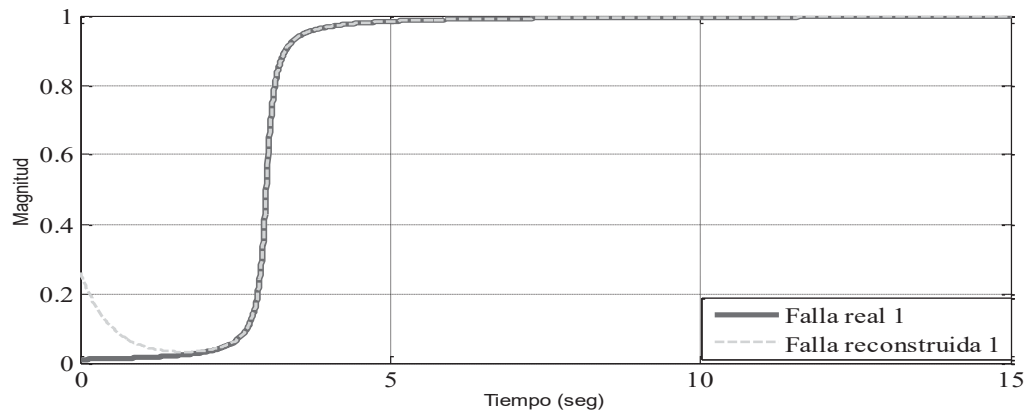
La Figura 3.10 y la Figura 3.11 también muestran la reconstrucción de las fallas 1 y 2 respectivamente pero en este caso no se conocen las condiciones iniciales, por lo que se suponen condiciones iniciales cero, con lo cual se introduce un error por condiciones iniciales el cual desaparece conforme el tiempo avanza. Por otra parte el error por derivación es pequeño ya que las fallas son suaves. En lo que respecta al aislamiento de las fallas se hace de una manera correcta también debido a que las fallas son suaves.



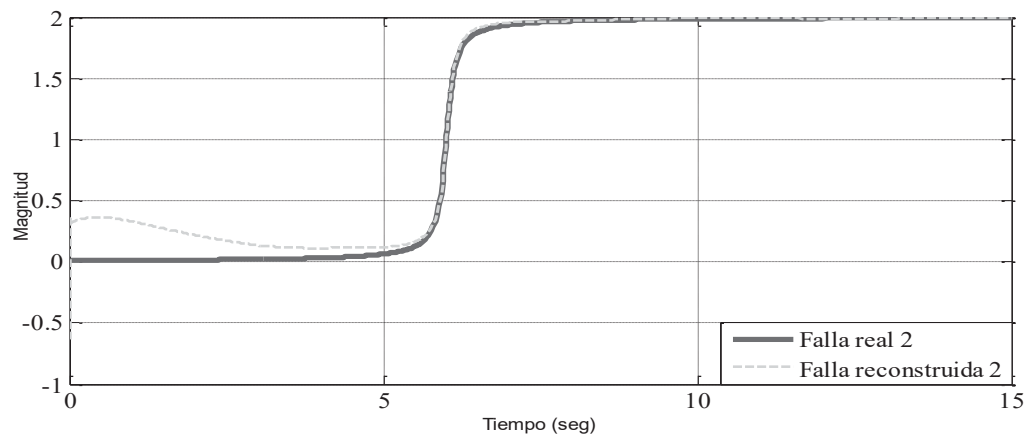
**Figura 3.8:** Comparación entre la falla 1 y su reconstrucción con condiciones iniciales conocidas, ejemplo 3.1



**Figura 3.9:** Comparación entre la falla 2 y su reconstrucción con condiciones iniciales conocidas, ejemplo 3.1



**Figura 3.10: Comparación entre la falla 1 y su reconstrucción con condiciones iniciales desconocidas, ejemplo 3.1**



**Figura 3.11: Comparación entre la falla 2 y su reconstrucción con condiciones iniciales desconocidas, ejemplo 3.1**

### 3.5.2 Enfoque en espacio de estado basado en la metodología de Silverman

Silverman (1969) desarrolló un algoritmo para encontrar el sistema inverso por la izquierda para el caso de sistemas lineales variantes o invariantes en el tiempo respecto a las entradas conocidas que actúan sobre el sistema. Esta metodología se basa en encontrar una serie de subsistemas  $S_0, S_1, \dots, S_\alpha$  e ir revisando el rango de la matriz  $D$  de cada subsistema hasta que se cumpla la condición  $\text{rank } D = \text{número de salidas}$  del sistema original. Una vez que esta condición se cumple se puede encontrar el sistema inverso por la izquierda a partir del subsistema  $S_\alpha$ .

En este caso se desarrolla el siguiente algoritmo basado en la metodología de Silverman para invertir el sistema respecto a las fallas que actúan sobre un SLIT.

Se considera el mismo modelo lineal (3.13) de la sección anterior.

Primeramente se tiene que calcular el rango de  $R_2$  en (3.13). Sea  $q_0 = \text{rank } R_2$ , si  $q_0 < l$  existe un matriz  $S_0$  no singular de dimensión  $p \times p$  tal que

$$R_{20} = S_0 R_2 = \begin{bmatrix} \bar{R}_{20} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Donde  $R_{20}$  tiene  $q_0$  filas y rango  $q_0$ . Entonces se define una serie de subsistemas  $S_0, S_1, \dots, S_\alpha$  donde  $S_0$  se define como

$$\dot{x} = Ax + Bu + R_1 f \quad (3.24)$$

$$y_0 = C_0 x + D_0 u + R_{20} f \quad (3.25)$$

Donde  $y_0 = S_0 y$ ,  $C_0 = S_0 C$  y  $D_0 = S_0 D$ , entonces  $y_0$ ,  $C_0$  y  $D_0$  son representadas en una forma particionada

$$y_0 = \begin{bmatrix} \bar{y}_0 \\ \hat{y}_0 \end{bmatrix}, \quad C_0 = \begin{bmatrix} \bar{C}_0 \\ \hat{C}_0 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad D_0 = \begin{bmatrix} \bar{D}_0 \\ \hat{D}_0 \end{bmatrix}$$

Donde  $\bar{y}_0$ ,  $\bar{C}_0$  y  $\bar{D}_0$  tienen  $q_0$  filas,  $\hat{y}_0$ ,  $\hat{C}_0$  y  $\hat{D}_0$  tienen  $l - q_0$  filas.

En el paso  $k$ -ésimo  $S_k$  denota el  $k$ -ésimo sistema de la secuencia

$$\dot{x} = Ax + Bu + R_1 f \quad (3.26)$$

$$y_k = C_k x + D_k u + R_{2k} f \quad (3.27)$$

Ahora (3.27) se expresa en una forma extendida como sigue

$$y_k = \begin{bmatrix} \bar{y}_k \\ \hat{y}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_k \\ \hat{C}_k \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \bar{D}_k \\ \hat{D}_k \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} \bar{R}_{2k} \\ 0 \end{bmatrix} f \quad (3.28)$$

Donde  $\bar{y}_k$ ,  $\bar{C}_k$  y  $\bar{D}_k$  tienen  $q_k$  filas,  $\hat{y}_k$ ,  $\hat{C}_k$  y  $\hat{D}_k$  tienen  $l - q_k$  filas.  $q_k$  se define como

$$q_k = \text{rank } R_{2k}.$$

Derivando respecto al tiempo a  $\hat{y}_k$

$$\dot{\hat{y}}_k = \hat{C}_k Ax + \hat{C}_k Bu + \hat{C}_k R_1 f + \hat{D}_k \dot{u}$$

Ahora (3.28) se convierte en

$$\begin{bmatrix} \bar{y}_k \\ \hat{y}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_k \\ \hat{C}_k A \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \bar{D}_k \\ \hat{C}_k B \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{D}_k \end{bmatrix} \dot{u} + \begin{bmatrix} \bar{R}_{2k} \\ \hat{C}_k R_1 \end{bmatrix} f \quad (3.29)$$

Sea  $q_{k+1} = \text{rank} \begin{bmatrix} \bar{R}_{2k} \\ \hat{C}_k R_1 \end{bmatrix}$ . Si  $q_{k+1} < l$  entonces existe una matriz  $S_{k+1}$  no singular  $p \times p$  tal que

$$R_{2,k+1} = S_{k+1} \begin{bmatrix} \bar{R}_{2k} \\ \hat{C}_k R_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{R}_{2,k+1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Donde  $\bar{R}_{2,k+1}$  tiene  $q_{k+1}$  filas y rango  $q_{k+1}$ . El sistema  $S_{k+1}$  se define como,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + R_1 f \\ y_{k+1} &= C_{k+1} x + D_{k+1} u + \Psi_{k+1} + R_{2,k+1} f \end{aligned} \quad (3.30)$$

Donde  $\Psi_{k+1} = \sum_{j=1}^k D_{j,k-j+1}^{(j)} u$ ,  $y_{k+1}$ ,  $D_{k+1}$  y  $R_{2,k+1}$  tienen la misma forma particionada

como (3.28),  $u^{(j)}$  denota la  $j$ -ésima derivada respecto al tiempo y la secuencia  $D_{j,k-j+1}$  se forma como sigue

$$\begin{aligned} D_{11} &= S_1 \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{D}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{D}_{11} \\ \hat{D}_{11} \end{bmatrix}, D_{12} = S_2 \begin{bmatrix} \bar{D}_{11} \\ \hat{D}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{D}_{12} \\ \hat{D}_{12} \end{bmatrix}, \dots, D_{1k} = S_k \begin{bmatrix} \bar{D}_{1,k-1} \\ \hat{D}_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{D}_{1,k} \\ \hat{D}_{1,k} \end{bmatrix} \\ D_{21} &= S_2 \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{D}_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{D}_{21} \\ \hat{D}_{21} \end{bmatrix}, \dots, D_{2k} = S_{k+1} \begin{bmatrix} \bar{D}_{k,1} \\ \hat{D}_{1,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{D}_{2,k} \\ \hat{D}_{2,k} \end{bmatrix} \\ &\vdots \\ D_{k,1} &= S_k \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{D}_{k-1,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{D}_{k,1} \\ \hat{D}_{k,1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Asumiendo que existe un  $\alpha$  tal que  $R_{2,\alpha}$  tiene rango  $l$  y que la matriz  $(R_{2,\alpha}^T R_{2,\alpha})$  es no singular, entonces es posible resolver (3.30) para  $f$  como sigue

$$f = R^\dagger y_\alpha - R^\dagger C_\alpha x - R^\dagger D_\alpha u - R^\dagger \Psi_\alpha \quad (3.31)$$

Donde  $R^\dagger = (R_{2,\alpha}^T R_{2,\alpha})^{-1} R_{2,\alpha}^T$ .

Sustituyendo (3.31) en (3.13) y cambiando  $x$  por  $z$  ya que las condiciones iniciales pueden ser distintas para  $x$  que para  $z$  se tiene

$$\dot{z}(t) = (A - R_1 R^\dagger C_\alpha)z + (B - R_1 R^\dagger D_\alpha)u - R_1 R^\dagger \Psi_\alpha + R_1 R^\dagger y_\alpha \quad (3.32)$$

(3.31) y (3.32) son las ecuaciones del sistema inverso respecto a las fallas cuyo vector de estados es  $z$  y cuyas entradas son  $y_\alpha, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha-1)}$  (es decir, entradas y salidas del sistema original (3.13) y sus derivadas respecto del tiempo) y cuya salida es el vector de fallas  $f$  en el caso en que  $x \equiv z$ , pero en general será una aproximación que tiende al vector de fallas si el error por condiciones iniciales desaparece con el tiempo (ver Figura 3.3).

**Ejemplo 3.2** Considere el siguiente sistema lineal invariante en el tiempo, del cual se requiere obtener las expresiones (3.31) y (3.32) para formar un sistema inverso por la izquierda respecto a las fallas.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Se tiene que  $n=2$ ,  $p=2$ ,  $l=2$  y  $m=1$ . Cabe mencionar que este ejemplo es muy sencillo, sin embargo; servirá para ilustrar el procedimiento paso por paso.

Debido a que la matriz  $R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ , se tiene que  $q_0 = \text{rank} R_2 = 0$ . Como  $q_0 < l$ ,

entonces existe una matriz  $S_0$  tal que se cumple la expresión (3.23), esto es

$$R_{20} = S_0 R_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo que el subsistema  $S_0$  queda representado por las mismas ecuaciones que en (3.33)

, esto es

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + R_1 f \\ y_0 &= C_0 x + R_{20} \end{aligned}$$

Donde  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $y_0 = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ ,  $C_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  y  $R_{20} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Ahora se requiere derivar  $\hat{y}_0$ , por lo tanto se derivan ambas salidas respecto del tiempo,

ya que  $y_0 = \begin{bmatrix} \bar{y}_0 \\ \hat{y}_0 \end{bmatrix} \Rightarrow \hat{y}_0 = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

Calculando ahora el rango de la matriz  $R_{21}$ , se tiene que

$$q_1 = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 2$$

Por lo que  $S_1 = I_{2 \times 2}$  y el sistema  $S_1$  es

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + R_1 f \\ y_1 &= C_1 x + D_1 u + R_{21} \end{aligned}$$

Donde las matrices  $A, B, R_1$  son las mismas que en (3.33),  $C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $D_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  y

$$R_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Se tiene que  $\alpha = 1$  y  $q_1 = 2$  por lo que se cumple que  $\text{rank} R_{2\alpha} = l$  y se procede a aplicar las ecuaciones (3.31) y (3.32) para obtener el sistema inverso por la izquierda, además se cambia  $x$  por  $z$ , ya que el sistema inverso es diferente al original y por lo tanto sus estados pueden evolucionar diferente.

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Observe que el sistema inverso queda en términos de información conocida, es decir; queda en términos de la entrada y derivadas de la salida del sistema original, con esto se puede llevar a cabo la reconstrucción de fallas que actúan sobre el sistema original.

Para la simulación se consideran condiciones iniciales conocidas e iguales a cero y fallas suaves de magnitud 1 y 2 para las fallas 1 y 2 respectivamente. Dichas simulaciones se realizaron en Simulink.

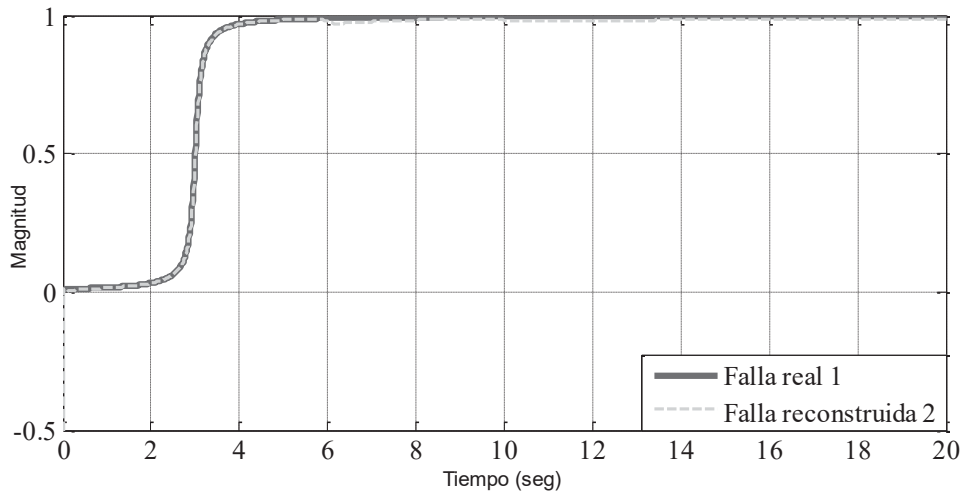


Figura 3.12: Comparación entre la falla 1 y su reconstrucción, ejemplo 3.2

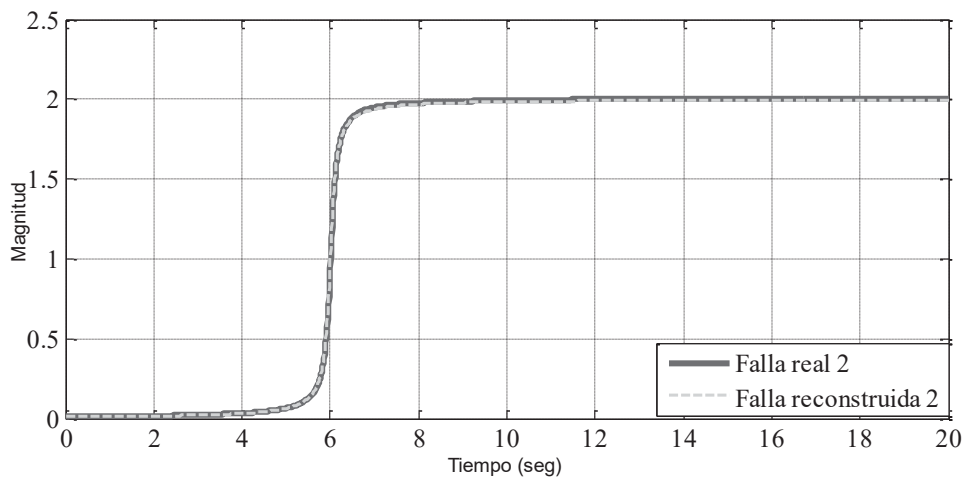


Figura 3.13: Comparación entre la falla 2 y su reconstrucción, ejemplo 3.2

La Figura 3.12 y la Figura 3.13 muestran las reconstrucciones para las fallas 1 y 2 respectivamente, en ellas se puede apreciar que se hace una reconstrucción adecuada debido a que se considera que las condiciones iniciales son conocidas. La suavidad de las fallas hace que sea posible lograr un desacoplo adecuado y que no se tenga error por derivación.

En este caso las condiciones iniciales se consideraron conocidas, sin embargo; cuando las condiciones iniciales no se conocen se tiene un error por condiciones iniciales y este se puede reflejar en un escalamiento respecto a la falla original, lo cual es indeseable y por tanto sería un mal reconstructor de fallas.

### 3.5.3 Metodología de Zheng y Cao

Los autores Zheng y Cao (1993) estudiaron el problema de la invertibilidad por la izquierda y presentaron una metodología para la construcción del sistema inverso por la izquierda de orden reducido respecto a las entradas en un enfoque de espacios vectoriales para ambos sistemas lineales y no lineales. A continuación, se describe una modificación para reformular esta metodología para el caso de sistemas lineales con fallas. Más adelante, se presentará un análisis similar para el caso no lineal.

Considere el sistema (3.13) donde por simplicidad se asume que todas las señales de entrada y las fallas son analíticas, es decir, que existen todas sus derivadas. Sea  $X^* := \text{span}_R \{x\} = \text{span}_R \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , de igual forma sea  $U^* := \text{span}_R \{u, \dot{u}, \dots, u^{(n)}, \dots\}$  y  $F^* := \text{span}_R \{f, \dot{f}, \dots, f^{(n)}, \dots\}$ . Entonces  $X^* + U^* + F^*$  es un espacio vectorial lineal diferencial. Los elementos en  $U^*$  y  $F^*$  consisten en funciones lineales con un orden finito de derivadas de las variables de entrada y de las fallas respectivamente. Los espacios  $X^*$ ,  $U^*$  y  $F^*$  son independientes uno del otro.

Calculando las salidas y sus derivadas sucesivas respecto al tiempo se obtiene

$$y = Cx + Du + R_2 f$$

$$\dot{y} = CAx + CBu + CR_1 f + D\dot{u} + R_2 \dot{f}$$

$$\ddot{y} = CA^2 x + CABu + CAR_1 f + CB\ddot{u} + CR_1 \dot{f} + D\ddot{u} + R_2 \ddot{f}$$

$$\vdots$$

$$y^{(N)} = CA^N x + CA^{N-1} Bu + \dots + CBu^{(N-1)} + CA^{(N-1)} R_1 f + \dots + CR_1 f^{(N-1)} + Du^{(N)} + Rf^{(N)}$$

(3.34)

En forma matricial se tiene

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \\ y^{(N)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^N \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} D & 0 & 0 & 0 \\ CB & D & 0 & 0 \\ CAB & CB & D & 0 \\ CA^{N-1}B & CA^{N-2}B & CA^{N-3}B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \dot{u} \\ \ddot{u} \\ u^{(N)} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} R_2 & 0 & 0 & 0 \\ CR_1 & R_2 & 0 & 0 \\ CAR_1 & CR_1 & R_2 & 0 \\ CA^{N-1}R_1 & CA^{N-2}R_1 & CA^{N-3}R_1 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ \dot{f} \\ \ddot{f} \\ f^{(N)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.35)$$

De donde se observa que las derivadas de las salidas  $y_j^{(k)}$  como se indica en (3.35),  $1 \leq j \leq p$ ,  $k=1,2,\dots,N,\dots$ , son vectores en  $X^* + U^* + F^*$ , es decir; son funciones lineales de las variables  $x_i$ ,  $u_j^{(r)}$  y  $f_q^{(r)}$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j \leq m$ ,  $0 \leq r \leq k$ .

Definiendo el subespacio de  $X^* + U^* + F^*$ , el cual es generado por la información de las salidas del sistema y sus derivadas, como sigue:

$$Y^* : \text{span}_R \{y, \dot{y}, \dots, y^{(N)}, \dots\} \quad (3.36)$$

Los espacios  $Y^*$  y  $U^*$  proveen de toda la información medible del sistema (3.13). De (3.36) se puede observar que

$$U^* + F^* + Y^* = \text{span}_R \{CA^k x, u_j^{(k)}, f_q^{(k)}; k \geq 0, 1 \leq j \leq m, 1 \leq q \leq l\} \quad (3.37)$$

**Definición 3.1.-** Un estado  $z(x) \in Y^*$  del sistema (3.13) se llama observable si

$$z(x) \in Y^* + U^* + F^*$$

Es decir, cualquier estado dual observable  $z(x)$  puede ser reconstruido a partir de la información de las entradas conocidas, las entradas desconocidas y las salidas. El conjunto de estos estados duales observables se denotará  $O^*$  y es llamado el espacio dual observable de  $X^*$ .

**Proposición 3.1.-** De (3.37) se tiene que

$$O^* = X^* \cap (Y^* + U^* + F^*) = \text{span}_R \{C_i A^k x; i \in p, k \geq 0\} \quad (3.38)$$

**Corolario 3.1.** Es inmediato de la proposición anterior que  $z$  es un estado dual observable del sistema (3.13) si y sólo si existe una matriz  $\xi \in R^{n \times p}$  tal que

$$z = \xi \begin{bmatrix} Cx \\ CAx \\ \vdots \\ CA^{n-1}x \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

El sistema (3.13) es observable si  $X^* \subset O^*$ ; pero de acuerdo a (3.39) esto significa que

$$\text{existe algún } \xi \text{ tal que } x = \xi \begin{bmatrix} Cx \\ CAx \\ \vdots \\ CA^{n-1}x \end{bmatrix}, \text{ es decir; } \xi \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = I, \text{ esto significa que existe}$$

algún  $z = x$  y por lo tanto  $x \in O^*$ . Por lo que se tiene que

$$X^* \subset Y^* + U^* + F^* \quad (3.40)$$

y de (3.38) se concluye que si el sistema (3.13) es observable, entonces  $O^* = X^*$ .

La ecuación (3.40) interpreta la observabilidad de un sistema como la afirmación de que la información proporcionada por los estados está completamente contenida en la información de las entradas y las salidas.

Cuando las propiedades del sistema relacionadas con la observabilidad e invertibilidad son estudiadas, la información del sistema en realidad puede ser descrita por un subespacio de dimensión finita de  $Y^*$ ,  $U^*$  y  $F^*$ . Por lo tanto, se introducen las siguientes definiciones

$$Y_k^* := \text{span}_R \{y, \dot{y}, \dots, y^{(k)}\}, U_k^* = \text{span}_R \{u, \dot{u}, \dots, u^{(k)}\} \text{ y } F_k^* = \text{span}_R \{f, \dot{f}, \dots, f^{(k)}\}$$

Debido a que la dimensión del espacio de estado es finita, para un sistema observable existe un  $k^* \leq n$  tal que

$$X^* \subset Y_{k^*}^* + U_{k^*}^* + F_{k^*}^*$$

La invertibilidad por la izquierda del sistema (3.13) es tratada ahora. Se asume que el sistema con el que se trata es observable e invertible por la izquierda.

Si un sistema lineal controlado es invertible por la izquierda respecto a las fallas, entonces las fallas  $f(t)$  pueden ser reconstruidas a partir del conocimiento de la información de salida  $y(t)$ , entrada  $u(t)$  y el estado inicial  $x(0)$ . Esto es equivalente a la existencia de la inversa por la izquierda de la matriz de transferencia respecto a las fallas del sistema lineal controlado.

La siguiente proposición caracteriza la invertibilidad por la izquierda y el sistema inverso por la izquierda respecto a las fallas.

**Proposición 3.2.** *El sistema (3.13) es invertible por la izquierda respecto a las fallas si y sólo si existe un sistema inverso por la izquierda de la forma*

$$\begin{aligned} \dot{z} &= H_0 z + \sum_{j=0}^r H_{j+1} u^{(j)} + \sum_{i=0}^r K_{i+1} y^{(i)} \\ f &= G_0 z + \sum_{j=0}^r G_{j+1} u^{(j)} + \sum_{i=0}^r L_{i+1} y^{(i)} \end{aligned} \quad (3.41)$$

Cuya matriz de transferencia es una inversa por la izquierda de la matriz de transferencia respecto a las fallas del sistema (3.13). Donde  $\dim z = q$  y  $r$  es un entero positivo adecuado.

**Definición 3.2.-**El sistema (3.41) es llamado inverso por la izquierda respecto a las fallas para (3.13). Entre los sistemas inversos por la izquierda para (3.13) aquellos con una dimensión mínima de  $z$  son llamados sistemas inversos de orden reducido. Una afirmación equivalente a la proposición 3.2 es la siguiente

**Proposición 3.3.** El sistema (3.13) es invertible por la izquierda si y sólo si

$$F^* \subset X^* + Y^* + U^* \quad (3.42)$$

o, equivalentemente

$$\text{span}_R \{f_1, f_2, \dots, f_n\} \subset X^* + Y_N^* + U_N^* \subset X^* + Y^* + U^* \quad (3.43)$$

Donde  $N$  es un entero positivo.

**Demostración.** La condición (3.43) y la invertibilidad por la izquierda son equivalentes entre sí (Respondek, 1990) debido a que (3.43) está relacionada directamente con la matriz de Toeplitz (3.35) asociada al sistema lineal.

Ahora se muestra la equivalencia entre (3.42) y (3.43). Primero se mostrará que (3.43) implica (3.42). De hecho, si  $f_i \in X^* + Y^* + U^*$ , entonces  $f_q = \varphi_q(x, y_k^{(j)}, u_i^{(j)})$ , es decir  $\varphi_q$  es una función lineal de  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , y algunas  $y_k^{(j)}, u_i^{(j)}$ ,  $0 \leq k \leq p$ ,  $0 \leq i \leq m$ ,  $0 \leq j \leq N$  ( $N$  es un entero positivo suficientemente grande), para cada  $0 \leq q \leq l$ . Derivando  $f_q$  se obtiene

$$\dot{f}_q = \frac{\partial \phi_q}{\partial x} \dot{x} + \sum_{k=1}^p \sum_{j=0}^N \frac{\partial \phi_q}{\partial y_k^{(j)}} y_k^{(j+1)} + \sum_{k=1}^p \sum_{j=0}^N \frac{\partial \phi_q}{\partial u_k^{(j)}} u_k^{(j+1)} = \tilde{\phi}_q(x, y_k^{(j)}, u_i^{(j)}) \in X^* + Y^* + U^*$$

Entonces por inducción, si se cumple (3.43) para algún entero  $N$ , se cumplirá (3.42).

De manera inversa, es fácil ver que (3.42) implica (3.43).  $\square$

Ahora se puede encontrar una constante del sistema, la cual refleja la caracterización esencial de una realización de dimensión mínima para la inversa por la izquierda respecto a las fallas del sistema.

Considérese ahora que el par  $(C, A)$  es observable. Existe un subespacio  $AO^*$  de  $X^*$ , cuya observabilidad no se ve afectada por retroalimentación de estados. Se le podría llamar el subespacio absolutamente observable y es igual al subespacio ortogonal del mayor subespacio invariante contenido en el kernel del mapeo de salida, el cual representa la máxima pérdida de observabilidad bajo una retroalimentación estática.  $AO^*$  está definido como (Zheng & Cao, 1991) y (Zheng Y. F., 1993).

$$AO^* = X^* \cap Y^* + U^*$$

Debido a que  $X^*$  es de dimensión finita,  $AO^* = X^* \cap Y_k^* + U^*$ .

**Teorema 3.1.** Si (3.13) es invertible por la izquierda respecto a las fallas, entonces el orden del sistema inverso de orden reducido es

$$\delta = \dim O^* - \dim AO^*.$$

La prueba a este teorema se puede ver en (Zheng & Cao, 1993).

A manera de algoritmo para el cálculo de la inversa reducida utilizando la metodología presentada en esta sección se puede enunciar el siguiente orden:

1. Derivar repetidamente respecto al tiempo las salidas del sistema (3.13) hasta que se tengan involucrados todos los estados del sistema y las fallas.

2. Obtener los diferenciales de las derivadas de las salidas del paso anterior.
3. Obtener los subespacios  $F^*$ ,  $Y^* + U^*$ ,  $Y^* + U^* + F^*$ ,  $O^*$  y  $AO^*$ .
4. Evaluar la proposición 3.3 para averiguar si el sistema es invertible respecto a las fallas.
5. Si se cumple la condición 3, calcular la dimensión del sistema inverso reducido utilizando el Teorema 3.1 y utilizar las variables de esta diferencia como estados del sistema inverso (3.41), es decir; los estados del sistema inverso son los contenidos en el subespacio  $(AO^*)^\perp$ .

**Ejemplo 3.3** Considere el siguiente sistema lineal estable, al cual se le aplicará la metodología de Zheng y Cao modificada para el caso con fallas para encontrar las expresiones del sistema inverso respecto a las fallas.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.44)$$

Expresando el sistema (3.44) en forma de ecuaciones se tiene,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + f_1 + f_2 + u_1 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2 + f_2 + u_2 \\ y_1 &= x_1 - x_2 \\ y_2 &= x_1 + x_2 \end{aligned}$$

Se requiere derivar las salidas,

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \dot{x}_1 - \dot{x}_2 = x_2 + f_1 + f_2 + u_1 + x_1 + x_2 - f_2 - u_2 = x_1 + 2x_2 + u_1 - u_2 + f_1 \\ \dot{y}_2 &= \dot{x}_1 + \dot{x}_2 = x_2 + f_1 + f_2 + u_1 - x_1 - x_2 + f_2 + u_2 = -x_1 + u_1 + u_2 + f_1 + 2f_2 \end{aligned}$$

Hasta aquí ya se tienen involucrados todos los estados, así como las fallas, por lo que se procede a obtener los diferenciales de la salida y de sus derivadas.

$$dy_1 = dx_1 - dx_2 \quad (3.45)$$

$$dy_2 = dx_1 + dx_2 \quad (3.46)$$

$$d\dot{y}_1 = dx_1 + 2dx_2 + du_1 - du_2 + df_1 \quad (3.47)$$

$$d\dot{y}_2 = -dx_1 + du_1 + du_2 + df_1 + 2df_2 \quad (3.48)$$

A continuación se calculan los espacios  $Y^* + U^*$  y  $Y^* + U^* + F^*$  para poder evaluar la observabilidad y la condición de existencia del sistema inverso respecto a las fallas.

Para obtener  $Y^* + U^*$  es necesario revisar todas las ecuaciones de los diferenciales desde (3.45) hasta (3.48), las cuales no deben contener información de las fallas. Si alguna de las ecuaciones mencionadas contiene sólo información de los estados y entradas (conocidas), entonces el espacio  $Y^* + U^*$  se escribe en términos de los diferenciales de los estados que aparezcan en dichas ecuaciones. Por tanto, se tiene que

$$Y^* + U^* = \text{span}_R \{dx_1, dx_2\} \quad (3.49)$$

Por otra parte para obtener  $Y^* + U^* + F^*$  se procede de la misma manera que para obtener (3.49) y en este caso sí pueden estar presentes los diferenciales de las fallas. Por lo que  $Y^* + U^* + F^*$  quedará en términos de todos los diferenciales de los estados presentes en dichas ecuaciones.

$$Y^* + U^* + F^* = \text{span}_R \{dx_1, dx_2\} \quad (3.50)$$

Además  $F^*$  es

$$F^* = \text{span}_R \{dx_1, dx_2, du_1, du_2, d\dot{y}_1, d\dot{y}_2\} \quad (3.51)$$

La condición de observabilidad es,

$$O^* = X^* \cap (Y^* + U^* + F^*)$$

Por lo tanto

$$O^* = \text{span}_R \{dx_1, dx_2\} \cap \text{span}_R \{dx_1, dx_2\} = \text{span}_R \{dx_1, dx_2\}$$

Es decir

$$O^* = X^*$$

Por tanto el sistema es observable. Luego se evalúa la condición de invertibilidad,

$$F^* \subset X^* + Y^* + U^*$$

La cual se cumple debido a (3.51).

Una vez que se sabe que el sistema es invertible, se procede a obtener el sistema inverso.

Despejando  $df_1$  de (3.47) se tiene

$$df_1 = d\dot{y}_1 - dx_1 - 2dx_2 - du_1 + du_2 \quad (3.52)$$

Ahora sustituyendo (3.52) en (3.48) se tiene,

$$df_2 = \frac{1}{2}(d\dot{y}_2 - d\dot{y}_1 + 2dx_1 + 2dx_2 - 2du_2) \quad (3.53)$$

Por tanto el sistema es invertible por la izquierda respecto a las fallas, ya que se pudo expresar a los diferenciales de las fallas en términos de los estados y las salidas.

El espacio completamente observable es,

$$AO^* = X^* \cap (Y^* + U^*) \Rightarrow AO^* = \text{span}_R \{dx_1, dx_2\}$$

La dimensión del sistema inverso es,

$$\dim \Sigma^{-1} = \dim O^* - \dim AO^*$$

$$\dim \Sigma^{-1} = 2 - 2 = 0$$

Debido a que la dimensión del sistema inverso es cero, esto implica que no se requiere la parte dinámica, solamente las expresiones de las salidas, esto es equivalente a la observabilidad algebraica de las fallas, ya que  $x_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$ ,  $x_2 = \frac{1}{2}(y_2 - y_1)$  por lo que sustituyendo en (3.52) y (3.53) las expresiones para las fallas son

$$f_1 = \dot{y}_1 + \frac{1}{2}y_1 - \frac{3}{2}y_2 - u_1 + u_2$$

$$f_2 = \frac{1}{2}(-\dot{y}_1 + \dot{y}_2 + 2y_2 - 2u_2)$$

La simulación se realizó en Simulink y se utilizaron condiciones iniciales iguales a cero. La Figura 3.14 muestra una falla suave que actúa en el sistema y su respectiva reconstrucción, se observa que debido a que las condiciones son cero para el sistema original, la reconstrucción se hace adecuadamente. La Figura 3.15 muestra otra falla suave que actúa también sobre el sistema y su respectiva reconstrucción, también debido a que las condiciones iniciales tanto del sistema como de su inverso son cero la reconstrucción se hace adecuadamente.

En este caso los reconstructores de fallas son algebraicos y sólo serán afectados por las condiciones iniciales del sistema original.

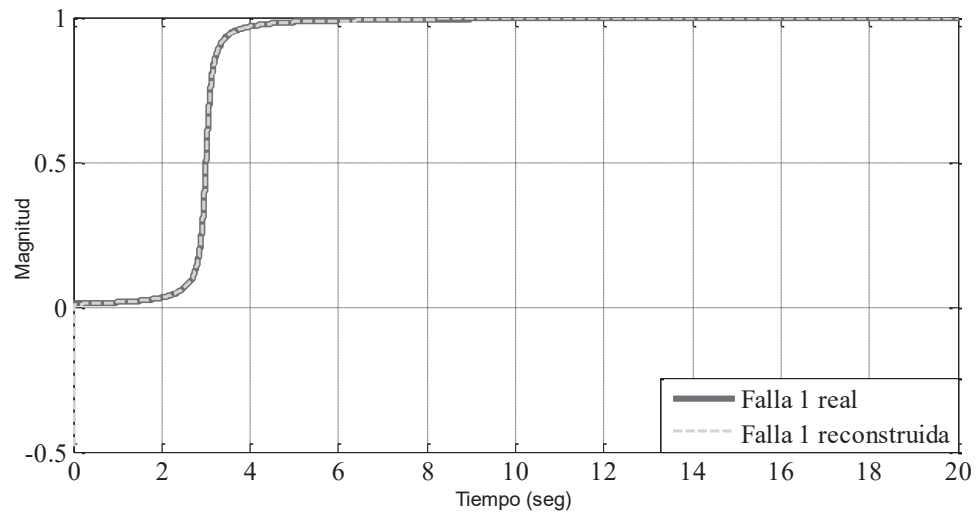


Figura 3.14: Comparación entre la falla 1 y su reconstrucción, ejemplo 3.3

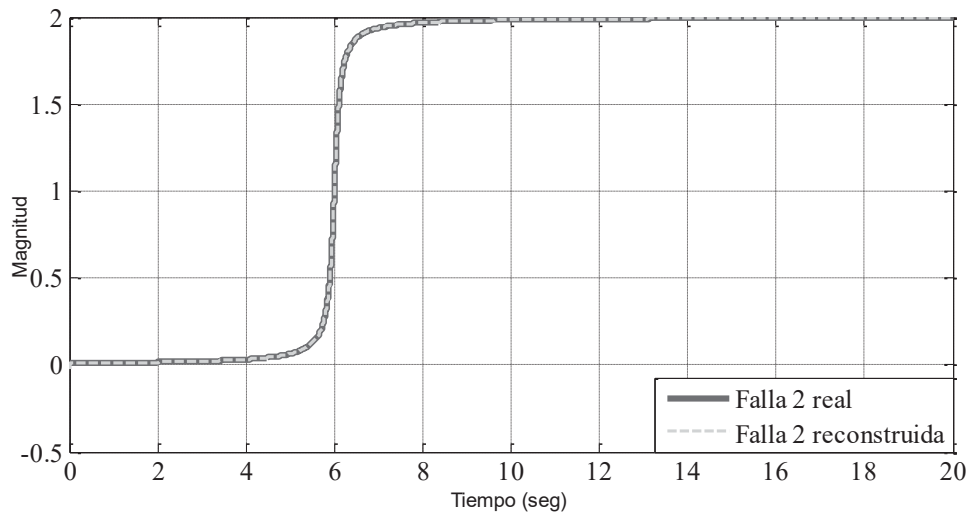


Figura 3.15: Comparación entre la falla 2 y su reconstrucción, ejemplo 3.3

### 3.6 Caso no lineal

A continuación se desglosan dos metodologías que sirven para la obtención de sistemas inversos por la izquierda para sistemas no lineales.

### 3.6.1 Metodología de Zheng y Cao

El modelo no lineal considerado en esta metodología está descrito por las ecuaciones lineales respecto a las fallas como las siguientes

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i + \sum_{j=1}^l s_j(x)f_j = f(x) + g(x)u + s(x)f \\ y &= h(x)\end{aligned}\quad (3.54)$$

Donde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $f(t) \in \mathbb{R}^l$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  y  $f$ ,  $g_i$ ,  $s_j$  son campos vectoriales analíticos,  $h$  es un mapeo analítico de  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^p$ .

A continuación se sigue el procedimiento descrito en (Zheng & Cao, 1993) pero introduciendo la información de las fallas  $f_i$  que actúan sobre el sistema considerándolas como entradas desconocidas como sigue,

$$\begin{aligned}h_j^{(0)}(x) &= h_j(x) \\ h_j^{(k+1)} &= \frac{\partial h_j^{(k)}}{\partial x} (f(x) + gu + sf) + \frac{\partial h_j^{(k)}}{\partial u} \dot{u} + \dots + \frac{\partial h_j^{(k)}}{\partial u^{(k-1)}} u^{(k)} + \frac{\partial h_j^{(k)}}{\partial v} \dot{f} + \dots + \frac{\partial h_j^{(k)}}{\partial v^{(k-1)}} f^{(k)}\end{aligned}$$

Por lo que las derivadas de  $y_j$ ,  $0 \leq j \leq p$ , pueden escribirse como

$$y_j = h_j^{(0)}(x), \quad \dot{y}_j = h_j^{(1)}(x, u, f), \quad \dots, \quad y_j^{(k)} = h_j^{(k)}(x, u, \dots, u^{(k-1)}, f, \dots, f^{(k-1)}), \quad \dots (3.55)$$

Diferenciando ambos lados de (3.55) se obtiene

$$dy_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h_j^{(0)}}{\partial x_i} dx_i \quad (3.56)$$

$$dy_j^{(k)} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h_j^{(k)}}{\partial x_i} dx_i + \sum_{v=1}^{k-1} \sum_{i=1}^m \frac{\partial h_j^{(k)}}{\partial u_i^{(v-1)}} du_i^{(v)} + \sum_{v=1}^{k-1} \sum_{i=1}^l \frac{\partial h_j^{(k)}}{\partial f_i^{(v-1)}} df_i^{(v)}, \quad (k \geq 1) \quad (3.57)$$

El campo de las funciones meromórficas (son funciones analíticas excepto en algunos puntos) de  $x, u, \dots, u^{(n-1)}, \dots, f, \dots, f^{(n-1)}, \dots$  es denotado por  $K$ , a su vez  $E$  denota el espacio vectorial (sobre  $K$ ) generado por  $\{dx_i, du_q^{(v)}, df_j^{(v)}; 0 \leq i \leq n, 0 \leq q \leq m, 0 \leq j \leq l, 0 \leq v\}$ . Por tanto, de (3.56) y (3.57),

$dy_j^{(k)}, 0 \leq j \leq p, 0 \leq k$  pueden ser considerados como vectores en  $E$ .

El espacio  $E$  se puede descomponer en tres subespacios. Se definen estos subespacios  $X^*$ ,  $U^*$  y  $F^*$  de  $E$  por

$$\begin{aligned} X^* &= \text{span}_k \{dx_i; i \in n\} \\ U^* &= \text{span}_k \{du_j^{(v)}; 0 \leq j \leq m, 0 \leq v\} \\ F^* &= \text{span}_k \{df_j^{(v)}; 0 \leq j \leq l, 0 \leq v\} \end{aligned}$$

Entonces se tiene que  $E = X^* \oplus U^* \oplus F^*$ . Luego se define  $Y^*$  como

$$Y^* = \text{span}_k \{dy_j^{(v)} \mid 1 \leq j \leq p, 0 \leq v\},$$

Entonces se deduce que

$$Y^* \subset X^* + U^* + F^*$$

Por definición, el sistema (3.54) es observable si

$$O^* = X^* \subset Y^* + U^* + F^*$$

y

$$AO^* = X^* \cap Y^* + U^*$$

**Definición 3.3** El sistema (3.54) es invertible por la izquierda respecto a las fallas si existe una subvariedad  $M \subset \square^n$  tal que, para cada  $x_0 \in M$  se tiene que

$$f(t) \neq \hat{f}(t) \quad \Rightarrow \quad y(t, x_0, f(t)) \neq y(t, x_0, \hat{f}(t))$$

Es decir, el mapeo entrada-salida respecto a las fallas es inyectivo en  $M$ .

**Definición 3.4** El sistema

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \zeta(z, u, \dots, u^{(r)}, y, \dots, y^{(r)}) \\ \omega &= \eta(z, u, \dots, u^{(r)}, y, \dots, y^{(r)}) \end{aligned} \tag{3.58}$$

Donde  $z \in \square^q$  y  $r$  es un entero positivo adecuado, es un inverso por la izquierda respecto a las fallas de (3.54) si para cada  $x_0 \in M$  y cualquier  $f(t)$ ,  $t \geq 0$ , existe  $z_0$  tal que la salida de (3.58) satisface

$$\omega(t; z_0, y(t, x_0, u(t), f(t))) \equiv f(t), \quad t \geq 0$$

Un sistema inverso de la forma (3.58) se le llama mínimo (o reducido) si  $\dim z$  es mínima entre todos los sistemas inversos de (3.54).

**Teorema 3.2** El sistema (3.54) es invertible por la izquierda respecto a  $f(t)$  si y sólo si

$$F^* \subset X^* + Y^* + U^*, \quad \text{o} \quad \text{equivalentemente} \quad F_0^* \subset X^* + Y^* + U^*, \quad \text{donde}$$

$$F_0^* = \text{span}\{df_1, df_2, \dots, df_i\}.$$

**Teorema 3.3** Si el sistema (3.54) es invertible respecto a  $f(t)$ , entonces el orden del sistema inverso reducido es

$$\dim O^* - \dim AO^* \tag{3.59}$$

La prueba a los teoremas anteriores sigue los mismos pasos que en (Zheng & Cao, 1993), con la diferencia de que es respecto a las fallas.

Como se hizo para el caso lineal, se enuncian los siguientes pasos para la obtención del sistema inverso para el caso no lineal.

- 1 Derivar repetidamente respecto al tiempo las salidas del sistema (3.54) hasta que se tengan involucrados todos los estados del sistema y las fallas.
- 2 Obtener los diferenciales de las derivadas de las salidas del paso anterior.
- 3 Obtener los subespacios  $F^*$ ,  $Y^* + U^*$ ,  $Y^* + U^* + F^*$ ,  $O^*$ ,  $AO^*$ .
- 4 Determinar si el sistema es invertible respecto a las fallas evaluando la condición del Teorema 3.2
- 5 Evaluar la condición del Teorema 3.3 para identificar el orden del sistema inverso reducido y usar las variables de la diferencia (3.59) para construir el sistema inverso (3.58), es decir; los estados del sistema inverso son  $(AO^*)^\perp$ .

**Ejemplo 3.5.** Considere el siguiente modelo matemático de un sistema no lineal en el cual actúan dos fallas. Se requiere aplicar la metodología descrita previamente para realizar el diagnóstico de las fallas que actúan sobre él.

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -x_1 - x_1 f_1 + x_3 f_2 \\
\dot{x}_2 &= -x_2 + x_3 - x_2 f_1 + x_2 u \\
\dot{x}_3 &= -x_3 + x_1 - x_1 x_2 x_3 f_2 + u \\
y_1 &= x_1 \\
y_2 &= x_2
\end{aligned} \tag{3.60}$$

Para iniciar con el procedimiento se requiere derivar las salidas del sistema (3.60) repetidamente hasta que se tengan involucrados todos los estados y las fallas.

$$\dot{y}_1 = \dot{x}_1 = -x_1 - x_1 f_1 + x_3 f_2 \tag{3.61}$$

$$\dot{y}_2 = \dot{x}_2 = -x_2 + x_3 - x_2 f_1 + x_2 u \tag{3.62}$$

En el paso anterior ya se logró involucrar a todos los estados y las fallas, por lo que enseguida se obtendrán los diferenciales de las salidas y de sus derivadas.

$$dy_1 = dx_1 \tag{3.63}$$

$$dy_2 = dx_2 \tag{3.64}$$

$$d\dot{y}_1 = -dx_1 - (dx_1) f_1 - x_1 df_1 + (dx_3) f_2 + x_3 df_2 \tag{3.65}$$

$$d\dot{y}_2 = -dx_2 + dx_3 - (dx_2) f_1 - x_2 df_1 + (dx_2) u + x_2 du \tag{3.66}$$

A continuación se procede a calcular los subespacios  $F^*$ ,  $Y^* + U^*$ ,  $Y^* + U^* + F^*$ ,  $O^*$ ,  $AO^*$ . El procedimiento para calcular los dos primeros ya se mencionó en el caso lineal, por lo que aquí procederemos directamente a escribirlos.

$$\begin{aligned}
Y^* + U^* &= \text{span}_k \{dx_1, dx_2\} \\
Y^* + U^* + F^* &= \text{span}_k \{dx_1, dx_2, dx_3\}
\end{aligned} \tag{3.67}$$

Además  $F^*$  es

$$F^* = \text{span}_R \{dx_1, dx_2, dx_3, du, d\dot{y}_1, d\dot{y}_2\} \tag{3.68}$$

La condición de observabilidad es,

$$O^* = X^* \cap (Y^* + U^* + F^*)$$

Por lo tanto,

$$O^* = \text{span}_R \{dx_1, dx_2, dx_3\} \cap \text{span}_R \{dx_1, dx_2, dx_3\} = \text{span}_R \{dx_1, dx_2, dx_3\}$$

Es decir,

$$O^* = X^*$$

Por tanto, el sistema es observable. Luego se evalúa la condición de invertibilidad

$$F^* \subset X^* + Y^* + U^*$$

La cual se cumple debido a (3.68).

Una vez que se ha evaluado la condición de invertibilidad y se encontró que el sistema si es invertible, se procede a encontrar el sistema inverso así como su dimensión.

Primeramente se requiere calcular el espacio completamente observable,

$$AO^* = X^* \cap (Y^* + U^*) \Rightarrow AO^* = \text{span}_R \{dx_1, dx_2\}$$

La dimensión del sistema inverso es,

$$\begin{aligned} \dim \Sigma^{-1} &= \dim O^* - \dim AO^* \\ \dim \Sigma^{-1} &= 3 - 2 = 1 \end{aligned}$$

Los estados del sistema inverso se escogen como  $(AO^*)^\perp$  y son  $z = x_3$

Para obtener las expresiones de la salida se despeja  $f_1$  de (3.62)

$$f_1 = -\frac{1}{x_2} \dot{y}_2 + \frac{x_3}{x_2} + u - 1 = -\frac{\dot{y}_2}{y_2} + \frac{z}{y_2} + u - 1 \quad (3.69)$$

Sustituyendo  $f_1$  en (3.61) y despejando  $f_2$  se tiene

$$f_2 = \frac{\dot{y}_1}{x_3} - \frac{x_1}{x_2 x_3} \dot{y}_2 + \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_1}{x_3} u = \frac{\dot{y}_1}{z} - \frac{y_1 \dot{y}_2}{y_2 z} + \frac{y_1}{y_2} + \frac{y_1}{z} u \quad (3.70)$$

Finalmente la ecuación dinámica del sistema inverso es

$$\dot{z} = \dot{x}_3 = -x_3 + x_1 - x_1 x_2 x_3 f_2 + u \quad (3.71)$$

Sustituyendo  $f_2$  en (3.71) se tiene

$$\dot{z} = -y_1 y_2 z \left( \frac{\dot{y}_1}{x_3} - \frac{x_1}{x_2 x_3} \dot{y}_2 + \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_1}{x_3} u = \frac{\dot{y}_1}{z} - \frac{y_1 \dot{y}_2}{y_2 z} + \frac{y_1}{y_2} + \frac{y_1}{z} u \right) + y_1 + u$$

Por lo que el sistema inverso que da expresado como sigue

$$\dot{z} = (-1 - y_1^2) z + (1 - y_1 y_2 u + y_1 \dot{y}_2 - y_2 \dot{y}_1) y_1 + u$$

$$f_1 = -\frac{\dot{y}_2}{y_2} + \frac{z}{y_2} + u - 1$$

$$f_2 = \frac{\dot{y}_1}{z} - \frac{y_1 \dot{y}_2}{y_2 z} + \frac{y_1}{y_2} + \frac{y_1}{z} u$$

A continuación se muestran los resultados obtenidos en simulación la cual se realizó en Simulink, para ello se utilizaron condiciones iniciales  $[0.1 \ 0.2 \ 0.3]^T$  para el sistema original y  $[0.3]$  para el sistema inverso. Las fallas son suaves a fin de evitar problemas de derivación. La Figura 3.16 muestra la falla 1 y su respectiva reconstrucción, debido a que se supone que las condiciones iniciales son conocidas para el sistema original y también para el inverso se logra una buena reconstrucción. Se puede apreciar que se tiene un buen aislamiento respecto a la falla 2, ya que se utilizaron fallas suaves, esto ayuda a que no se tengan problemas al utilizar derivadores. La Figura 3.17 muestra la falla 2 y su reconstrucción, en este caso se puede apreciar que se tiene un error por condiciones iniciales al inicio de la reconstrucción, sin embargo; una vez que su efecto ha desaparecido se logra una buena reconstrucción e igualmente se tiene un buen aislamiento respecto a la falla 1.

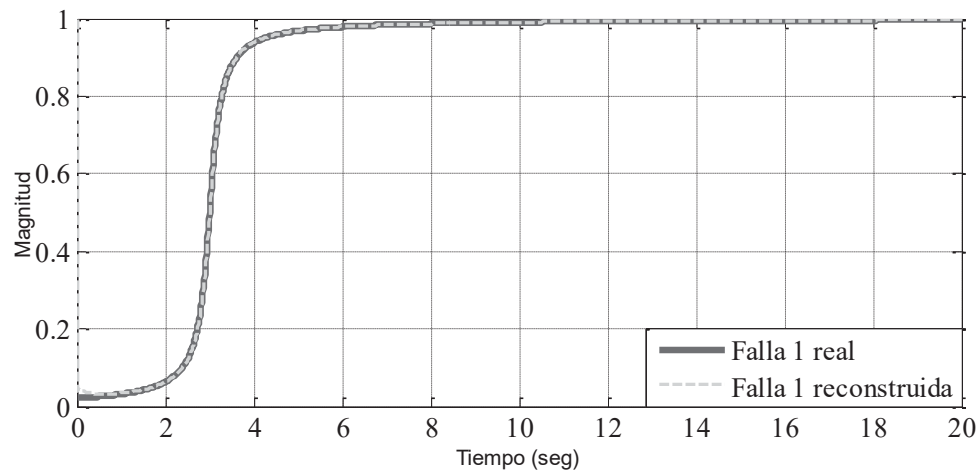


Figura 3.16: Comparación entre la falla 1 y su reconstrucción, ejemplo 3.5

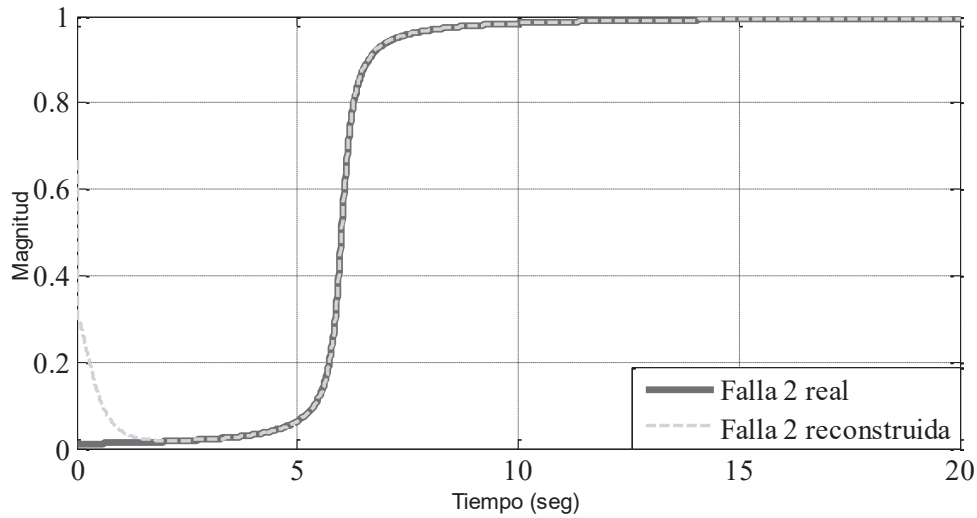


Figura 3.17: Comparación entre la falla 2 y su reconstrucción, ejemplo 3.5

### 3.6.2 Metodología modificada de Hirschorn

Para sistemas multivariables hay muchas formas de caracterizar la invertibilidad por la izquierda. El método desarrollado por (Hirschorn, 1979) para encontrar un sistema inverso por la izquierda respecto a las entradas para el caso de sistemas no lineales se basa en la metodología desarrollada por (Silverman, 1969), la cual consiste en construir una secuencia de sistemas  $S_0, S_1, \dots, S_\alpha$  e ir cambiando el mapeo de salida hasta que se puede resolver para la entrada en términos de los estados, salidas y sus derivadas del sistema original.

En ésta sección se tratará de modificar el algoritmo presentado por (Hirschorn, 1979) para encontrar un sistema inverso por la izquierda respecto a las fallas que actúan sobre el sistema no lineal.

El sistema a considerar tiene la siguiente forma,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(x) + \sum_{i=1}^m u_i B_i(x) + \sum_{i=1}^l f_i Q_i(x) \\ y &= c(x) \end{aligned} \quad (3.72)$$

Donde el espacio de estado es la variedad  $M$ ,  $A, B_1, \dots, B_m, Q_1, \dots, Q_l$  son campos vectoriales analíticos en  $M$ ,  $c(x) = (c_1(x), \dots, c_p(x))$  es un mapeo real analítico de  $M$  a  $\mathbb{R}^p$ ,  $u_i \in U$  son las entradas conocidas,  $f_i \in F$  son las fallas que actúan sobre el sistema.

Para iniciar el desarrollo de ésta metodología se requiere derivar las salidas.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} = y^{(1)}(t) &= dc_{x(t)}(\dot{x}(t)) \\ &= dc_{x(t)}\left(A(x) + \sum_{i=1}^m u_i B_i(x) + \sum_{i=1}^l f_i Q_i(x)\right) \\ &= (Ac)(x) + \sum_{i=1}^m u_i (B_i c)(x) + \sum_{i=1}^l f_i (Q_i c)(x) \end{aligned}$$

Donde la notación anterior implica que se requiere derivar cada una de las salidas del sistema respecto del tiempo y sustituir las derivadas de los estados.

Sea  $u$  el vector en  $\mathbb{R}^m$  cuyas componentes son  $u_1, \dots, u_m$  y  $f$  el vector en  $\mathbb{R}^l$  cuyas componentes son  $f_1, \dots, f_l$ . Sean además  $D(x) = [(B_1 c(x)) (B_2 c(x)) \dots (B_m c(x))]$ ,  $G(x) = [(Q_1 c(x)) (Q_2 c(x)) \dots (Q_l c(x))]$  matrices de  $p \times m$  y  $p \times l$  respectivamente para cada  $x \in M$ . Con esta notación se puede escribir

$$\frac{dy}{dt} = Ac(x) + D(x)u + G(x)f$$

Si  $r_1 = \max_{x \in M} \{rank G(x)\}$ . Sea  $E_0^1$  una matriz elemental que reordena las filas de  $G(x)$  de tal forma que las primeras  $r_1$  filas son linealmente independientes para algún  $x \in M$ , tal que

$$E_0^1 G(x) = \begin{bmatrix} G_{11}(x) \\ G_{12}(x) \end{bmatrix}$$

Donde  $G_{11}(x)$  es una matriz de  $r_1 \times l$ . Sea  $M_1 = \{x \in M \mid rank G_{11}(x) = r_1\}$ . Ya que  $B_i c_j$  son funciones analíticas se tiene que  $M_1$  es un subconjunto de  $M$ , y por tanto una subvariedad de  $M$ . Ahora se realiza una reducción de filas dependientes de  $x$  de  $E_0^1 D(x)$ . Sea

$$E_0^2(x) = \begin{bmatrix} I_{r_1 \times r_1} & 0 \\ F_{0(x)} & I_{(l-r_1) \times (l-r_1)} \end{bmatrix}$$

Una matriz elemental  $p \times p$  donde las entrada de  $F_0(x)$  son funciones reales analíticas en  $M_1$  con la siguiente propiedad

$$E_0^2(x)E_0^1G(x) = \begin{bmatrix} G_{11}(x) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por tanto  $G_{11}(x)$  es un matriz de  $r_1 \times l$  de rango  $r_1$  para todo  $x \in M_1$ .

Si se define como  $R_0(x) = E_0^2(x)E_0^1$  se puede iniciar a construir el primer sistema.

**Sistema (1):**

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(x) + \sum_{i=1}^m u_i B_i(x) + \sum_{i=1}^l f_i Q_i(x); & x \in M_1 \\ z_1 &= c_1(x) + D_1(x)u + G_1(x)f \end{aligned}$$

Donde

$$z_1 = R_0(x) \frac{dy}{dt}$$

$$c_1 = R_0(x)Ac(x)$$

$$D_1(x) = R_0(x)D(x)$$

$$G_1(x) = R_0(x)G(x) = \begin{bmatrix} G_{11}(x) \\ 0 \end{bmatrix}$$

**Definición 3.5.** A  $r_1$  se le llama índice de invertibilidad del sistema (3.72).

De acuerdo al primer sistema obtenido en la secuencia, se puede observar que se tiene involucrada a la entrada  $u$  en la salida  $z_1$  de dicho sistema, esto provocará que tarde o temprano se llega a un paso en el que aparecen términos que dependen de  $u_i f_j$ ,  $\dot{u}_i f_j$  por lo que en el siguiente paso aparecerán términos  $u_i u_j f_k$ ,  $u_i \dot{u}_j f_k$  y por lo tanto la estructura lineal respecto a  $u$  y a  $f$  se pierde.

Sólo en algunos casos particulares y de orden pequeño se puede seguir esta metodología hasta obtener el sistema inverso. Por tanto, se supone que se puede construir el  $k$ -ésimo sistema sin perder la estructura original como sigue.

**Sistema (k):**

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(x) + \sum_{i=1}^m u_i B_i(x) + \sum_{i=1}^l f_i Q_i(x); & x \in M_k \\ z_k &= c_k(x) + D_k(x)u + G_k(x)f\end{aligned}$$

Donde  $M_k$  es una subvariedad de  $M$ ,  $c_k(x)$ ,  $D_k(x)$  y  $G_k$  son matrices de  $p \times p$ ,  $p \times m$  y  $p \times l$  respectivamente, cuyas entradas son funciones reales analíticas en  $M_k$  y

$$G_k(x) = \begin{bmatrix} G_{k1}(x) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Con  $G_{k1}(x)$  de  $r_k \times l$  de rango  $r_k$  para todo  $x \in M_k$ .

Para construir el sistema  $(k+1)$  se descompone la salida del sistema  $(k)$  de la siguiente forma

$$z_k = \begin{bmatrix} \bar{z}_k \\ \hat{z}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{c}_k(x) \\ \hat{c}_k(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{D}_k(x) \\ \hat{D}_k(x) \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} G_{k1}(x) \\ 0 \end{bmatrix} f$$

Y derivando  $\hat{z}_k$  con respecto a  $t$

$$\begin{aligned}\hat{z}_k^{(1)}(t) &= \left[ (d\hat{c}_k)_x + (d\hat{D}_k(x)u) \right] \left[ A(x) + \sum_{i=1}^m u_i B_i(x) + \sum_{i=1}^l f_i Q_i(x) \right] \\ &= A\hat{c}_k(x) + \hat{D}_k(x)u + \hat{G}_k(x)\end{aligned}$$

Donde  $\hat{D}_k(x) = [(B_1\hat{c}_k(x)) \cdots (B_m\hat{c}_k(x))]$  y  $\hat{G}_k(x) = [(Q_1\hat{c}_k(x)) \cdots (Q_l\hat{c}_k(x))]$

Por tanto,

$$\begin{bmatrix} \bar{z}_k \\ \hat{z}_k^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{c}_k(x) \\ A\hat{c}_k(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{D}_k(x) \\ \hat{D}_k(x) \end{bmatrix} u + \bar{G}_k(x)f \quad \text{donde } \bar{G}_k = \begin{bmatrix} G_{k1}(x) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sea  $r_{k+1} = \max_{x \in M_k} \{rank \bar{G}(x)\}$  y sea  $E_k^1$  una matriz elemental la cual reordena las últimas  $p - r_k$  filas de  $\bar{G}_k$  tal que las primeras  $r_{k+1}$  filas de  $E_k^1 \bar{D}_k$  son linealmente

independientes para algún  $x \in M$ , es decir,  $E_k^1 G_{k1} = \begin{bmatrix} \hat{G}_{k1}(x) \\ \hat{G}_{k2}(x) \end{bmatrix}$  y la matriz  $\hat{G}_{k1}(x)$  de

$(r_k + 1) \times l$  tiene rango  $r_{k+1}$  para algún  $x \in M_k$ . Sea  $M_{k+1} = \{x \in M_k \mid rank \hat{G}_{k1}(x) = r_{k+1}\}$ ,

tal que  $M_{k+1}$  es una subvariedad de  $M_k$  y por tanto de  $M$ . Finalmente, sea

$$E_k^2(x) = \begin{bmatrix} I_{r_{k+1} \times r_{k+1}} & 0 \\ F_k(x) & I_{(l-r_{k+1})(l-r_{k+1})} \end{bmatrix}$$

Una matriz elemental cuyas entradas son funciones reales analíticas en  $M_{k+1}$  con la propiedad de que

$$E_k^2(x) E_k^1 \bar{G}_k(x) = \begin{bmatrix} \hat{G}_{k+1}(x) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{para todo } x \in M_{k+1}$$

Sea  $R_k(x) = E_k^2(x) E_k^1$ , y sea  $G_{k+1}(x) = \begin{bmatrix} \hat{G}_{k+1}(x) \\ 0 \end{bmatrix}$ . El sistema  $(k+1)$  se define como

sigue

**Sistema  $(k+1)$ :**

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(x) + \sum_{i=1}^m u_i B_i(x) + \sum_{i=1}^l f_i Q_i(x) & x \in M_{k+1} \\ z_{k+1} &= c_{k+1}(x) + D_{k+1}(x)u + G_{k+1}(x)f \end{aligned}$$

Donde  $M_{k+1}$  es una subvariedad de  $M$ ,

$$c_{k+1} = R_k(x) \begin{bmatrix} \bar{c}_k(x) \\ A \hat{c}_k(x) \end{bmatrix}, \quad D_{k+1} = R_k(x) \begin{bmatrix} \bar{D}_k(x) \\ \hat{D}_k(x) \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad G_{k+1}(x) = \begin{bmatrix} G_{k+1,1}(x) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$G_{k+1,1}(x)$  es una matriz de  $r_{k+1} \times l$  de rango  $r_{k+1}$  para todo  $x \in M_{k+1}$

**Definición 3.6.** El orden relativo  $\alpha$  para el sistema (3.72) es el entero positivo menor  $k$  tal que  $r_k = l$  o  $\alpha = \infty$  si  $r_k < l$  para todo  $k = 1, 2, \dots$

Como en el caso lineal, el entero  $\alpha$  está relacionado con la derivada de mayor orden de la salida  $y(\cdot)$  necesaria para el sistema inverso por la izquierda. Para sistemas no lineales  $\alpha < \infty$  es una condición suficiente para la invertibilidad del  $\alpha$ -ésimo sistema, y con algunas condiciones de los mapeos de salida es una condición suficiente para la invertibilidad del sistema (3.72).

En resumen, asociado con cada sistema (3.72) se encuentra una secuencia de índices de invertibilidad

$$r_1 \leq r_2 \leq r_3 \leq \dots \leq l,$$

Un orden relativo  $\alpha$  y una secuencia de matrices

$$F_0(x), F_1(x), F_2(x), \dots$$

Las cuales capturan la dependencia de  $x$  de la reducción de filas usada en la construcción de los subsistemas no lineales. En el caso lineal  $F_i(x)$  es siempre una matriz constante. Los resultados principales de esta metodología se resumen en los siguientes teoremas.

**Teorema 3.4** Considere el sistema no lineal (3.72) con orden relativo  $\alpha$ . Si  $\alpha < \infty$  entonces para todo  $k \geq \alpha$ , el sistema  $k$ -ésimo es invertible en  $x_0$  para todo  $x_0 \in M_k$ . En particular el  $\alpha$ -ésimo sistema es fuertemente invertible.

**Teorema 3.5** Considere el sistema no lineal de la forma (3.72) con orden relativo  $\alpha < \infty$ . Entonces si  $\alpha = 1$  o  $\alpha > 1$  y para todo  $i \in \{1, 2, \dots, l\}$ ,

$$Q_i A^j F_k(\cdot) = 0 \quad \text{en } M$$

Para todo  $0 \leq k \leq \alpha - 2$  y  $0 \leq j \leq \alpha - 2 - k$ , entonces el sistema (3.72) es fuertemente invertible en  $x_0$  para todo  $x_0 \in M_\alpha$ .

**Corolario 3.2** Considere el sistema (3.72) con orden relativo  $\alpha < \infty$ . Si  $\alpha = 1$  o  $\alpha > 1$  y para todo  $i, j \in \{1, 2, \dots, l\}$

$$Q_i A^q Q_j A^s C(\cdot) = 0 \quad \text{en } M$$

Para  $0 \leq q + s < \alpha - 1$  con  $q, s$  enteros no negativos, la hipótesis del Teorema 3.5 se satisface y el sistema (3.72) es fuertemente invertible en  $x_0$  para todo  $x_0 \in M_\alpha$ . En particular el sistema es fuertemente invertible.

El corolario 3.3 describe la construcción de un sistema no lineal que actúa como inverso por la izquierda para aquellos sistemas de la forma (3.72) los cuales satisfacen la hipótesis del Teorema 3.5. Suponga que un sistema de la forma (3.72) tiene orden relativo  $\alpha < \infty$ . Entonces el  $\alpha$ -ésimo sistema tendrá la siguiente forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(x) + \sum_{i=1}^m u_i B_i(x) + \sum_{i=1}^l f_i Q_i(x); & x \in M_\alpha \\ z_\alpha &= c_\alpha(x) + D_\alpha(x)u + G_\alpha(x)f \end{aligned}$$

y construyendo  $G_\alpha(x) = \begin{bmatrix} G_{\alpha 1}(x) \\ 0 \end{bmatrix}$  donde para todo  $x \in M_\alpha$ ,  $G_{\alpha 1}(x)$  es una matriz de  $r_\alpha \times l$  de rango  $r_\alpha$ . Debido a que  $\alpha < \infty$ ,  $r_\alpha = l$ , y  $G_{\alpha 1}(x)$  es una matriz invertible de  $l \times l$ . Sean  $\bar{z}_\alpha$ ,  $\bar{c}_\alpha$  y  $\bar{D}_\alpha$  las primeras componentes de  $z_\alpha$ ,  $c_\alpha$  y  $D_\alpha$  respectivamente. Entonces

$$\bar{z}_\alpha = \bar{c}_\alpha(x) + \bar{D}_\alpha(x) + G_{\alpha 1}(x)f$$

Donde  $G_{\alpha 1}(x)$  es una matriz invertible de  $l \times l$  para todo  $x \in M_\alpha$

**Corolario 3.3** Suponga que el sistema (3.72) satisface la hipótesis del Teorema 3.5 o el corolario 3.2. Si de  $x_0 \in M_\alpha$  entonces existe una matriz  $H_\alpha(x)$  de  $m \times \alpha p$  cuyas entradas son funciones reales analíticas en  $M_\alpha$  tal que

$$\bar{z}_\alpha(t) = H_\alpha(x(t)) \begin{bmatrix} y^{(1)}(t) \\ \vdots \\ y^{(\alpha)}(t) \end{bmatrix}$$

Y el sistema

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= \hat{A}(\hat{x}) + \hat{B}(\hat{x})u + \hat{G}(\hat{x})\hat{u}; & \hat{x}_0 &= x_0 \in M_\alpha \\ \hat{y} &= \hat{c}(\hat{x}) + \hat{D}(\hat{x})u + \hat{G}(\hat{x})\hat{u} \end{aligned}$$

Con variedad  $M_\alpha$  y

$$\begin{aligned} \hat{A}(\hat{x}) &= A(\hat{x}) - \left[ (B_1 c(x)) \ (B_2 c(x)) \ \dots \ (B_m c(x)) \right] G_{\alpha 1}^{-1}(\hat{x}) \bar{c}_\alpha(\hat{x}) \\ &\quad - \left[ (Q_1 c(x)) \ (Q_2 c(x)) \ \dots \ (Q_m c(x)) \right] G_{\alpha 1}^{-1}(\hat{x}) \bar{c}_\alpha(\hat{x}) \\ \hat{B}(\hat{x}) &= - \left[ (B_1 c(x)) \ (B_2 c(x)) \ \dots \ (B_m c(x)) \right] G_{\alpha 1}^{-1}(\hat{x}) H_\alpha(\hat{x}), \\ \hat{G}(\hat{x}) &= - \left[ (Q_1 c(x)) \ (Q_2 c(x)) \ \dots \ (Q_m c(x)) \right] G_{\alpha 1}^{-1}(\hat{x}) H_\alpha(\hat{x}), \\ \hat{c}(\hat{x}) &= -G_{\alpha 1}^{-1}(\hat{x}) \bar{c}_\alpha(\hat{x}), \quad \hat{D}(\hat{x}) = G_{\alpha 1}^{-1}(\hat{x}) \bar{D}_\alpha(\hat{x}) \text{ y } \hat{G}(\hat{x}) = G_{\alpha 1}^{-1}(\hat{x}) H_\alpha(\hat{x}) \end{aligned}$$

Actúa como inverso por la izquierda para el sistema (3.72). En particular, si

$$\hat{u}(t) = \begin{bmatrix} y^{(1)}(t) \\ \vdots \\ y^{(\alpha)}(t) \end{bmatrix} \quad \text{Entonces } \hat{y}(t) = f(t)$$

Donde  $y(t) = y(t, f, x_0)$  es la salida del sistema (3.72) resultado de la entrada de control  $u$ .

**Ejemplo 3.4** Considere el modelo no lineal controlado del prototipo de “Bola y Barra” del capítulo 5, en donde se tiene presente una falla de tipo aditivo en el actuador al cual se le aplicará la metodología descrita previamente.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -7\text{sen}\left[k(-k_1x_1 - k_2x_2 - k_3x_3)\right] + f \\ \dot{x}_3 &= u_1 - x_1 \\ y &= x_1\end{aligned}\tag{3.73}$$

Donde  $f$  es la falla y  $u_1$  es la señal de referencia.

Se requiere derivar la salida

$$\dot{y} = \dot{x}_1 = x_2$$

Aquí  $r=0$  y  $R_0(x)=1$  debido a que no hay que realizar ninguna reducción de filas y  $F_0(x)=1$ .

Debido a que aún no aparece la falla, se requiere seguir derivando, por lo que la segunda deriva es,

$$\ddot{y} = \dot{x}_2 = -7\text{sen}\left[k(-k_1x_1 - k_2x_2 - k_3x_3)\right] + f\tag{3.74}$$

Nuevamente  $r=1$ ,  $R_1(x)=1$  y  $F_1(x)=1$ . Debido a que sólo está actuando una falla sobre el sistema, basta con que ésta se tenga presente en las derivadas de la salida, ya que solamente se requiere un simple despeje para conocer  $f$ , por lo que el orden relativo es  $\alpha=2$ , de acuerdo al Teorema 3.4 el sistema (3.73) es invertible. Y de acuerdo al Teorema 3.5 se tiene

$$Q_i A^j F_k(\cdot) = 0 \quad \text{en } M$$

Con  $i \in \{1, 2, \dots, l\}$ ,  $0 \leq k \leq \alpha - 2$  y  $0 \leq j \leq \alpha - 2 - k$ . Por lo que  $i=1$ ,  $k=0$ ,  $j=0$  y sustituyendo valores se tiene,

$$Q_1 F_0 = dF_{0,x} Q_1(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

Por lo que el sistema (3.73) es fuertemente invertible en  $x_0$  para todo  $x_0 \in M_\alpha$ . Luego se procede a realizar el despeje para  $f$  de (3.74).

$$f = \ddot{y} + 7\text{sen}\left[k(-k_1x_1 - k_2x_2 - k_3x_3)\right] \quad (3.75)$$

Directamente de (3.75) se sustituye  $f$  en (3.73) y cambiando la notación para los estados de  $x$  a  $z$  se obtiene el modelo del sistema inverso

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= \ddot{y} \\ \dot{z}_3 &= u_1 - z_1 \\ f &= \ddot{y} + 7\text{sen}\left[k(-k_1z_1 - k_2z_2 - k_3z_3)\right] \end{aligned} \quad (3.76)$$

El ejemplo 3.4 muestra de manera muy sencilla como se aplica la metodología de Hirschorn modificada para encontrar el sistema inverso respecto a las fallas. En el desarrollo de este ejemplo se mantuvo la estructura original sobre la cual fue planteado esta metodología por tal razón fue posible obtener el sistema inverso respecto a las fallas, sin embargo; se tiene la desventaja que no se obtiene una inversa de orden reducido. A continuación se reducirá de manera inductiva el sistema (3.76), debido a que  $y = x_1$  y  $\dot{y} = x_2$ , hace que las ecuaciones dinámicas para  $\dot{z}_1$  y  $\dot{z}_2$  no se requieren para la reconstrucción de la falla por lo que el sistema inverso de orden reducido es.

$$\begin{aligned} \dot{z} &= u_1 - y \\ f &= \ddot{y} + 7\text{sen}\left[k(-k_1y - k_2\dot{y} - k_3z)\right] \end{aligned}$$

En este ejemplo no se presentarán los resultados en simulación, ya que en el capítulo 5 se realiza un análisis detallado sobre este sistema y se presentan sus respectivas simulaciones.

### 3.7 Derivadores

Como ha podido observarse en las secciones anteriores de este capítulo y del capítulo anterior, para la implementación de los sistemas inversos se requieren calcular

derivadas de la salida y de la entrada del sistema original. En ésta sección se presentan de manera general algunos de los derivadores más comúnmente utilizados, en particular el derivador lineal o derivador sucio y el derivador lineal invariante en el tiempo de segundo orden, entre otros.

### 3.7.1 El derivador ideal

Un derivador ideal es un dispositivo cuya salida es la derivada respecto al tiempo de la señal de entrada, como se muestra en la Figura 3.18

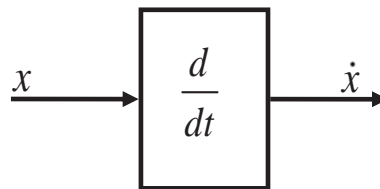


Figura 3.18: Derivador ideal

La función de transferencia del derivador ideal es  $G(s) = s$ , la cual es una función racional impropia (el grado del numerador es mayor que el del denominador). Toda función de transferencia impropia se considera no realizable debido a que ante una entrada de frecuencia arbitrariamente alta presentará una salida de amplitud arbitrariamente grande, lo cual no es físicamente posible. Este problema de no realizabilidad puede apreciarse para el derivador si observamos su respuesta de frecuencia mostrada en el diagrama de Bode de la Figura 3.19.

Además del problema de no realizabilidad, la respuesta de frecuencia del derivador muestra otro problema: la amplificación para altas frecuencias es alta y el ruido de alta frecuencia es común en los sistemas de instrumentación electrónica, por lo tanto; el uso de derivadores favorece la amplificación del ruido.

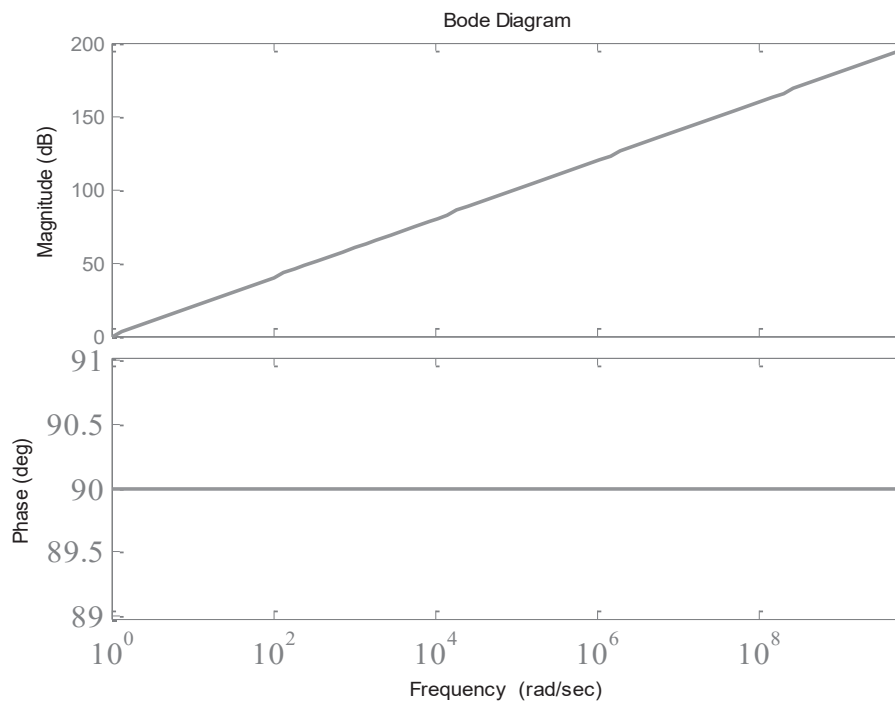


Figura 3.19: Respuesta de frecuencia del derivador ideal

### 3.7.2 Derivador lineal de primer y segundo orden

Una manera de aproximar al derivador ideal y al mismo tiempo limitar la amplificación para el ruido de alta frecuencia se puede conseguir con el derivador lineal o suncio de primer orden, el cual tiene la siguiente función de transferencia:

$$G(s) = \frac{s}{Ts + 1} \quad (3.77)$$

Donde  $T$  se elije para seleccionar la banda de frecuencia en la que se desea el efecto derivativo.

En la Figura 3.20 se muestra la respuesta de frecuencia del derivador lineal de primer orden, en ella se puede apreciar que la banda de frecuencias  $0 \leq \omega \ll 1/T$  se deriva de manera casi ideal, pero para  $\omega > 1/T$  esta implementación está lejos de ser un derivador y se comporta más como un amplificador de ganancia  $1/T$ .

El derivador lineal de segundo orden tiene la siguiente representación en espacio de estados

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha^2 & -2\alpha \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha^2 \end{bmatrix} \xi(t) \\ y(t) &= x_2\end{aligned}\quad (3.78)$$

Donde  $\xi(t)$  es la función de entrada que se requiere derivar y  $\alpha > 0$ .

Los polos del sistema son repetidos y sus valores son  $\lambda_1 = \lambda_2 = -\alpha$ , por lo tanto; con la condición  $\alpha > 0$  se garantiza la estabilidad de este derivador.

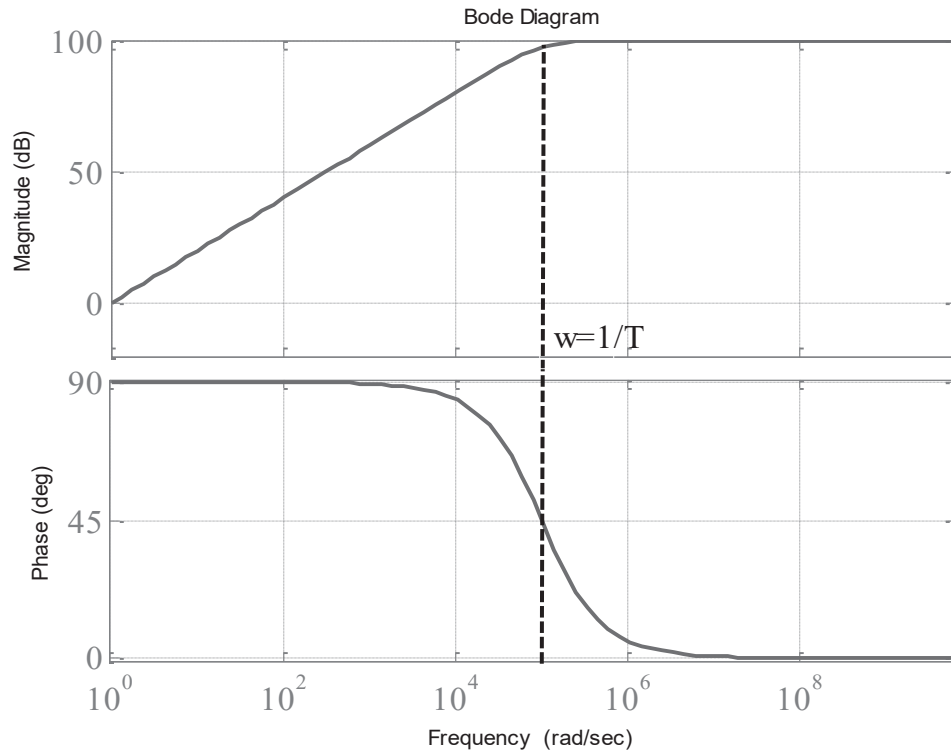


Figura 3.20: Respuesta de frecuencia del derivador lineal de primer orden

Los estados de este sistema estable de segundo orden convergen a su punto de equilibrio  $[\xi(t) \ \dot{\xi}(t)]^T$  conforme el tiempo transcurre lo cual se puede verificar haciendo  $\dot{x} = 0$  es las ecuaciones del sistema. La función de transferencia correspondiente está dada por

$$\begin{aligned}G(s) &= C(SI - A)^{-1} B \\ G(s) &= [0 \ 1] \begin{bmatrix} s & -1 \\ \alpha^2 & s + 2\alpha \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha^2 \end{bmatrix} = \frac{\alpha^2 s}{s^2 + 2\alpha s + \alpha^2}\end{aligned}\quad (3.79)$$

Factorizando el término  $\alpha^2$  en el numerador y denominador de la función de transferencia (3.79) se tiene

$$G(s) = \frac{s}{\frac{1}{\alpha^2}s^2 + \frac{2}{\alpha}s + 1} = \frac{s}{\left(\frac{s}{\alpha} + 1\right)^2} \quad (3.80)$$

Obsérvese que  $\alpha$  juega el papel de  $1/T$  en el derivador lineal de primer orden.

En la Figura 3.21 se muestra la respuesta de frecuencia del derivador lineal de segundo orden. Se puede apreciar que para frecuencias  $0 \leq \omega \ll \alpha$  el derivador se aproxima al ideal, pero para  $\omega > \alpha$  se comporta más bien como un integrador, este efecto es deseable para alisar la respuesta al ruido de alta frecuencia.

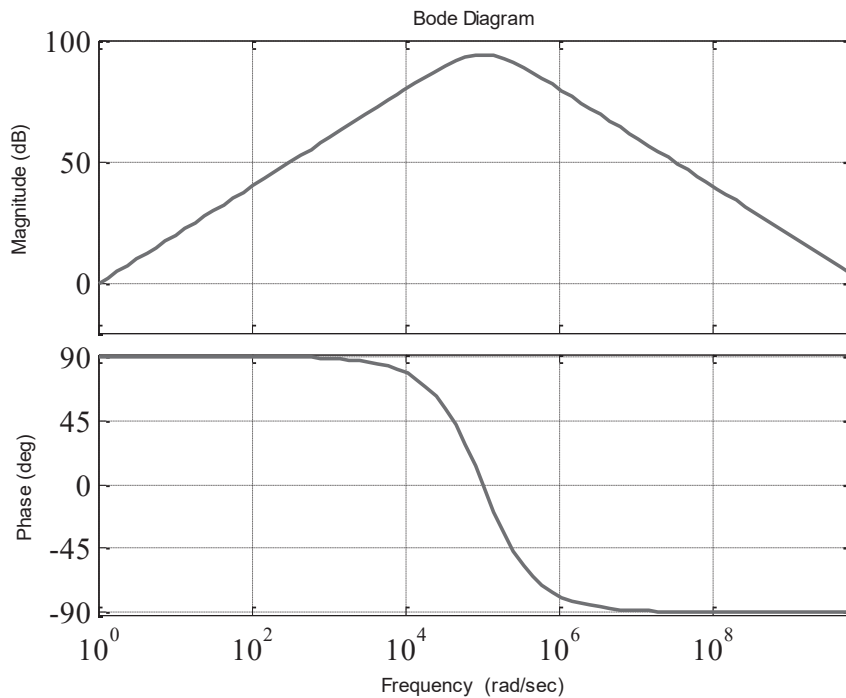
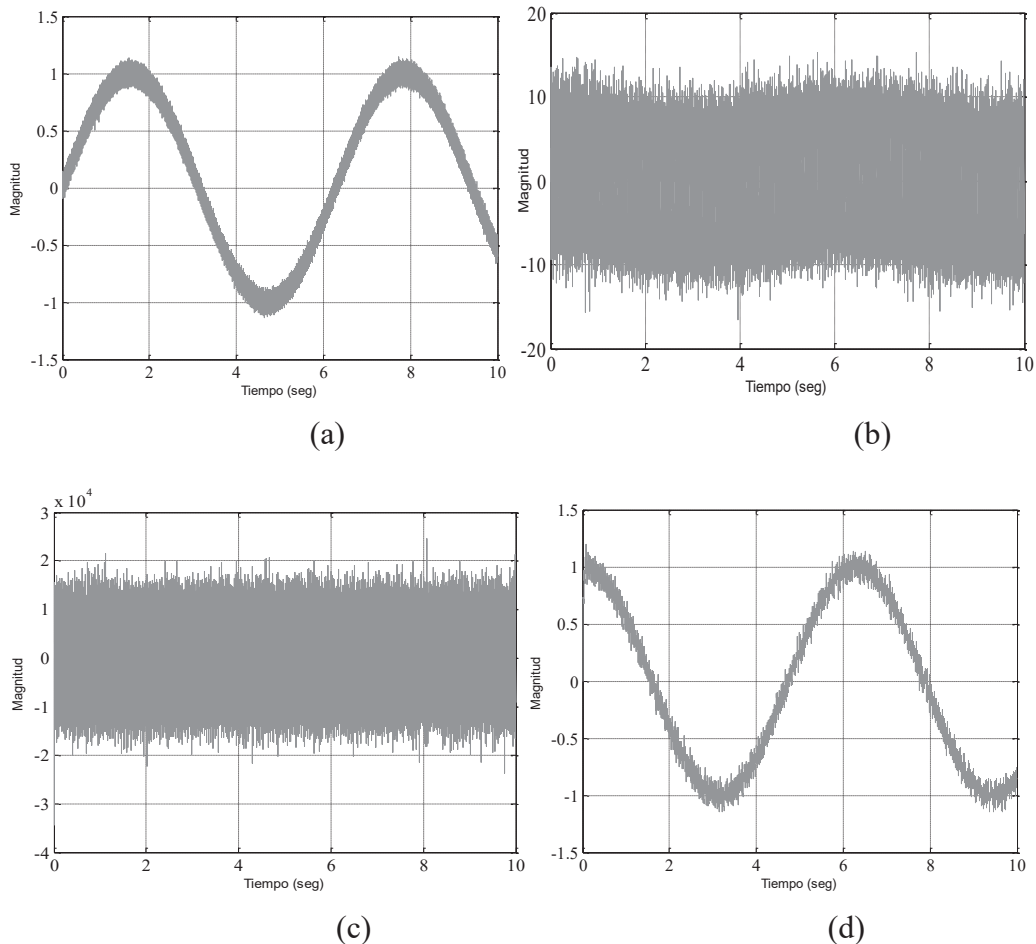


Figura 3.21: Respuesta de frecuencia del derivador lineal de segundo orden

Para comparar la respuesta del derivador lineal de primer orden, el de segundo orden y el bloque derivador que utiliza Simulink se realizó una simulación en la cual la entrada a cada uno de los derivadores es una señal senoidal de *Amplitud* = 1, *Frecuencia* = 0.159 Hz, con ruido de medición Gaussiano de media  $\mu = 0$  y varianza

$\sigma^2 = 0.0011$ , es decir;  $u(t) = \sin(t) + \text{ruido}$ . La Figura 3.22 muestra los resultados de dicha simulación en la Figura 3.22 (a) se muestra la señal de senoidal de entrada a los derivadores, la Figura 3.22 (b) muestra la respuesta del derivador lineal de primer orden con  $T = 0.01$ , la Figura 3.22 (c) muestra la respuesta del bloque de derivación que utiliza Simulink, la Figura 3.22 (d) muestra la respuesta del derivador lineal de segundo orden con  $\alpha = 100$ . Se puede observar que la mejor respuesta la da el derivador lineal de segundo orden, mientras que el bloque derivador de Simulink es el más sensible al ruido. Cabe hacer la aclaración que Simulink implementa su derivador mediante la aproximación lineal de primer orden con  $1/T = \text{inf}$ , donde  $\text{inf}$  es la representación estándar del IEEE.



**Figura 3.22: Derivada de una señal senoidal con ruido Gaussiano**

**(a) Señal de entrada senoidal con ruido (b) Derivador lineal de primer orden (c) Derivador de Simulink (d) Derivador lineal de segundo orden.**

### **3.7.3 Otros derivadores**

En la literatura se pueden encontrar otros derivadores tales como el derivador lineal variante en el tiempo de segundo orden (Ibrir, 2003) el cual tiene la propiedad de que el estado 1 tiende a la función de entrada, mientras que el estado 2 tiende a la derivada de la función de entrada. Se puede ver otro tipo de derivador (Levant, 1998) basado en técnicas de modos deslizantes el cual combina las propiedades de diseño de exactitud y robustez ante errores y ruido de medición. Por su parte (Wang, Chen, & Yang, 2007) presentan un derivador con un tiempo de convergencia finito y rápido en comparación con otros derivadores típicos, este derivador no presenta el fenómeno de chattering y está basado en técnicas de perturbaciones singulares. Los autores (Fliess, Join, & Sira-Ramírez, 2007) presentan un método de derivación numérica cuyas derivadas son calculadas vía integración, éste derivador no es de naturaleza asintótica y no requiere conocimiento estadístico del ruido presente en la señal a derivar.

# Capítulo 4

## Casos de estudio en simulación

En este capítulo se presentan un conjunto de casos de estudio sobre los cuales se llevará a cabo un análisis de diagnóstico de fallas, aplicando las diferentes metodologías descritas en el capítulo 3. Dichos casos de estudio se dividen en teóricos y prácticos, los primeros son problemas que no surgen de alguna aplicación práctica, mientras que los segundos son problemas derivados de modelos matemáticos de sistemas físicos. Todos estos ejemplos se estudian solamente en simulación, las cuales se realizan en Simulink.

### 4.1 Casos teóricos

**Ejemplo 4.1. (Metodología de Zheng y Cao, caso lineal)** Considere el siguiente sistema lineal invariante en el tiempo (Edelmayer, Bokor, Szabó, & Szigeti, 2004).

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + R_1 f \\ y &= Cx + Du + R_2 f \end{aligned}$$

$$\text{Donde } A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$D = R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se requiere primeramente escribir el sistema en forma de ecuaciones,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 - x_3 + x_4 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - 2x_2 + u_1 \\ \dot{x}_3 &= x_2 - x_4 + u_2 + f_1 + f_2 \\ \dot{x}_4 &= 2x_3 + f_1 - f_2 \\ y_1 &= x_3 \\ y_2 &= x_4\end{aligned}$$

Se inicia derivando repetidamente las salidas del sistema respecto al tiempo hasta involucrar todos los estados del sistema y las fallas.

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= \dot{x}_3 = x_2 - x_4 + u_2 + f_1 + f_2 \\ \dot{y}_2 &= \dot{x}_4 = 2x_3 + f_1 - f_2 \\ \ddot{y}_1 &= \dot{x}_1 - 2\dot{x}_2 - 2\dot{x}_3 + \dot{u}_1 - \dot{f}_1 + \dot{f}_2 + \dot{f}_1 + \dot{f}_2 \\ \ddot{y}_2 &= 2\dot{x}_2 - 2\dot{x}_4 + 2\dot{u}_2 + 2\dot{f}_1 + 2\dot{f}_2 + \dot{f}_1 - \dot{f}_2\end{aligned}$$

Hasta aquí ya se tienen involucrados a todos los estados del sistema, así como las fallas, por tanto se procede a obtener sus diferenciales.

$$dy_1 = dx_3 \quad (4.1)$$

$$dy_2 = dx_4 \quad (4.2)$$

$$d\dot{y}_1 = dx_2 - dx_4 + du_2 + df_1 + df_2 \quad (4.3)$$

$$d\dot{y}_2 = 2dx_3 + df_1 - df_2 \quad (4.4)$$

$$d\ddot{y}_1 = dx_1 - 2dx_2 - 2dx_3 + du_1 - df_1 + df_2 + d\dot{u}_2 + d\dot{f}_1 + d\dot{f}_2 \quad (4.5)$$

$$d\ddot{y}_2 = 2(dx_2 - dx_4 + du_2 + df_1 + df_2) + d\dot{f}_1 - d\dot{f}_2 \quad (4.6)$$

A continuación se calculan los espacios  $F^*$ ,  $Y^* + U^*$  y  $Y^* + U^* + F^*$  para poder calcular la observabilidad y también para evaluar la condición de existencia del sistema inverso respecto a las fallas.

Para obtener  $Y^* + U^*$  es necesario revisar todas las ecuaciones de los diferenciales desde (4.1) hasta (4.6), las cuales no deben de contener información de las fallas. Si alguna de las ecuaciones mencionadas contiene sólo información de los estados, salidas y entradas

(conocidas), entonces el espacio  $Y^* + U^*$  se escribe en términos de los diferenciales de los estados que aparezcan en dichas ecuaciones. Por tanto se tiene que

$$Y^* + U^* = \text{span}_R \{dx_3, dx_4\} \quad (4.7)$$

Por otra parte para obtener  $Y^* + U^* + F^*$  se procede de la misma manera que para obtener (4.7) y en este caso sí pueden estar presentes los diferenciales de las fallas. Por lo que  $Y^* + U^* + F^*$  quedará en términos de todos los diferenciales de los estados presentes en dichas ecuaciones.

$$Y^* + U^* + F^* = \text{span}_R \{dx_1, dx_2, dx_3, dx_4\} \quad (4.8)$$

De las ecuaciones (4.1) a (4.6) también se obtiene  $F^*$

$$F^* = \text{span}_R \{df, d\dot{f}\} \quad (4.9)$$

Además la condición de observabilidad es,

$$O^* = X^* \cap (Y^* + U^* + F^*)$$

Por lo tanto

$$O^* = \text{span}_R \{dx_1, dx_2, dx_3, dx_4\} \cap \text{span}_R \{dx_1, dx_2, dx_3, dx_4\} = \text{span}_R \{dx_1, dx_2, dx_3, dx_4\}$$

$$O^* = X^*$$

Por tanto el sistema es observable.

Luego se evalúa la condición de invertibilidad,

$$F^* \subset X^* + Y^* + U^*$$

La cual se cumple evidentemente de (4.8) y (4.9)

Una vez que sabemos que el sistema es invertible, procedemos a obtener el sistema inverso despejando  $df_1$  de (4.4) y sustituyendo en (4.3), se tiene

$$df_2 = \frac{1}{2}(d\dot{y}_1 - dx_2 + dx_4 - du_2 - d\dot{y}_2 + 2dx_3) \quad (4.10)$$

Ahora despejando  $df_2$  de (4.3) y sustituyendo en (4.4), se tiene

$$df_1 = \frac{1}{2}(d\dot{y}_2 + d\dot{y}_1 - dx_2 + dx_4 - du_2 - 2dx_3) \quad (4.11)$$

Por tanto el sistema es invertible por la izquierda respecto a las fallas, ya que se pudo expresar a los diferenciales de las fallas en términos de los estados, las salidas y entradas conocidas.

Para calcular el orden del sistema inverso reducido obtenemos el espacio completamente observable

$$AO^* = X^* \cap (Y^* + U^*) \Rightarrow AO^* = \text{span}_R \{dx_3, dx_4\}$$

La dimensión del sistema inverso reducido es,

$$\begin{aligned} \dim \Sigma^{-1} &= \dim O^* - \dim AO^* \\ \dim \Sigma^{-1} &= 4 - 2 = 2 \end{aligned}$$

Los estados del sistema inverso son,

$$\begin{aligned} (O^* \cap AO^*)^\perp &= \text{span}_R \{dx_1, dx_2\} \\ z_1 = x_1 &\Rightarrow \dot{z}_1 = \dot{x}_1 \\ z_2 = x_2 &\Rightarrow \dot{z}_2 = \dot{x}_2 \end{aligned}$$

El sistema inverso es,

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -z_1 - y_1 + y_2 \\ \dot{z}_2 &= z_1 - 2z_2 + u_1 \end{aligned} \quad (4.12)$$

Y sus salidas están dadas a partir de (4.10) y (4.11) por

$$f_1 = \frac{1}{2}(\dot{y}_1 + \dot{y}_2 - z_2 + y_2 - u_2 - 2y_1) \quad (4.13)$$

$$f_2 = \frac{1}{2}(\dot{y}_1 - \dot{y}_2 - z_2 + y_2 - u_2 + 2y_1) \quad (4.14)$$

Se puede apreciar que se obtuvo un sistema de orden reducido cuyas entradas son las salidas del sistema original y sus derivas y cuyas salidas son las señales de falla.

En la Figura 4.1 se muestran las gráficas obtenidas en simulación para fallas de tipo escalón actuando en  $t_1 = 10s$  y  $t_2 = 15s$ , para  $f_1$  y  $f_2$  respectivamente. Las entradas del sistema original son señales escalón unitario. Las fallas fueron reconstruidas mediante el sistema inverso (4.12). Para ésta simulación se utilizaron condiciones iniciales iguales a cero tanto para el sistema original como para el inverso, con lo cual la reconstrucción de las fallas se hace correctamente, tal como se puede ver en la Figura 4.1 y Figura 4.2. Cuando se utilizan condiciones iniciales diferentes para el sistema original que para el

inverso, la reconstrucción se hace correctamente una vez que el efecto de las condiciones iniciales ha desaparecido. Cabe mencionar que el efecto de las condiciones iniciales desaparece conforme transcurre el tiempo ya que la matriz  $A$  del sistema inverso tiene valores propios reales negativos y estos son  $\lambda_1 = -2$  y  $\lambda_2 = -1$ .

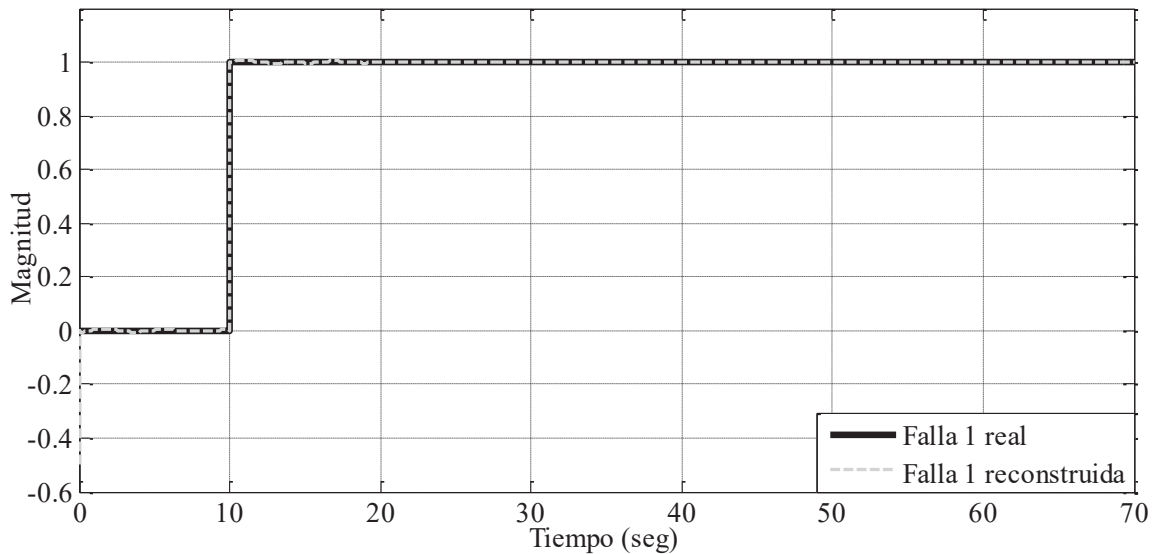


Figura 4.1: Comparación entre la falla real 1 y su reconstrucción, ejemplo 4.1.

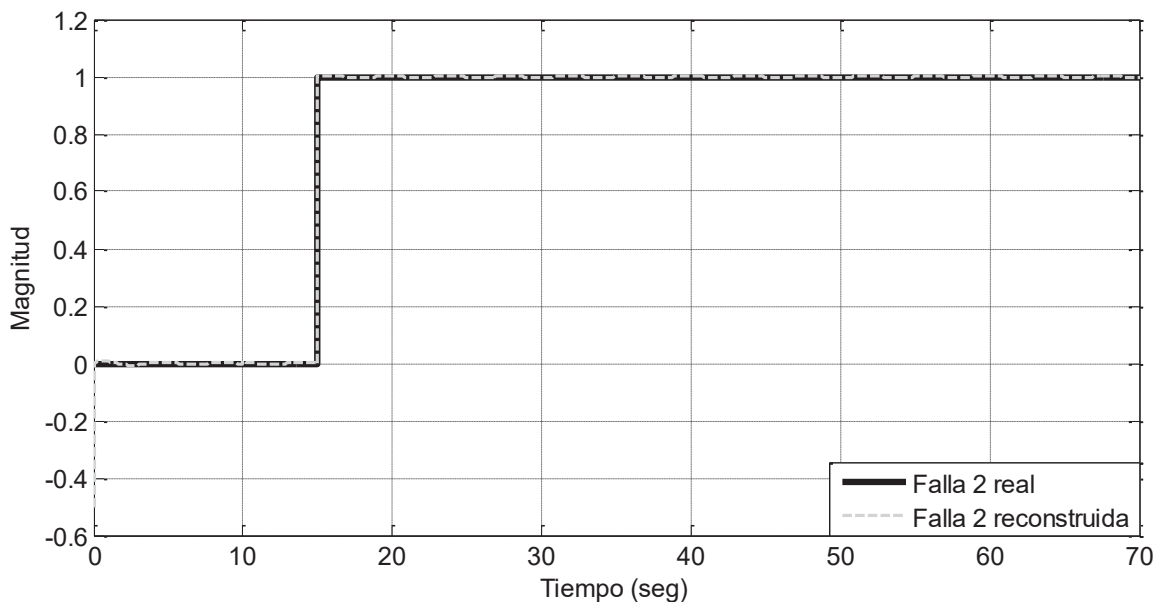


Figura 4.2: Comparación entre la falla real 2 y su reconstrucción, ejemplo 4.1.

## 4.2 Casos prácticos

**Ejemplo 4.2 (Metodología de Silverman).** Considere el modelo linealizado de un péndulo invertido (Chen & Patton, 1999), en el cual se presentan fallas en sensores y actuadores de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + R_1 f \\ y &= Cx + R_2 f \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\text{Donde } A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1.93 & -1.99 & 0.009 \\ 0 & 36.9 & 6.26 & -0.174 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.3205 \\ -1.009 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, R_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En este caso  $n=4$ ,  $p=3$ ,  $m=1$ ,  $l=3$ . Como  $p=l$  se cumple la condición de diagnosticabilidad (3.12).

Se desea operar este sistema en su punto de equilibrio inestable, por tanto se aplicará una retroalimentación lineal de estados de la siguiente forma  $u = -kx$  donde los polos se eligieron a prueba y error obteniéndose las ganancias de  $K = [1.16 \ -45.04 \ -6.34 \ -3.77]$ , con esto los polos del sistema se colocan en  $[-2 \ -2 \ -2 \ -2]$ . La Figura 4.3 muestra las salidas del sistema controlado en donde se observa que existe poco sobre impulso, y tienden rápidamente a cero.

El sistema (4.15) en lazo abierto se convierte en

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_c x + R_1 f \\ y &= Cx + R_2 f \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\text{Donde } A_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.37 & -16.36 & -4.02 & -1.12 \\ 1.17 & -8.54 & -0.14 & -3.98 \end{bmatrix}, \text{ las matrices } C, R_1 \text{ y } R_2 \text{ no cambian}$$

como fueron definidas previamente.

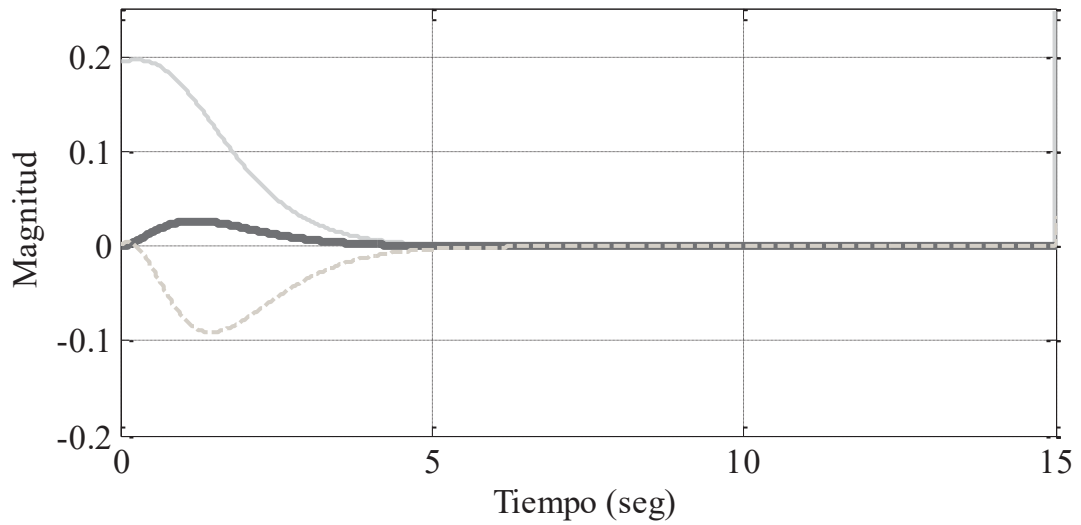


Figura 4.3: Salidas del sistema controlado, ejemplo 4.2

Para iniciar se requiere calcular el rango de  $R_2$

$$q_0 = \text{rank } R_2 = 2 < l$$

Note que  $R_2$  ya tiene la forma de (4.16), por tanto  $S_0$  es la matriz identidad y (4.16) también representa el subsistema  $S_0$ . La salida del sistema (4.16) se puede escribir en su forma particionada como sigue

$$\begin{bmatrix} \bar{y}_0 \\ \hat{y}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \bar{C}_0 \\ \hat{C}_0 \end{matrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \bar{R}_{20} \\ f \end{matrix} \quad (4.17)$$

Para seguir el procedimiento se debe derivar  $\hat{y}$ , se tiene

$$\begin{aligned} \dot{\hat{y}}_0 &= \hat{C}_0 A_c x + \hat{C}_0 R_1 f \\ \hat{y}_0 &= [0.37 \quad -16.36 \quad -4.02 \quad -1.2] x + [1 \quad 0 \quad 1] f \end{aligned}$$

Reemplazando  $\hat{y}_0$  por  $\dot{\hat{y}}_0$  en (4.17),

$$\begin{bmatrix} \bar{y}_0 \\ \dot{\hat{y}}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.37 & -16.36 & -4.02 & -1.2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} f \quad (4.18)$$

Ahora  $q_1 = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3 = l$ , por lo tanto  $\alpha = 1$ , el subsistema  $S_1$  es

$$\dot{x} = Ax + Bu + R_1 f \quad (4.19)$$

$$y_\alpha = C_\alpha x + R_{2\alpha} f \quad (4.20)$$

Donde  $y_\alpha = \begin{bmatrix} \bar{y}_\alpha \\ \dot{\hat{y}}_\alpha \end{bmatrix}$ ,  $C_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.37 & -16.36 & -4.02 & -1.2 \end{bmatrix}$ ,  $R_{2\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ahora es posible resolver (4.20) para  $f$  como sigue

$$f = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0.63 & 16.36 & 4.02 & 1.2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dot{y}_3 - y_1 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Por lo tanto, la dinámica del sistema inverso se obtiene sustituyendo (4.21) en (4.19) y utilizando  $z$  para denotar los estados de este nuevo sistema.

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.17 & -8.54 & -0.14 & -3.98 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dot{y}_3 - y_1 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

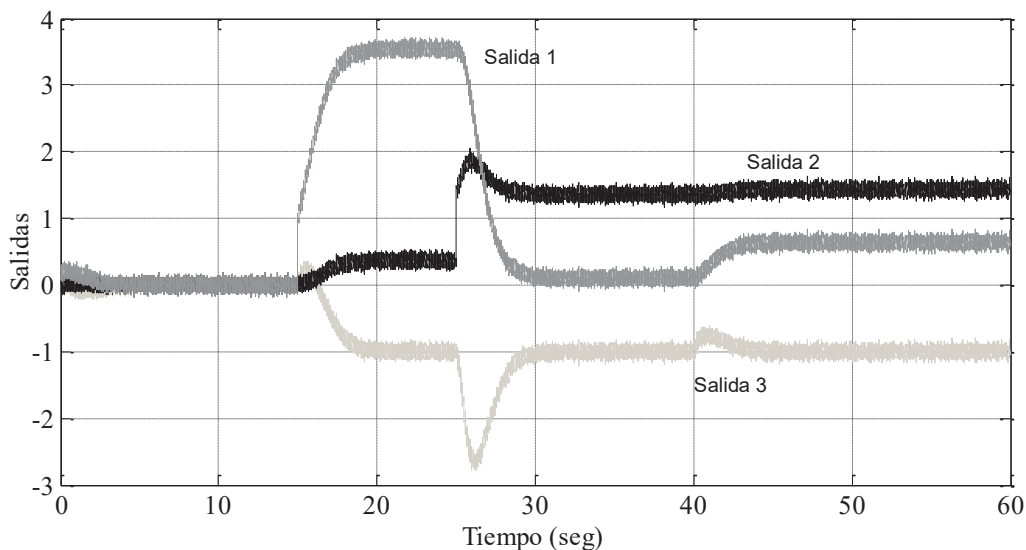
$$f = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0.63 & 16.36 & 4.02 & 1.2 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dot{y}_3 - y_1 \end{bmatrix}$$

El sistema (4.22) es el inverso por la izquierda respecto a las fallas de (4.16), en él se puede observar que sus entradas contienen las salidas del sistema original, así como algunas derivadas. Para la simulación de este ejemplo se utilizan fallas de tipo escalón y un filtro pasa bajas Butterworth de segundo orden para reducir el efecto del ruido de medición. La función de transferencia de este filtro es,

$$G(s) = \frac{39.48}{s^2 + 8.89s + 39.48}$$

La cual corresponde a una frecuencia de corte  $F_H = 6.28$  rad/s. Las condiciones iniciales tanto para el sistema original como para el inverso son  $(0.12, 0, 0, 0)$ . Las salidas del sistema están contaminadas con ruido Gaussiano de media  $\mu = 0$  y varianza  $\sigma^2 = 0.0025$ . Las fallas  $f_1$ ,  $f_2$  y  $f_3$  aparecen en  $t_1 = 15$  seg,  $t_2 = 25$  seg y  $t_3 = 40$  seg respectivamente.

Las mediciones con ruido de las salidas se muestran en la Figura 4.4. La Figura 4.5 muestra la reconstrucción de las fallas en comparación con las fallas reales, se puede apreciar que el ruido no afecta demasiado en la reconstrucción gracias al filtro. Es conveniente notar con estos resultados la importancia del conocimiento de algunas características que puedan tener las posibles fallas que actúan sobre el sistema para realizar una buena reconstrucción aun con la presencia de ruido.



**Figura 4.4: Salidas con ruido del sistema original, ejemplo 4.2**

Se puede apreciar de la Figura 4.5 que el ruido presente en la reconstrucción de la falla  $f_3$  es de mayor amplitud que el que está presente en la reconstrucción de las fallas  $f_1$  y  $f_2$ , esto se debe a que para reconstruir esta falla se requiere de la derivada de  $y_3$ , y debido a que ésta salida está contaminada con ruido al derivarse el ruido es amplificado.

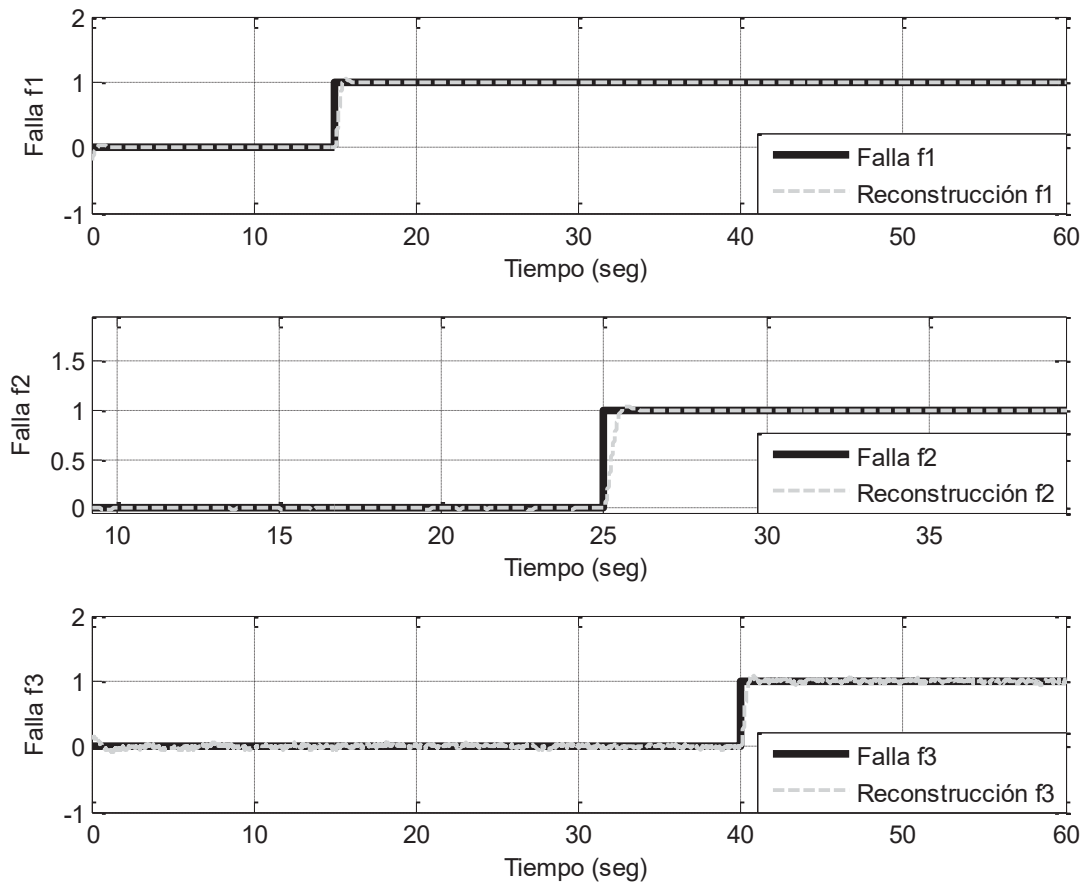


Figura 4.5: Comparación entre las fallas reales y su reconstrucción, ejemplo 4.2

**Ejemplo 4.3** (Función de transferencia). Para este ejemplo se considera el mismo sistema controlado (4.16).

Para iniciar con el procedimiento se requiere formar la matriz  $M$  como sigue.

$$M = \begin{bmatrix} sI - A & -R_1 \\ C & R_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -0.37 & 16.36 & s+4.02 & 1.12 & -1 & 0 & -1 \\ -1.17 & 8.54 & 0.14 & s+3.98 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Utilizando la expresión (3.17) se puede resolver para  $x$  and  $f$ . Aquí, sólo se muestran las expresiones para  $f$ ,

$$f_1 = -\frac{1}{s+1}x_{10} + \frac{s}{s+1}y_1 - \frac{1}{s+1}y_3$$

$$f_2 = -\frac{1.17}{\Delta}x_{10} - \frac{s^2 + 4.98s + 3.98}{\Delta}x_{20} - \frac{s+1}{\Delta}x_{40} - \frac{1.17}{\Delta}y_1 + \frac{s^3 + 4.98s^2 + 12.52s + 8.54}{\Delta}y_2 + \frac{0.14s-1}{\Delta}y_3$$

$$f_3 = \frac{0.63s^2 + 4.53s + 28.44}{\Delta}x_{10} + \frac{16.36s^2 + 71.29s + 54.92}{\Delta}x_{20} - \frac{s^3 + 5.98s^2 + 17.5s + 12.52}{\Delta}x_{30} + \frac{1.2s^2 + 18.76s + 17.56}{\Delta}x_{40} - \frac{s^3 + 5.35s^2 + 12.97s - 15.92}{\Delta}y_1 + \frac{16.36s^2 + 71.29s + 54.92}{\Delta}y_2 + \frac{10s^3 + 42.03s^2 + 84.86s + 76.37}{\Delta}y_3 + \frac{s^3}{\Delta}\dot{y}_3$$

Donde  $\Delta = s^3 + 5.99s^2 + 17.5s + 12.52$ , todas las raíces de este polinomio tienen parte real negativa, lo cual quiere decir que las condiciones iniciales se pueden despreciar ya que su efecto desaparecerá conforme  $t$  tiende a infinito, por lo que las expresiones para las fallas se pueden reducir como sigue,

$$f_1 = \frac{s}{s+1}y_1 - \frac{1}{s+1}y_3$$

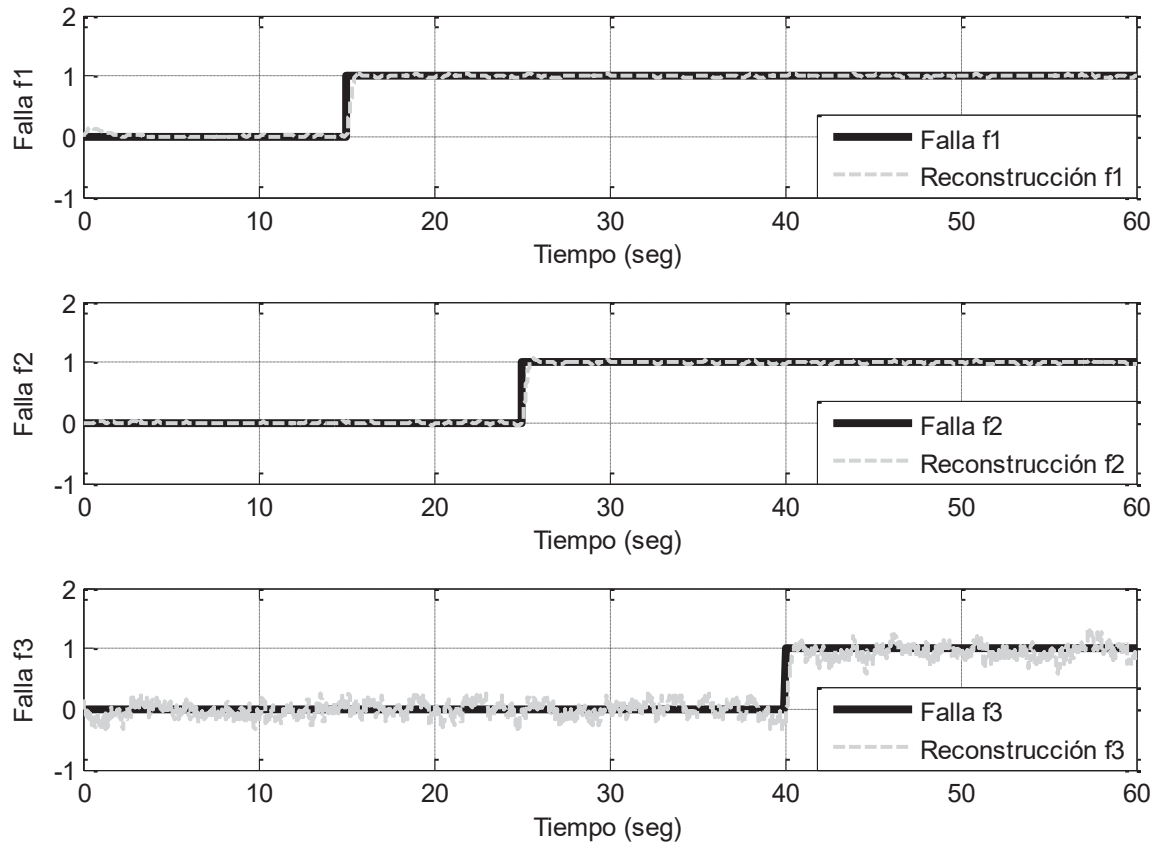
$$f_2 = -\frac{1.17}{\Delta}y_1 + \frac{s^3 + 4.98s^2 + 12.52s + 8.54}{\Delta}y_2 + \frac{0.14s-1}{\Delta}y_3$$

$$f_3 = -\frac{s^3 + 5.35s^2 + 12.97s - 15.92}{\Delta}y_1 + \frac{16.36s^2 + 71.29s + 54.92}{\Delta}y_2 + \frac{10s^3 + 42.03s^2 + 84.86s + 76.37}{\Delta}y_3 + \frac{s^3}{\Delta}\dot{y}_3$$

Note que es necesario incluir una derivada respecto del tiempo de  $y_3$  ya que el residuo para  $f_3$  contiene una función de transferencia impropia con respecto a esta salida.

Para esta simulación se utilizaron los mismos valores de ruido y de condiciones iniciales que en el ejemplo 4.2. También, se utilizó el mismo filtro pasa bajas para disminuir el efecto del ruido de medición. La Figura 4.6 muestra la comparación entre las fallas

originales y su respectiva reconstrucción. Note que la reconstrucción es muy similar que la obtenida con el enfoque de Silverman.



**Figura 4.6: Comparación entre las fallas reconstruidas y las reales, ejemplo 4.3**

Se puede observar de la Figura 4.6 que el ruido presente en la reconstrucción de la falla  $f_3$  es de mayor amplitud en comparación con el ruido presente en las fallas  $f_1$  y  $f_2$ , esto es debido a que el reconstructor de  $f_3$  requiere la derivada de  $y_3$ , por tanto el ruido presente en esta salida es amplificado por el derivador.

**Ejemplo 4.4** (Metodología de Zheng y Cao, caso no lineal) *Lazo abierto*. Considere el siguiente modelo no lineal (Ogata, 1998) de un péndulo invertido el cual se muestra en la Figura 4.7. Sobre este modelo se desea aplicar la metodología de Zheng y Cao para el diagnóstico de fallas tanto en sensores como en actuadores.

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_3 \\
 \dot{x}_2 &= x_4 \\
 \dot{x}_3 &= \frac{1.75x_3 - 68.67\text{sen}x_1 + \cos x_1 (\text{sen}x_1 - x_4 - 187.5x_4 + 25u)}{\cos^2 x_1 - 10} \\
 \dot{x}_4 &= \frac{188.5x_4 - 0.25x_3 \cos x_1 - x_3^2 \text{sen}x_1 + 9.81 \cos x_1 \text{sen}x_1 - 25u}{\cos^2 x_1 - 7} \\
 y_1 &= x_1 \\
 y_2 &= x_2
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

Las salidas del sistema son la posición angular del péndulo respecto a la vertical  $y_1 = \theta$  y la posición lineal del carrito  $y_2 = x$  y la entrada es el voltaje aplicado al motor acoplado a una de las llantas del carrito. El diagrama del péndulo invertido traslacional a utilizar se muestra en la Figura 4.7.

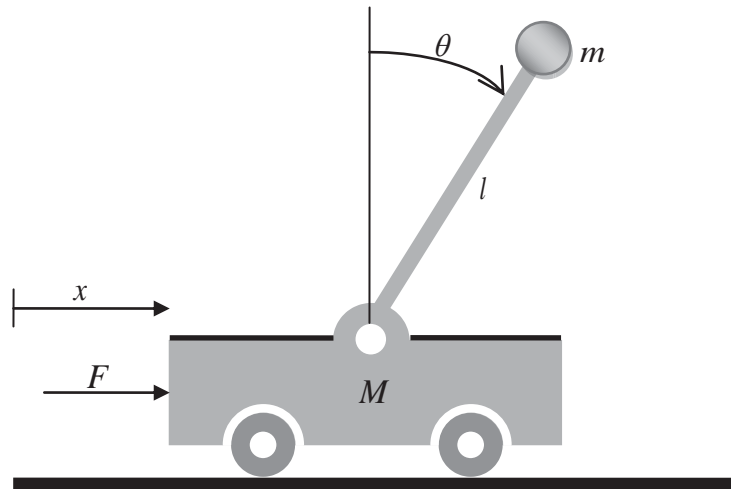


Figura 4.7: Péndulo invertido traslacional

Los valores de los parámetros considerados se muestran en la Tabla 4.1.

Tabla 4.1: Datos del péndulo invertido traslacional

Masa del carro ( $M$ )	0.5 Kg
Masa de la barra ( $m$ )	0.2 Kg
Longitud de la barra ( $l$ )	0.5 m
Fricción viscosa en las ruedas del carro ( $b$ )	0.1 Ns/m
Fricción de la barra del péndulo ( $k$ )	0.05 Nms/rad
Constante eléctrica del motor de CD ( $k_e$ )	0.15 Vs/rad
Resistencia de armadura ( $R$ )	3 $\Omega$
Radio de la rueda del carro ( $r$ )	0.02 m
Gravedad ( $g$ )	9.81 m/s <sup>2</sup>

Se considera la operación del sistema (4.23) en lazo abierto cerca de su punto de operación inestable ( $\theta = 0$ ), con una entrada de valor constante ( $u = 1$ ). Se considera que la salida  $y_2$  se ve afectada por una falla, la cual consiste en que el sensor de posición lineal se satura en una magnitud de 20. Se propone modelar la falla en forma aditiva, de manera que las ecuaciones de salida del sistema (4.23) toman la siguiente forma

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 \\ y_2 &= x_2 + f \end{aligned}$$

Para llevar a cabo la reconstrucción de la falla mediante un sistema inverso y utilizando la metodología de Zheng y Cao se procede a calcular las derivadas de las salidas, hasta tener involucrados a todos los estados y las fallas.

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 \\ y_2 &= x_2 + f \\ \dot{y}_1 &= \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{y}_2 &= \dot{x}_2 + \dot{f} = x_4 + \dot{f} \end{aligned}$$

Se observa que en las ecuaciones anteriores ya se tienen involucrados todos los estados y la falla, con lo cual se puede evaluar la existencia del sistema inverso, para ello se usa la Teorema 3.5. Para evaluar esta condición se requiere obtener los diferenciales de las salidas y de sus derivadas.

$$\begin{aligned} dy_1 &= dx_1 \\ dy_2 &= dx_2 + df \\ d\dot{y}_1 &= dx_3 \\ d\dot{y}_2 &= dx_4 + d\dot{f} \end{aligned}$$

De las ecuaciones anteriores la segunda contiene a  $df$ , con lo cual se puede despejar

$$df = dy_2 - dx_2$$

Por lo que la condición de existencia de la inversa  $F_0^* \subset X^* + Y^* + U^*$  se cumple, es decir; es posible obtener una expresión para el diferencial de la falla en términos de las salidas y estados del sistema.

Ahora se requiere calcular los espacios (diferenciales) observable y el absolutamente completamente observable.

$$\begin{aligned} O^* &= X^* \cap (F^* + Y^* + U^*) \\ Y^* + U^* &= \text{span}_K \{dx_1, dx_3\} \end{aligned}$$

$$F^* + Y^* + U^* = \text{span}_k \{dx_1, dx_2, dx_3, dx_4\}$$

Por lo que  $O^* = X^*$  y por tanto el sistema es completamente observable, por otro lado,

$$AO^* = X^* \cap (Y^* + U^*)$$

$$AO^* = \text{span}_k \{dx_1, dx_3\}$$

Por lo que de acuerdo al Teorema 3.6

$$\dim \Sigma^{-1} = \dim O^* - \dim AO^* = 2$$

Los estados del sistema inverso de orden reducido son  $(O^* \cap AO^*)^\perp$

$$\begin{aligned} z_1 &= x_2 \\ z_2 &= x_4 \end{aligned}$$

Y su dinámica es

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{z}_2 &= \dot{x}_4 = \frac{x_4 - 0.25x_3 \cos x_1 - x_3^2 \text{sen} x_1 + 9.81 \cos x_1 \text{sen} x_1}{\cos^2 x_1 - 7} \\ &\quad + x_4 (16.875 \cos^2 x_1 - 118.125) - (2.25 \cos^2 x_1 - 15.75)u \end{aligned}$$

Sustituyendo los nuevos estados, las salidas y sus derivadas, el sistema inverso de orden reducido es

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= \frac{z_2 - 0.25y_1 \cos y_1 - y_1^2 \text{sen} y_1 + 9.81 \cos y_1 \text{sen} y_1}{\cos^2 y_1 - 7} \\ &\quad + z_2 (16.875 \cos^2 y_1 - 118.125) - (2.25 \cos^2 y_1 - 15.75)u \\ f &= y_2 - z_1 \end{aligned}$$

Note que se obtiene un sistema de orden reducido cuyas entradas son las salidas del sistema original y sus derivadas y cuya salida es precisamente la falla que se desea reconstruir.

Para la simulación se considera ruido de medición Gaussiano de media  $\mu = 0$  y varianza  $\sigma^2 = 0.05$  para ambas salidas. Se propone utilizar un filtro tipo Butterworth pasa bajas de segundo orden para reducir el efecto del ruido. La función de transferencia de este filtro es

$$G(s) = \frac{39.48}{s^2 + 8.89s + 39.48}$$

La cual corresponde a una frecuencia de corte de  $F_H = 6.28$  rad/s. Las condiciones iniciales son  $(3.1416, 0, 0, 0)$ .

Las mediciones de las salidas con ruido se muestran en la Figura 4.8. En la Figura 4.9 se muestra la falla reconstruida en comparación con la falla real. Se puede apreciar que la reconstrucción prácticamente no es afectada por el ruido. Además, a pesar de que la respuesta del sistema es inestable en este punto la reconstrucción de la falla es posible antes de que las variables crezcan tanto que produzcan errores numéricos.

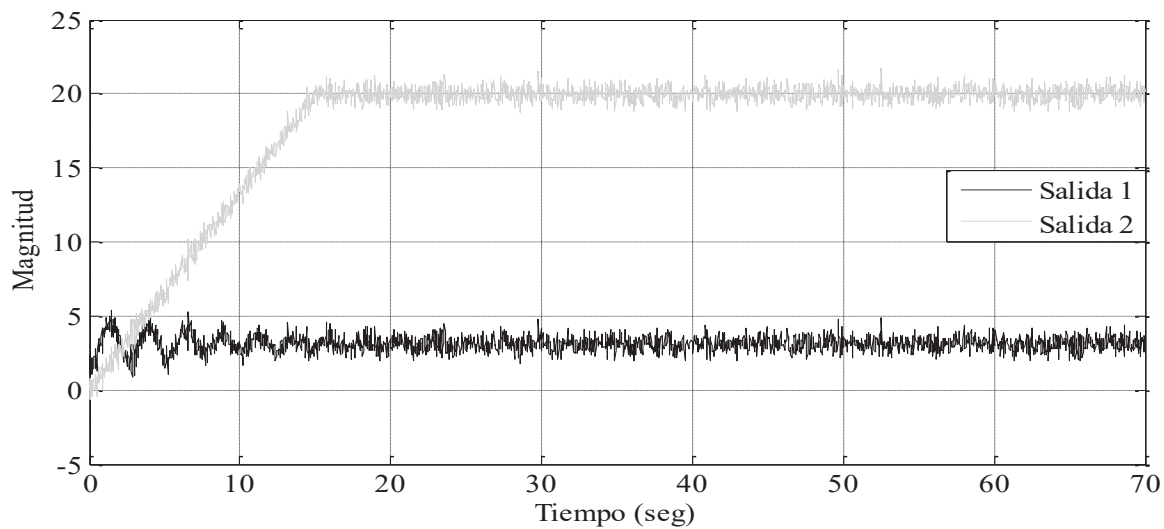


Figura 4.8: Salidas con ruido de medición, ejemplo 4.4

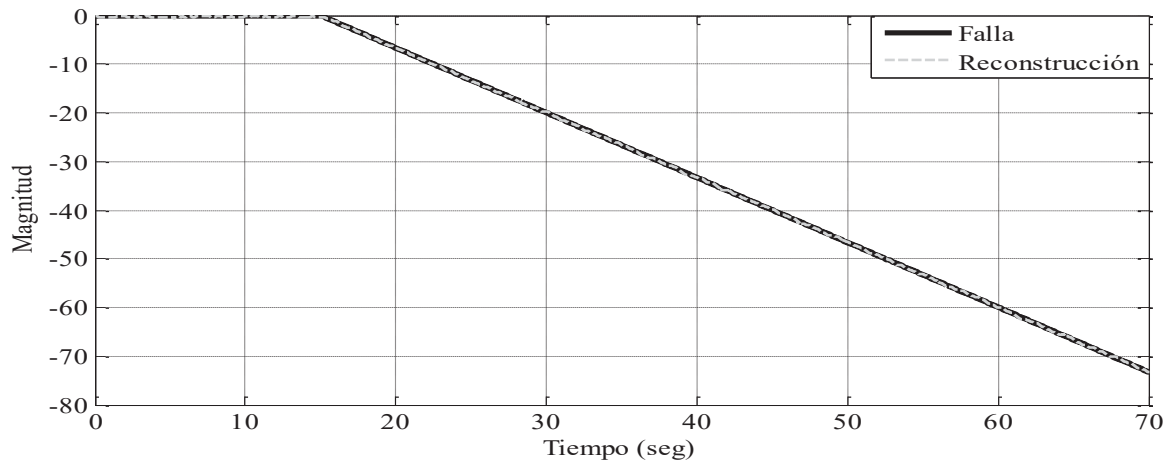


Figura 4.9: Comparación entre la falla y su reconstrucción, ejemplo 4.4

**Ejemplo 4.5.** (Metodología de Zheng y Cao, caso no lineal) *Lazo cerrado*. Se considera el mismo sistema (4.23) operando en lazo cerrado con una retroalimentación lineal de

estados de la forma  $u = -kx$  diseñada para estabilizarlo en su punto de equilibrio inestable ( $y_1 = 0$ ). Se realiza el diseño para colocar los polos del modelo linealizado a prueba y error en  $[-4 \ -4 \ -4 \ -4]$  con lo cual se requiere las ganancias siguientes

$$K = [-54 \ -9.56 \ -20.4 \ -17.34]$$

Las salidas del sistema en lazo cerrado sin fallas se muestran en la Figura 4.10, donde se puede apreciar que el péndulo se estabiliza en aproximadamente 2.25 seg.

Para este caso se considera una falla aditiva en el sensor 1, la cual consiste en que se anula su señal para  $t \geq 3$  seg, por lo que las salidas del sistema son

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + f \\ y_2 &= x_2 \end{aligned}$$

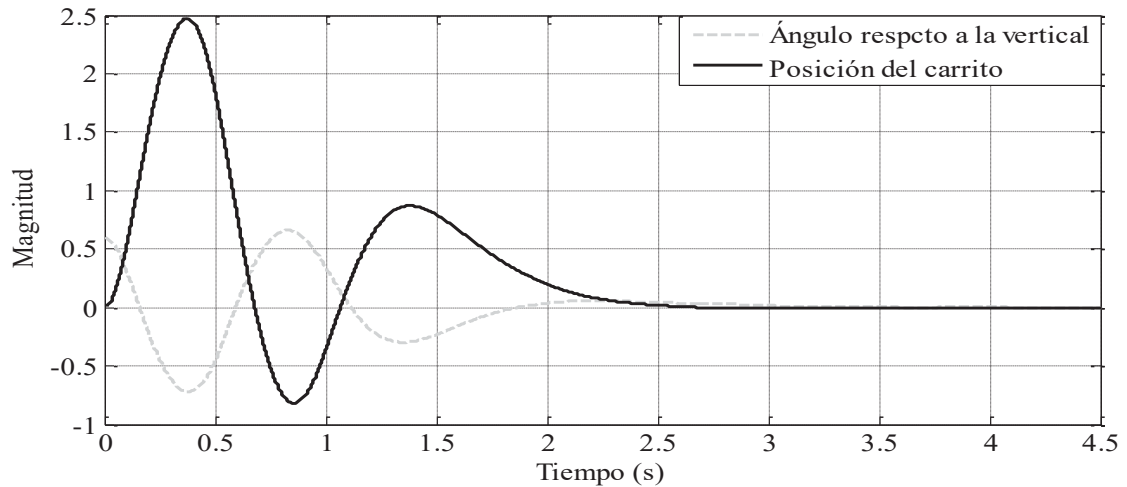


Figura 4.10: Salidas sin fallas, ejemplo 4.5

El sistema con fallas retroalimentado queda de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_4 \\ \dot{x}_3 &= \frac{\cos x_1 (\text{sen} x_1 + 1350x_1 + 239x_2 + 510x_3 + 245x_4 + 1350f)}{\cos^2 x_1 - 10} + \frac{1.75x_3 - 68.67\text{sen} x_1}{\cos^2 x_1 - 10} \\ \dot{x}_4 &= \frac{-245x_4 - x_3^2 \text{sen} x_1 - 1350x_1 - 239x_2 - 510x_3 - 1350f}{\cos^2 x_1 - 7} + \frac{\cos x_1 (9.81\text{sen} x_1 - 0.25x_3)}{\cos^2 x_1 - 7} \\ y_1 &= x_1 + f \\ y_2 &= x_2 \end{aligned} \tag{4.24}$$

Para obtener el sistema inverso se inicia derivando las salidas

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= \dot{x}_1 + \dot{f} = x_3 + \dot{f} \\ \dot{y}_2 &= \dot{x}_2 = x_4\end{aligned}$$

Se observa que ya se tienen todos los estados y la falla, con lo cual se procede a encontrar los diferenciales de las salidas y de sus derivadas

$$\begin{aligned}dy_1 &= dx_1 + df & d\dot{y}_1 &= dx_3 + d\dot{f} \\ dy_2 &= dx_2 & d\dot{y}_2 &= dx_4\end{aligned}$$

A continuación se debe averiguar si el sistema es invertible por la izquierda, para ello se utiliza el Teorema 3.5,

$$F_0^* = X^* + Y^* + U^*$$

Lo cual se cumple debido a que  $df = dy_1 - dx_1$ . A continuación se requiere obtener el espacio observable,

$$\begin{aligned}O^* &= X^* \cap (F^* + Y^* + U^*) \\ Y^* + U^* &= \text{span}_K \{dx_2, dx_4\} \\ F^* + Y^* + U^* &= \text{span}_K \{dx_1, dx_2, dx_3, dx_4\}\end{aligned}$$

Por tanto  $O^* = X^*$ , el sistema es observable. Luego se requiere encontrar el espacio completamente observable,

$$AO^* = X^* \cap (Y^* + U^*) \Rightarrow AO^* = \text{span}_K \{dx_1, dx_3\}$$

La dimensión del sistema inverso de orden reducido se calcula utilizando el Teorema 3.6.

$$\dim \Sigma^{-1} = \dim O^* - \dim AO^* = 4 - 2 = 2$$

Los estados del sistema inverso son  $(O^* \cap AO^*)^\perp$

$$\begin{aligned}z_1 &= x_1 \\ z_2 &= x_3\end{aligned}$$

y su dinámica es

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= x_3 \\ \dot{z}_2 &= \frac{\cos x_1 (\text{sen} x_1 + 1350x_1 + 239x_2 + 510x_3 + 245x_4 + 1350f)}{\cos^2 x_1 - 10} + \frac{1.75x_3 - 68.67\text{sen} x_1}{\cos^2 x_1 - 10}\end{aligned}$$

Se requiere expresar este sistema en términos de las nuevas variables de estado y de las salidas (y posiblemente de sus derivadas) del sistema original, por lo que el sistema inverso es

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= \frac{\cos z_1 (sen z_1 + 1350y_1 + 239y_2 + 510z_2 + 245\dot{y}_2)}{\cos^2 y_1 - 10} + \frac{1.75z_2 - 68.67sen z_1}{\cos^2 z_1 - 10} \\ f &= y_1 - z_1 \end{aligned}$$

Para la simulación se incluye ruido de medición Gaussiano de media  $\mu = 0$  y varianza  $\sigma^2 = 0.005$  para ambas salidas y se utiliza un filtro tipo Butterworth de segundo orden para reducir el efecto del ruido cuya función de transferencia es

$$G(s) = \frac{15790}{s^2 + 177.7s + 15790}$$

La cual corresponde a una frecuencia de corte de  $F_H = 125.66$  rad/s. Observe que se utiliza un filtro con frecuencia de corte mayor en comparación al utilizado en el ejemplo 4.4 ya que se introduce un menor retardo en la reconstrucción de la falla. Las condiciones iniciales son  $(0.6, 0, 0, 0)$ .

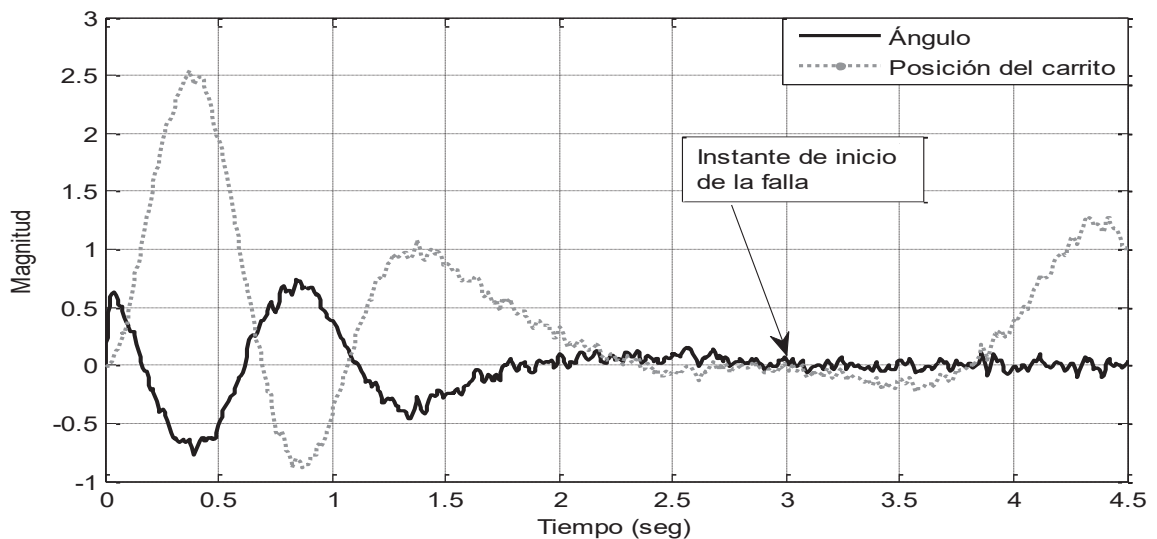


Figura 4.11: Salidas con ruido de medición, ejemplo 4.5

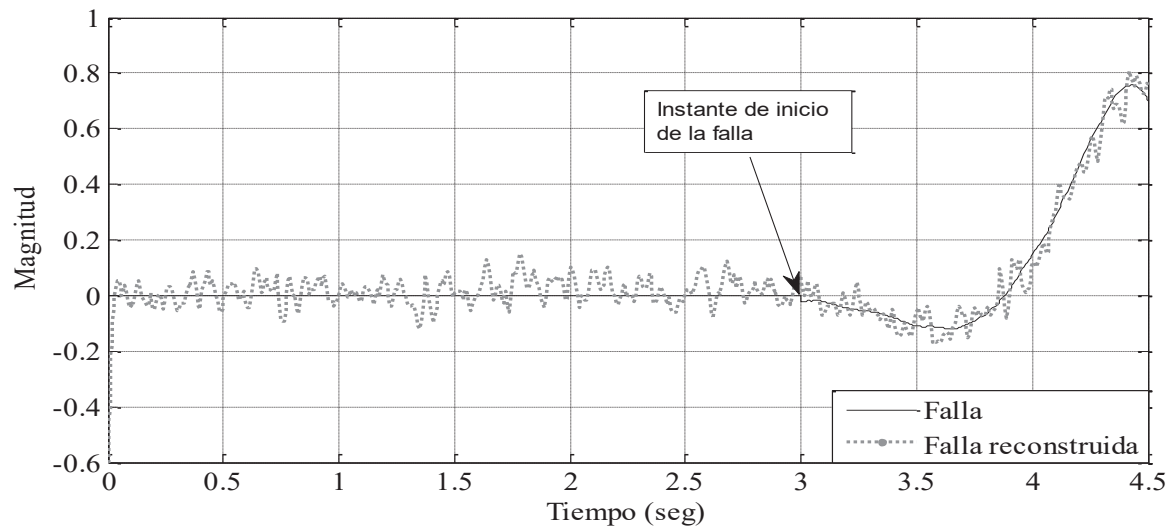


Figura 4.12: Comparación entre la falla y su reconstrucción, ejemplo 4.5

Las mediciones de las salidas con ruido se muestran en la Figura 4.11, en la cual se puede observar que a partir de la aparición de la falla en la salida  $y_1$ , el sistema comienza a salirse de control, lo cual se manifiesta en la salida  $y_2$ , la cual comienza a crecer sin límite, obsérvese que el efecto de la falla no se puede apreciar en  $y_1$  debido a que el tipo de falla considerada consiste en que el sensor da una lectura de cero aunque el valor real de  $y_1$  sea distinto de cero, a pesar de esto en la Figura 4.12 se observa que la reconstrucción de la falla se realiza de manera adecuada.

## Capítulo 5

# Diagnóstico de fallas en un sistema experimental de bola y barra

En este capítulo se presenta la descripción física de un prototipo de sistema de control de “Bola y Barra”, se desarrolla su modelado matemático utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange, ya que estas permiten obtener el modelo matemático de un sistema mecánico de una manera sencilla. Una vez que se tiene el modelo matemático se procede a realizar un estudio de fallas sobre este prototipo en sensores y en actuadores, esto utilizando la metodología propuesta basada en el trabajo presentado por Zheng y Cao en el contexto no lineal. Se describe la aplicación de esta metodología de diagnóstico de fallas en el sistema experimental en lazo cerrado, incorporando previamente una retroalimentación de estados estabilizante más una acción integral.

### 5.1 Descripción del prototipo de bola y barra

El prototipo que se utilizará para realizar el estudio de fallas se muestra en la Figura 5.1 , se puede observar que cuenta con un servomotor acoplado mecánicamente a uno de los extremos de la barra. El punto de giro de la barra es el extremo izquierdo,

sobre la barra se encuentra la bola, la cual se desplaza longitudinalmente de una manera libre.



**Figura 5.1: Prototipo físico de bola y barra**

Las dimensiones físicas que se utilizarán en el modelado del sistema se muestran en la Tabla 5.1:

**Tabla 5.1: Datos del prototipo de bola y barra**

Longitud de la barra (L)	48.3 cm
Longitud del brazo del servomotor (d)	3.1 cm
Masa de la bola (m)	0.15Kg
Masa de la barra (M)	0.21Kg
Radio de la bola (R)	0.015m

La Figura 5.2 muestra esquemáticamente el prototipo a modelar, así como la nomenclatura a utilizar.

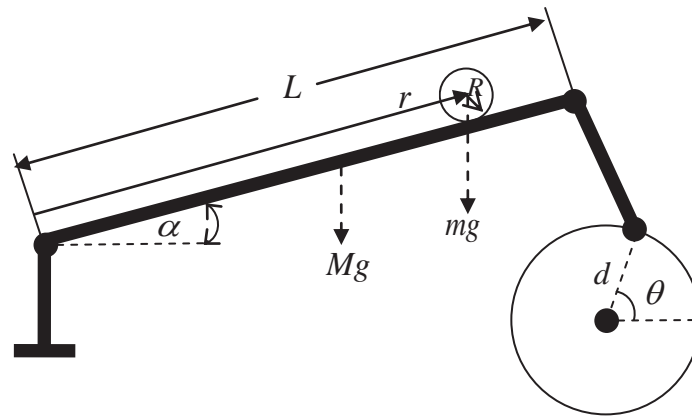


Figura 5.2: Diagrama del sistema experimental de bola y barra

## 5.2 Modelado matemático del prototipo de bola y barra

El modelado se realizará utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange (Goldstein, Poole, & Safko, 2000), para ello es necesario definir sus coordenadas generalizadas de acuerdo a sus grados de libertad.

Para este caso se tienen 2 grados de libertad y las variables generalizadas son  $\alpha$  y  $r$ .  $\alpha$  es la variable que describe el movimiento angular de la barra y  $r$  se utiliza para describir el movimiento lineal de la bola a lo largo de la barra. Las ecuaciones de Euler-Lagrange se obtienen a partir del Lagrangiano del sistema, el cual se calcula como sigue

$$L = T - P \quad (5.1)$$

Donde  $L$  es el Lagrangiano del sistema,  $T$  es la energía cinética y  $P$  es la energía potencial.

La energía cinética de la barra es,

$$T_{Barra} = \frac{1}{2} J_1 \dot{\alpha}^2$$

Donde  $J_1 = \frac{1}{4} ML^2$

La energía cinética de la bola es,

$$T_{Bola} = \frac{1}{2}(mr^2)\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}J_2\omega^2 \text{ donde } J_2 = \frac{2}{5}mR^2 \text{ y } \dot{r} = R\omega$$

$$T_{Bola} = \frac{1}{2}(mr^2)\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}m(R\omega)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mR^2\right)\omega^2$$

$$T_{Bola} = \frac{1}{2}(mr^2)\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}mR^2\omega^2 + \frac{1}{5}mR^2\omega^2 = \frac{1}{2}(mr^2)\dot{\alpha}^2 + \frac{7}{10}mR^2\omega^2$$

$$T_{Bola} = \frac{1}{2}\left(mr^2\dot{\alpha}^2 + \frac{7}{5}mR^2\omega^2\right)$$

Por lo tanto, la energía cinética total del sistema es,

$$T = T_{Bola} + T_{Barra} = \frac{1}{2}J_1\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}\left(mr^2\dot{\alpha}^2 + \frac{7}{5}mR^2\omega^2\right) = \frac{1}{2}\left((J_1 + mr^2)\dot{\alpha}^2 + \frac{7}{5}mR^2\omega^2\right)$$

La energía potencial de la barra considerando su masa concentrada en el centro de la barra

$$P_{Barra} = \frac{1}{2}MgL\text{sen}\alpha$$

La energía potencial de la bola es,

$$P_{Bola} = mgr\text{sen}\alpha$$

Por lo tanto la energía potencial total del sistema es,

$$P = P_{Barra} + P_{Bola} = mgr\text{sen}\alpha + \frac{1}{2}MgL\text{sen}\alpha = \left(mgr + \frac{1}{2}MgL\right)\text{sen}\alpha$$

El Lagrangiano se obtiene utilizando (5.1)

$$L = \frac{1}{2}\left((J_1 + mr^2)\dot{\alpha}^2 + \frac{7}{5}mR^2\omega^2\right) - \left(mgr + \frac{1}{2}MgL\right)\text{sen}\alpha$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange para la variable  $\alpha$  son

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \alpha} = \tau$$

Donde  $\tau$  es el par aplicado a la barra por el mecanismo impulsado por el servomotor.

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = -\left(mgr + \frac{1}{2}LMg\right)\cos\alpha$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} = (J_1 + mr^2)\dot{\alpha}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \right) = \frac{d}{dt} \left[ (J_1 + mr^2) \dot{\alpha} \right] = (J_1 + mr^2) \ddot{\alpha} + 2mr\dot{r}\dot{\alpha}$$

Por lo que la primera ecuación de E-L es

$$(J_1 + mr^2) \ddot{\alpha} + 2mr\dot{r}\dot{\alpha} + \left( mgr + \frac{1}{2} LMg \right) \cos \alpha = \tau \quad (5.2)$$

Por otro lado, las ecuaciones de Euler-Lagrange para la variable  $r$  son

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\alpha}^2 - mg \operatorname{sen} \alpha$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{7}{5} m\dot{r}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) = \frac{7}{5} m\ddot{r}$$

$$\frac{7}{5} m\ddot{r} - mr\dot{\alpha}^2 + mg \operatorname{sen} \alpha = 0$$

Por lo que la segunda ecuación de E-L es

$$\frac{7}{5} \ddot{r} - r\dot{\alpha}^2 + g \operatorname{sen} \alpha = 0 \quad (5.3)$$

Considerando que en la implementación se utilizará un servomotor el cual controla el par  $\tau$  para lograr posicionar el ángulo  $\alpha$  a través del ángulo  $\theta$  y el mecanismo de acoplo a la barra se puede despreciar la ecuación (5.2) y el sistema se puede modelar utilizando solamente la ecuación (5.3) tomando como entrada el ángulo  $\theta$ .

Debido a que  $u = \theta$ , se debe encontrar la relación entre  $\alpha$  y  $\theta$ , esto se puede deducir analizando el mecanismo que mueve la barra mostrado en la Figura 5.3 como sigue.

Hacemos la siguiente aproximación, considerando que  $d \ll L$ :

$$\operatorname{arc} \alpha = \operatorname{arc} \theta$$

Es decir,  $\alpha L = \theta d$ . Despejando  $\alpha$ , obtenemos

$$\alpha = \frac{d}{L} \theta$$

O bien,

$$\alpha = k\theta \quad \text{donde } k = \frac{d}{L} = 0.06418$$

Las constantes  $d$  y  $L$  están dadas en la Tabla 5.1 para el sistema experimental utilizado.

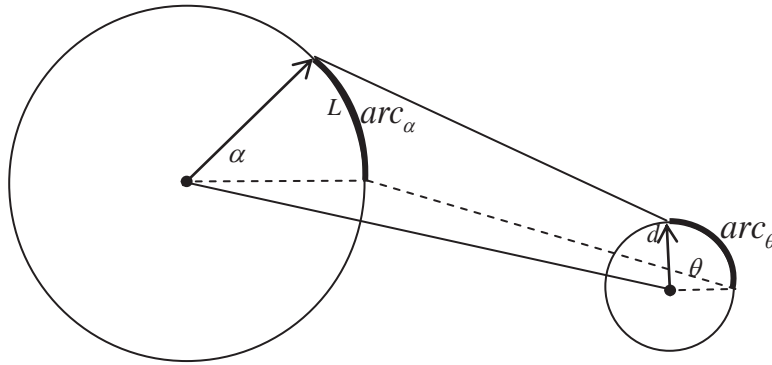


Figura 5.3: Relación entre la posición del servomotor y la posición de la barra

Por tanto la ecuación (5.3) se convierte en,

$$\frac{7}{5}\ddot{r} - rk^2\dot{\theta}^2 + g\text{sen}k\theta = 0$$

y como  $\theta = u$ , se tiene

$$\frac{7}{5}\ddot{r} - rk^2\dot{u}^2 + g\text{sen}ku = 0$$

Se definen las variables de estado y la salida como

$$x_1 = r \Rightarrow x_2 = \dot{x}_1 = \dot{r}$$

$$y = x_1$$

El modelo en espacio de estado es el siguiente

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{5}{7}(k^2 x_1 \dot{u}^2 - g\text{sen}ku) \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

Aproximando  $\dot{u} \approx 0$  debido a que la velocidad angular de la barra es muy pequeña se tiene el modelo simplificado

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 \\
 \dot{x}_2 &= -\frac{5g}{7} \operatorname{sen}ku \\
 y &= x_1
 \end{aligned}
 \tag{5.4}$$

Donde  $\frac{5g}{7} \approx 7$  y  $k = 0.06418$ .

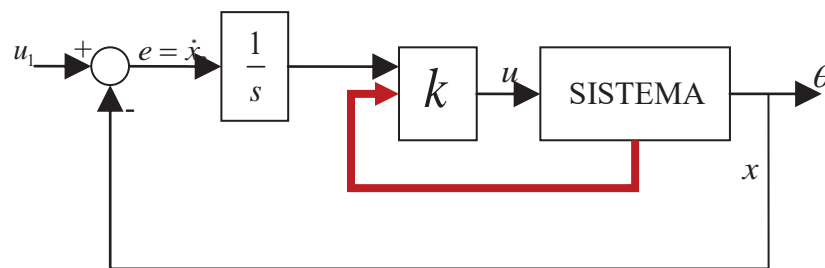
Por lo que el modelado matemático para el sistema experimental de bola y barra queda representado por el modelo en espacio de estado (5.4).

### 5.3 Control del prototipo de bola y barra

Se requiere operar el sistema en lazo cerrado aplicando una retroalimentación lineal de estados de la forma  $u = -Kx = -k_1x_1 - k_2x_2 - k_3x_3$  y además se desea incorporar una acción integral para eliminar el error de estado estable, por lo que el modelo en lazo cerrado incluyendo la acción integral es el siguiente:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 \\
 \dot{x}_2 &= -7 \operatorname{sen} \left[ k \left( -k_1x_1 - k_2x_2 - k_3x_3 \right) \right] \\
 \dot{x}_3 &= u_1 - x_1 \\
 y &= x_1
 \end{aligned}
 \tag{5.5}$$

La Figura 5.4 muestra esquemáticamente la forma en la que se incluye la acción integral y la retroalimentación de estados



**Figura 5.4: Retroalimentación lineal de estados incluyendo una acción integral**

Para ubicar los polos se procedió a prueba y error en el prototipo físico en donde las ganancias se obtuvieron con ayuda de Matlab<sup>®</sup>. Los polos encontrados son los siguientes:

$$Polos = [-1 \quad -1 \quad -1.5]$$

Para lo cual se requieren las siguientes ganancias

$$K = [-8.8496 \quad -7.7434 \quad 3.3186]$$

La Figura 5.5 muestra la respuesta en simulación del sistema utilizando las ganancias anteriores, la referencia es 0.2 rad y condiciones iniciales cero. En ella se puede apreciar que se alcanza la referencia y no existe error de estado estable.

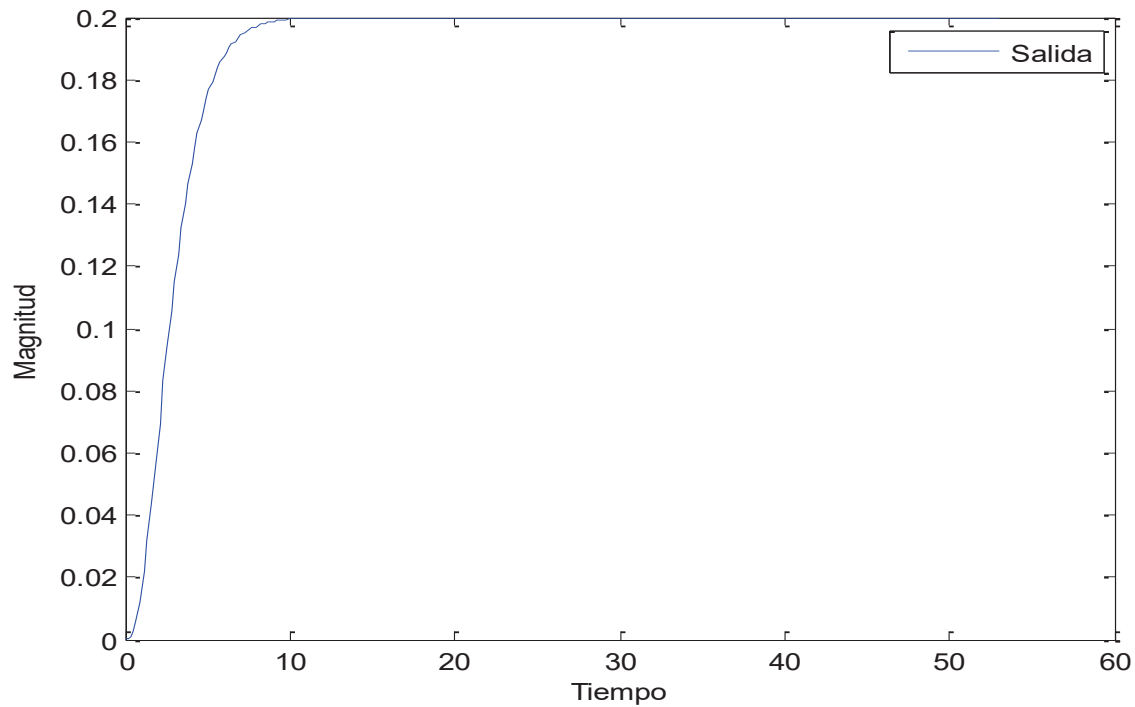


Figura 5.5: Respuesta en simulación del sistema.

## 5.4 Fallas en actuadores

En este caso se estudiará una falla en el actuador modelada de manera aditiva, por lo que el sistema (5.5) se convierte en

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -7 \operatorname{sen} [k(-k_1 x_1 - k_2 x_2 - k_3 x_3)] + f \\ \dot{x}_3 &= u_1 - x_1 \\ y &= x_1 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Para aplicar la metodología de Zheng y Cao se procede a derivar la salida

$$\dot{y} = \dot{x}_1 = x_2$$

$$\ddot{y} = \dot{x}_2 = -7 \operatorname{sen} \left[ k(-k_1 x_1 - k_2 x_2 - k_3 x_3) \right] + f$$

Al llegar a la segunda derivada se observa que ya se tienen involucrados a los tres estados y a la falla. A continuación, se obtienen los diferenciales de las expresiones anteriores

$$dy = dx_1$$

$$d\dot{y} = dx_2$$

$$d\ddot{y} = -7 \cos \left[ k(-k_1 x_1 - k_2 x_2 - k_3 x_3) \right] \left[ k(-k_1 dx_1 - k_2 dx_2 - k_3 dx_3) \right] + df$$

Una vez que se tienen las derivadas necesarias de la salida y sus respectivos diferenciales, se procede a evaluar la condición de invertibilidad,

$$F_0^* \subset X^* + Y^*$$

$$df = d\ddot{y} + 7 \cos \left[ k(-k_1 x_1 - k_2 x_2 - k_3 x_3) \right] \left[ k(-k_1 dx_1 - k_2 dx_2 - k_3 dx_3) \right] \quad (5.7)$$

En (5.7) se puede apreciar que la falla se puede expresar en términos de los estados y de la salida del sistema, por lo que se cumple la condición de invertibilidad.

A continuación se procede a calcular los espacios Observable y Completamente absolutamente observable como sigue

$$O^* = X^* \cap (F^* + Y^*)$$

Calculando  $Y^*$

$$Y^* = \operatorname{span}_K \{dx_1, dx_2\} \text{ y } Y^* + F^* = \operatorname{span}_K \{dx_1, dx_2, dx_3\}$$

Por lo que  $O^* = X^*$ , es decir el sistema es observable. Calculando ahora  $AO^*$

$$AO^* = X^* \cap Y^* = \operatorname{span}_K \{dx_1, dx_2\}$$

La dimensión del sistema inverso es,

$$\dim \sum^{-1} = \dim O^* - \dim AO^* = 3 - 2 = 1$$

Por lo que los estados del sistema inverso son  $(O^* \cap AO^*)^\perp$

$$z_1 = x_3$$

y su dinámica es,

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= u_1 - y \\ f &= \ddot{y} + 7 \operatorname{sen} \left[ k(-k_1 y - k_2 \dot{y} - k_3 x_3) \right] \end{aligned}$$

La implementación de la falla en el sistema real se hace directamente sobre la entrada, es decir,

$$u = -kx + u_1 + f$$

En la Figura 5.6 se muestra la comparación entre los resultados obtenidos en simulación y mediciones reales sobre el sistema. Se puede apreciar que una vez que el transitorio ha desaparecido en la falla reconstruida esta no llega a cero como era de esperarse sino que adquiere un valor negativo, esto se puede deber a errores de modelado o bien a errores en los parámetros.

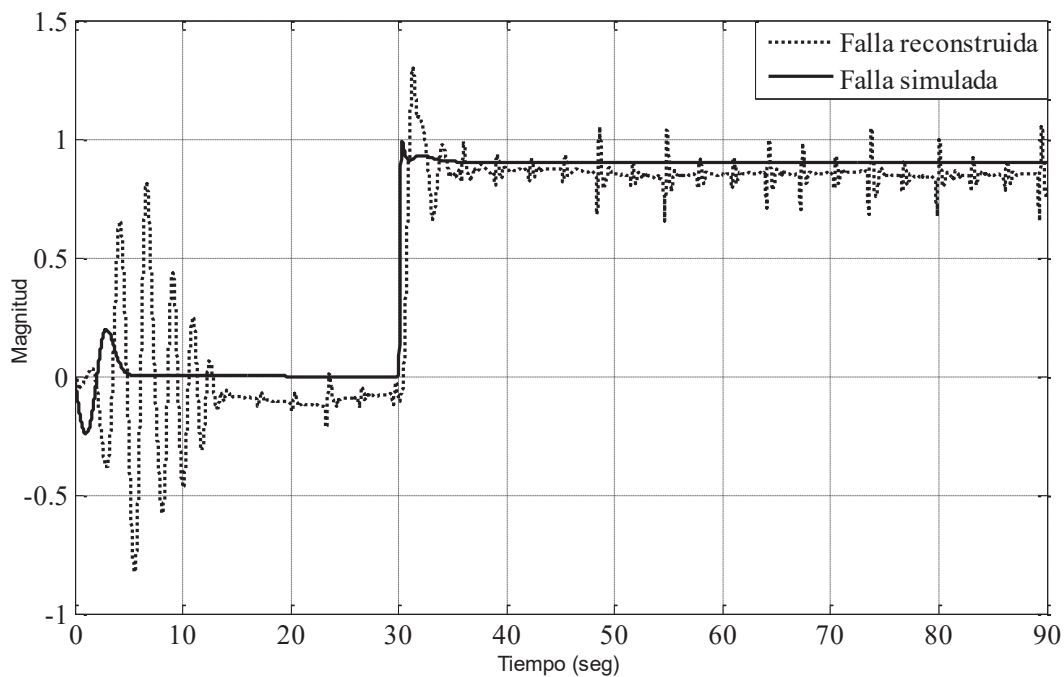


Figura 5.6: Comparación entre la falla reconstruida sobre el sistema real y la falla reconstruida con datos simulados.

## 5.5 Fallas en sensores

Planteando el problema ahora para la detección de fallas en sensores de la siguiente manera,

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= -7\text{sen}\left[k(-k_1x_1 - k_1f - k_2x_2 - k_3x_3)\right] \\
\dot{x}_3 &= u_1 - x_1 \\
y &= x_1 + f
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Derivando la salida,

$$\begin{aligned}
\dot{y} &= \dot{x}_1 + \dot{f} = x_2 + \dot{f} \\
\ddot{y} &= \dot{x}_2 + \ddot{f} = -7\text{sen}\left[k(-k_1x_1 - k_1f - k_2x_2 - k_3x_3)\right] + \ddot{f}
\end{aligned}$$

En las derivadas anteriores ya se tiene involucrados a todos los estados y a la falla, ahora se calculan los diferenciales de estas derivadas,

$$\begin{aligned}
dy &= dx_1 + df \\
d\dot{y} &= dx_2 + d\dot{f} \\
d\ddot{y} &= -7\cos\left[k(-k_1x_1 - k_1f - k_2x_2 - k_3x_3)\right]\left[k(-k_1dx_1 - k_1df - k_2dx_2 - k_3dx_3)\right] + d\ddot{f}
\end{aligned}$$

A continuación se evalúa la condición de invertibilidad

$$\begin{aligned}
F_0^* &\subset X^* + Y^* + U^* \\
df &= dy - dx_1
\end{aligned} \tag{5.9}$$

En (5.9) se puede observar que el diferencial de la falla se puede expresar en términos de los diferenciales de la salida y de los estados, por lo que se cumple la condición de invertibilidad.

A continuación se procede a calcular los espacios observable y completamente observable como sigue

$$O^* = X^* \cap (V^* + Y^* + U^*)$$

Calculando  $Y^*$

$$Y^* = \text{span}_K \{\emptyset\}$$

y

$$Y^* + V^* + U^* = \text{span}_K \{dx_1, dx_2, dx_3\}$$

Por lo que  $O^* = X^*$ , es decir el sistema es observable

Calculando ahora  $AO^*$

$$AO^* = X^* \cap (Y^* + U^*) = \text{span}_K \{\emptyset\}$$

La dimensión del sistema inverso es,

$$\dim \Sigma^{-1} = \dim O^* - \dim AO^* = 3 - 0 = 3$$

Por lo que los estados del sistema inverso son  $(O^* \cap AO^*)^\perp$

$$z_1 = x_1, z_2 = x_2, z_3 = x_3$$

Por tanto el sistema inverso es,

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= -7 \text{sen} [k(-k_1 y - k_2 z_2 - k_3 z_3)] \\ \dot{z}_3 &= u_1 - z_1 \\ f &= y - z_1 \end{aligned} \quad (5.10)$$

Hasta aquí fue posible obtener el sistema inverso por la izquierda para el prototipo de bola y barra, sin embargo; la reconstrucción de la falla no se puede llevar a cabo ya que este sistema inverso es inestable, esto se puede demostrar linealizando el sistema (5.10) en el punto de operación  $(r, 0, 0)$  como sigue,

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7kk_2 & 7kk_3 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 7kk_1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ y \end{bmatrix} \\ f &= [-1 \quad 0 \quad 0]z + [0 \quad 1] \begin{bmatrix} u_1 \\ y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores para la matriz A y analizando sus valores propios se tiene que,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3.47 & 1.48 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_1 = 0.0576 + 0.6399i, \lambda_2 = 0.0576 - 0.6399i, \lambda_3 = -3.5851$$

Con lo cual se puede ver que este sistema inverso es inestable y por tanto no se puede llevar a cabo una reconstrucción correcta en la aplicación física, ya que cualquier

variación en los parámetros o dinámicas no modeladas del sistema provocan que la salida del sistema inverso crezca sin límite.

## 5.6 Fallas en sensores y en actuadores

Planteando el problema ahora para la detección de fallas tanto en actuadores como en sensores de la siguiente manera,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -7\text{sen}\left[k(-k_1x_1 - k_1f - k_2x_2 - k_3x_3)\right] + g \\ \dot{x}_3 &= u_1 - x_1 \\ y &= x_1 + f\end{aligned}$$

Donde  $f$  y  $g$  son las señales de falla en sensores y actuadores respectivamente.

Derivando la salida,

$$\begin{aligned}\dot{y} &= \dot{x}_1 + \dot{f} = x_2 + \dot{f} \\ \ddot{y} &= \dot{x}_2 + \ddot{f} = -7\text{sen}\left[k(-k_1x_1 - k_1f - k_2x_2 - k_3x_3)\right] + g + \ddot{f}\end{aligned}$$

En las derivadas anteriores ya se tienen involucrados a todos los estados y a la falla, ahora se calculan los diferenciales de estas derivadas,

$$\begin{aligned}dy &= dx_1 + df \\ d\dot{y} &= dx_2 + d\dot{f} \\ d\ddot{y} &= -7\cos\left[k(-k_1x_1 - k_1f - k_2x_2 - k_3x_3)\right]\left[k(-k_1dx_1 - k_1df - k_2dx_2 - k_3dx_3)\right] \\ &\quad + dg + d\ddot{f}\end{aligned}$$

A continuación se evalúa la condición de invertibilidad

$$F_0^* \subset X^* + Y^* + U^*$$

$$df = dy - dx_1$$

$$dg = d\ddot{y} + 7\cos\left[k(-k_1x_1 - k_1f - k_2x_2 - k_3x_3)\right]\left[k(-k_1dx_1 - k_1df - k_2dx_2 - k_3dx_3)\right] - d\ddot{f}$$

Se puede observar que la condición de invertibilidad para la falla en sensor se cumple, sin embargo; para la falla en el actuador no se cumple, ya que ésta queda en términos de

la falla en los sensores. Por lo tanto, el sistema **NO es invertible por la izquierda respecto a las fallas**. Esta conclusión se hubiera podido anticipar desde el principio, ya que en este caso  $l = 2$  y  $p = 1$  por lo tanto  $p < l$  y no se cumple la condición necesaria de diagnosticabilidad.

# Capítulo 6

## Conclusiones y trabajos futuros

En este capítulo se presentan las conclusiones de cada uno de los capítulos de esta tesis así como algunas sugerencias para trabajos futuros de algunos tópicos que se relacionan con este tema y que complementarían este trabajo de investigación.

### 6.1 Conclusiones

Se presentó un panorama amplio sobre el problema de FDI y como se ha atacado desde diferentes enfoques, así como también se mencionó el enfoque de inversión por la izquierda de sistemas y su aplicación para atacar este problema.

Se propone una nueva metodología basada en la función de transferencia del sistema y dos mas en espacio de estado para la obtención de sistemas inversos por la izquierda respecto a las fallas una de ellas basada en el algoritmo de Silverman y la otra basada en la metodología de Zheng y Cao, esto para el caso lineal. Para el caso no lineal también se propone una nueva técnica basada en la metodología de Zheng y Cao, en ambos casos tanto para el sistema lineal como el no lineal basados en esta metodología se logró obtener inversas de orden reducido y con un grado de complejidad mucho menor comparado con los enfoques en función de transferencia y los basados en la metodologías de Silverman y Hirschorn.

En la mayoría de los esquemas para FDI basado en técnicas de inversión se requieren la estimación de derivadas tanto de entradas como de las salidas medidas, por tanto, es muy importante hacer una buena elección del derivador que se va a utilizar, ya que dependiendo del ruido de medición se podrán tener problemas por la amplificación de éste por los derivadores. Es importante seleccionar un derivador que atenúe dicho ruido para no ocasionar problemas en la reconstrucción de las fallas. De los derivadores estudiados el que mejores resultados da ante la presencia de ruido es el derivador lineal de segundo orden, para ello es necesario ajustar el valor del parámetro  $\alpha$ . El bloque de derivación utilizado por Simulink es poco recomendable para aplicaciones prácticas donde existe ruido de medición, ya que tiende a actuar como un derivador ideal, favoreciendo la amplificación del ruido a la salida de éste. En cuanto al derivador lineal de primer orden también es poco útil ante la presencia de ruido, ya que para frecuencias mayores a  $1/T$  tiende a actuar como un amplificador de ganancia  $1/T$ .

La nueva metodología propuesta para la inversión de sistemas no lineales basada en el trabajo presentado por Hirschorn solo se puede aplicar a casos particulares y de orden pequeño. Para el caso de sistemas de orden grande este procedimiento es muy difícil de aplicar, ya que la representación matemática que se obtiene para el sistema inverso en cada paso es muy difícil de manipular por la cantidad de operaciones matemáticas que se tienen que realizar, además de que la estructura original se pierde.

La aplicación que se hizo sobre el prototipo físico de bola y barra fue muy interesante, ya que se logro aplicar la metodología propuesta para sistemas no lineales basada en el trabajo presentado por Zheng y Cao para llevar a cabo un estudio de fallas en sensores y actuadores. En esta aplicación se enfrentaron problemas tales como la del control del prototipo, mismo que se logró resolver adecuadamente utilizando una retroalimentación lineal de estados con una acción integral la cual ayudó a eliminar el error de estado estable.

En general se pudo verificar que las metodologías analizadas para la obtención de sistemas inversos por la izquierda respecto a entradas conocidas pueden ser adaptadas para la obtención del sistema inverso respecto a entradas desconocidas o fallas que actúan sobre el sistema ya sea lineal o no lineal. Y en algunos casos inclusive se puede

obtener una inversa de orden reducido, sin embargo; en ninguna de las metodologías propuestas se pudo garantizar la estabilidad del sistema inverso.

La metodología basada en el trabajo de Zheng y Cao para la obtención de sistemas inversos por la izquierda respecto a las fallas tanto para el caso lineal como para el no lineal, proporciona un procedimiento sencillo en comparación con las otras metodologías propuestas y además tiene la ventaja de que se obtienen inversas de orden reducido. Además al utilizar esta metodología se obtuvo una condición para la observabilidad algebraica y esta es que cuando se obtiene que el orden del sistema inverso es cero y además se ha comprobado que sí existe la inversa, entonces las fallas se reconstruyen algebraicamente, es decir; no es necesario aplicar un sistema inverso ya que las expresiones para las fallas quedan en término solamente de entradas y salidas del sistema original así como de derivadas respecto del tiempo de éstas, las cuales se consideran como información conocida.

## 6.2 Trabajos futuros

- Obtención de sistemas inversos estables.- Debido a que en ninguna de las metodologías analizadas para la obtención del sistema inverso por la izquierda respecto a las fallas se pudo garantizar la estabilidad de dicho sistema, queda abierta esta posibilidad como un tema de estudio futuro para complementar este trabajo de investigación.
- Aplicación casos reales de las diferentes técnicas de inversión estudiadas.- En la implementación de cada una de las técnicas de inversión estudiadas pueden surgir problemas que se pueden verificar en aplicaciones físicas reales y cuyas causas pueden ser estudiadas a fondo, entre ellas se pueden mencionar el ruido de medición y los errores de modelado.
- Aplicación de sistemas inversos para la estimación de parámetros o perturbaciones.- Se tiene la hipótesis de que se puede plantear un modelo matemático para estimar tanto parámetros como perturbaciones que actúan sobre el sistema los cuales pueden ser estimados con la ayuda de sistemas inversos.

- Estudio de sistemas inversos por la derecha.- En éste trabajo sólo se mencionó de manera general a los sistemas inversos por la derecha, sin embargo; éstos tienen muchas aplicaciones prácticas las cuales se pueden estudiar a fondo y en su caso lograr alguna aportación.

## Apéndice A

**Inversión de sistemas no lineales:  
aplicación al diagnóstico de fallas en  
un péndulo invertido.**

Apéndice A. Inversión de sistemas no lineales: aplicación al diagnóstico de fallas en un péndulo invertido

Pag. 1 Artículo ROPEC

Pag. 2 Artículo ROPEC

Apéndice A. Inversión de sistemas no lineales: aplicación al diagnóstico de fallas en un péndulo invertido

Pag. 3 Artículo ROPEC

Pag. 4 Artículo ROPEC



Pag. 6 Artículo ROPEC

Apéndice A. Inversión de sistemas no lineales: aplicación al diagnóstico de fallas en un péndulo invertido

-

## Apéndice B.

# **Fault Diagnosis in Linear Multivariable Systems, an Inversion Approach.**



Pag. 2 Artículo CERMA



Pag. 4 Artículo CERMA



Pag. 6 Artículo CERMA



# Bibliografía

Bakiotis, C., Raymond, Rault, J. a., & A. (1979). Parameter and discriminant analysis for jet engine mechanical state diagnosis. *IEEE Conf. on Decision & Control*. Fort Lauderdale, USA.

Balas, G., Bokor, J., & Szabó, Z. (2002). Failure detection for LPV systems- a geometric approach. *Proceedings of the American Control Conference*, (pp. 4421-4426). Anchorage, AK.

Basseville, M. (1988). Detecting changes in signals and systems - a survey. *Automatica* 24(3) , 309-326.

Basseville, M., & Nikiforov, I. V. (1993). *Detection of Abrupt Changes: Theory and Application, Information and System Science*. New York: Prentice Hall.

Beard, R. V. (1971). *Failure Accommodation in Linear System Through Self Reorganization, PhD Thesis*. Massachusetts Institute of Technology, Mass., USA.

Chen, J., & Patton, R. J. (1999). *Robust model-based fault diagnosis for dynamic systems*. Kluwer Academic Publishers.

Chen, J., Zhang, H. G., & Zhang, H. Y. (1990). A modified separated-bias estimation approach to the detection and estimation of failures in linear systems. *XI IFAC World Congress*, (p. Preprints of 1990). Tallin.

Chen, R., & Speyer, J. L. (1999). Optimal Stochastic Multiple-Fault Detection Filter. *Conference on Decision & Control*, (pp. 4965-4970). Phoenix, Arizona USA.

Chow, E. Y., & Willsky, A. S. (1984). Analytical redundancy and the design of robust detection systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.* AC-29(7) , 603-614.

Chow, E. Y., & Willsky, A. S. (1980). Issues in the development of a general algorithm for reliable failure detection. *Proc. of the 19th Conf. on Decision & Control*. Albuquerque, NM.

Chung, W. H., & Speyer, J. L. (1998). A game theoretic fault detection filter. *IEEE Trans. Automat. Contr.* 43(2) , 143-161.

Clark, R. N. (1978b). A simplified instrument failure detection scheme. *IEEE Trans. Aero. & Electron. Syst AES-14* , 558-563.

Clark, R. N. (1978a). Instrument fault detection. *IEEE Trans. Aero. & Electron. Syst. AES-14* , 456-465.

Clark, R. N. (1979). The dedicated observer approach to instrument failure detection. *Proc. of The 18th IEEE Conf. on Decision & Control*, (pp. 237-241). Fort Lauderdale, Fla.

Clark, R. N., Fosth, D. C., & Walton, V. M. (1975). Detecting instrument malfunctions in control systems. *IEEE Trans. Aero. & Electron. Syst. AEST11* , 465-473.

Commault, C., Dion, M. J., Sename, O., & Motyeian, R. (2002). Observer-based Fault Detection and Isolation for Structured Systems. *IEEE Trans. on Automat. Contr.* 47(12) , 2074-2079.

Da, R., & Lin, C. F. (1995). A new failure-detection approach and its application to GPS autonomous integrity monitoring. *IEEE Trans. Aero. & Electron. Syst.* 31(1) , 499-506.

Dapeng, Y., Chunliang, Z., & Paul, P. L. (2009). Fault Diagnosis by an Observer-Based Fuzzy Decision System. Hangzhou, Zhejiang, China.

Edelmayer, A., Bokor, J., & Szabó, Z. (2003). A geometric view on inversion-based detection filter design in nonlinear systems. *IFAC*, (pp. 783-788).

Edelmayer, A., Bokor, J., Szabó, Z., & Szigeti, F. (2004). Input reconstruction by means of system inversion: a geometric approach to fault detection and isolation in nonlinear systems. *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.* 14(2) , 189-199.

Edelmayer, A., Vera, C. E., & Szigeti, F. (2002). A Geometric view on inversion based FDI in linear systems. *Proceedings of the 10th Mediterranean Conference on Control and Automation*. Lisbon, Portugal.

Enns, D., Bugajski, D., Hendrick, R., & Stein, G. (1994). Dynamic inversion: An evolving methodology for flight control design. *Int. Journal of Control* 59(1) , 71-91.

Fliess, M. (1986). A note on the invertibility of nonlinear input-output differential systems. *Systems Control Lett.*, 8 , 147-151.

Fliess, M., & Join, C. (2003). An algebraic approach to fault diagnosis for linear systems. *Proc. CESA Conf.*, (pp. 1-8).

Fliess, M., Join, C., & Sira-Ramírez, H. (2007). Non-linear estimation is easy. *Int. J. Modelling Identification and Control* 4, 1 (2008) 12-27, (pp. 1-21).

Frank, P. M. (1990). Fault diagnosis in dynamic system using analytical and knowledge based redundancy - a survey and some new results. *Automatica* 26(3) , 459-474.

Frank, P. M. (1987). Fault diagnosis in dynamic system via state estimation - a survey, in Tzafestas, Singh and Schmidt (eds). *System Fault Diagnostics, Reliability & Related Knowledge-based Approaches* , 35-98.

Geiger, G. (1982). Monitoring of an electrical driven pump using continuous time parameter estimation methods. *Proc. the 6th IFAC Sympo. on Identification and Parameter Estimation*. Pergamon Press, Washington.

Gertler, J. (1998). *Fault Detection and Diagnosis in Engineering Systems*. New York: Marcel Dekker.

Gertler, J. (1997). Fault detection and isolation using parity relations. *Contr. Eng. Practice* 5(5) , 653-661.

Gertler, J. (1988). Survey of model-based failure detection and isolation in complex plants. *IEEE Contr. Syst. Mag.* 8(6) , 3-11.

Goldstein, H., Poole, C., & Safko, J. (2000). *Classical Mechanics*. New York: Addison Wesley.

Guarino, C., & Piazzzi, A. (2002). A servo control system design using dynamic inversion. *Cont. Eng. Practice* 10 , 847-855.

Guo, L., & Wang, H. (2004). Fault Detection and Diagnosis for General Stochastic Systems Using B-Spline Expansions and Nonlinear Observers. *43rd IEEE Conference on Decision and Control*, (pp. 4782-4787). Atlantis, Paradise Island, Bahamas.

Hirschorn, R. M. (1979). Invertibility of Multivariable Nonlinear Control Systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.* AC-24(6) , 855-865.

Ibrir, S. (2003). Online Exact Differentiation and Notion of Asymptotic Algebraic Observers. *IEEE Trans. Automat. Contr.* vol 48, No 11 , 2055-2060.

Isermann, R. (1991a). Fault diagnosis of machine via parameter estimation and knowledge processing - tutorial paper. *Preprints of IFAC/IMACS Sympo.: SAFEPROCESS'91*, (pp. 121-133). Baden, Baden.

Isermann, R. (1984). Process fault detection based on modelling and estimation methods: A survey. *Automatica* 20(4) , 387-404.

Isermann, R. (1997). Supervision, fault-detection and fault-diagnosis methods - an introduction. *Contr. Eng. Practice* 5(5) , 639-652.

Isermann, R., & Ballé, P. (1997). Trends in the application of model-based fault detection and diagnosis of technical processes. *Contr. Eng. Practice* 5(5) , 709-719.

Isermann, R., & Freyermuth, B. (1990). Process fault diagnosis based on process model knowledge. *Journal A* 31(4) , 58-65.

Isidori, A. (1995). *Nonlinear Control Systems* (Third ed.). Springer Verlag.

Isidori, A. (1989). *Nonlinear Control Systems 2nd Edition*. Springer-Verlag.

Isidori, A. (1985). *Nonlinear Control Systems: An Introduction*. Berlin Heidelberg New York Tokyo: Springer-Verlag.

J. Rugh, W. (1996). *Linear System Theorey*. New Jersey: Prentice Hall.

Jones, H. L. (1973). *Failure Detection in Linear Systems, PhD thesis*. Masschusetts Institute of Technology, Mass., USA.

K. Sain, M., & L. Massey, J. (1969). Invertibility of Linear Time-Invariant Dynamical Systems. *IEEE Trans. Automat. Contr. Vol. AC-14, No. 2* , 141-149.

Keller, J. Y., Summerer, L., Boutayeb, M., & Darouach, M. (1996). Generalized likelihood ratio approach for fault detection in linear dynamic stochastic systems with unknown inputs. *Int. J. Sys. Sci.* 27(12) , 1231-1241.

Levant, A. (1998). Robust Exact Differentiation via Sliding Mode Technique. *Automatica Vol. 34 No. 3* , 379-384.

Liu, B. F., & Si, J. N. (1997). Fault isolation filter design for linear time-invariant systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.* 42(5) , 704-707.

Martínez-Guerra, R., Luviano-Juárez, A., & Rincón Pasaye, J. J. (2007). Fault estimation using algebraic observers. *Proc. American Control Conference* , (pp. 438-442). New York, USA.

Massoumnia, M. A. (1986). A geometric approach to the synthesis of failure detection filters. *IEEE Trans. Automat. Contr. AC-31(9)* , 839-846.

Menra, R. K., & Peschon, J. (1971). An innovations approach to fault detection and diagnosis in dynamic systems. *Automatica* 7 , 637-640.

Mironovski, L. A. (1980). Functional diagnosis of dynamic system - a survey. *Autumn Remote Control* , 1122-1143.

Mironovski, L. A. (1979). Functional diagnosis of linear dynamic systems. *Autumn Remote Control* 40 , 1198-1205.

Nijmeijer, H., & Van der Shaft, A. J. (1990). *Nonlinear Dynamical Control Systems*. Spriger-Verlag.

Nijmeijer, H., & van der Shaft, A. (1990). *Nonlinear Dynamical Control Systems*. New York: Spriger-Verlag.

Ogata, K. (1998). *Ingeniería de Control Moderna*. Prentice Hall.

Park, J. H., & Rizzoni, G. (1994a). A new interpretation of the fault-detection filter. 1. *Int. J. Contr.* 60(5) , 767-787.

Park, J., Rizzoni, G., & Ribbens, W. B. (1994). On the representation of sensor faults in fault-detection filters. *Automatica* 30(11) , 1793-1795.

Respondek, R. (1990). *Right and left invertibility of nonlinear control systems, Nonlinear Controllability and Optimal Control*.

Richard, M., Addison, R. B., & Eduardo, T. (2004). A transfer function approach to fault diagnosis for linear systems: inversion and low-pass filters. *Proc. DX'04 (15th Internat. Workshop Principles Diagnosis)*, (pp. 105-110). Carcassonne.

Silverman, L. M. (1969). Inversion of Multivariable Linear Systems. *IEEE Trans. Automat. Contr. AC 14(3)* , 270-276.

Szigeti, F., & Addison, R. B. (2002). System inversion and fault detection: the failure affine nonlinear case. *Proceedings of the 10th Mediterranean Conference on Control and Automation*. Lisbon, Portugal.

Szigeti, F., Addison, R., & Tarantino, R. (2000). Fault detection and isolation filter design by inversion; the case of linear systems. *SAFEPROCESS2000 Vol. II*, (pp. 379-384). Pergamon.

Szigeti, F., Bokor, J., & Edelmayer, A. (2002). Input reconstruction by means of system inversion: application to fault detection and isolation. *IFAC 15th Trienal World Congress*. Barcelona, Spain.

Szigeti, F., Vera, C. E., Bokor, J., & Edelmayer, A. (2001). Inversion based fault detection and isolation. *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control* , (pp. 1005-1010). Orlando, Florida USA.

Tzafestas, S. G., & Watanabe, K. (1990). Modern approaches to system/sensor fault detection and diagnosis. *Journal A 31(4)* , 42-57.

Van Schrick, D. (1991). Investigations of reliability for instrument fault detection state-estimator schemes. *European J. of Diagnosis and Safety in Automation 1(1)* , 63-78.

Van Schrick, D. (1993). *Zustandsschätzerschemen zur Fehlerkenung, deren Zuverlässigkeit und Anwendung auf den spurgeführten Omnibus, PhD thesis*. University of Wuppertal, Germany.

Wang, X., Chen, Z., & Yang, G. (2007). Finite-Time-Convergent Differentiator Based on Singular Perturbation Technique. *IEEE Trans. Autom. Contr. Vol. 52, No 9* , 1731-1737.

White, J. e., & Speyer, J. L. (1987). Detection filter design: spectral theory and algorithm. *IEEE Trans. Automat. Contr. AC-32(7)* , 593-603.

Willsky, A. S., & Jones, H. L. (1974). A generalized likelihood approach to state estimation in linear systems subjected to abrupt changes. *IEEE Conf. on Control and Decision*. Arizona.

Willsky, A. S., & Jones, H. L. (1976). A generalized likelihood ratio approach to the detection and estimation of jumps in linear systems. *IEEE Trans. Automat. Contr. AC-21* , 108-121.

Ye, H., Zhang, P., Ding, S. X., & Wang, G. Z. (2000). A Time-frequency Domain Fault Detection Approach Based on Parity Relation and Wavelet Transform. *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*, (pp. 4156-4161). Sydney, Australia .

Zheng, Y. F. (1993). Absolute observabilities of nonlinear systems and their normal forms. *Acta Math. Appl. Sinica* , 28-35.

Zheng, Y. F., & Cao, L. (1991). Construction of reduced nonlinear left-inverse systems. *Proc. 30th CDC*, (pp. 1817-1818.). Brighton.

Zheng, Y.-F., & Cao, L. (1993). Reduced Inverse for Controlled Systems. *Math. Control Signals Systems* 6 , 363-379.