



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE  
SAN NICOLÁS DE HIDALGO

**FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA  
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO**

**“CONSTRUCCIÓN, MODELADO Y CONTROL  
DE UN VEHÍCULO ELÉCTRICO SOBRE DOS  
RUEDAS TIPO PÉNDULO INVERTIDO”**

**TESIS**

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
**MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA**

PRESENTA  
**ING. JORGE ALBERTO BONALES VALENCIA**

DIRECTOR DE TESIS  
**D. C. JOSÉ JUAN RINCÓN PASAYE**  
Doctor en Ciencias en la Especialidad de Control Automático

MORELIA, MICHOACÁN

ENERO DE 2013







## CONSTRUCCIÓN, MODELADO Y CONTROL DE UN VEHÍCULO ELÉCTRICO SOBRE DOS RUEDAS TIPO PÉNDULO INVERTIDO

Los miembros del Jurado de Examen de Grado aprueban  
la Tesis de **Maestría en Ciencias en Ingeniería Eléctrica** de *Jorge Alberto Bonaes Valencia*

Dr. Juan Anzures Marín  
*Presidente del Jurado*

Dr. José Juan Rincón Pasaye  
*Director de Tesis*

Dr. Gilberto González Ávalos  
*Vocal*

Gilberto González

Dr. Fernando Ornelas Tellez  
*Vocal*

Dr. Crisanto Mendoza Covarrubias  
*Examinador Externo FIE-UMSNH*

Dr. J. Aurelio Medina Rios  
*Jefe de la División de Estudios de Posgrado  
de la Facultad de Ingeniería Eléctrica, UMSNH  
(por reconocimiento de firmas)*



# Agradecimientos

Al Dr. José Juan Rincón Pasaye por su apoyo como asesor en la elaboración de esta tesis y la construcción del prototipo, además agradecer su excelente labor como profesor y como persona ante los retos que se presentaron durante todo mi recorrido en la maestría.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología CONACYT por el apoyo económico otorgado para llevar a cabo mis estudios de posgrado.

A la UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO por la oportunidad de cursar mis estudios de posgrado en la Maestría en Ciencias de la Ingeniería Eléctrica.

A mi esposa Fanny Y. Jaimes García por siempre estar a mi lado motivándome y apoyándome a seguir adelante.

A mi madre y a mis hermanos por su constante apoyo en mi formación.

A los profesores Félix Jiménez Pérez y Renato González Bernal por sus aportaciones en ideas y conocimientos en construcción y diseño de varias etapas del desarrollo del prototipo.

Al Laboratorio de Electrónica y a su personal por brindarme el espacio y herramientas necesarias para la construcción del prototipo.

A todos mis compañeros de generación y a mis amigos por brindarme siempre su apoyo.



*Para Fanny y Sofia*



# Resumen

En este trabajo se presenta el diseño y construcción de un vehículo móvil auto-balanceado tipo péndulo invertido. En la última década a surgido el interes en el desarrollo de vehículos tipo péndulo invertido debido a que son un medio de transporte ecológico y económico ya que utilizan solo energía eléctrica para desplazarse. Este prototipo consta de una estructura metálica, un sistema de locomoción, sensores y su controlador. El modelo matemático es obtenido por medio de las ecuaciones de Euler-Lagrange, obteniendo un sistema no lineal e inestable. La instrumentación está basada en un acelerómetro y un giroscopio que se conjugan mediante el Filtro de Kalman para realizar la medición del ángulo de inclinación del péndulo, esta medición es retroalimentada a un algoritmo de control PID con antiwindup y con compensación de zona muerta para generar la señal de control que es enviada a los drivers de los actuadores para estabilizar el sistema. Tanto la medición como la ejecución del algoritmo de control, el monitoreo de la batería y la visualización de valores de las variables de interés son manejadas a través de un microcontrolador.



# Abstract

The design and construction of a mobile self-balanced vehicle type inverted pendulum is presented in this manuscript. In the last decade the interest arisen in the development of inverted pendulum type vehicle because it is an ecological and economical transport since it uses only electric power to move. This prototype consists of a metal structure, a system of locomotion, sensors and its controller. The mathematical model is obtained through the Euler-Lagrange formalism, obtaining a nonlinear and unstable system. The implementation is based on an accelerometer and gyroscopes which are combined using the Kalman Filter for measuring the pendulum angle, this measurement is fed back to a PID control algorithm with antiwindup and dead zone compensation to generate the control signal wich is sent to the actuator drivers to stabilize the system. The measurement and the control algorithm execution, the battery monitoring and visualization of values of the variables of interest are handled by a microcontroller.



# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>I</b>
<b>Dedicatoria</b>	<b>III</b>
<b>Resumen</b>	<b>V</b>
<b>Abstract</b>	<b>VII</b>
<b>Índice de Figuras</b>	<b>XIV</b>
<b>Índice de Tablas</b>	<b>XV</b>
<b>Lista de abreviaturas</b>	<b>XVIII</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Estado del Arte . . . . .	1
1.1.1. Prototipos comerciales y experimentales . . . . .	2
1.1.2. Antecedentes en el modelado y control . . . . .	10
1.2. Objetivos . . . . .	12
1.2.1. Objetivos Particulares . . . . .	12
1.3. Aportaciones . . . . .	12
1.4. Descripción General del Prototipo . . . . .	13
1.5. Justificación . . . . .	14
1.6. Contenido del Trabajo . . . . .	15
<b>2. Modelado Matemático del Sistema</b>	<b>17</b>
2.1. Modelado por Leyes de Newton . . . . .	17
2.2. Modelado por el Método de Euler-Lagrange . . . . .	22
2.2.1. Ecuaciones de Estado . . . . .	26

2.2.2.	Análisis de Puntos de Equilibrio . . . . .	28
2.2.3.	Análisis de estabilidad . . . . .	30
2.2.4.	Análisis de Controlabilidad y Observabilidad . . . . .	32
2.2.4.1.	Controlabilidad . . . . .	32
2.2.4.2.	Observabilidad . . . . .	32
<b>3.</b>	<b>Estructura Mecánica Construida</b>	<b>35</b>
3.1.	Estructura Base . . . . .	35
3.2.	Acoplamiento Llanta-Motor-Estructura Base . . . . .	36
3.3.	Sistema de Dirección (Manubrio) . . . . .	37
3.4.	Unión de Todos los Componentes Mecánicos . . . . .	38
3.5.	Parámetros del Modelo . . . . .	39
3.5.1.	Momentos de Inercia ( $I_r$ , $I_\theta$ , $I_\phi$ ) . . . . .	40
<b>4.</b>	<b>Instrumentación del Prototipo</b>	<b>45</b>
4.1.	Actuadores . . . . .	46
4.1.1.	Drivers de Actuadores . . . . .	48
4.2.	Sensores . . . . .	50
4.2.1.	Medición de Inclinación Basado en Acelerómetros . . . . .	51
4.2.2.	Uso del par acelerómetro-giroscopio para Medición de Inclinación . . . . .	54
4.2.3.	Filtro de Kalman . . . . .	56
4.3.	Microcontrolador . . . . .	60
4.3.1.	Configuración del Microcontrolador . . . . .	61
4.3.1.1.	Configuración General del Microcontrolador . . . . .	61
4.3.1.2.	Configuración del Convertidor A/D . . . . .	62
4.3.1.3.	Configuración del Módulo PWM . . . . .	63
4.3.1.4.	Configuración del Timer 1 . . . . .	65
4.4.	Otras consideraciones de Instrumentación . . . . .	66
4.4.1.	Sensado del Sistema de Dirección . . . . .	66
4.4.2.	Alimentaciones del Prototipo . . . . .	67
4.4.3.	Despliegado de Variables . . . . .	68
<b>5.</b>	<b>Estrategias de Control del Vehículo</b>	<b>69</b>
5.1.	Modelo matemático considerado . . . . .	69
5.2.	Consideraciones realistas para simulación . . . . .	70
5.3.	Pruebas de estrategias de control en simulación . . . . .	71

5.3.1. Controlador PID . . . . .	72
5.3.1.1. Efecto windup y su eliminación . . . . .	74
5.3.2. Retroalimentación lineal de estados . . . . .	74
5.4. Elección del mejor controlador en simulación . . . . .	77
<b>6. Pruebas realizadas</b>	<b>79</b>
6.1. Pruebas a la estructura mecánica . . . . .	79
6.2. Pruebas en los actuadores . . . . .	79
6.2.1. Pruebas de potencia . . . . .	80
6.2.2. Pruebas a los drivers de los actuadores . . . . .	80
6.2.3. Consumo de corriente . . . . .	80
6.2.4. Zona muerta de los motores . . . . .	81
6.3. Pruebas de los Sensores . . . . .	81
6.3.1. El acelerómetro . . . . .	81
6.3.2. Filtro de Kalman . . . . .	81
6.3.3. Ruido de medición . . . . .	82
6.4. Autonomía . . . . .	83
6.5. Pruebas de Técnicas de Control . . . . .	84
6.5.1. Selección del periodo de muestreo . . . . .	86
6.6. Balance de costos . . . . .	87
<b>7. Conclusiones</b>	<b>89</b>
7.1. Conclusiones . . . . .	89
7.2. Trabajos Futuros . . . . .	90
<b>A. Diagramas Eléctricos</b>	<b>93</b>
<b>B. Diagramas en Simulink</b>	<b>97</b>
<b>C. Hojas de Datos</b>	<b>101</b>
<b>D. Programas</b>	<b>103</b>
D.1. Configuraciones Iniciales del Microcontrolador . . . . .	103
D.1.1. Convertidor A/D . . . . .	103
D.1.2. Modulo PWM . . . . .	104
D.1.3. Timer 1 . . . . .	104
D.2. Filtro de Kalman . . . . .	105

D.3. Rutinas del display LCD . . . . .	107
D.4. Código de Control . . . . .	111
D.5. Interrupciones . . . . .	112
D.6. Código principal . . . . .	113
D.7. Cálculo de Ganancias de Ackerman . . . . .	116
<b>E. Momentos de Inercia</b>	<b>119</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>123</b>

# Índice de figuras

1.1. Modelos del Segway: a)i2, b)x2 [Segway 2001] . . . . .	2
1.2. JOE [JOE 2002] . . . . .	3
1.3. Trevor Blackwell sobre el Balancing Scooter V1 [B. Scooter 2002] . . . . .	4
1.4. The Two Wheel Deal [W. Deal 2008] . . . . .	5
1.5. Toyota Winglet P.T. [Winglet 2008] . . . . .	6
1.6. Honda U3-X [Honda 2009] . . . . .	7
1.7. Vehículo auto-balanceado sobre dos ruedas [Moreno 2009] . . . . .	8
1.8. Prototipos de Elektor . . . . .	9
1.9. P.U.M.A. [PUMA 2011] . . . . .	10
1.10. Diagrama General del Prototipo . . . . .	14
2.1. DCL del sistema . . . . .	19
2.2. Relación de Coordenadas . . . . .	20
2.3. Diagramas del Sistema . . . . .	23
3.1. Estructura base . . . . .	36
3.2. Acoples . . . . .	37
3.3. Sistema de dirección . . . . .	38
3.4. Estructura Mecánica . . . . .	39
3.5. Simplificación del cuerpo humano sobre la base del vehículo . . . . .	41
3.6. Diagrama de dimensiones de la Base del Prototipo . . . . .	43
4.1. Diagrama de componentes de Instrumentación . . . . .	45
4.2. Desplazamiento sobre el plano horizontal . . . . .	46
4.3. PDX256-256:1 Gearmotor . . . . .	48
4.4. Puente H . . . . .	48
4.5. Puente H con Drivers IR2110 [AN-978] . . . . .	49

4.6. Acelerómetro basado en MEMS . . . . .	52
4.7. Medición del ángulo de inclinación . . . . .	52
4.8. Aproximación de $\theta$ . . . . .	53
4.9. Diagramas de conexión . . . . .	56
4.10. Ciclo del Filtro de Kalman Discreto [Greg 2001] . . . . .	56
4.11. Ciclo del Filtro de Kalman para la medición de $\theta$ [Greg 2001] . . . . .	60
4.12. Configuración de Bits del Microcontrolador DSPic30f4011 . . . . .	62
4.13. Acople para sensado de dirección . . . . .	67
4.14. Batería +12V . . . . .	67
4.15. LCD de 2 Líneas . . . . .	68
5.1. Diagrama en Simulink del Control PID . . . . .	72
5.2. Comportamiento del Sistema con controlador PID . . . . .	73
5.3. Diagrama en Simulink del Sistema con Retroalimentación de Estado Lineal . . . . .	76
5.4. Comportamiento de los Estados y Torques . . . . .	77
6.1. Ruidos de medición . . . . .	82
6.2. Curva de descarga de batería de 12V . . . . .	83
6.3. Prototipo pequeño . . . . .	84
6.4. Periodo de muestreo . . . . .	86
7.1. Prototipo construido . . . . .	90
A.1. Main Board . . . . .	94
A.2. Puente H y Drivers . . . . .	95
B.1. Planta . . . . .	98
B.2. Constantes . . . . .	99
E.1. Formulario de momentos de inercia más comunes[Landau 2003] . . . . .	119

# Índice de tablas

1.1. Características Técnicas del Segway P.T. . . . .	3
1.2. Características Técnicas del Balancing Scooter . . . . .	5
1.3. Características Técnicas U3-X . . . . .	7
1.4. Características Físicas del Vehículo Autovalanceado sobre Dos Ruedas . . . . .	8
1.5. Características de los prototipos Elektor . . . . .	9
2.1. Parámetros del Sistema . . . . .	18
3.1. Características de la Estructura Mecánica . . . . .	39
3.2. Parámetros del modelo . . . . .	40
3.3. Valor de variables para obtención de $I_{\theta}$ . . . . .	41
3.4. Momentos de Inercia . . . . .	43
4.1. Características del PDX256-256:1 . . . . .	47
4.2. Características del acelerómetro y giroscopio . . . . .	55
4.3. Características Principales del DSPic30f4011 [30f4011-Manual] . . . . .	61
4.4. Características de las Baterías . . . . .	68
5.1. Características del Tripulante . . . . .	73
6.1. Características de los Tripulantes . . . . .	79
6.2. Costos del material mecánico . . . . .	87
6.3. Costos de material de Instrumentación . . . . .	88
C.1. Lista de Hojas de Datos . . . . .	101



# Lista de Abreviaturas

A/D	Conversión de una Señal Analógica a Digital
AR	Alta Recuperación
CD	Corriente Directa
DCL	Diagrama de Cuerpo Libre
DSP	Digital Signal Processing (Procesador Digital de Señales)
DSPic	PICs con bus de datos inherente de 16 bits.
G.M.	General Motors
HOT	Honda Omni-Traction (Omni-Tracción Honda)
I/O	Input/Output
Lag	Lagrangiano
MEMS	Micro-Electro Machanical System
P.U.M.A.	Personal Urban Mobility and Accessibility
PD	Control Proporcional-Derivativo
PID	Control tipo Proporcional-Integral-Derivativo
PTR	Perfil Tubular Rectangular
PWM	Pulse-Width Modulation (Modulación de Ancho de Pulso)
RLE	Retroalimentacion Lineal de Estado

USD      Dolares Americanos

P.T.      Personal Transport (Transporte Personal)

# CAPÍTULO 1

## Introducción

En este trabajo se presenta el diseño y construcción de un vehículo móvil auto-balanceado tipo péndulo invertido. Este tipo de vehículo móvil representa un reto interesante para el control, ya que es un sistema no lineal, inestable y subactuado. En los últimos años este tipo de prototipos han sido muy explotados debido a que son un medio de transporte ecológico y económico que puede ser utilizado tanto en interiores como en exteriores.

Este prototipo consta de una estructura metálica, un sistema de locomoción, sensores y su controlador. Los sensores miden continuamente la inclinación de la estructura para que el controlador pueda procesar esta información y decidir como mover los actuadores para estabilizar la estructura. Los sensores constan de acelerómetros y giroscopios que miden la inclinación de la estructura, esta medición es enviada por medio de una señal eléctrica al controlador. El controlador es un DSPic de Microchip el cual recibe la señal de los sensores y la procesa por medio de un algoritmo de control el cual da una señal de salida tipo PWM que es enviada a los actuadores. Los actuadores están formados por los motores manejados por sus drivers, estos reciben la señal PWM del controlador para girar a cierta velocidad y sentido con el objetivo de estabilizar la estructura.

### 1.1. Estado del Arte

Debido a las ventajas que ofrece este tipo de transporte, varias universidades, particulares e incluso empresas lo han construido y comercializado. En esta sección se describen brevemente algunos prototipos de tipo comercial y experimental que han sido desarrollados en la década del 2000.

También se presenta una reseña de los trabajos orientados al modelado y al control de

este tipo de vehículos.

### 1.1.1. Prototipos comerciales y experimentales

#### Robot de Yamabico Kurara [Ha 1996]

Robot creado por Ha y Yuta en el año 1996 en la universidad de Tsukuba, Japón. El objetivo del robot era lograr el equilibrio de su cuerpo además de poder seguir una trayectoria. Con un peso de aproximadamente 10 Kg el robot utiliza un control para el equilibrio tipo retroalimentación de estado y otro para seguimiento de la trayectoria. Utiliza el microcontrolador MC68000 con un periodo de muestreo de 5ms, los sensores utilizados para estabilizar el robot son un giroscopio y un encoder, además usa un par de motores de CD de 10 watts.

#### El Segway P.T. [Segway 2001]

Primer prototipo creado y comercializado, hecho por Dean Kamen en Diciembre del 2001 al mismo tiempo que se creó la compañía con el mismo nombre “Segway Inc”. Es un vehículo de dos ruedas auto-balanceado para un tripulante controlado por computadora. La computadora y los motores situados en la base mantienen la base del Segway horizontal todo el tiempo. Para avanzar el usuario se debe inclinar hacia la dirección que quiere tomar (adelante, atrás, derecha o izquierda).

Segway Inc. presenta dos modelos llamados i2 y x2. La versión i2 es diseñada para zonas urbanas mientras que la x2 es la versión para todo terreno. Estos dos modelos se pueden ver en la Figura 1.1.



Figura 1.1: Modelos del Segway: a)i2, b)x2 [Segway 2001]

Algunas características técnicas del prototipo se muestran en la Tabla 1.1 :

Cuadro 1.1: Características Técnicas del Segway P.T.

	Segway i2	Segway x2
Peso	47.7 Kg	54.4 Kg
Tamaño de ruedas	19"	33"
Vel. Máxima	20 km/hr	20 km/hr
Autonomía	38 km	22.5 km
Ciclo de carga	8-10 Hrs.	8-10 Hrs.
Tipo de batería	Li-ion	Li-ion
Motores	Brushless	Brushless
Costo	US\$4500.00	US\$5500.00
Medidas	48x63cm/21	53.3x77.5cm/20cm
Microcontrolador	Sofisticada tarjeta controladora hecha por Delphi Electronics con un DSP de Texas Instruments	

## El JOE: Un Péndulo Invertido Móvil [JOE 2002]

JOE fue creado en los Laboratorios de Electrónica del Instituto Tecnológico de Lausanne, Suiza publicado en Febrero del 2002. Usa un contrapeso que simula el cuerpo de una persona, JOE (Figura 1.2) puede auto-balancearse por medio de un control tipo Retroalimentación de Estado. Para dirigir el prototipo usaron un radio-control.



Figura 1.2: JOE [JOE 2002]

JOE logra alcanzar velocidades de hasta 5.4 Km/Hr, pesa alrededor de 15 Kg y puede inclinarse hasta 30°.

## El Balancing Scooter [B. Scooter 2002]

Prototipo creado por Trevor Blackwell a finales de 2002 poco después de la aparición del Segway P.T., básicamente su funcionamiento es el mismo que el del Segway con la diferencia de que este prototipo no tiene control redundante al contar con sensores mas confiables y equipo de mejor calidad todo esto para garantizar la seguridad del tripulante. Una de las ventajas sobre el Segway es el costo (menos de la mitad) pero a costa de la seguridad del tripulante y la apariencia del vehículo ya que se usaron piezas de bajo-costos como motores para silla de ruedas eléctricas y baterías de automóvil.

Trevor construyó dos versiones, la V1 (ver Figura 1.3 ) el cual tenía un funcionamiento que no alcanzaba a igualar al Segway, mientras que a la V2 se le hicieron mejoras como el cambio del tamaño de ruedas y la reducción del peso del prototipo aumentando así su velocidad, los dispositivos electrónicos en la V1 fueron seleccionados a conveniencia (económicos y disponibles), mientras que en la V2 se seleccionaron para mejorar el funcionamiento del prototipo.

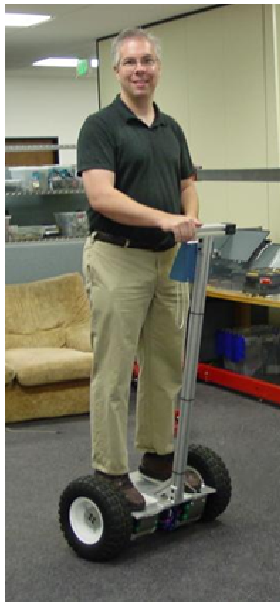


Figura 1.3: Trevor Blackwell sobre el Balancing Scooter V1 [B. Scooter 2002]

Cuadro 1.2: Características Técnicas del Balancing Scooter

	Balancing Scooter V1	Balancing Scooter V2
Peso	40.8 Kg	31.75 Kg
Tamaño de ruedas	14"	20"
Vel. Máxima	14.5 Km/Hr	24 Km/Hr
Tipo de Batería	NiMH	60 HHR-6500D celdas de Panasonic
Motores	CD	CD
Tipo de control	PD	PD

En la Tabla 1.2 se muestran las características técnicas de las dos versiones del Balancing Scooter.

### El Two Wheel Deal [W. Deal 2008]

El Two Wheel Deal (Figura 1.4) es otro prototipo creado en el 2008 por cuatro estudiantes de la Universidad de Purdue, West Lafayette, Indiana, Estado Unidos. Este proyecto fue construido, casi en su totalidad con piezas hechas por los estudiantes. Este vehículo fue patentado pero no puesto en el mercado ni en venta.



Figura 1.4: The Two Wheel Deal [W. Deal 2008]

Algunas características interesantes de este prototipo son el uso de un controlador tipo PD, usa un Microcontrolador Atmel ATmega32 de 8 bits, Motores NPC T74 de 24 V, batería de ácido-plomo, llantas de 20" pulgadas.

### El Toyota Winglet P.T. [Winglet 2008]

Toyota Motor Corp. anunció el Toyota Winglet en el 2008 para ser puesto en el mercado en el 2009. Toyota Winglet (Figura 1.5) es otro prototipo comercial ligeramente más pequeño que el Segway, puede alcanzar una velocidad de hasta 6 Km/Hr y se presenta en 3 versiones de acuerdo a su tamaño. La versión más pequeña pesa aproximadamente 10 Kg con un mango de altura ajustable. El vehículo cuenta con sensores que avisan al conductor cuando una colisión es inminente. Además debido a sus dimensiones y su baja velocidad, este vehículo es sólo para interiores.



Figura 1.5: Toyota Winglet P.T. [Winglet 2008]

### El Honda U3-X [Honda 2009]

Dispositivo experimental compacto que permite el movimiento en cualquier dirección como el caminado humano. Fue anunciado en Tokyo en el 2009 y presentado como prototipo para demostración en New York en el 2010.



Figura 1.6: Honda U3-X [Honda 2009]

U3-X (Figura 1.6 ) parecido al Toyota Winglet, pesa alrededor de 10 Kg y viaja hasta 6 Km/Hr, además cabe resaltar que en este vehículo el conductor va sentado sobre el. Usa un sistema llamado HOT que le permite moverse en cualquier dirección lateral. Otras características técnicas se muestran en la Tabla 1.3.

Cuadro 1.3: Características Técnicas U3-X

	Honda U3-X
Largo	31.3 cm
Ancho	16 cm
Alto	64.7 cm
Sistema de Manejo	Omni Traction Drive System
Batería	Lithium-ion
Tiempo de Operación	1 Hr

## Vehículo Auto-balanceado Sobre Dos Ruedas (Universidad de Chile)

Prototipo creado en la Universidad de Chile en el 2009 por Leonardo F. Moreno Bustamante [Moreno 2009]. Prototipo funcional de bajo costo, fabricado reutilizando y diseñando

algunas piezas mecánicas y electrónicas. Las características principales se pueden ver en la Tabla 1.4.

Cuadro 1.4: Características Físicas del Vehículo Autovalanceado sobre Dos Ruedas

Peso	40Kg
Llantas	20"
Velocidad Max.	24 Km/Hr
Autonomía	Aprox. 5 Hr
Motores	NPC T74 24 V
Largo	50 cm
Ancho	145 cm
Alto	145 cm

Este prototipo usó un controlador tipo PD y un DSP de Texas Instruments "TMS320F2808". Utiliza cuatro baterías de 12 V para alimentar todo el equipo incluyendo los motores.



Figura 1.7: Vehículo auto-balanceado sobre dos ruedas [Moreno 2009]

## Elektor Wheelie y Elektor OSPV

Prototipos didácticos comercializados por Elektor en el año 2009, ambos cuentan con una plataforma de desarrollo abierta, esto quiere decir que se le puede hacer modificaciones tanto físicas como en el software. Los prototipos básicamente se diferencian sólo en el aspecto físico como se ve en la Figura 1.8, ya que la electrónica usada en ambos es la misma .



(a) Wheelie [Wheelie 2009]



(b) OSPV [OSPV 2011]

Figura 1.8: Prototipos de Elektor

Algunas características más específicas de ambos modelos se pueden observar en la Tabla 1.5.

Cuadro 1.5: Características de los prototipos Elektor

	Wheelie	OSPV
Peso	35 Kg	25 Kg
Velocidad	18 Km/Hr	15 Km/Hr
Batería	Ácido-Plomo de 12V	Gel-Plomo 12V
Autonomía	8 Km	8 Km
Microcontrolador	ATmega16	ATmega16
Llantas	14"	14"

## P.U.M.A. [PUMA 2011]

P.U.M.A. es un prototipo experimental desarrollado en el año 2011 en conjunto con Segway Inc. y G.M., este vehículo tiene la capacidad de transportar hasta dos personas, pensado para ser usado dentro de una ciudad ya que tiene una autonomía de 56 Km en una sola carga y velocidad máxima de 56 Km/Hr.

P.U.M.A. tiene un tiempo de cargado aproximado de 3 Hrs. consumiendo en energía eléctrica lo equivalente a \$0.35 USD lo que permite una manera más económica y ecológica de transporte además de su pequeño tamaño que podría reducir considerablemente el congestionamiento vehicular común en las ciudades grandes.



Figura 1.9: P.U.M.A. [PUMA 2011]

G.M. pretende comercializar este prototipo en el 2012, mencionando que el costo de este va a ser aproximadamente una cuarta o tercera parte de un vehículo convencional.

### 1.1.2. Antecedentes en el modelado y control

Debido a que el sistema tiene menos actuadores que grados de libertad, el sistema es subactuado. El vehículo tiene solo dos motores como actuadores sin embargo, tiene tres grados de libertad: dos en el movimiento sobre el plano horizontal y uno sobre el ángulo de posición vertical. También cabe resaltar que el sistema es no lineal e inestable en el punto de operación vertical.

La estructura mecánica del vehículo con dos ruedas es similar a un péndulo invertido, debido a esto el análisis del comportamiento físico es parecido. Varios estudios se han realizado

con respecto al comportamiento de péndulo invertido sobre dos ruedas. En 1989, Yamafuji y Kawamura construyeron un modelo 1-DOF enfocado solo en el ángulo de posición vertical y probaron diferentes experimentos basados en el criterio de Estabilidad de Routh-Hurwitz [Yamajuji 1989].

En 1996, Ha y Yuta propusieron un tipo de péndulo invertido, el cual estaba montado sobre un robot móvil llamado Yamabico Kurara [Ha 1996] que tenía dos ruedas a los lados del cuerpo del robot sin ninguna otra llanta de soporte, este podía conducirse de forma autónoma sobre un plano manteniendo su propio equilibrio a una velocidad relativamente rápida. Los sensores utilizados eran un giroscopio para medir la velocidad con que se inclina el robot y un encóder para medir el giro de las llantas. El control utilizado estaba dividido en tres partes: control de balanceo y velocidad, control de giro y control de seguimiento de una línea. El control utilizado para el equilibrio del robot era una retroalimentación de estado.

En 2002, Gresser presenta un robot péndulo invertido móvil [JOE 2002], donde su estructura mecánica y sistema de control es similar al desarrollado por Ha y Yuta. Comparado con otros estudios, la construcción del modelado matemático es más avanzado y se describe mejor la dinámica del prototipo. Gresser se enfoca en el sistema de control definido por las ecuaciones de movimiento del sistema, el cual asume que el movimiento rotacional de las llantas con respecto al eje en dirección de la fuerza de gravedad es insignificante. Para que esto sea válido, las llantas tienen que ser diseñadas para que tengan una inercia rotacional pequeña en dirección de la fuerza de gravedad.

En 2005, Yeonhoon crea un robot péndulo invertido sobre sobre dos ruedas llamado 3-DOF además muestra un análisis más detallado de la dinámica que presentan este tipo de vehículos [Yeonhoon 2006]. Yeonhoon analiza la dinámica del sistema por el método de Kane el obtiene un sistema parecido al de Gresser, pero este incluye más consideraciones como superficies inclinadas y el efecto al girar el robot. El tipo de control usado para este prototipo fue una retroalimentación lineal de estados.

En 2010, Sánchez presenta un artículo para la construcción y modelado de un péndulo invertido sobre dos ruedas utilizando piezas de la plataforma Lego Mindstorm NXT<sup>®</sup> [Lego M. 2010]. Sánchez obtiene el modelo dinámico del sistema por medio de Euler-Lagrange y lo controla con un controlador tipo PID el cual logra estabilizar el péndulo invertido sobre dos ruedas en la posición vertical, y adicionalmente soporta ligeras perturbaciones alrededor de la posición vertical.

En 2011, Jiménez muestra otro prototipo tipo péndulo invertido sobre dos ruedas, el cual se enfoca en la construcción, instrumentación, control y consideraciones para la implementación de este tipo de vehículos [Jiménez 2011]. El prototipo es controlado por medio de un

PID además muestra algunas técnicas de filtrado para la lectura de los sensores de posición (Acelerómetro y Giroscopio).

## 1.2. Objetivos

El objetivo de este trabajo es el diseño y la construcción de un vehículo móvil auto-balanceado tipo péndulo invertido económico pero funcional, capaz de transportar a una persona, además hacer este prototipo didáctico en el cual se puedan experimentar diferentes algoritmos de control. También se busca que el prototipo tenga la capacidad de probar diferentes estrategias de medición y diagnóstico de fallas.

Es importante resaltar que esta tesis se enfoca principalmente en la construcción y el control de un prototipo y no en mejorar las características de alguno ya existente.

### 1.2.1. Objetivos Particulares

1. Validar estrategias de medición de inclinación basada en acelerómetros y giroscopios.
2. Diseñar una estructura mecánica funcional con materiales sencillos.
3. Validar el modelo matemático del sistema.
4. Probar las siguientes técnicas de control: PID, y Retroalimentación de Estado.
5. Integrar todos los elementos en un prototipo funcional
6. Evaluar costos de posibles versiones distintas, identificando elementos críticos tales como estructura, motores, materiales, batería, sensores, etc.

## 1.3. Aportaciones

Las aportaciones principales de este trabajo se enlistan a continuación:

- Construcción de un Prototipo tipo Péndulo Invertido sobre dos ruedas. Este prototipo incluye una estructura mecánica hecha con materiales económicos y de fácil acceso además de la instrumentación necesaria para su sensado, control, despliegado de variables y propulsión (motores).
- Cálculo de los parámetros del modelo matemático del prototipo construido.

- Creación plataforma abierta programada en lenguaje C, la cual permite integrar y probar diferentes técnicas de control dando pie a nuevos proyectos de investigación o como comprobación de algunas técnica de control.
- Implementación de técnicas de control para un sistema real con características no lineal e inestable.
- Implementación de técnicas de filtrado para eliminación de ruido en sensores.

## 1.4. Descripción General del Prototipo

El prototipo consta básicamente de cuatro partes:

- Estructura física: Consta de todas las partes mecánicas que conforman el prototipo, tales como, la plataforma donde se subirá la persona y se colocarán todos los dispositivos eléctricos y mecánicos del prototipo, así como el manubrio para tripular el vehículo. las llantas y el acople de las llantas, con los motores, la batería, etc.
- Sensores: Los sensores se encargan de medir el ángulo de inclinación del prototipo y transformarla a una señal eléctrica analógica para después enviarla al controlador. En este prototipo se usaron Acelerómetros y Giroscopios (Gyros) para medir la posición angular, además se usa un potenciómetro para leer los comandos de dirección del manubrio.
- Controlador: El controlador usado fue el DSPic30f2110 de Microchip, el cual recibe la señal analógica de los sensores, la convierte a digital con su convertidor A/D, la procesa por medio de un algoritmo de control para después ser enviada a los Drivers del Motor en forma de una señal PWM.
- Actuadores: Se usaron motores de CD de 12 V con caja reductora lo suficientemente potente para mover al prototipo con el tripulante. Cada motor recibe la señal de su driver, el cual se encarga de definir la dirección y velocidad a la que este va a girar.

En la Figura 1.10 se puede apreciar el diagrama a bloques de las partes que componen el prototipo.

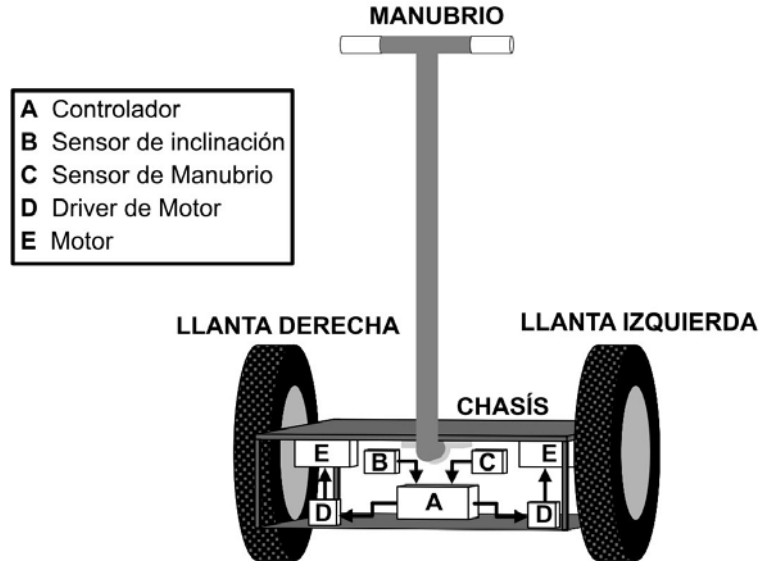


Figura 1.10: Diagrama General del Prototipo

## 1.5. Justificación

De acuerdo con el estado del arte de este tipo de prototipos, actualmente en México no se ha reportado el desarrollo de alguno, lo cual permite ser la primera universidad en entrar a este campo al desarrollar el primer vehículo móvil auto-balanceado tipo péndulo invertido de México.

Otra justificación que ofrece el desarrollo de este tipo de prototipos son:

- La económica debido a que es construido de manera local, esto reduce de manera significativa precio comparado con el costo del prototipo comercial (Segway, Elektor).
- Genera una plataforma para prueba de diferentes algoritmos de control, diagnóstico de fallas y otras problemáticas de sistemas dinámicos.
- Al ser un prototipo creado de manera local, permite que se preste a mejoras generando así nuevos proyectos.
- Genera una nueva opción de transporte personal en lugares pequeños como en el campus universitario, interiores de edificios comerciales, casas, almacenes, industrias, aeropuertos, etc., también en exteriores como para recorridos turísticos, eco-turísticos, o para movilizarse en distancias pequeñas.

- Es un vehículo ecológico ya que no genera gases debido a que es impulsado en su totalidad por energía eléctrica.

## 1.6. Contenido del Trabajo

La tesis esta dividida en siete capítulos los cuales se mencionan a continuación:

Capítulo 2: En este capítulo se explica la obtención del modelo que gobierna el comportamiento dinámico del sistema visto como un péndulo invertido. También incluye el análisis de estabilidad, controlabilidad y observabilidad del modelo matemático.

Capítulo 3: Se describen todos los elementos mecánicos que conforman el prototipo como: plataforma, manubrio, llantas, etc., así como el análisis de momentos de inercia que rigen a la estructura mecánica.

Capítulo 4: Este capítulo trata de los diferentes sensores y actuadores que se utilizaron, su principio de operación y sus pruebas preliminares así como la manera de ponerlos en funcionamiento.

Capítulo 5: Aborda el diseño de las estrategias de control usado, sus características principales y los resultados preliminares.

Capítulo 6: Aquí se reportan las pruebas experimentales hechas al prototipo así como los resultados obtenidos.

Capítulo 7: Se describe los resultados finales de la tesis y las posibles mejoras que se le pudieran incorporar al prototipo.



# CAPÍTULO 2

## Modelado Matemático del Sistema

El modelado matemático es un paso fundamental para poder diseñar una buena estrategia de control. En este trabajo la obtención del modelo es esencial también para poder predecir rangos y valores de parámetros de diseño para el buen funcionamiento del prototipo. La dinámica del prototipo es similar a la dinámica de un péndulo invertido con la diferencia de que este está montado sobre una plataforma móvil no limitando el desplazamiento de esta. Partiendo de esta similitud, varios prototipos mencionados en la Sección 1.1, principalmente obtienen el modelo matemático que describe la dinámica del sistema por los siguientes métodos:

- Leyes de Newton [JOE 2002].
- Euler-Lagrange [Lego M. 2010].
- Método de Kane [Yeonhoon 2006].

Los tres métodos llegan al mismo modelo matemático obteniendo un sistema no lineal e inestable.

En el trabajo se obtuvo el modelo matemático por dos métodos: Euler-Lagrange [Yepez 2007] y por Leyes de Newton [JOE 2002]; los cuales serán mencionados en este capítulo.

### 2.1. Modelado por Leyes de Newton

Para la obtención del modelo por el método de Leyes de Newton se debe hacer el Diagrama de cuerpo libre (DCL), que para este caso se separa en dos partes, llantas y chasis (ver Figura 2.1). Las variables y parámetros que se consideran en el modelado se muestran en la Tabla 2.1.

Cuadro 2.1: Parámetros del Sistema

Símbolo	Descripción
$g$	Fuerza de gravedad
$m_r$	Masa de la llanta
$m_b$	Masa del cuerpo del vehículo mas el tripulante
$R$	Radio de la llanta
$L$	Distancia del centro de masa $m_b$ con respecto al origen
$D$	Distancia del centro del vehículo al centro de una llanta
$\tau_d$	Par del motor derecho
$\tau_i$	Par del motor izquierdo
$I_R$	Momento de inercia de la llanta
$I_\theta$	Momento de inercia respecto al eje $z$
$I_\phi$	Momento de inercia respecto al eje $y$

En base al DLC de la Figura 2.1 obtenemos las siguientes ecuaciones:

Para las llantas,

$$\begin{aligned}
 m_r \ddot{x}_{Rd} &= F_{Fd} - F_{Hd} \\
 m_r \ddot{y}_{Rd} &= F_{Nd} - F_{Vd} - m_r g = 0 \\
 I_R \frac{\ddot{x}_{Rd}}{R} &= \tau_d - R F_{Fd}
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned}
 m_r \ddot{x}_{Ri} &= F_{Fi} - F_{Hi} \\
 m_r \ddot{y}_{Ri} &= F_{Ni} - F_{Vi} - m_r g = 0 \\
 I_R \frac{\ddot{x}_{id}}{R} &= \tau_i - R F_{Fi}
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

donde:

$F_{Fd}$ ,  $F_{Fi}$  fuerzas de reacción de cada llanta (Derecha e izquierda, respectivamente).

$F_{Hd}$ ,  $F_{Hi}$  fuerzas horizontales ejercidas sobre las llantas por el chasis.

$F_{Vd}$ ,  $F_{Vi}$  fuerzas verticales ejercidas sobre las llantas por el chasis.

$F_{Nd}$ ,  $F_{Ni}$  fuerzas normales ejercidas del suelo a las llantas.

$x_{Rd}$ ,  $x_{Ri}$  desplazamiento de la rueda (derecha e izquierda respectivamente) sobre el eje  $x$ .

$y_{Rd}$ ,  $y_{Ri}$  desplazamiento de la rueda (derecha e izquierda respectivamente) sobre el eje  $y$ .

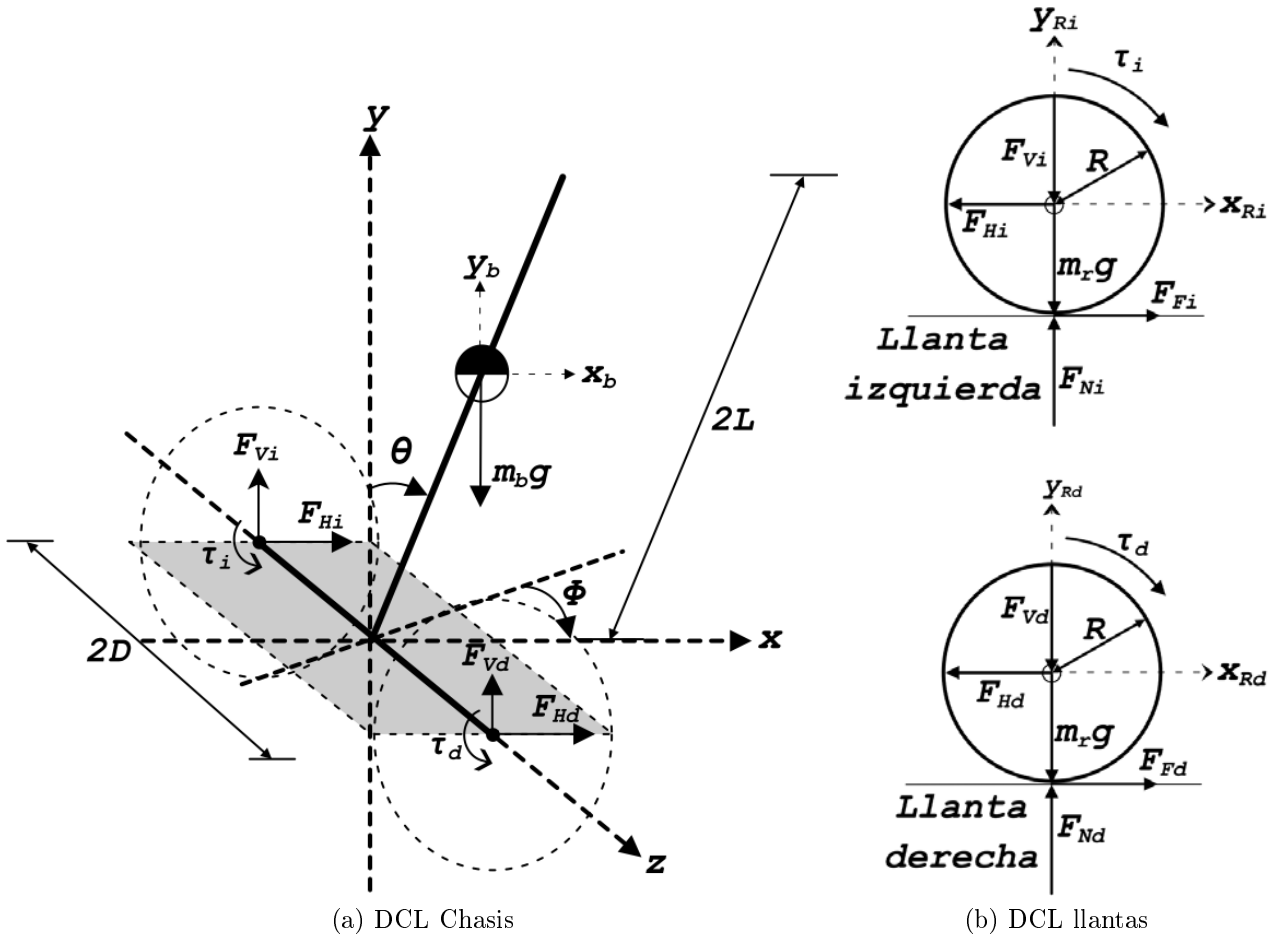


Figura 2.1: DCL del sistema

Como el sistema de referencia es fijo al centro del vehículo, podemos decir que,

$$x_{Ri} = x_{Rd} = x$$

$$y_{Ri} = y_{Rd} = y$$

Lo anterior significa que se considera que las llantas siempre estarán en contacto con el suelo y que este es horizontal y no se tomará en cuenta el efecto de patinado. El efecto de fricción entre la llanta y el suelo no se considera. Además no hay movimiento en el eje  $z$  ni rotación sobre el eje  $x$ .

Ahora para el centro de masa  $(x_b, y_b)$  del chasis mas el tripulante,

$$\begin{aligned} m_b \ddot{x}_b &= F_{Hd} + F_{Hi} \\ m_b \ddot{y}_b &= F_{Vd} + F_{Vi} - m_b g \end{aligned} \quad (2.3)$$

Ahora las ecuaciones que involucran los movimientos angulares de  $\theta$  (inclinación con respecto al eje  $y$ ) y  $\phi$  (giro sobre el plano  $z-x$ ).

$$I_\theta \ddot{\theta} = L (F_{Vd} + F_{Vi}) \sin\theta - L (F_{Hd} + F_{Hi}) \cos\theta - \tau_d - \tau_i \quad (2.4)$$

$$I_\phi \ddot{\phi} = (F_{Hi} - F_{Hd}) D \quad (2.5)$$

En la Ecuación (2.3) es necesario considerar la relación entre la posición del eje  $(x, y)$  con el centro de masa del chasis  $(x_b, y_b)$ .

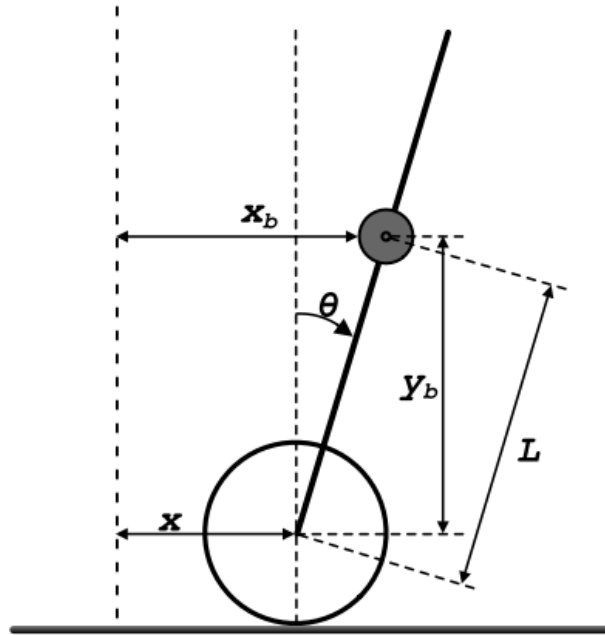


Figura 2.2: Relación de Coordenadas

En la Figura 2.2 se muestra la vista lateral del sistema para apreciar la relación de coordenadas  $(x, y)$  y  $(x_b, y_b)$ . La ecuación (2.6) describe esta relación de coordenadas.

$$\begin{aligned}
x_b &= L \sin \theta + x & y_b &= L \cos \theta \\
\dot{x}_b &= L \dot{\theta} \cos \theta + \dot{x} & \dot{y}_b &= -L \dot{\theta} \sin \theta \\
\ddot{x}_b &= -L \dot{\theta}^2 \sin \theta + L \ddot{\theta} \cos \theta + \ddot{x} & \ddot{y}_b &= -L \dot{\theta}^2 \cos \theta - L \ddot{\theta} \sin \theta
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Sustituyendo (2.6) en (2.3)

$$m_b \left( -L \dot{\theta}^2 \sin \theta + L \ddot{\theta} \cos \theta + \ddot{x} \right) = F_{Hd} + F_{Hi}$$

$$m_b \ddot{x} - m_b L \dot{\theta}^2 \sin \theta + m_b L \ddot{\theta} \cos \theta = F_{Hd} + F_{Hi} \tag{2.7}$$

$$m_b \left( -L \dot{\theta}^2 \cos \theta - L \ddot{\theta} \sin \theta \right) = F_{Vd} + F_{Vi} - m_b g$$

$$-m_b L \dot{\theta}^2 \cos \theta - m_b L \ddot{\theta} \sin \theta + m_b g = F_{Vd} + F_{Vi} \tag{2.8}$$

Despejando  $F_{Hd}$  y  $F_{Hi}$  de (2.1) y (2.2) obtenemos

$$\begin{aligned}
F_{Hd} &= \frac{\tau_d}{R} - \left( \frac{I_R}{R^2} + m_r \right) \ddot{x} \\
F_{Hi} &= \frac{\tau_i}{R} - \left( \frac{I_R}{R^2} + m_r \right) \ddot{x}
\end{aligned}$$

sumando y restando,

$$F_{Hd} + F_{Hi} = \frac{\tau_d + \tau_i}{R} - 2 \left( \frac{I_R}{R^2} + m_r \right) \ddot{x} \tag{2.9}$$

$$F_{Hi} - F_{Hd} = \frac{\tau_i - \tau_d}{R} \tag{2.10}$$

Sustituimos (2.9) en (2.7) para obtener

$$m_b \ddot{x} - m_b L \dot{\theta}^2 \sin \theta + m_b L \ddot{\theta} \cos \theta = \frac{\tau_d + \tau_i}{R} - 2 \left( \frac{I_R}{R^2} + m_r \right) \ddot{x}$$

$$2 \left( \frac{m_b}{2} + \frac{I_R}{R^2} + m_r \right) \ddot{x} - m_b L \dot{\theta}^2 \sin \theta + m_b L \ddot{\theta} \cos \theta = \frac{\tau_d + \tau_i}{R} \tag{2.11}$$

Sustituyendo (2.8) y (2.7) en (2.4) y simplificando obtenemos

$$I_\theta \ddot{\theta} = L \left( -m_b L \dot{\theta}^2 \cos \theta - m_b L \ddot{\theta} \sin \theta + m_b g \right) \sin \theta - L \left( m_b \ddot{x} - m_b L \dot{\theta}^2 \sin \theta + m_b L \ddot{\theta} \cos \theta \right) \cos \theta - \tau_d - \tau_i$$

es decir

$$I_\theta \ddot{\theta} - L \left( -m_b L \dot{\theta}^2 \cos \theta - m_b L \ddot{\theta} \sin \theta + m_b g \right) \sin \theta + L \left( m_b \ddot{x} - m_b L \dot{\theta}^2 \sin \theta + m_b L \ddot{\theta} \cos \theta \right) \cos \theta = -\tau_d - \tau_i$$

lo cual se puede simplificar como se muestra a continuación

$$I_\theta \ddot{\theta} - m_b L g \sin\theta + m_b L \ddot{x} \cos\theta + m_b L^2 \ddot{\theta} = -\tau_d - \tau_i \quad (2.12)$$

Sustituyendo (2.10) en (2.4)

$$I_\phi \ddot{\phi} = \left( \frac{\tau_i - \tau_d}{R} \right) D \quad (2.13)$$

El modelo del sistema está dado por las ecuaciones (2.11), (2.12) y (2.13) que se agrupan a continuación

$$\begin{aligned} I_\theta \ddot{\theta} - m_b L g \sin\theta + m_b L \ddot{x} \cos\theta + m_b L^2 \ddot{\theta} &= -\tau_d - \tau_i \\ 2 \left( \frac{m_b}{2} + \frac{I_R}{R^2} + m_r \right) \ddot{x} - m_b L \dot{\theta}^2 \sin\theta + m_b L \ddot{\theta} \cos\theta &= \frac{\tau_d + \tau_i}{R} \\ I_\phi \ddot{\phi} &= \left( \frac{\tau_i - \tau_d}{R} \right) D \end{aligned} \quad (2.14)$$

## 2.2. Modelado por el Método de Euler-Lagrange

Usando los parámetros del sistema mostrados en la Tabla 2.1. Las coordenadas generalizadas son:

- $\theta$       Ángulo de posición del brazo
- $\alpha$       Ángulo de giro de las llantas
- $(x_i, y_i)$     Posición con respecto al centro de la llanta izquierda
- $(x_d, y_d)$     Posición con respecto al centro de la llanta derecha
- $(x_b, y_b)$     Posición del centro de Masa del conductor

El angulo de giro  $\alpha$  es considerado igual para ambas llantas ya que están unidas al mismo eje. Basados en el sistema mostrado en la Figura 2.3 la cual muestra la posición del sistema con respecto al centro de masas de las partes que lo integran. Para la obtención del modelo se despreciará el giro respecto al eje  $y$ , es decir,

$$(x_i, y_i) = (x_d, y_d) = (x, y) = (R\alpha, R) \quad (2.15)$$

y la posición del centro de masa del chasis mas el conductor será

$$(x_b, y_b) = (x + L \sin\theta, y + L \cos\theta)$$

es decir

$$(x_b, y_b) = (R\alpha + L\sin\theta, R + L\cos\theta) \quad (2.16)$$

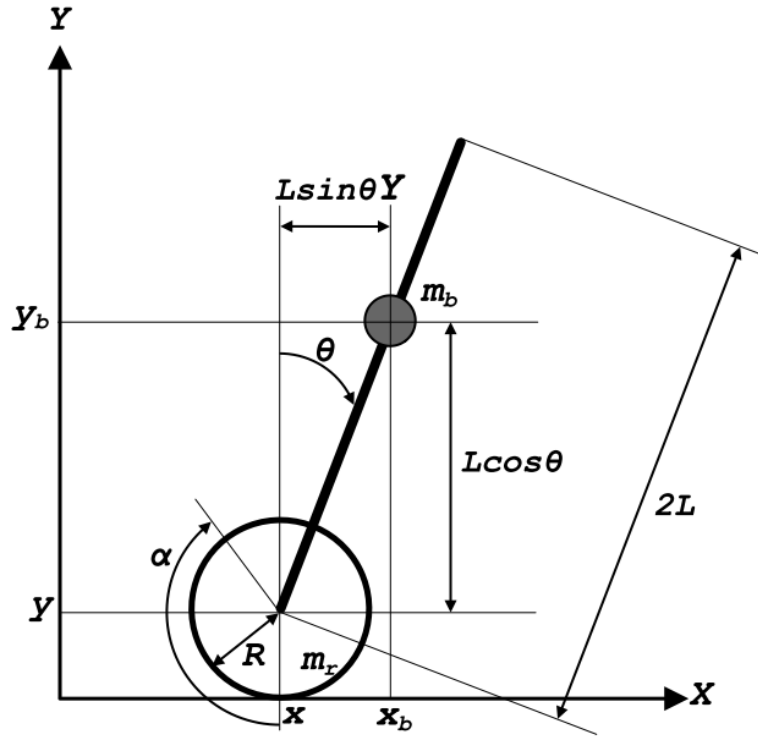


Figura 2.3: Diagramas del Sistema

Calculando la Energía Cinética del sistema:

- Energía Cinética Traslacional:

$$T_1 = \frac{1}{2}m_r\dot{x}_i^2 + \frac{1}{2}m_r\dot{x}_d^2 + \frac{1}{2}m_b\dot{x}_b^2 + \frac{1}{2}m_b\dot{y}_b^2$$

$$T_1 = \frac{1}{2}m_rR^2\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}m_rR^2\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}m_b \left[ (R\dot{\alpha} + L\dot{\theta}\cos\theta)^2 + (-L\dot{\theta}\sin\theta)^2 \right]$$

simplificando

$$T_1 = m_rR^2\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}m_b \left( R^2\dot{\alpha}^2 + 2R\dot{\alpha}L\dot{\theta}\cos\theta + L^2\dot{\theta}^2 \right) \quad (2.17)$$

■ Energía Cinética Rotacional

$$T_2 = \frac{1}{2}I_R\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}I_R\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}I_\theta\dot{\theta}^2 \quad (2.18)$$

Obteniendo la Energía Potencial:

$$U = m_r g y_m + m_r g y_m + m_b g y_M$$

$$U = 2m_r g R + m_b g (R + L \cos \theta) \quad (2.19)$$

Conociendo ya la energía Cinética ((2.17) y (2.18)) y la Energía potencial (2.19) del sistema, se calcula el Lagrangiano.

$$Lag = T_1 + T_2 - U$$

$$Lag = m_r R^2 \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} m_b \left( R^2 \dot{\alpha}^2 + 2R\dot{\alpha}L\dot{\theta} \cos \theta + L^2 \dot{\theta}^2 \right) + I_R \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} I_\theta \dot{\theta}^2 - 2m_r g R - m_b g (R + L \cos \theta)$$

Simplificando

$$Lag = \left( m_r R^2 + \frac{1}{2} m_b R^2 + I_r \right) \dot{\alpha}^2 + m_b R L \dot{\alpha} \dot{\theta} \cos \theta + \frac{1}{2} m_b L^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_\theta \dot{\theta}^2 - 2m_r g R - m_b g (R + L \cos \theta) \quad (2.20)$$

la ecuación de Euler-Lagrange para este sistema son

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial Lag}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial Lag}{\partial \theta} = F_\theta \quad (2.21)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial Lag}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial Lag}{\partial \alpha} = F_\alpha \quad (2.22)$$

obteniendo la derivadas parciales de  $\alpha$  y  $\theta$

$$\frac{\partial Lag}{\partial \alpha} = 0$$

$$\frac{\partial Lag}{\partial \dot{\alpha}} = 2 \left( m_r R^2 + \frac{1}{2} m_b R^2 + I_r \right) \dot{\alpha} + m_b R L \dot{\theta} \cos \theta$$

simplificando,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial Lag}{\partial \dot{\alpha}} \right) = 2 \left( m_r R^2 + \frac{1}{2} m_b R^2 + I_r \right) \ddot{\alpha} + m_b R L \ddot{\theta} \cos \theta - m_b R L \dot{\theta}^2 \sin \theta \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial Lag}{\partial \theta} &= -m_b RL \dot{\alpha} \sin \theta + m_b g L \sin \theta \\ \frac{\partial Lag}{\partial \dot{\theta}} &= m_b RL \dot{\alpha} \cos \theta + m_b L^2 \dot{\theta} + I_\theta \dot{\theta}\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial Lag}{\partial \dot{\theta}} \right) = m_b RL \ddot{\alpha} \cos \theta - m_b RL \dot{\alpha} \dot{\theta} \sin \theta + m_b L^2 \ddot{\theta} + I_\theta \ddot{\theta} \quad (2.24)$$

Sustituyendo (2.21) y (2.22) en las ecuaciones de Euler-Lagrange (ecuaciones (2.21) y (2.22)) respectivamente

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial Lag}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial Lag}{\partial \theta} = m_b RL \ddot{\alpha} \cos \theta - m_b RL \dot{\alpha} \dot{\theta} \sin \theta + m_b L^2 \ddot{\theta} + I_\theta \ddot{\theta} + m_b RL \dot{\alpha} \dot{\theta} \sin \theta - m_b g L \sin \theta$$

simplificando

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial Lag}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial Lag}{\partial \theta} = (m_b L^2 + I_\theta) \ddot{\theta} + m_b RL \ddot{\alpha} \cos \theta - m_b g L \sin \theta \quad (2.25)$$

ahora con respecto a  $\alpha$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial Lag}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial Lag}{\partial \alpha} = 2 \left( m_r R^2 + \frac{1}{2} m_b R^2 + I_r \right) \ddot{\alpha} + m_b RL \ddot{\theta} \cos \theta - m_b RL \dot{\theta}^2 \sin \theta \quad (2.26)$$

El modelo del sistema esta dado por las Ecuaciones (2.25) y (2.26) agrupadas a continuación:

$$\begin{aligned}(m_b L^2 + I_\theta) \ddot{\theta} + m_b RL \ddot{\alpha} \cos \theta - m_b g L \sin \theta &= F_\theta \\ 2 \left( m_r R^2 + \frac{1}{2} m_b R^2 + I_r \right) \ddot{\alpha} + m_b RL \ddot{\theta} \cos \theta - m_b RL \dot{\theta}^2 \sin \theta &= F_\alpha\end{aligned} \quad (2.27)$$

Agregando el giro sobre el eje  $y$  obtenido por Leyes de Newton, donde  $F_\theta$  es,

$$F_\theta = (m_b L^2 + I_\theta) \ddot{\theta} + m_b RL \ddot{\alpha} \cos \theta - m_b g L \sin \theta = I_\theta \ddot{\theta} - m_b L g \sin \theta + m_b L \ddot{x} \cos \theta + m_b L^2 \ddot{\theta} = -\tau_d - \tau_i$$

sabiendo que  $R\alpha = x$ , simplificando nos queda:

$$F_\theta = -\tau_d - \tau_i$$

ahora para  $F_\alpha$ ,

$$F_\alpha = 2 \left( m_r R^2 + \frac{1}{2} m_b R^2 + I_r \right) \ddot{\alpha} + m_b R L \ddot{\theta} \cos \theta - m_b R L \dot{\theta}^2 \sin \theta = 2 \left( \frac{m_b}{2} + \frac{I_R}{R^2} + m_r \right) \ddot{x} -$$

$$m_b L \dot{\theta}^2 \sin \theta + m_b L \ddot{\theta} \cos \theta = \frac{\tau_d + \tau_i}{R}$$

simplificando obtenemos,

$$F_\alpha = \tau_d + \tau_i$$

Sustituyendo  $F_\theta$  y  $F_\alpha$  en (2.27) y agregando la tercera ecuación obtenida en la Sección 2.1, el modelo queda de la siguiente manera

$$\begin{aligned} (m_b L^2 + I_\theta) \ddot{\theta} + m_b R L \ddot{\alpha} \cos \theta - m_b g L \sin \theta &= -\tau_i - \tau_d \\ 2 \left( m_r R^2 + \frac{1}{2} m_b R^2 + I_r \right) \ddot{\alpha} + m_b R L \ddot{\theta} \cos \theta - m_b R L \dot{\theta}^2 \sin \theta &= \tau_i + \tau_d \\ I_\phi \ddot{\phi} &= \frac{\tau_i - \tau_d}{R} D \end{aligned} \quad (2.28)$$

### 2.2.1. Ecuaciones de Estado

Basándonos en el modelo obtenido por la metodología de Euler-Lagrange (2.28) se procede a obtener el modelo en ecuaciones de estado.

A continuación se despeja  $\ddot{\theta}$ ,  $\ddot{\alpha}$  y  $\ddot{\phi}$ . De la segunda ecuación en (2.28), tenemos que

$$\ddot{\alpha} = \frac{-m_b R L \ddot{\theta} \cos \theta + m_b R L \dot{\theta}^2 \sin \theta + \tau_i + \tau_d}{2 \left( m_r R^2 + \frac{1}{2} m_b R^2 + I_r \right)} \quad (2.29)$$

Sustituyendo (2.29) en la primera ecuación en (2.28)

$$(m_b L^2 + I_\theta) \ddot{\theta} + m_b R L \cos \theta \left( \frac{-m_b R L \ddot{\theta} \cos \theta + m_b R L \dot{\theta}^2 \sin \theta + \tau_i + \tau_d}{2 \left( m_r R^2 + \frac{1}{2} m_b R^2 + I_r \right)} \right) - m_b g L \sin \theta = -\tau_i - \tau_d$$

Factorizando  $\ddot{\theta}$

$$\begin{aligned} \left[ \frac{(m_b L^2 + I_\theta) \left( 2 \left[ m_r R^2 + \frac{1}{2} m_b R^2 + I_r \right] + m_b R L \cos \theta (-m_b R L \cos \theta) \right)}{2 \left( m_r R^2 + \frac{1}{2} m_b R^2 + I_r \right)} \right] \ddot{\theta} + \frac{m_b R L \cos \theta (m_b R L \dot{\theta}^2 \sin \theta + \tau_i + \tau_d)}{2 \left( m_r R^2 + \frac{1}{2} m_b R^2 + I_r \right)} - \\ m_b g L \sin \theta = -\tau_i - \tau_d \end{aligned}$$

simplificando

$$\frac{[(m_b L^2 + I_\theta)(2[m_r R^2 + \frac{1}{2}m_b R^2 + I_r]) + m_b RL \cos\theta(-m_b RL \cos\theta)]}{2(m_r R^2 + \frac{1}{2}m_b R^2 + I_r)} \ddot{\theta} = -\frac{m_b RL \cos\theta(m_b RL \dot{\theta}^2 \sin\theta + \tau_i + \tau_d)}{2(m_r R^2 + \frac{1}{2}m_b R^2 + I_r)} + m_b g L \sin\theta - \tau_i - \tau_d$$

Despejando  $\ddot{\theta}$

$$\ddot{\theta} = \frac{-m_b RL \cos\theta(m_b RL \dot{\theta}^2 \sin\theta + \tau_i + \tau_d) + (m_b g L \sin\theta - \tau_i - \tau_d)[2(m_r R^2 + \frac{1}{2}m_b R^2 + I_r)]}{(m_b L^2 + I_\theta)(2[m_r R^2 + \frac{1}{2}m_b R^2 + I_r]) - (m_b RL \cos\theta)^2} \quad (2.30)$$

Ahora se sustituye (2.30) en (2.29)

$$\ddot{\alpha} = \frac{-m_b RL \cos\theta \left( \frac{-m_b RL \cos\theta(m_b RL \dot{\theta}^2 \sin\theta + \tau_i + \tau_d) + (m_b g L \sin\theta - \tau_i - \tau_d)[2(m_r R^2 + \frac{1}{2}m_b R^2 + I_r)]}{(m_b L^2 + I_\theta)(2[m_r R^2 + \frac{1}{2}m_b R^2 + I_r]) - (m_b RL \cos\theta)^2} \right) + m_b RL \dot{\theta}^2 \sin\theta + \tau_i + \tau_d}{2(m_r R^2 + \frac{1}{2}m_b R^2 + I_r)}$$

después de simplificar,  $\ddot{\alpha}$  queda de la siguiente manera

$$\ddot{\alpha} = \frac{-(m_b RL \cos\theta)(m_b g L \sin\theta - \tau_i - \tau_d) + (m_b L^2 + I_\theta)(m_b RL \dot{\theta}^2 \sin\theta + \tau_i + \tau_d)}{(m_b L^2 + I_\theta)(2[m_r R^2 + \frac{1}{2}m_b R^2 + I_r]) - (m_b RL \cos\theta)^2} \quad (2.31)$$

Ahora se despeja  $\ddot{\phi}$  de la tercera ecuación en (2.28)

$$\ddot{\phi} = \frac{\tau_i - \tau_d}{RI_\phi} D \quad (2.32)$$

Definiendo las variables de estado como sigue:

$$\begin{aligned} x_1 &= \theta & x_3 &= \alpha & x_5 &= \phi \\ x_2 &= \dot{\theta} & x_4 &= \dot{\alpha} & x_6 &= \dot{\phi} \end{aligned} \quad (2.33)$$

El modelo en espacio de estado en términos de los estados definidos en (2.33) acomodado de la forma  $\dot{x} = f(x) + g(x)u$  se muestra a continuación:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{-\gamma \cos x_1 (\gamma x_2^2 \sin x_1) + 2\zeta (m_b g L \sin x_1)}{\beta(x_1)} \\ x_4 \\ \frac{\gamma \cos x_1 (m_b g L \sin x_1) + \vartheta (\gamma x_2^2 \sin x_1)}{\beta(x_1)} \\ x_6 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\gamma \cos x_1 - 2\zeta}{\beta(x_1)} & \frac{\gamma \cos x_1 - 2\zeta}{\beta(x_1)} \\ 0 & 0 \\ \frac{-\gamma + \vartheta}{\beta(x_1)} & \frac{-\gamma + \vartheta}{\beta(x_1)} \\ 0 & 0 \\ \frac{D}{RI_\phi} & -\frac{D}{RI_\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_i \\ \tau_d \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

donde

$$\beta(x_1) = (m_b L^2 + I_\theta) \left( 2 \left[ m_r R^2 + \frac{1}{2} m_b R^2 + I_r \right] \right) - (m_b R L \cos x_1)^2$$

$$\gamma = -m_b R L$$

$$\zeta = m_r R^2 + \frac{1}{2} m_b R^2 + I_r$$

$$\vartheta = m_b L^2 + I_\theta$$

Obsérvese que aunque el modelo contiene seis estados, los últimos dos estados tienen una dinámica desacoplada de los primeros cuatro, por lo tanto el modelo se puede considerar como dos subsistemas desacoplados.

Obsérvese también que las ecuaciones de estado de  $\dot{x}_2$  y  $\dot{x}_4$  contienen una resta en el denominador, este nunca se hace cero, ya que su valor mínimo ocurre para  $x_1 = 0$  y vale  $2m_b L^2 (m_r R^2 + I_r) + (2m_r + m_b) R^2 I_\theta + 2I_r I_\theta$  que es una constante positiva.

### 2.2.2. Análisis de Puntos de Equilibrio

Como el modelo (2.34) es de tipo no lineal, puede tener varios puntos de equilibrio, nos interesa analizar los puntos de equilibrio en el caso crítico en que no se aplica par a los motores, por lo cual se supone  $\tau_d = \tau_i = 0$ .

Para el análisis de puntos de equilibrio se considera  $\dot{x}=0$  y se sustituye en el modelo (2.34) obteniéndose lo siguiente:

$$x_2 = 0 \quad (2.35)$$

$$-m_b R L \cos x_1 (m_b R L x_2^2 \sin x_1) + (m_b g L \sin x_1) \left[ 2 \left( m_r R^2 + \frac{1}{2} m_b R^2 + I_r \right) \right] = 0 \quad (2.36)$$

$$x_4 = 0 \quad (2.37)$$

$$-(m_b R L \cos x_1) (m_b g L \sin x_1) + (m_b L^2 + I_\theta) (m_b R L x_2^2 \sin x_1) = 0 \quad (2.38)$$

$$x_6 = 0 \quad (2.39)$$

de (2.35) y (2.36) se obtiene  $\sin x_1 = 0$ , es decir

$$(m_b g L \sin x_1) \left[ 2 \left( m_r R^2 + \frac{1}{2} m_b R^2 + I_r \right) \right] = 0$$

de donde se obtiene

$$x_1 = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots \quad (2.40)$$

ahora despejando de (2.38) obtenemos

$$-(m_b R L \cos x_1) (m_b g L \sin x_1) + (m_b L^2 + I_\theta) (m_b R L x_2^2 \sin x_1) = 0$$

que también se satisface para los valores dados en (2.40)

Por lo que el sistema tiene el conjunto de puntos de equilibrio dado por:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= \textit{arbitrario} \\ x_4 &= 0 \\ x_5 &= \textit{arbitrario} \\ x_6 &= 0 \end{aligned} \quad (2.41)$$

De todos los puntos de equilibrio, los de interés son los que corresponden a la posición vertical del péndulo, es decir:

$$x_1 = x_2 = x_4 = x_6 = 0, \quad x_3, x_5 \textit{ arbitrario} \quad (2.42)$$

### 2.2.3. Análisis de estabilidad

Para analizar la estabilidad del punto de operación (2.42) se obtendrá una linealización por fórmula de Taylor del modelo de estado (2.34) en las cercanías del punto de operación  $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$ , obtenemos el siguiente sistema considerando que cerca de este punto  $\sin x_1 \approx x_1$  y  $\cos x_1 \approx 1$ :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2\zeta(m_b g L)}{\beta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\gamma(m_b g L)}{\beta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\gamma-2\zeta}{\beta} & \frac{\gamma-2\zeta}{\beta} \\ 0 & 0 \\ \frac{-\gamma+\vartheta}{\beta} & \frac{-\gamma+\vartheta}{\beta} \\ 0 & 0 \\ \frac{D}{RI_\phi} & -\frac{D}{RI_\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_i \\ \tau_d \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

donde

$$\beta = (m_b L^2 + I_\theta) \left( 2 \left[ m_r R^2 + \frac{1}{2} m_b R^2 + I_r \right] - (m_b R L)^2 \right)$$

$$\gamma = -m_b R L$$

$$\zeta = m_r R^2 + \frac{1}{2} m_b R^2 + I_r$$

$$\vartheta = m_b L^2 + I_\theta$$

El sistema (2.43) representa un modelo lineal de seis estados y dos entradas de la forma  $\dot{x} = Ax + Bu$ . El sistema puede ser simplificado ya que los estados  $x_5$  y  $x_6$  están desacoplados con el resto, pudiendo separar en dos sistemas como se muestra a continuación:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{2\zeta(m_b g L)}{\beta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\gamma(m_b g L)}{\beta} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\gamma-2\zeta}{\beta} \\ 0 \\ \frac{-\gamma+\vartheta}{\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau \\ \tau_d \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

donde  $\tau = \tau_i + \tau_d$ .

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{D}{RI_\phi} & -\frac{D}{RI_\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_i \\ \tau_d \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

Como nos interesa la estabilidad del ángulo de posición  $\theta$ , utilizamos el sistema (2.44) y para el análisis de estabilidad aplicamos el siguiente teorema:

**Teorema. 5.M3**[Chen 1999] : *Un sistema multivariable con su apropiada matriz de trans-*

ferencia racional  $\hat{G}(s) = [\hat{g}_{ij}(s)]$  es estable BIBO si y solo si cada polo de  $\hat{g}_{ij}(s)$  tiene parte real negativa.

Considerando el sistema de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (2.46)$$

Su función de transferencia es:

$$\hat{G}(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (2.47)$$

El sistema (2.44) es estable si y solo si cada polo de  $\hat{G}(s)$  tiene parte real negativa. Sustituyendo el modelo (2.43) en (2.47) tenemos

$$\hat{G}(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left( s \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{2\zeta(m_b g L)}{\beta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\gamma(m_b g L)}{\beta} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\gamma - 2\zeta}{\beta} \\ 0 \\ \frac{-\gamma + \vartheta}{\beta} \end{bmatrix}$$

Sustituyendo las constantes por sus valores reales mostrados en la Tabla 3.2 y 3.4

$$\hat{G}(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left( s \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 16.04 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -12.6 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.02 \\ 0 \\ 0.102 \end{bmatrix}$$

Resolviendo las operaciones matriciales obtenemos la siguiente función de transferencia:

$$\hat{G}(s) = \frac{0.02}{s^2 - 16.04} \quad (2.48)$$

Los polos del sistema son:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.005 \\ -4.005 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

Dado que uno de sus valores propios es positivo  $p_1 = 4.005$  el sistema es inestable en el punto de equilibrio analizado.

## 2.2.4. Análisis de Controlabilidad y Observabilidad

El análisis de controlabilidad y observabilidad es necesario en el estudio de problemas de control. El análisis de controlabilidad nos permite ver si los estados del sistema en espacio de estados pueden o no ser controlados por la entrada mientras que la observabilidad muestra si los estados pueden o no ser observados desde la salida. El análisis de controlabilidad y observabilidad que se presenta a continuación está basado en el modelo linealizado (2.44) y por lo tanto, los resultados son válidos sólo de manera local, es decir, en las cercanías del punto de operación.

### 2.2.4.1. Controlabilidad

Teniendo el sistema de la manera (2.44), la matriz de controlabilidad está dada por:

$$C = \begin{bmatrix} b & Ab & \dots & A^{n-1}b \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

Sustituyendo por los valores para el sistema (2.44) y realizando las operaciones obtenemos la siguiente matriz de controlabilidad

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0.02 & 0 & 0.3208 \\ 0.02 & 0 & 0.3208 & 0 \\ 0 & 0.102 & 0 & -0.2520 \\ 0.102 & 0 & -0.252 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

La matriz de controlabilidad (2.51) es no singular por lo que el sistema (2.44) es controlable.

### 2.2.4.2. Observabilidad

La matriz de observabilidad está dada por:

$$O = \begin{bmatrix} c \\ cA \\ \vdots \\ cA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

Sustituyendo por los valores reales del sistema (2.44) y realizando las operaciones obtenemos la siguiente matriz:

$$O = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 16.04 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16.04 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

La matriz de observabilidad (2.53) es singular por lo que el sistema no es completamente observable. Se puede ver también que los únicos estados observables son  $x_1$  y  $x_2$ , es decir, solo la posición y velocidad angular son factibles de ser calculados a partir de mediciones de la salida ( $x_1$ ). Este resultado limitará la posibilidad de construir un controlador por retroalimentación de estado basado en información sólo de la salida, como se describe en el capítulo 5.



# CAPÍTULO 3

## Estructura Mecánica Construida

Este capítulo describe los aspectos principales que se consideraron en la construcción de la estructura mecánica. Buscando siempre reducir costos, la construcción fue basada principalmente en las proporciones de una persona promedio (1.70m de alto, 70 Kg de peso), el tamaño de las piezas grandes que requiere el sistema (motores, reductores de velocidad y baterías) y en la disponibilidad de los materiales.

La estructura mecánica contempla varios aspectos de diseño como son la selección los materiales, dimensiones, acoplamientos. Cabe mencionar que el diseño fue hecho de tal manera que nos diera la posibilidad del cambio de motores, el acople llanta-motor, batería, etc., además de poder dar mantenimiento fácilmente a las partes mecánicas y electrónicas.

### 3.1. Estructura Base

La estructura base mostrada en la Figura 3.1, está formada por dos partes:

- Estructura PTR con placa base de acero: El PTR es un material común para la construcción de estructuras pequeñas como mesas y sillas, muy resistente y liviano ya que como su nombre lo dice es tubular (hueco), además es económico y fácil de trabajar. El vehículo consta de una estructura rectangular hecha de PTR de 1 pulgada de ancho soldada en sus diferentes ángulos la cual transmite todo el peso del vehículo y del tripulante a las llantas además en la base inferior de la estructura se tiene una lámina de acero de 1 mm de espesor pensada para la colocación de circuitos y baterías. Las dimensiones de la estructura base son; altura 15 cm, largo 40 cm y ancho 57 cm.
- Base de Aluminio: La base de aluminio montada con tornillos en la parte superior de

la estructura es ligera y lo suficientemente resistente para que una persona se puede parar sobre ella. Las dimensiones de la placa son 0.40 x 0.57 m con un espesor de  $\frac{1}{4}$ ".

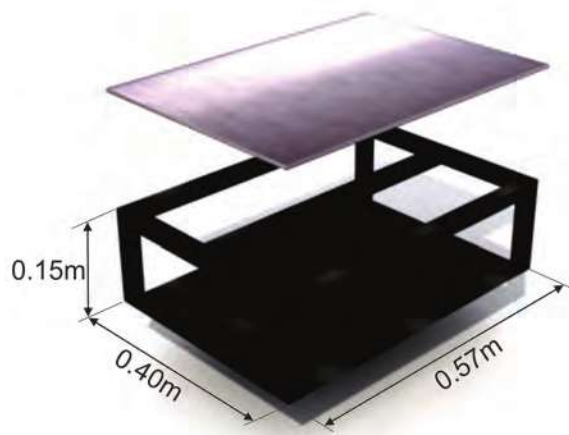


Figura 3.1: Estructura base

### 3.2. Acoplamiento Llanta-Motor-Estructura Base

Las llantas usadas en el vehículo son de motocicleta con rin de 9", se está usando su eje original pero se maquinó de tal manera que se pudiera montar una catarina y una chumacera. La chumacera es colocada con tornillos a la estructura base como se muestra en la Figura 3.2a.

Al motor también se le colocó una chumacera y una catarina, la chumacera es empotrada a la estructura base de tal manera que le de soporte al final del eje del motor para evitar daño a la caja reductora. El motor es empotrado a la estructura base con tornillos para que sea fácil de montar y desmontar. En la Figura 3.2b se muestra el acoplamiento del motor a la estructura base.

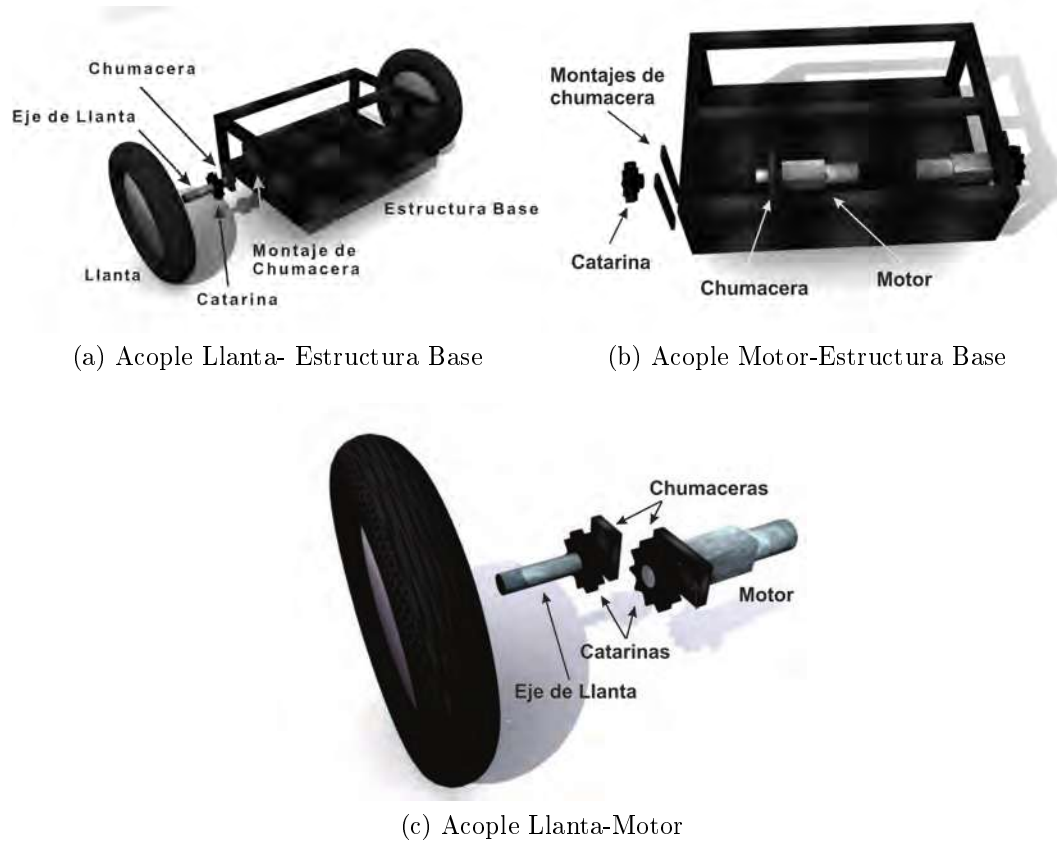


Figura 3.2: Acoples

El motor transmite el torque por medio de una cadena montada sobre la catarina hacia las llantas. La razón principal por la que se decidió que el acople llanta-motor fuera por cadena es debido a que el fabricante de la caja de engranes del motor menciona que esta puede ser dañada cuando al eje de salida se le monta una carga muy alejada del cuerpo del motor (ver Figura 3.2c).

### 3.3. Sistema de Dirección (Manubrio)

El tubo de dirección o manubrio está hecho con tubo de acero de 1" de diámetro interior con un espesor de 2mm montado a la estructura base por medio de una chumacera que nos permite el giro hacia los lados, permitiendo así que el vehículo pueda ir a la dirección que

nosotros queramos. El manubrio montado en la parte superior fue hecho del mismo tubo de dirección y al centro se le colocaron algunos indicadores del estado del sistema. En la Figura 3.3 se puede observar el sistema de dirección ya montado a la estructura base.

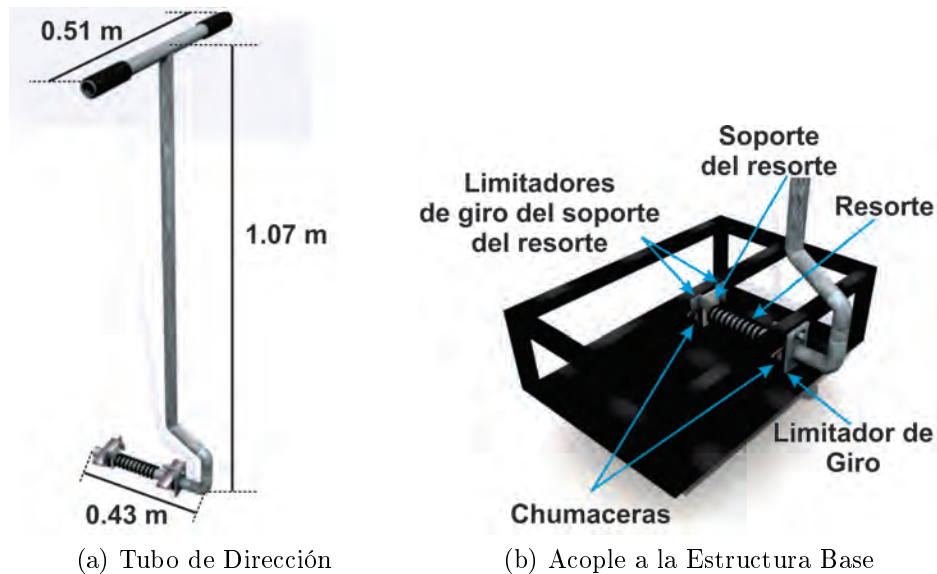


Figura 3.3: Sistema de dirección

Se agregó una placa de seguridad para limitar el ángulo de giro en la parte frontal inferior del manubrio. El resorte al final del tubo del manubrio fue instalado con el objetivo de oponer resistencia al giro del mismo lo cual permite poderlo regresar a su posición vertical además de evitar giros bruscos por el tripulante.

### 3.4. Unión de Todos los Componentes Mecánicos

Finalmente, la unión de todas las piezas que componen la estructura mecánica por medio de tornillos. Esto permite que se puedan desmontar y montar fácilmente cuando se pretenda hacer algún cambio. Las características principales del prototipo se muestran en la Tabla 3.1 así como su aspecto final se puede ver en la Figura 3.4.

Tabla 3.1: Características de la Estructura Mecánica

Dimensiones de la Estructura base	57 x 40 x 17.5 cm
Placa superior de Aluminio	57 x 40 x 1.27 cm
Placa inferior de acero	57 x 40 x 0.1 cm
Diámetro de Llantas	39 cm diámetro exterior
Tubo del Manubrio	2.59 cm radio exterior, aproximadamente 1.4 m de largo
Material	Acero, placa superior de Aluminio

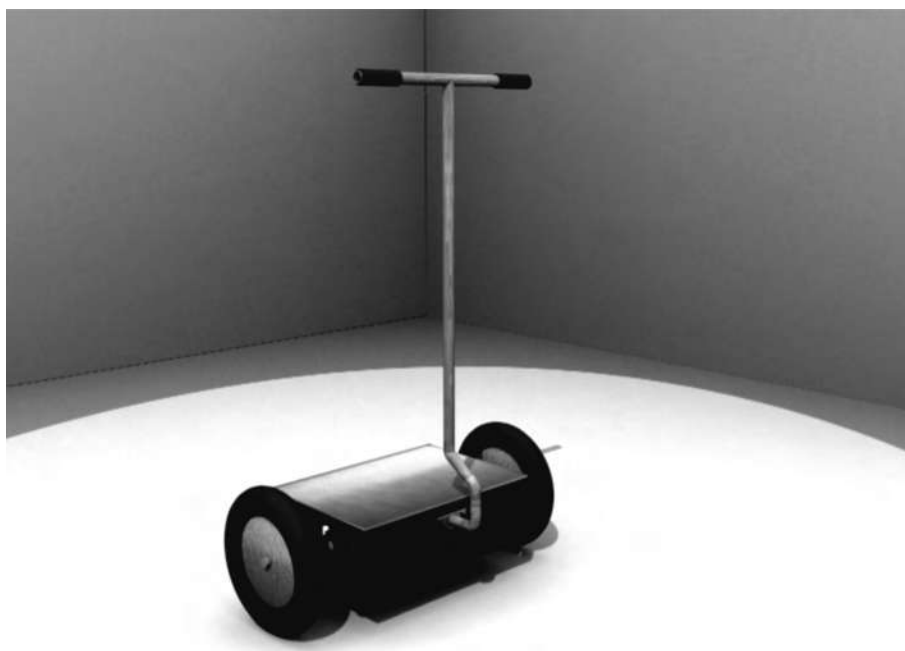


Figura 3.4: Estructura Mecánica

### 3.5. Parámetros del Modelo

A partir de las mediciones podemos establecer los valores de longitudes y masas del prototipo. En la Tabla 3.2 se enlistan estos valores obtenidos para el prototipo terminado usando la notación del capítulo anterior

Tabla 3.2: Parámetros del modelo

Parámetro	Descripción	Valor	Unidades
$g$	Fuerza de Gravedad	9.81	$m/s^2$
$L$	Mitad de la Longitud del brazo prototipo	0.85	metros
$R$	Radio de la llanta	0.20	metros
$D$	Distancia del centro del vehículo al centro de una llanta	0.40	metros
$m_r$	Masa de una rueda	3	Kg
$m_b$	Masa del cuerpo del vehículo mas el tripulante	109.5	Kg

### 3.5.1. Momentos de Inercia ( $I_r$ , $I_\theta$ , $I_\phi$ )

El momento de inercia (denotado con el símbolo  $I$ ) es una medida de la inercia rotacional de un cuerpo. El momento de inercia refleja la distribución de masa de un cuerpo o de un sistema de partículas en rotación, respecto a un eje de giro. El momento de inercia sólo depende de la geometría del cuerpo y de la posición del eje de giro; pero no depende de las fuerzas que intervienen en el movimiento [Landau 2003].

En este sistema existen tres momentos de inercia:  $I_R$ ,  $I_\theta$  y  $I_\phi$  los cuales a continuación se explica como se obtuvieron.

El momento de inercia  $I_R$  se obtiene directamente de la Figura E.1 en el Apéndice E como el momento de inercia respecto a su eje correspondiente a una rueda cilíndrica de radio  $R$  y masa  $m_r$ .

$$I_r = \frac{1}{2} m_r R^2 \quad (3.1)$$

Sustituyendo en la ecuación (3.1) tenemos,

$$I_r = \frac{1}{2} * 3 * 0.20^2 = 0.06 \text{ Kg/m}^2$$

Para el momento de inercia  $I_\theta$  debemos considerar el giro del vehículo respecto al eje  $z$  (ver Figura 2.1) cuando lleva montado un conductor humano. Como la geometría, la colocación y la masa del humano puede variar dependiendo de quien se trate, consideraremos una simplificación promediada de un cuerpo humano en forma de un bloque rectangular de masa  $m_H$  y supondremos que está colocado perfectamente centrado sobre la base del vehículo como se muestra en la Figura 3.5.

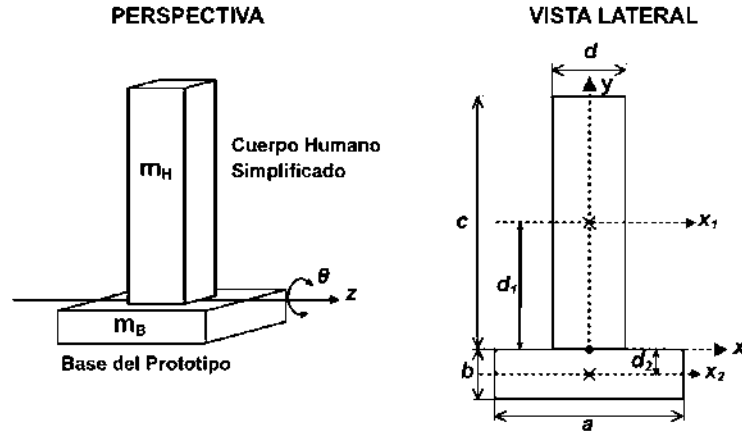


Figura 3.5: Simplificación del cuerpo humano sobre la base del vehículo

Para obtener el momento de inercia de este tipo de cuerpos utilizamos el Teorema de Steiner [Landau 2003] (o ejes paralelos) el cual se define en la siguiente ecuación:

$$I = \sum m_i r_i^2 \quad (3.2)$$

Donde:

$I$  = Momento de inercia del cuerpo

$m_i$  = Masa del cuerpo

$r_i$  = Distancia del eje

Tabla 3.3: Valor de variables para obtención de  $I_\theta$ 

Parámetro	Descripción	Valor	Unidades
$a$	Ancho del Cuerpo Inferior	0.80	metros
$b$	Altura del Cuerpo inferior	0.18	metros
$c$	Altura del Cuerpo Superior	1.7	metros
$d$	Ancho aproximado del Cuerpo Superior	0.25	metros
$d_1$	Distancia del Centro del Cuerpo Superior al eje central	0.85	metros
$d_2$	Distancia del Centro del Cuerpo Inferior al eje central	0.09	metros
$m_B$	Masa de la base del Prototipo	39.5	Kg
$m_H$	Masa del Cuerpo Humano	70	Kg

Entonces, usando la expresión para el momento de inercia de un bloque rectangular que gira sobre su eje central (eje  $z$ ) tomada del Apéndice E para ambos cuerpos, para después sumar sus momentos de inercia y obtener el momento de inercia total  $I_\theta$ .

$$I_\theta = I_{\theta 1} + I_{\theta 2} \quad (3.3)$$

Para el cuerpo superior:

$$I_{\theta 1} = m_H d_1^2 + \frac{dc^3}{12} \quad (3.4)$$

Para el cuerpo inferior:

$$I_{\theta 2} = m_B d_2^2 + \frac{ab^3}{12} \quad (3.5)$$

Sustituyendo en la Ecuación (2.41) las ecuaciones (2.37) y (2.43) y los valores de la Tabla 3.3 obtenemos:

$$I_\theta = m_H d_1^2 + m_B d_2^2 + \frac{dc^3 + ab^3}{12}$$

$$I_\theta = 70 * (0.85)^2 + 39.5 * (0.09)^2 + \frac{0.25 * (1.7)^3 + 0.80 * (0.18)^3}{12}$$

$$I_\theta = 51 \text{ Kg/m}^2 \quad (3.6)$$

Para obtener el momento de inercia  $I_\phi$  usamos la formula de un bloque rectangular que gira sobre su eje central en  $y$  de la Apéndice E.

$$I = \frac{m}{12} (e^2 + f^2) \quad (3.7)$$

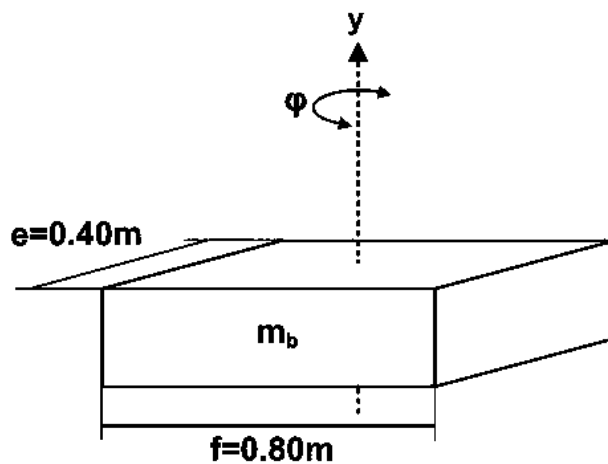


Figura 3.6: Diagrama de dimensiones de la Base del Prototipo

Basándonos en la Figura 3.6 y sustituyendo los valores en la ecuación (2.40) tenemos:

$$I_{\phi} = \frac{109.5}{12} (0.40^2 + 0.80^2)$$

$$I_{\phi} = 7.3 \text{ Kg/m}^2$$

Finalmente en la Tabla 3.4 se muestran los valores obtenidos al sustituir los datos del prototipo.

Tabla 3.4: Momentos de Inercia

Parámetro	Descripción	Valor
$I_{\theta}$	Momento de Inercia con respecto al eje $z$	51
$I_r$	Momento de Inercia de las Ruedas	0.06
$I_{\phi}$	Momento de Inercia con respecto al eje $y$	7.3



# CAPÍTULO 4

## Instrumentación del Prototipo

La instrumentación del sistema es el conjunto de componentes electrónicos y electromecánicos que le permitirán al prototipo ejecutar las tareas de movimiento para las que fue concebido, tales como: mantener el equilibrio, moverse en forma rectilínea, dar giros o movimientos curvos, acelerar o frenar y en general responder a los comandos del operador, así como informarle también acerca del estado general del prototipo.

En la figura 4.1 se muestra un diagrama de los componentes principales de instrumentación desarrollada para el prototipo

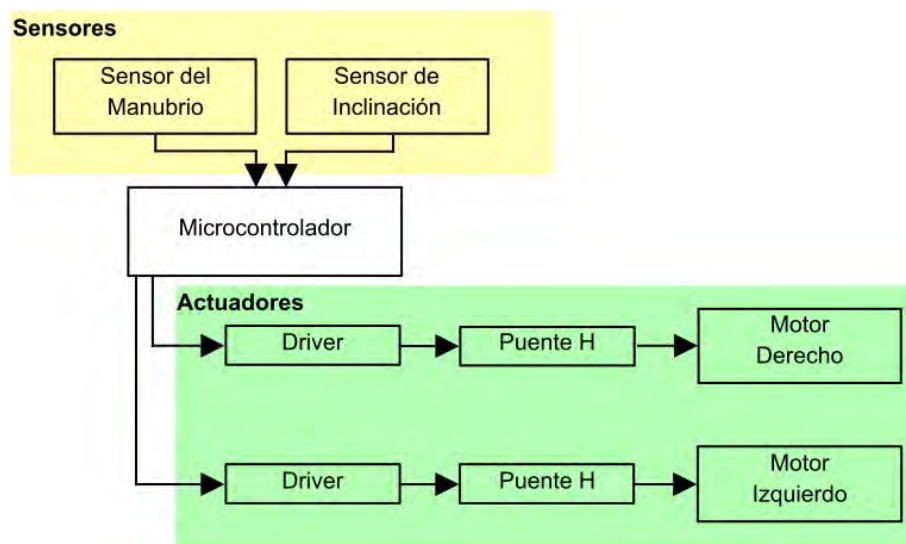


Figura 4.1: Diagrama de componentes de Instrumentación

A continuación se describe cada una de las partes que integran la instrumentación en este prototipo.

## 4.1. Actuadores

Para la selección de los motores se hizo una estimación del torque máximo que tendrán que desarrollar al moverse sobre una superficie horizontal, para lo cual se consideró el diagrama simplificado de la figura 4.2, el cual representa el prototipo desplazándose sobre una superficie horizontal impulsado por las fuerzas de sus motores  $F$  a una aceleración lineal  $a$ . Entonces se tiene que,

$$F = Ma + F_M \quad (4.1)$$

donde  $M$  es la masa total del prototipo mas la del tripulante y  $F_M$  es la fuerza de fricción.

Si se quiere una aceleración de  $0.5m/seg^2$  y despreciando la fricción, el par respectivo será  $\tau = FR$  donde  $R$  es el radio de la llanta. Sustituyendo los valores de la Tabla 3.2 tenemos,

$$\tau = (109.5) (0.5) (0.20) = 10.95 \text{ Kg m} = 109.31 \text{ N m}$$

y por cada llanta,

$$\tau_d = \tau_i = 54.655 \text{ N m} \quad (4.2)$$

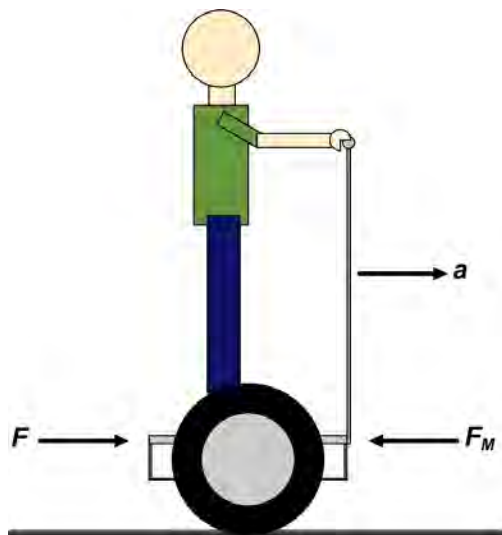


Figura 4.2: Desplazamiento sobre el plano horizontal

Los motores elegidos son BaneBots PDX256-256:1 Gearmotor (Figura 4.3) a 12V DC los cuales ya tienen caja reductora con relación 256:1 otorgándonos un torque de parado aproximado de 165.6 N-m para una corriente de 148 A, el cual es el triple del calculado en (4.2).

En la Tabla 4.1 se muestran algunos datos técnicos adicionales para el motor elegido.

Tabla 4.1: Características del PDX256-256:1

Tipo	Planetario
Estados de la caja reductora	4-4:1, 4:1, 4:1, 4:1
Material de la caja reductora	Acero
Velocidad sin carga	94 RPM
Corriente nominal	1.5 A
Eficiencia	45.33 %
Potencia Pico	410.135 Watts
Corriente de parado	148 A
Torque de parado	165.6 N-m
Peso	0.540 Kg
Tamaño	0.038 x 0.127 x 0.038 m

Como se ve en la figura 4.3 el tamaño del motor es pequeño, ligero y de un torque que supera lo necesario para mover el prototipo. Cabe mencionar que debido a su tamaño la caja de engranes tiende a calentarse por lo cual el lugar donde se colocó en la estructura base ayudará a reducir el incremento de calor ya que se encuentra bien ventilado y atornillado a una solera de acero que ayudará a disipar el calor. Otra desventaja de este motor que menciona el fabricante, es que no se le puede poner un peso muy grande al final de la flecha del motor, ya que esto ocasionaría daño en la caja de engranes., para evitar esto se optó por el acople por medio de una cadena hacia las llantas agregando también una chumacera que le diera soporte a la flecha del motor, para más detalle ver la Sección 3.2.



Figura 4.3: PDX256-256:1 Gearmotor

#### 4.1.1. Drivers de Actuadores

El prototipo además de moverse hacia adelante, debe moverse en reversa y poder girar hacia ambos lados (izquierda, derecha), para lograr esto se necesitan drivers capaces de inyectar corriente en ambos sentidos al motor y soportar corrientes altas, además de alta velocidad de conmutación para aceptar la señal de PWM enviada por el controlador para que el motor gire a la velocidad y dirección deseada.

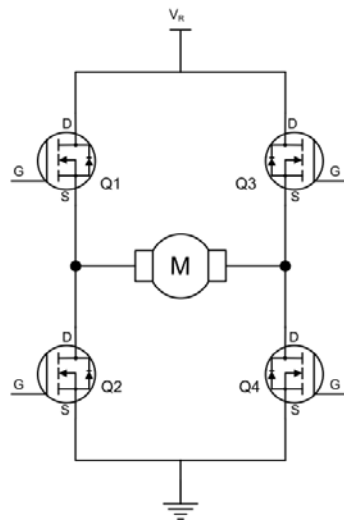


Figura 4.4: Puente H

Para lograr el flujo de corriente en ambas direcciones en el motor se construyó un puente H como se muestra en la Figura 4.4 con cuatro Mosfets IRFZ42 canal N de alta velocidad de swicheo los cuales son capaces de soportar hasta 60 V y una corriente de 35 A.

La lógica de funcionamiento para controlar la dirección de la corriente en el motor es sencilla, cerramos  $Q_1$  y  $Q_4$  y abrimos  $Q_2$  y  $Q_3$  para que la corriente circule de izquierda a derecha (ver Figura 4.4) haciendo girar el motor en un sentido y al contrario, para que la corriente circule de derecha a izquierda cerramos  $Q_2$  y  $Q_3$  y abrimos  $Q_1$  y  $Q_4$  haciendo que el motor gire hacia la dirección contraria.

Por otro lado, debido a que las conmutaciones de corte a saturación y de saturación a corte de los Mosfets no ocurren de manera instantánea, se debe considerar un tiempo-muerto para evitar cortocircuitar la fuente y asegurar que el par de Mosfets  $Q_2$ ,  $Q_3$  esté en corte antes de que el par  $Q_1$ ,  $Q_4$  entre a conducción y viceversa para evitar sobrecalentamiento y desperdicio de energía en los Mosfets. Para lograr esto se utilizaron los drivers IR2110 en su configuración Bootstrap, lo cual permite que los Mosfets conmuten rápido y de manera adecuada otorgando además el voltaje necesario entre compuerta-surtidor, otra ventaja es que se aísla la etapa de control de la etapa de alta potencia. Para ver mas características acerca Driver IR2110 ver hoja de datos en Apéndice C.

Para el diseño de los drivers usó en la hoja de aplicación del fabricante [AN-978], en la cual se considera un puente H con cuatro Mosfets Canal N el cual es mostrado en la Figura 4.5.

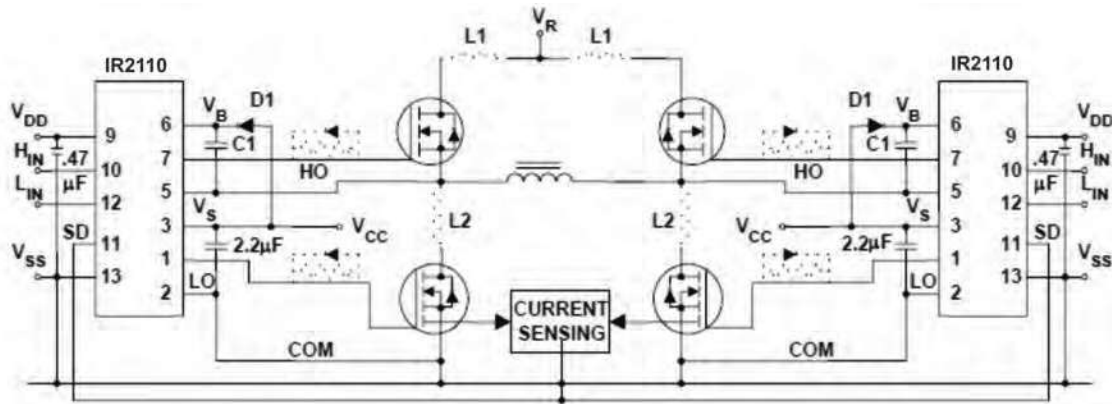


Figura 4.5: Puente H con Drivers IR2110 [AN-978]

Esta configuración es conocida como Bootstrap, para el diseño solo se debe considerar el Diodo  $D_1$  y el capacitor  $C_1$ .  $D_1$  debe ser un diodo de alta velocidad de conmutación para

evitar la descarga del capacitor  $C_1$  además de evitar los picos de corriente inversos cuando el Mosfet conmuta de un estado a otro. El diodo elegido fue el PG104, este es un diodo rectificador de conmutación rápida (hoja de datos Apéndice C). El Capacitor se selecciona en base a la siguiente fórmula [dt98-2-Manual]:

$$C \geq \frac{2 \left[ 2Q_g + \frac{I_{qbs(max)}}{f} + Q_{ls} + \frac{I_{Cbs(leak)}}{f} \right]}{V_{cc} - V_f - V_{LS} - V_{Min}} \quad (4.3)$$

Donde,

$Q_g$  = Carga en la compuerta del Mosfet = 100 nC

$I_{qbs(max)}$  = Máxima corriente de reposo = 250  $\mu$ A

$f$  = Frecuencia de operación = 50 KHz

$Q_{ls}$  = Nivel de carga requerida por ciclo = 5 nC

$I_{Cbs(leak)}$  = Corriente de fuga del Diodo Bootstrap = 5  $\mu$ A

$V_{cc}$  = Voltaje de alimentación = 12 V

$V_f$  = Voltaje a través del lado-bajo del diodo Bootstrap = 0.7 V

$V_{LS}$  = Voltaje a través del lado-bajo del FET = 0.5 V

$V_{Min}$  = Mínimo voltaje entre  $V_B$  y  $V_S$  = 10 V

Estos valores son obtenidos de las hojas de datos de los componentes, así como de algunos parámetros de diseño. Sustituyendo los valores en la ecuación (2.36) tenemos,

$$C_1 \geq \frac{2 \left[ 2(100 \times 10^{-9}) + \frac{250 \times 10^{-6}}{50 \times 10^3} + 5 \times 10^{-9} + \frac{5 \times 10^{-6}}{50 \times 10^3} \right]}{12 - 0.7 - 0.5 - 10} = 525 nF$$

Por lo tanto,  $C_1$  debe ser mayor a 525 nF, para este caso usamos un capacitor de 1  $\mu$ F.

Los diagramas eléctricos de los Drivers y el puente H pueden ser vistos en la Apéndice A.

## 4.2. Sensores

Basándonos en el modelado obtenido en el Capítulo 2 se puede observar que la variable principal a medir es el ángulo  $\theta$ , ya que este siempre debe de estabilizarse para evitar que el conductor caiga del vehículo.

Para poder medir el ángulo  $\theta$  se utilizó un acelerómetro en combinación con un giroscopio, ambos basados en tecnología MEMS. En la siguiente sección se describen diferentes tipos de acelerómetros y las técnicas para medir posición.

### 4.2.1. Medición de Inclinación Basado en Acelerómetros

El acelerómetro es un elemento que mide la aceleración; la aceleración es el cambio de velocidad con respecto al tiempo. Los acelerómetros se pueden usar para medir: vibraciones, impactos, inclinación, choques y movimiento de un objeto.

Existen diferentes tipos de acelerómetros [Moreno 2009] lo que los diferencia es el tipo de elemento de sensado y su principio de operación:

- **Capacitivo:** Acelerómetros que sensan el cambio en la capacitancia eléctrica con respecto a la aceleración. Este acelerómetro mide el cambio de capacitancia entre condición estática y estado dinámico.
- **Piezoeléctrico:** Estos acelerómetros usan material piezoeléctrico como cristales los cuales generan un potencial eléctrico al aplicarles esfuerzo (mejor conocido como efecto piezoeléctrico). El esfuerzo es aplicado a manera de aceleración, lo cual crea una carga eléctrica.
- **Piezoresistivo:** Son los acelerómetros que trabajan midiendo la resistencia eléctrica del material cuando un estrés mecánico es aplicado.
- **Efecto Hall:** El acelerómetro trabaja midiendo variaciones de voltaje del cambio magnético alrededor del acelerómetro.
- **Magnetoresistivo:** Este trabaja midiendo los cambios de resistencia debido al campo magnético. La estructura y función es parecida al de efecto Hall excepto que en vez de medir voltaje, mide resistencia.
- **Transferencia de calor:** Acelerómetros que miden los cambios internos en transferencia de calor debido a la aceleración. Una simple fuente de calor es centrada en un sustrato y suspendida a través de una cavidad. Bajo aceleración cero el gradiente de temperatura es simétrico. La aceleración en cualquier dirección causa que el gradiente de temperatura se vuelva asimétrico debido a la convección de transferencia de calor.
- **Acelerómetros basados en MEMS:** Esta tecnología es basada en diferentes herramientas y metodologías que son usadas para formar pequeñas estructuras con dimensiones en la escala de micrómetros (una millonésima parte de un metro). En la Figura 4.6 se muestra una fotografía micrométrica de un acelerómetro de este tipo.

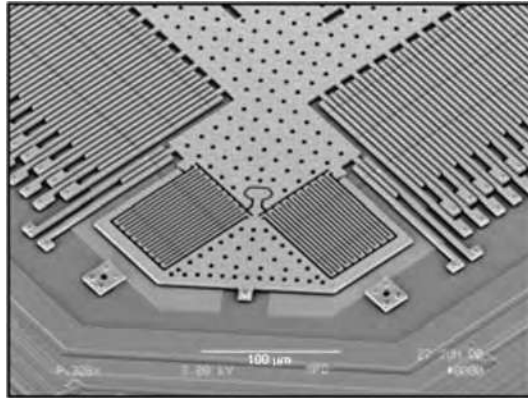


Figura 4.6: Acelerómetro basado en MEMS

Para usar el acelerómetro como sensor de inclinación, partimos del principio de que la constante de gravedad terrestre es  $9.81 \text{ m/s}^2$ , este valor se obtiene solo cuando el acelerómetro está alineado con la dirección del campo gravitacional terrestre, por lo tanto al variar el ángulo de inclinación, la resultante de aceleración también cambia.

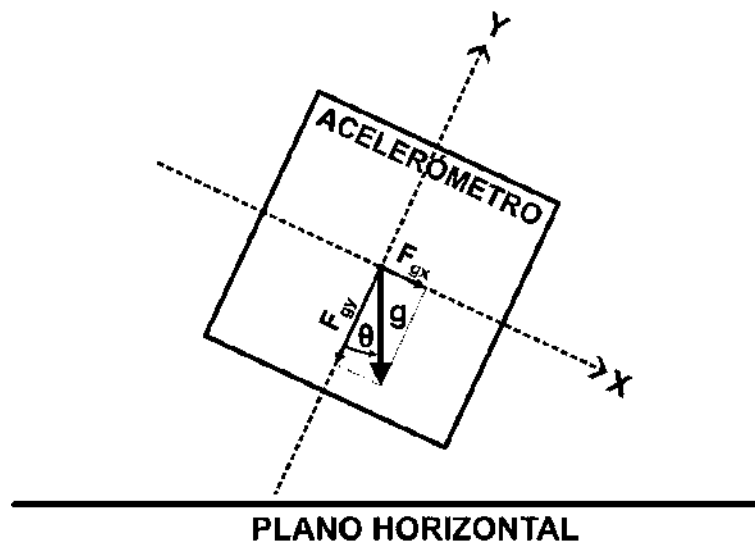


Figura 4.7: Medición del ángulo de inclinación

En la Figura 4.7, se observa que el ángulo  $\theta$  se obtiene de alguna de las dos componentes de la fuerza  $g$ :  $F_{gy}$  y  $F_{gx}$  donde,

$$F_{gy} = g \cos \theta$$

$$F_{gx} = g \sin \theta$$

Como los acelerómetros entregan un nivel de voltaje proporcional a la componente de aceleración con que están alineados el cual se describe en la ecuación (4.4)

$$v_{acel} = v_{offset} + (S * \sin \theta) \quad (4.4)$$

donde

- $v_{acel}$  Voltaje entregado por el acelerómetro
- $v_{offset}$  Voltaje de offset- Dato del Fabricante
- $S$  Sensibilidad del acelerómetro-Dato del Fabricante
- $\theta$  Ángulo de Inclinación

Para evitar trabajar con funciones trigonométricas aproximamos  $\theta$  con una línea cerca del origen, así el  $\sin \theta \approx \theta$  (ver Figura 4.8 ).

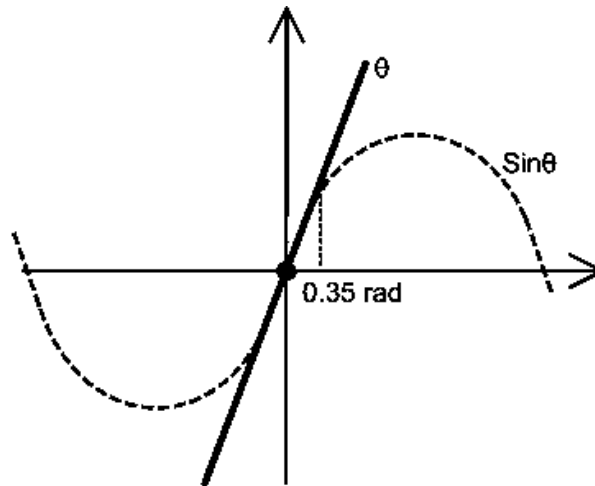


Figura 4.8: Aproximación de  $\theta$

Por lo tanto podemos escribir de nuevo la ecuación (4.4) en forma aproximada como

$$v_{acel} = v_{offset} + (S * \theta)$$

despejando  $\theta$  tenemos

$$\theta \approx \frac{v_{acel} - v_{offset}}{S} \quad (4.5)$$

La ecuación (4.5) se cumple siempre y cuando estemos trabajando cerca del origen ( $0^\circ$ ). El prototipo sólo alcanza a inclinarse ángulos dentro del rango de  $\pm 20^\circ = \pm 0.35 \text{ rad}$  por lo que esta aproximación es suficiente para medir adecuadamente  $\theta$ .

La medición de  $\theta$  será tan exacta como sensible sea nuestro acelerómetro siempre y cuando la única aceleración que lo afecte sea la fuerza de gravedad, ya que si existe otra aceleración, esta contaminará nuestra medición. El prototipo está expuesto a aceleraciones parásitas, ya que por su condición de movimiento fácilmente se producen vibraciones debidas a irregularidades en el terreno y juego entre las piezas mecánicas.

#### 4.2.2. Uso del par acelerómetro-giroscopio para Medición de Inclinación

Además del acelerómetro hay otra manera de medir la inclinación, un giroscopio permite medir la velocidad angular ( $\dot{\theta}$ ). Los giroscopios presentan la ventaja de que no son afectados por las aceleraciones parásitas, pero presentan la desventaja de que se debe conocer su posición inicial, en otras palabras la posición de  $\theta$  se puede calcular como:

$$\theta(t) = \theta(t_0) + \int_{t_0}^t \dot{\theta} dt = \theta_{t-1} + \dot{\theta} * t \quad (4.6)$$

la cual se puede aproximar usando rectángulos para los instantes  $t, t - 1$

$$\theta(t) = \theta(t - 1) + \dot{\theta}(t - 1) T_s \quad (4.7)$$

Donde,

- $\theta(t)$  Medición de ángulo en el instante  $t$
- $\theta_{t-1}$  Medición anterior o condición inicial
- $\dot{\theta}$  Velocidad angular entregada por el giroscopio
- $T_s$  Tiempo de Muestreo

Otro problema que presentan los giroscopios es el error acumulado asociado a la integración numérica el cual crece a medida que transcurre el tiempo. Esto se debe a que el voltaje entregado por el giroscopio  $V_g$  no es directamente  $\dot{\theta}$ , si no que contiene una desviación  $b$ , es decir,

$$V_g = \dot{\theta} + b \quad (4.8)$$

de manera que al sustituir en (4.6)  $\theta(t)$  se ve afectada por un error tipo rampa que no para de crecer con el tiempo.

Tanto el acelerómetro como el giroscopio presentan ventajas y desventajas al medir la posición del vehículo pero al utilizarlos simultáneamente se complementan y pueden dar una medición más confiable. El acelerómetro no necesita conocer la posición inicial además de que su medición a largo plazo es buena mientras que el giroscopio mide la posición mejor en periodos cortos de tiempo ya que este no es afectado por aceleraciones externas [Poso 2010].

Un problema que presentan este tipo de sensores es el ruido de medición, este ruido puede afectar a tal grado de que la medición sea errónea. Para evitar el ruido de medición existen diferentes técnicas de filtrado como los filtros complementarios o el Filtro de Kalman, etc. En este prototipo se implementó el Filtro de Kalman que se explicará más a detalle en la siguiente sección.

Tabla 4.2: Características del acelerómetro y giroscopio

Característica	Acelerómetro	Giroscopio
Matrícula	MMA7341L	XV-3500CB Prototype PCB
Fabricante	Pololu - Robotics & Electronics	Webtronic
Voltaje de operación	2.2 a 16 V	+5V o +3.3V
Tipo de señal de salida	Analógica	Analógica o I <sup>2</sup> C
Resolución	440 mV/g	0.65mV/deg/s
Voltaje de referencia	1.65V	1.35V
Rango de medición	±3 o ±11g	±100deg/s
Ancho de banda de respuesta	400Hz	200Hz
Consumo de energía	0.5 mA	1.9mA

En este prototipo se usa un par acelerómetro-giroscopio para la medición de la posición. Las características del acelerómetro y el giroscopio se enlistan en la Tabla 4.2. Cabe mencionar que tanto el acelerómetro como el giroscopio están montados sobre una placa de desarrollo la cual acondiciona el voltaje de alimentación al sensor y además cuenta con una etapa de filtrado a la salida. En ambos casos usamos sus salidas analógicas para conectarlas al Convertidor A/D del Microcontrolador. Los diagramas de conexión se pueden ver en la Figura 4.9.



Figura 4.9: Diagramas de conexión

### 4.2.3. Filtro de Kalman

El Filtro de Kalman fue desarrollado por Rudolf E. Kalman [Kalman 1960], que en 1960 publicó el artículo “A new Approach to Linear Filtering and Prediction” describiendo la solución recursiva del problema del filtrado lineal de datos discretos.



Figura 4.10: Ciclo del Filtro de Kalman Discreto [Greg 2001]

El Filtro de Kalman estima los estados de un proceso usando la estructura de un observador retroalimentado, este estima el estado del proceso en un momento y después hace una

corrección basada en la retroalimentación en forma de mediciones (con ruido). Las ecuaciones del Filtro de Kalman caen dentro de dos grupos: Ecuaciones de Predicción y Ecuaciones de Corrección. Las ecuaciones de predicción son responsables de la proyección a futuro (en tiempo) del estado actual y de la covarianza estimada del error para obtener a priori estimaciones del siguiente paso. Las ecuaciones de corrección son responsables de la retroalimentación. Al final el algoritmo de estimación se asemeja a un algoritmo predictor-corrector para resolver problemas numéricos como se muestra en la Figura 4.10. [Greg 2001]

Para poder aplicar el filtro de Kalman se requiere tener un modelo lineal discreto que describa el proceso cuyos estados se quieren estimar, es decir, un modelo de la forma:

$$\begin{aligned}x_k &= Ax_{k-1} + Bu_{k-1} \\y_k &= Hx_k\end{aligned}\tag{4.9}$$

Donde

- $x_k$  Estados actuales
- $x_{k-1}$  Estados anteriores
- $A$  Matriz de relación del estado previo con el actual
- $B$  Matriz de control (opcional)
- $u_{k-1}$  Entradas anteriores

Las ecuaciones<sup>1</sup> de predicción consisten en hacer uso del modelo 4.9 para predecir el estado siguiente junto con una ecuación de predicción de la matriz de covarianza del error de estimación:

$$\text{Predicción} \begin{cases} \hat{x}_k^- = A\hat{x}_{k-1} + Bu_{k-1} & (a) \\ P_k^- = AP_{k-1}A^T + Q & (b) \end{cases}\tag{4.10}$$

Donde

- $\hat{x}_k^-$  Valor de la predicción del estado siguiente
- $P$  Matriz de covarianza del error de estimación
- $Q$  Matriz de covarianza de la perturbación aleatoria del proceso a estimar

Las ecuaciones de corrección calculan una ganancia óptima llamada ganancia de Kalman para incorporar la corrección a partir de la medición entregada por los sensores. Esta ganancia  $K$  se obtiene a partir de la predicción de  $P$  y una vez calculada  $K$  se usa para corregir la predicción de  $x$  y de  $P$ .

---

<sup>1</sup>El planteamiento del problema para la obtención de estas ecuaciones pueden ser vistas en la referencia [Greg 2001] Sección 4.1, p20

$$\text{Corrección} \begin{cases} K_k = P_k^- H^T (H P_k^- H^T + R)^{-1} & (c) \\ \hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k (z_k - H \hat{x}) & (d) \\ P_k = (I - K_k H) P_k^- & (e) \end{cases} \quad (4.11)$$

donde,

$K_k$  Ganancia de Kalman

$H$  Matriz que relaciona el estado con la medición  $z_k$

$I$  Matriz Identidad

$z_k$  Medición entregada por sensores

Si queremos utilizar el filtro de Kalman para la estimación del ángulo de inclinación  $\theta$  a partir de las mediciones entregadas por el acelerómetro ( $V_a$ ) y el giroscopio ( $V_g$ ); es necesario obtener un modelo de estado discreto. Consideremos los voltajes entregados por los sensores:

$$V_g = \dot{\theta} + b \quad (4.12)$$

$$V_a = \theta \quad (4.13)$$

Sustituyendo (4.12) en (4.6) obtenemos:

$$\theta(t) = \theta(t_0) + \int_{t_0}^t (V_g - b) dt$$

Considerando  $t_0 = t - 1$  y aproximando la integral por un rectángulo de ancho  $T_s$

$$\theta(t) = \theta(t_0) + \int_{t_0}^t (V_g(t) - b(t)) dt$$

$$\theta(t) = \theta(t - 1) + (V_g(t - 1) - b(t - 1)) T_s \quad (4.14)$$

Eligiendo los estados,

$$x_1(t) = \theta(t)$$

$$x_2(t) = b(t)$$

obtenemos de (4.14):

$$x_1(t) = x_1(t-1) - x_2(t-1)T_s + V_g(t-1)T_s \quad (4.15)$$

Además, supondremos que  $b(t)$  se mantiene constante, por lo tanto

$$b(t) = b(t-1) \quad (4.16)$$

Las ecuaciones (4.15) y (4.16) son el modelo de espacio de estado buscado y se pueden escribir en la forma (4.9):

$$x(k) = Ax(k-1) + BV_g(k-1) \quad (4.17)$$

con,

$$y(k) = x_1(k) \quad (4.18)$$

Es decir, considerando (4.15) y (4.16):

$$x(k) = \begin{bmatrix} \theta(k) \\ b(k) \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -T_s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} T_s \\ 0 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Una vez que tenemos el modelo para la predicción, el cual procesa la medición entregada por el giroscopio  $V_g$ , usaremos la medición entregada por el acelerómetro  $V_a$  para la etapa de corrección, es decir, en la ecuación (2.51) usaremos  $z_k = V_a(k)$ .

Una dificultad importante para implementar el filtro de Kalman es que se requiere conocer las matrices de covarianza  $Q$ ,  $R$  las cuales dependen del ruido y de la manera en como se propaga en la medición, lo cual no se conoce, por esta razón se considerará como parámetro a sintonizar por prueba y error.

Otro problema es la inicialización de  $P$ , para esto se recomienda un valor grande de  $P$ , en nuestro caso se usará el siguiente:

$$P = \begin{bmatrix} 1000 & 0 \\ 0 & 1000 \end{bmatrix}$$

La Figura 4.11 muestra el ciclo de predicción-corrección del Filtro de Kalman pero ahora incluyendo las ecuaciones que se deben llevar a cabo.

La implementación del Filtro de Kalman en código se puede ver en la Apéndice D.

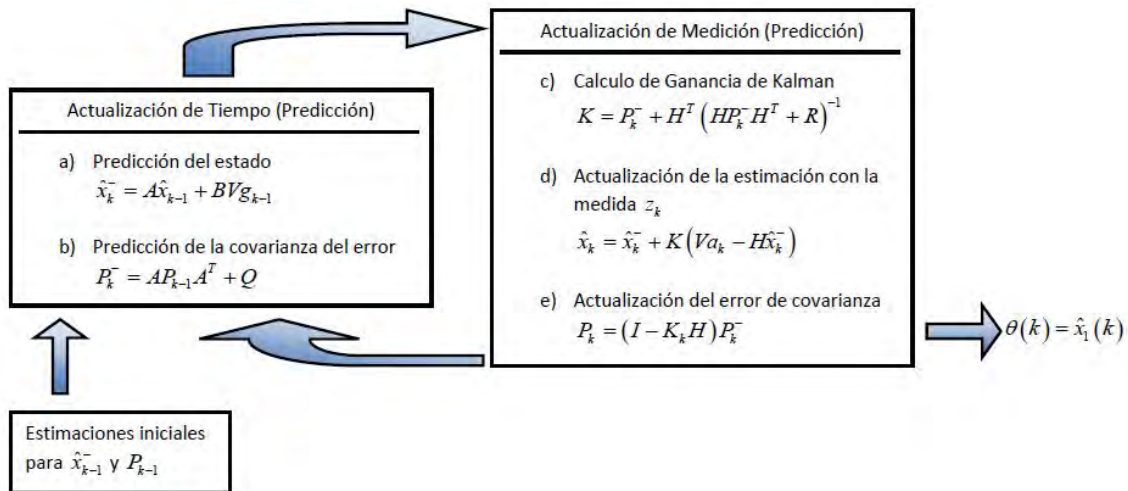


Figura 4.11: Ciclo del Filtro de Kalman para la medición de  $\theta$  [Greg 2001]

### 4.3. Microcontrolador

El Microcontrolador es una de las partes más importantes del prototipo ya que se encarga de recibir las señales de los sensores, procesarlas por medio de alguna técnica y enviar la señal de control a los actuadores. Otras funciones que el Microcontrolador tiene es sensar el nivel de carga de las baterías y el despliegado de variables en un display.

Los requerimientos necesarios que debe tener el Microcontrolador para esta implementación son:

- Velocidad de procesamiento para los cálculos matemáticos necesarios en la implementación de técnicas de control y filtrado
- 2 módulos PWM independientes como mínimo.
- Al menos 4 módulos de conversión A/D.
- Al menos 8 Pines de puertos I/O para el despliegado de variables.
- Opcionalmente ser un dispositivo de bajo consumo de energía para hacer más eficiente el sistema.
- Ser económico y fácil de reprogramar.

Tomando en cuenta los requerimientos del sistema se escogió un Microcontrolador de Microchip DSPic40f4011 . Los DSPic incorporan todas las posibilidades de los anteriores PICs y añaden varias operaciones de DSP implementadas en hardware. Ideales para control electrónico de motores eléctricos de inducción, control sobre audio, etc. Cabe mencionar que estos dispositivos son fácil de programar ya que usan lenguaje C además de económicos, su costo es de \$5.7USD. Las características técnicas principales del DSPic30f4011 se pueden ver en la Tabla 4.3.

Tabla 4.3: Características Principales del DSPic30f4011 [30f4011-Manual]

**dsPIC30F Motor Control and Power Conversion Family\***

Device	Pins	Program Mem. Bytes/Instructions	SRAM Bytes	EEPROM Bytes	Timer 16-bit	Input Cap	Output Comp/Std PWM	Moto Control PWM	A/D 10-bit 500 Ksps	Quad Enc	UART	SPI™	I <sup>2</sup> C™	CAN
dsPIC30F2010	28	12K/4K	512	1024	3	4	2	6 ch	6 ch	Yes	1	1	1	-
dsPIC30F3010	28	24K/8K	1024	1024	5	4	2	6 ch	6 ch	Yes	1	1	1	-
dsPIC30F4012	28	48K/16K	2048	1024	5	4	2	6 ch	6 ch	Yes	1	1	1	1
dsPIC30F3011	40/44	24K/8K	1024	1024	5	4	4	6 ch	9 ch	Yes	2	1	1	-
<b>dsPIC30F4011</b>	<b>40/44</b>	<b>48K/16K</b>	<b>2048</b>	<b>1024</b>	<b>5</b>	<b>4</b>	<b>4</b>	<b>6 ch</b>	<b>9 ch</b>	<b>Yes</b>	<b>2</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>
dsPIC30F5015	64	66K/22K	2048	1024	5	4	4	8 ch	16 ch	Yes	1	2	1	1
dsPIC30F6010	80	144K/48K	8192	4096	5	8	8	8 ch	16 ch	Yes	2	2	1	2

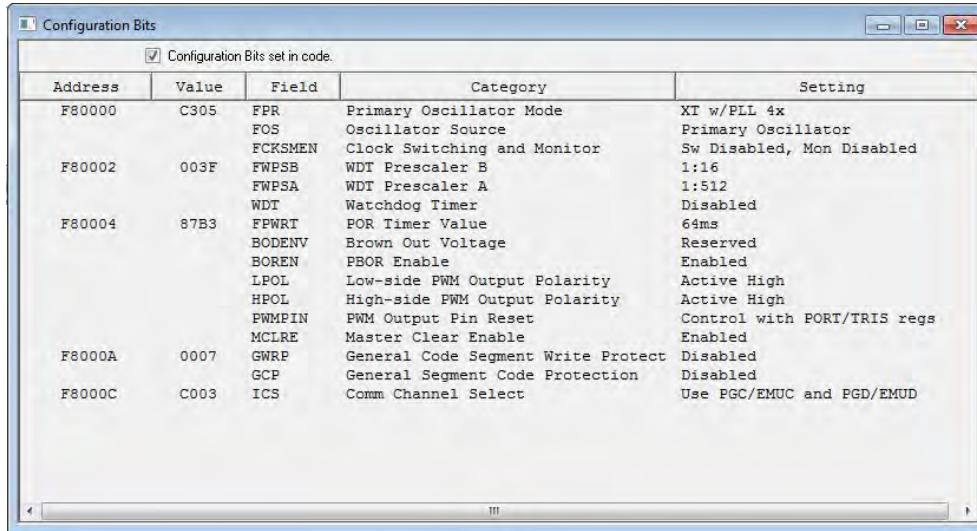
### 4.3.1. Configuración del Microcontrolador

La configuración adecuada del Microcontrolador es esencial ya que de ella depende el buen funcionamiento del sistema. En esta implementación se deben tomar consideraciones en la configuración dependiendo del funcionamiento de los actuadores y sensores utilizados.

Para la implementación de código se utilizo el software MPLAB v8.63 junto con el compilador C30, ambos de la compañía Microchip .

#### 4.3.1.1. Configuración General del Microcontrolador

El Microcontrolador es configurado desde la función “Configuration bits” de MPLAB la cual se muestra en la Figura 4.12.



Address	Value	Field	Category	Setting		
F80000	C305	FPR	Primary Oscillator Mode	XT w/PLL 4x		
		FOS	Oscillator Source	Primary Oscillator		
		FCKSMEN	Clock Switching and Monitor	Sw Disabled, Mon Disabled		
F80002	003F	FWPSE	WDT Prescaler B	1:16		
		FWPSA	WDT Prescaler A	1:512		
		WDI	Watchdog Timer	Disabled		
F80004	87B3	FPWRT	POR Timer Value	64ms		
		BODENV	Brown Out Voltage	Reserved		
		BOREN	PBOR Enable	Enabled		
		LPOL	Low-side PWM Output Polarity	Active High		
		HPOL	High-side PWM Output Polarity	Active High		
		PWMPIN	PWM Output Pin Reset	Control with PORT/TRIS regs		
		MCLRE	Master Clear Enable	Enabled		
		F8000A	0007	GWRP	General Code Segment Write Protect	Disabled
				GCP	General Segment Code Protection	Disabled
		F8000C	C003	ICS	Comm Channel Select	Use PGC/EMUC and PGD/EMUD

Figura 4.12: Configuración de Bits del Microcontrolador DSPic30f4011

Las partes más importantes de la configuración son principalmente las que tienen que ver con la frecuencia del oscilador primario, que en este caso utilizamos un cristal de 8 MHz y de acuerdo a la ecuación (4.19), nuestro DSPic trabajará a una frecuencia de  $FCY = 16$  MHz.

$$FCY = \frac{F_{OSC}}{4} = \frac{(FRECUENCIA\ DEL\ OSCILADOR\ PRIMARIO * MULTIPLICADOR\ PLL)}{POS-ESCALDOR\ PROGRAMABLE * 4} \quad (4.19)$$

$$FCY = \frac{(8\text{MHz} * 4)}{1 * 4} = 8\text{MHz}$$

#### 4.3.1.2. Configuración del Convertidor A/D

El Convertidor A/D es configurado de tal manera que pueda recibir 4 señales analógicas las cuales provienen de:

- Acelerómetro
- Giroscopio
- Sensor de Giro del Manubrio
- Nivel de Voltaje de Batería

Para el funcionamiento adecuado del convertidor A/D en el Microcontrolador se debe seguir el siguiente procedimiento:

### 1. Configuración del módulo A/D

- Seleccionar los pins como entradas analógicas en ADCPCFG.
- Seleccionar la fuente de voltaje de referencia que coincida con el rango de las entradas analógicas ADCON2.
- Seleccionar el reloj de conversión analógico que coincida con el rango de datos con el reloj de procesos ADCON3.
- Determinar cuántos canales S/H van a ser usados ADCON2 y ADPCFG.
- Determinar como el muestreo ocurrirá, configurando los registros ADCON1 y ADCSSL.
- Seleccionar la apropiada secuencia de muestra/conversión ADCON1 y ADCON3.
- Seleccionar como se presentan los resultados de las conversiones en el buffer ADCON1.
- Seleccionar el rango de interrupción ADCON2.
- Encender el módulo A/D ADCON1.

### 2. Configurar la interrupción del módulo A/D (si es requerida)

- Limpiar bandera ADIF.
- Seleccionar la prioridad de la interrupción del Modulo A/D.

El código en C referente a la configuración del Convertidor A/D se puede ver en el Apéndice D, donde se explica la configuración de cada registro del convertidor A/D.

#### 4.3.1.3. Configuración del Módulo PWM

El módulo PWM es utilizado para regular la velocidad y la dirección de giro de los motores. El módulo es configurado de la siguiente manera:

1. El módulo PWM tiene 5 modos de operación. En el presente trabajo se utiliza el modo “Free Running” el cual consiste en que la base de tiempo se incrementa hasta que es igual al valor en el registro PTPER, al ocurrir esto se reinicia el conteo siempre y cuando el bit PTEN se mantenga activado.

2. Periodo de la señal PWM. De acuerdo a las especificaciones de los actuadores se seleccionó un periodo 2 ms o 500 Hz. Este periodo se escribe en el registro PTPER y se calcula con la Ecuación (4.20)

$$PTPER = \frac{FCY}{F_{PWM} * (PTMR Preescaler)} - 1 \quad (4.20)$$

Donde

$$\begin{aligned} FCY &= 8 \text{ MHz} \\ F_{PWM} &= 20000 \text{ Hz} \\ PTMR Preescaler &= 1 \end{aligned}$$

Sustituyendo tenemos:

$$PTPER = \frac{8 \text{ MHz}}{20000 * 1} - 1 = 399 \quad (4.21)$$

3. Periodo de la base de tiempo del reloj de entrada del módulo PWM: Este es seleccionado en el registro PTCON. Para nuestra aplicación utilizaremos el preescalador en 1:1.
4. El Pos-escalador se configura en el registro PTCON, en nuestra aplicación no lo necesitamos por lo que lo colocamos en 1:1.
5. Habilitación de bits del PWM: Cada módulo cuenta con un par de pins PWMxH y PWMxL en el registro PWMCON1. Para los motores ocupamos 2 módulos PWM del Microcontrolador y de cada módulo ocupamos los dos pines habilitados.
6. Modo complementario o independiente: Cada módulo PWM cuenta con dos modos de salida para su par pines: complementario y independiente. Para nuestra aplicación usaremos el modo independiente ya que esto permite seleccionar la dirección de giro de los motores (adelante, reversa).
7. Habilitamos los bits OSYNC y UDIS: El bit UDIS permite actualizar el ciclo de servicio de la señal PWM lo cual es esencial para regular la velocidad de los motores. OSYNC permite la sincronización con el registro OVDCON con el tiempo base del PWM. Ambos bits se configuran en el registro PWMCON2.
8. Habilitamos el Módulo PWM. El bit PTEN se habilita en el registro PTCON.

El programa de configuración del modulo PWM se encuentra en el Apéndice D.

#### 4.3.1.4. Configuración del Timer 1

El timer 1 es configurado para generar una interrupción controlada en un tiempo definido. El tiempo en que ocurre la interrupción se define en base al tiempo necesario para la ejecución del programa principal que incluye el sensado, rutinas de control y la señal de control a los actuadores.

En este proyecto el tiempo en que se ejecuta el programa principal es de aproximadamente 18 ms por lo que se propone un periodo de muestreo de 20 ms. La configuración del Timer 1 para lograr esta interrupción se enumera a continuación

1. Preescalador del Timer 1: El preescalador permite usar frecuencias más bajas que la de FCY, este se configura en el registro T1CON. Para lograr una frecuencia de 50 Hz (20 ms) el preescalador debe ser configurado a 1:8 (la frecuencia del timer 1 es 8 veces mas lenta en comparación con FCY).
2. Periodo deseado en el registro PTMR1: Cada vez que el contador del programa coincida con el valor en el registro PTMR1 este activará la bandera la interrupción y ejecutará rutina de interrupción. El registro es de 16 bits por lo que podemos poner una interrupción de hasta 65536 cuentas del timer, el tiempo que tarda cada cuenta del timer es:

$$cuenta\ T1 = \left( \frac{FCY}{T1\ Preescaler} \right)^{-1} = \left( \frac{8\ MHz}{8} \right)^{-1} = 1\ \mu s$$

Ahora si queremos un periodo de 8 ms,

$$8\ ms = 8000\ cuentas\ T1$$

$$65536 - 8000 = 57536$$

convertimos a hexadecimal,

$$57536_D \Rightarrow E0C0_H$$

Por lo tanto, si queremos que la interrupción ocurra cada 8 ms colocamos en el registro PTMR1 el valor  $E0C0_H$ .

3. En el registro IFS0 apagamos el bit T1IF para inicializar la bandera.
4. En los bits T1IP del registro IPC0 seleccionamos el nivel de prioridad de la interrupción el cual puede ser colocado en el rango de 1-7 donde 7 es la máxima prioridad. En esta aplicación seleccionamos el rango 7 como la interrupción mas importante del programa.
5. Encendemos el bit T1IE del registro IEC0 para habilitar interrupciones en el Timer 1.
6. Finalmente habilitamos el módulo del Timer 1 encendiendo el bit TON del registro T1CON.

El software implementado referente a esta inicialización puede ser visto en el Apéndice D.

## 4.4. Otras consideraciones de Instrumentación

### 4.4.1. Sensado del Sistema de Dirección

El sistema de dirección está formado por el manubrio y el soporte que va a empotrado en la base por un par de chumaceras (ver Figura 3.3) para sensar el giro se utiliza un potenciómetro fijo en la estructura base, unido al final del soporte del manubrio por medio de una cuerda de cáñamo (ver Figura 4.13).

El potenciómetro colocado en esta implementación es de  $500 \Omega$ , centrado en  $250 \Omega$  y alimentado con la fuente de 5V, así cuando el manubrio gira a la izquierda el potenciómetro reducirá voltaje en su terminal intermedia, de forma contraria si el manubrio gira a la derecha el potenciómetro aumentará el voltaje. De acuerdo a la variación de voltaje entregado por el potenciómetro (en el pin intermedio) podemos calcular el ángulo de giro del manubrio y enviar a los actuadores el voltaje necesario para realizar el giro a la dirección deseada. El potenciómetro es conectado de sus extremos a la fuente de 5V y en medio tomamos la señal de voltaje para conectarla al Convertidor A/D y procesar la señal de acuerdo a la lógica antes mencionada.



Cuadro 4.4: Características de las Baterías

Característica	Fuente +12V	Fuente +9V
Modelo	CP12200	Cuadrada de 9V
Marca	Vision	GP
Tipo	Ácido-Plomo Sellada	NI-MH
Amperaje	20 Ah	170 mA-h
Ciclo de Carga	6 Hrs.	24 Hrs.
Peso	6 Kg	50 g
Dimensiones	18.1 x 16.7 x7.7 cm	4.4 x 2.5 x 1.9 cm

### 4.4.3. Despliegado de Variables

Para desplegar algunas variables o condiciones del prototipo se utiliza un LCD de dos líneas (ver Figura 4.15). Este display será utilizado para visualizar variables como:

- Ángulo de inclinación ( $\theta$ ).
- Nivel de carga de ambas fuentes de energía (+12V y +5V), al tener estas bajo nivel de energía (11.3V para la fuente de 12V y 4.5V para la fuente de 5V) mostrará una alerta de “Batería baja” para evitar posibles accidentes por desenergización del prototipo.



Figura 4.15: LCD de 2 Líneas

Se implementó el código usando la inicialización de 4-bits otorgada por el manual del fabricante [Optrex-Manual] y creando rutinas para la escritura de caracteres así como para comandos del LCD. El código referente a las rutinas se pueden ver en el Apéndice D.

# CAPÍTULO 5

## Estrategias de Control del Vehículo

En este capítulo se describen dos técnicas de control que fueron diseñadas basándose en el modelo obtenido en el Capítulo 2 y considerando los valores de los parámetros presentados en el Capítulo 3. Una de ellas es la retroalimentación lineal de estados y la otra es un PID con antiwindup y compensación de zona muerta.

### 5.1. Modelo matemático considerado

En el Capítulo 2 se analizó la dinámica del prototipo por dos técnicas: Leyes de Newton y Euler-Lagrange, la cuales dieron como resultado el mismo modelo matemático. El modelo matemático que es considerado en simulación (en espacio de estados) para el análisis e implementación de las técnicas de control es:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{-m_b RL \cos x_1 (m_b RL x_2^2 \sin x_1 + \tau_i + \tau_d) + (m_b g L \sin x_1 - \tau_i - \tau_d) [2(m_r R^2 + \frac{1}{2} m_b R^2 + I_r)]}{(m_b L^2 + I_\theta) (2[m_r R^2 + \frac{1}{2} m_b R^2 + I_r]) - (m_b RL \cos x_1)^2}$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = \frac{-(m_b RL \cos x_1) (m_b g L \sin x_1 - \tau_i - \tau_d) + (m_b L^2 + I_\theta) (m_b RL x_2^2 \sin x_1 + \tau_i + \tau_d)}{(m_b L^2 + I_\theta) (2[m_r R^2 + \frac{1}{2} m_b R^2 + I_r]) - (m_b RL \cos x_1)^2}$$

$$\dot{x}_5 = x_6$$

$$\dot{x}_6 = \frac{\tau_i - \tau_d}{RI_\phi} D$$

Donde

$$\begin{array}{lll} x_1 & = & \theta \\ x_2 & = & \dot{\theta} \\ x_3 & = & \alpha \\ x_4 & = & \dot{\alpha} \\ x_5 & = & \phi \\ x_6 & = & \dot{\phi} \end{array}$$

Como antes fue mencionado los estados  $x_5$  y  $x_6$  están desacoplados de los demás estados por lo que en las simulaciones sólo se considerarán los estados  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  y  $x_4$ .

## 5.2. Consideraciones realistas para simulación

Las consideraciones realistas se introducen en la simulación con el objetivo de que los resultados obtenidos en ella sean más fiables y poder tener resultados parecidos en la implementación real. Algunas de las consideraciones que se tomaron en cuenta se enumeran a continuación:

1. Saturación en actuadores: Los actuadores son los motores que equilibran e impulsan el prototipo, éstos en la vida real se saturan cuando se les demanda demasiado torque haciendo así más lenta la respuesta del controlador comparada con la respuesta del controlador en simulación si no es considerado este efecto. De acuerdo al tipo de motores utilizados, en simulación se saturará el torque demandado a  $\pm 20$  N-m.
2. Características del Tripulante: El prototipo va a ser tripulado por una persona pero no se conocen siempre sus características (peso, estatura), estas características afectan en diferentes partes del modelo (momentos de inercia, masa considerada) pudiendo así cambiar el comportamiento de la estrategia de control. En la simulación de las técnicas de control se consideran rangos tanto de peso como de estatura del tripulante.
3. Ruido de medición: El ruido de medición en sensores siempre esta presente en la vida real y más aún en sensores como los acelerómetros que miden vibraciones. En simulación se introducirá ruido aleatorio que contamine la señal retroalimentada para observar los efectos que tiene sobre las diferentes estrategias de control utilizadas.
4. Consideración del efecto de la masa del Prototipo: En el Capítulo 2 en la Figura 2.1 se considera el eje de rotación de  $\theta$  como el mismo eje de las Llantas, por lo que la masa  $m_b$  se puede considerar de tres maneras:
  - La suma de la masa del tripulante y la masa del prototipo.
  - La suma de la masa del tripulante y la mitad de la masa del prototipo. Esto debido a que el eje de giro cruza justo a la mitad del prototipo.
  - Se considera solo como la masa de tripulante.

Estas tres consideraciones son probadas en simulación para determinar la que mejor se aproxime al comportamiento real del prototipo.

5. Fricción: La fricción es un fenómeno que surge del contacto entre dos superficies y depende de una gran variedad de parámetros dentro de los que destacan el material de las superficies en contacto, la velocidad relativa de deslizamiento, aceleración, carga de temperaturas, la humedad, la preparación superficial, etc., es por ello que la fricción es un obstáculo a la hora de conseguir el control efectivo en máquinas ya que los esquemas de compensación deben de tratar con la no linealidad inherente de los esquemas. Es por esto que en el modelado del sistema no se considero la fricción ya que esto incrementaría la complejidad del modelo y no se obtendría gran beneficio al considerarla ya que varios proyectos relacionado con péndulos invertidos móviles consideran que este efecto es despreciable.
6. Efecto de la discretización: En la simulación se considera un sistema continuo el cual se logra controlar por medio de un controlador continuo y las mediciones estan disponibles en cualquier momento, pero en la implementación esto no es posible ya que el controlador es ejecutado por un microcontrolador el cual trabaja a cierta frecuencia y el convertidor A/D tambien limita la velocidad a la que se obtienen las muestras de los sensores, por lo que se tienen que discretizar tanto las mediciones como la acción del controlador. La discretización del sistema puede provocar que los valores de ganancia sintonizados en simulación no sean los mismos al discretizar el controlador, sin embargo, con un periodo de muestreo pequeño la simulación nos puede dar una buena aproximación del comportamiento de nuestro controlador pudiendo implementar o descartar ciertas técnicas de control en base a los resultados en simulación.

### 5.3. Pruebas de estrategias de control en simulación

En esta tesis se probaron dos estrategias básicas de control: Controlador PID y Retroalimentación Lineal de Estados. Ambas técnicas fueron simuladas en Simulink® pero sólo el PID fue implementado en el controlador DSPic30f4011 de Microchip. Los diagramas de los bloques de Planta y Constantes se pueden observar a detalle en la Apéndice B.

### 5.3.1. Controlador PID

La sintonización del controlador PID se hizo a prueba y error. La simulación se hizo en Simulink con el diagrama que se muestra en la Figura 5.1.

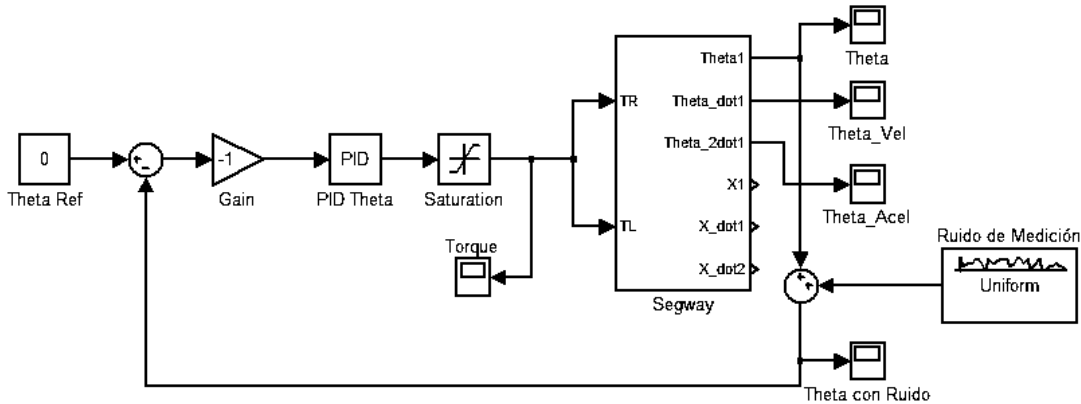


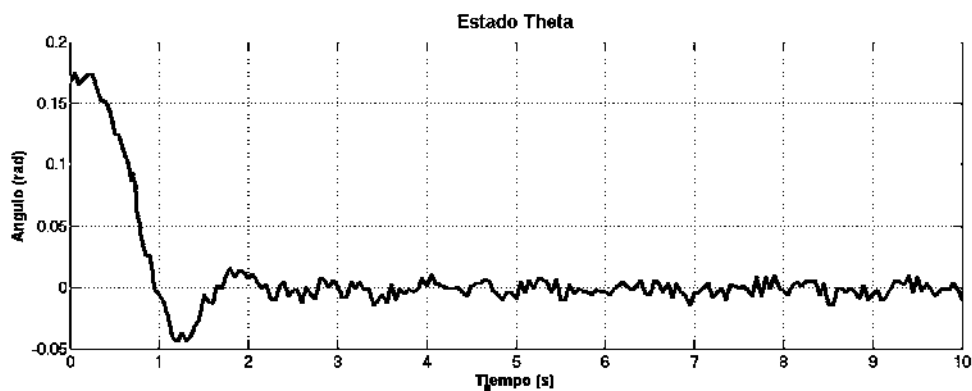
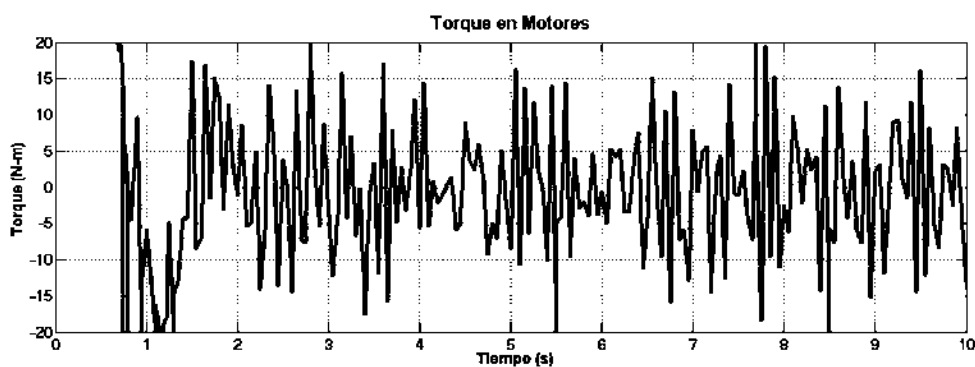
Figura 5.1: Diagrama en Simulink del Control PID

En la simulación se consideró que los torques otorgados por los motores eran limitados hasta 20 N-m y todas las condiciones iniciales iguales a cero, con excepción de  $\theta$  que la colocamos a  $10^\circ$  (0.17 rad), además se consideró ruido aleatorio en la medición de la posición  $\theta$  con una amplitud 18 mV y media cero .

La mejor respuesta obtenida con un tripulante de 1.70 m de altura y 70 Kg de peso fueron con las siguientes ganancias:

	$\theta$
P	400
I	5
D	50

En la Figura 5.2a se observa que el sistema se estabiliza aproximadamente después de 2.5 seg, también se puede ver el efecto del ruido de medición, el cual afecta en el Torque de los motores (ver Figura 5.2b) produciendo picos, los cuales por el efecto de la saturación se limitan a 20 N-m .

(a) Estado  $\theta$ 

(b) Torques

Figura 5.2: Comportamiento del Sistema con controlador PID

En la figura 5.2b se observa que el actuador oscila debido al ruido en la medición, para reducir este efecto, se introduce una etapa de filtrado (Filtro de Kalman) la cual reduce el ruido de medición y decremanta las oscilaciones en el actuador.

Caso	Estatura	Peso
1	1.60 m	60 Kg
2	1.70 m	70 Kg
3	1.80 m	80 Kg
4	1.90 m	90 Kg

Cuadro 5.1: Características del Tripulante

Se consideraron otros 4 casos de peso y estatura del tripulante mostrados en la Tabla 5.1 manteniendo las ganancias obtenidas anteriormente, además se probaron las consideraciones mostradas en el punto 4 de la Sección 5.2 en cada uno de los casos.

La tendencia en las pruebas fue que entre más pesado y más alto fuera el tripulante más tardado sera el tiempo en que se estabiliza el prototipo. En el caso 1 el tiempo que tarda en estabilizarse el prototipo es de aproximadamente 1 segundo, mientras que en el Caso 4 el tiempo es casi de 3 segundos. Los tiempos de establecimiento varían muy poco ( $\pm 0.4$  segundos) si se consideraba o no el peso de la base como se planteó en el Punto 4 de la Sección 5.2.

### 5.3.1.1. Efecto windup y su eliminación

Un controlador con acción integral combinada con un actuador que puede saturarse puede dar algunos efectos no deseados. Si el error de control es muy grande, el integrador satura a los actuadores, esto hace que la retroalimentación no funcione porque el actuador continuará saturado aunque la salida del proceso cambie. Cuando el error es finalmente reducido, la acción del integrador es tan grande que le tomará bastante tiempo volver a tomar un valor adecuado. A este efecto se le conoce como efecto windup [Astrom 1997].

Una manera de eliminar este efecto es haciendo la ganancia del integrador cero mientras el actuador esté saturado esto evita que el integrador sature los actuadores, una vez que el actuador no esté saturado la ganancia vuelve a su valor normal. A esta técnica se le conoce como Antiwindup.

La implementación de esta técnica va directamente en el código, la cual se puede ver en el Apéndice D donde el cálculo de la ganancia para el integrador está condicionada de acuerdo al estado del actuador (si está o no saturado, considerando que está saturado si  $\tau > 20Nm$  o  $\tau < -20Nm$ ).

### 5.3.2. Retroalimentación lineal de estados

Para aplicar esta técnica primero se debe linealizar el modelo. Tomando el modelo mostrado en la Ecuación 2.14, linealizamos cerca en  $0^\circ$  obteniendo las siguientes ecuaciones,

$$(m_b L^2 + I_\theta) \ddot{\theta} + m_b L \ddot{x} - m_b g L \theta = -\tau_i - \tau_d \quad (5.1)$$

$$2 \left( m_r + \frac{m_b}{2} + \frac{I_R}{R^2} \right) \ddot{x} + m_b L \ddot{\theta} = \frac{\tau_d + \tau_i}{R} \quad (5.2)$$

$$I_\phi \ddot{\phi} = D \frac{\tau_i - \tau_d}{R} \quad (5.3)$$

La ecuación (2.35) no se tomará en cuenta en este análisis ya que no depende de los otros dos estados, por lo que se tratará en otro momento.

Despejando los estados  $\ddot{\theta}$  y  $\ddot{x}$  de (5.1) y (5.2) se obtienen las siguientes ecuaciones,

$$\ddot{\theta} = A\theta + B(\tau)$$

$$\ddot{x} = C\theta + D(\tau)$$

Donde

$$A = \frac{\left(m_b + 2m_r + 2\frac{I_R}{R^2}\right)Lm_b g}{\left(m_b + 2m_r + 2\frac{I_R}{R^2}\right)(I_\theta + m_b + L^2) - (Lm_b)^2}$$

$$B = \frac{\left(m_b + 2m_r + 2\frac{I_R}{R^2}\right)Lm_b R}{\left(m_b + 2m_r + 2\frac{I_R}{R^2}\right)(I_\theta + m_b + L^2) - (Lm_b)^2}$$

$$C = \frac{-(Lm_b)^2 g}{\left(m_b + 2m_r + 2\frac{I_R}{R^2}\right)(I_\theta + m_b + L^2) - (Lm_b)^2}$$

$$D = \frac{Lm_b + \frac{\left(m_b + 2m_r + 2\frac{I_R}{R^2}\right)}{R}}{\left(m_b + 2m_r + 2\frac{I_R}{R^2}\right)(I_\theta + m_b + L^2) - (Lm_b)^2}$$

$$\tau = \tau_i + \tau_d$$

En forma matricial tenemos:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ D \\ 0 \\ B \end{bmatrix} [\tau] \quad (5.4)$$

Para obtener las ganancias de Retroalimentación usamos el código en Matlab<sup>®</sup> del Apéndice D, donde utilizamos la fórmula de Ackerman [Chen 1999] para obtener sus ganancias proponiendo los polos del sistema. Se probaron diferentes valores de polos y los que mejor resultado dieron en base a su respuesta fueron  $[0, 0, -2, -2]$  obteniendo así las siguientes



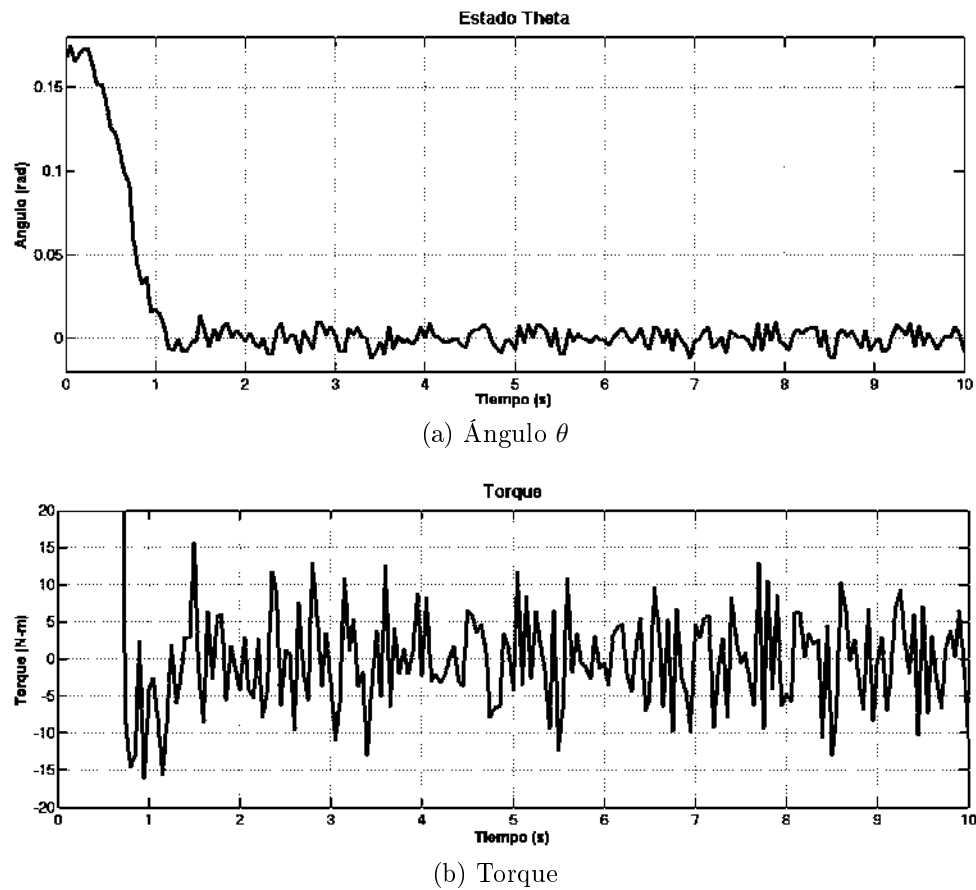


Figura 5.4: Comportamiento de los Estados y Torques

## 5.4. Elección del mejor controlador en simulación

Comparando las estrategias de control analizadas en la sección anterior, podemos destacar las siguientes características:

- Tiempo de establecimiento: El tiempo de establecimiento usando Retroalimentación de Estados es más corto que con el controlador PID.
- Sobreimpulso: El sobreimpulso está presente solo en el controlador PID, el cual puede ser reducido modificando algunas de sus ganancias, pero a costa de aumentar el tiempo de establecimiento, en cambio en la Retroalimentación de Estados no existe tal sobreimpulso.

- Comportamiento del Torque: La presencia de ruido en la medición produce muchas oscilaciones en el Torque y en ambas técnicas están presentes las oscilaciones pero en la Retroalimentación de Estados es ligeramente menor la amplitud.
- Variaciones ante parámetros del tripulante: Las variación de peso y estatura del tripulante afecta directamente en el tiempo de establecimiento de las dos técnicas de control, con la diferencia que es ligeramente menor el efecto en la Retroalimentación de Estados.
- Ruido en la Medición: Ambos controladores logran estabilizar el sistema aun en presencia de ruido de medición.

Por lo tanto, el mejor controlador en simulación fue la Retroalimentación de Estado Lineal. Sin embargo, como ya se explicó, la ley de control (5.5) es idéntica a un controlador PD, por lo tanto en el prototipo real sólo se implementó el PID y se consideraron las ganancias dadas por (5.5) como un conjunto inicial de prueba para la selección de las ganancias reales en el prototipo.

# CAPÍTULO 6

## Pruebas realizadas

### 6.1. Pruebas a la estructura mecánica

Las pruebas mecánicas consisten en someter peso a la estructura y observar el comportamiento de los componentes mecánicos. Para llevar a cabo, esto se subieron tripulantes con diferentes características (peso y estatura) mostradas en la Tabla 6.1.

Las consideraciones para hacer estas pruebas fueron: La estructura mecánica se encuentra estática y des-energizada, el tripulante usa algún punto de apoyo para no caer (silla o mesa) tratando siempre de equilibrarse sobre el prototipo.

Los resultados fueron satisfactorios ya que la estructura mecánica soportó a todos los tripulantes sin ningún problema.

Cuadro 6.1: Características de los Tripulantes

Tripulante	Peso	Estatura
1	60Kg	1.63m
2	78Kg	1.75m
3	64Kg	1.74m
4	80 Kg	1.72m

### 6.2. Pruebas en los actuadores

A los actuadores que están formados tanto por los motores como por los drivers que los controlan, a cada uno se le hicieron pruebas de funcionamiento, las cuales son las siguientes:

### 6.2.1. Pruebas de potencia

En esta prueba se pretende ver si el actuador es capaz de mover el prototipo junto con un tripulante. Para llevar a cabo esto se energizaron ambos actuadores a la batería de +12V sin drivers y sin control.

Las características de los tripulantes se muestran en la Tabla 6.1. El tripulante se sube encima del prototipo apoyándose (mesa) para evitar caer cuando el prototipo comience a moverse, se energizan los motores y observamos.

Los resultados con todos los tripulantes fueron buenos, ya que los actuadores pudieron desplazar tanto al tripulante como a la estructura sin ningún problema.

### 6.2.2. Pruebas a los drivers de los actuadores

En estas pruebas se pretende ver si los drivers cumplen su función para regular velocidad y dirección de giro de los motores. Para la primera prueba que es regular la velocidad se programa una rutina que varíe el ciclo de trabajo de menor a mayor y viceversa para observar si cambia la velocidad de giro del motor. La segunda prueba consiste en correr una rutina que mantenga fijo el ciclo de servicio y este cambiando el giro en determinados instantes de tiempo.

Los resultados fueron los que esperábamos, el cambio de velocidad variando el ciclo de servicio funciona pero la velocidad máxima otorgada es ligeramente reducida ya que los Mosfets consumen un poco de potencia. Al cambiar el sentido de giro el Puente H la respuesta al cambio es rápida como se necesita en esta implementación.

### 6.2.3. Consumo de corriente

La corriente que consumen los motores varía dependiendo de la velocidad a la que están girando, cuando el motor gira a su máxima velocidad la corriente que consume es de 1.5 A, pero cuando su velocidad es reducida hasta llegar a su zona muerta, la corriente alcanza un valor de hasta 4.5 A. Cabe resaltar que estas mediciones son promedio y sin carga ya que al reducir la velocidad del motor por medio de una señal PWM los motores son afectados por picos de corriente al estar conmutando su alimentación.

#### 6.2.4. Zona muerta de los motores

Los motores al ser energizados ocupan un nivel de ciclo de trabajo del PWM para que estos rompan su estado de reposo y comiencen a girar, esto genera una zona de operación en la cual el motor no se mueve a pesar de estar energizado, a esta zona se le conoce como zona muerta del motor. Dependiendo del motor, del sentido de giro y de la frecuencia del PWM la zona muerta puede variar por lo que se tiene que medir para ser considerada para el correcto funcionamiento de nuestro control ya que ésta determina en que momento el control comienza a ser efectivo.

Para los motores PDX256-256:1 la medición de la zona muerta se realizó por medio del microcontrolador variando el ciclo de trabajo de la señal PWM. Los resultados de estas mediciones considerando una alimentación de 12 V muestran que los motores comienzan a moverse cuando la señal PWM de 20 KHz tienen un ciclo de servicio del 32 % lo cual equivale a 3.84V. Esta zona muerta es considerada y compensada por medio de software el cual puede ser visto en la Apéndice D.

### 6.3. Pruebas de los Sensores

#### 6.3.1. El acelerómetro

Éste fue probado para observar su funcionamiento y si el nivel de voltaje entregado correspondía al ángulo correcto.

El acelerómetro fue conectado en su configuración básica, colocado sobre una plataforma plana, por medio de un transportador medimos el ángulo con la vertical, el rango que se tomó de medición fue de  $\pm 20^\circ$ . El nivel de voltaje entregado por el acelerómetro varía un poco con respecto al ángulo que está midiendo pero el valor medido está dentro del rango que maneja el fabricante notando una variación de  $\pm 2$  grados debido al ruido de medición.

#### 6.3.2. Filtro de Kalman

Repetiendo la misma prueba anterior pero introduciendo el giroscopio como elemento corrector y ejecutando el Filtro de Kalman tenemos los mismos resultados con respecto al nivel de voltaje, pero se nota considerablemente una reducción del ruido de medición, observándose después del filtro, un error de medición máximo de 0.5 grados. Los valores sintonizados del filtro de Kalman se muestran a continuación.

$$Q = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix}$$

$$R = 100$$

$$P_{inicial} = \begin{bmatrix} 10000 & 0 \\ 0 & 10000 \end{bmatrix}$$

$$T_s = 0.008s$$

En la figura 6.1 se muestra la componente de CA de la señal entregada por el acelerómetro y el giroscopio antes de ser convertida a digital para ser procesada por el filtro de Kalman.

En la señal de ruido medida en los sensores (acelerómetro y giroscopio) mostrada en la figura 6.1 se puede observar que el ruido en ambos sensores es de alrededor  $\pm 15$  mV y es de alta frecuencia para ambos sensores. Considerando que la sensibilidad de nuestros sensores es de aproximadamente de 7.5 mV por grado aproximadamente, por lo que la variación del ángulo es de  $\pm 2$  grados. Cabe resaltar que para la medición de la señal de ruido se quitó la componente de DC para poder visualizarlo correctamente.

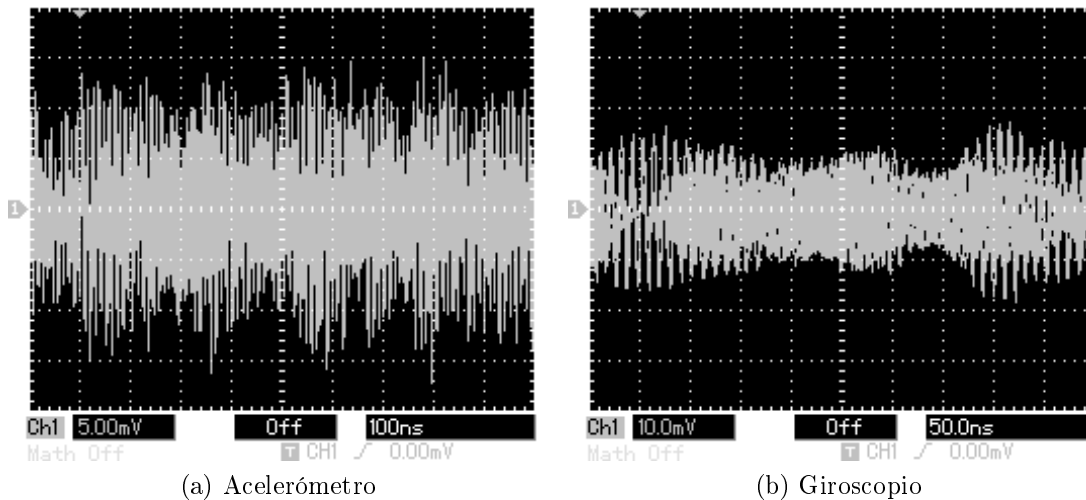


Figura 6.1: Ruidos de medición

### 6.3.3. Ruido de medición

Durante la experimentación, al energizar los motores de 12V se introduce un ruido a la medición del acelerómetro, el cual hace oscilar la medición hasta  $\pm 10^\circ$ , provocando un mal

funcionamiento del sistema generando sobrecalentamiento en los drivers de los motores y movimientos bruscos de los motores. Este ruido es inducido por los motores a la línea de conexión del acelerómetro con el microcontrolador. Para reducirlo se conectó un capacitor de  $1\mu\text{F}$  en paralelo lo mas cercano al pin de conexión del microcontrolador cuidando de que el capacitor no afectara la velocidad de respuesta de la medición del acelerómetro.

## 6.4. Autonomía

La autonomía se refiere a el tiempo que las fuentes de voltaje alimentan adecuadamente las partes eléctricas del prototipo permitiendo un funcionamiento adecuado. Cada fuente de voltaje, que en este caso son dos baterías, tienen un tiempo de autonomía diferente. La batería alcalina de 9V a 170mA-Hr alimenta toda la instrumentación del sistema (microcontrolador, sensores, desplegado y parte del optoacoplamiento), la cuál consume aproximadamente 95 mA. Esta batería suministra adecuadamente la circuitería durante 2 Hrs continuas a un consumo constante de 95 mA, excediendo las dos horas el voltaje otorgado por la batería comienza a reducirse.

La batería de plomo-ácido de 12V alimenta a la etapa de potencia (motores, drivers de motores y parte del optoacoplamiento). La etapa de potencia consume 1.5 A cuando los motores giran a máxima velocidad, conforme se reduce la velocidad el amperaje se incrementa hasta 4.5 A, , que de acuerdo a la curva de descarga de la batería (ver figura 6.2 ) ésta durará aproximadamente 4 Hrs continuas. El tiempo de recarga de la batería de 12V es de 6-8 Hrs mientras que el de la batería de 9V es de 24Hrs.

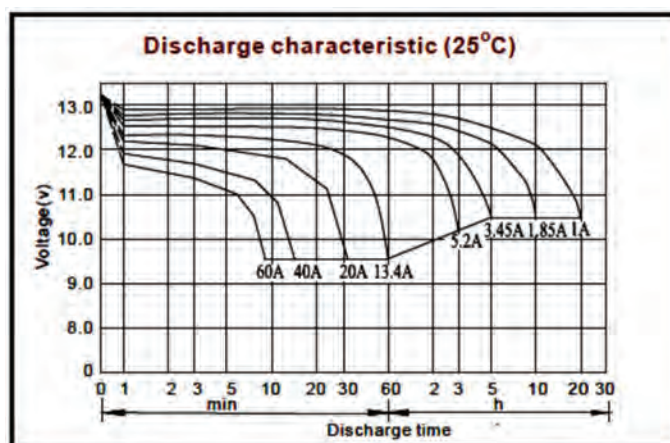


Figura 6.2: Curva de descarga de batería de 12V

Ambas baterías (12V y 9V) están conectadas a 2 pines del convertidor analógico-digital por medio de un arreglo de resistencias con el cual podemos detectar cuando la carga de las baterías es baja, accionando una alerta en el display que avisa al tripulante el estado de “Carga baja de las baterías”. Esto se hace con el fin de proteger al tripulante de un posible accidente por desenergización del sistema.

## 6.5. Pruebas de Técnicas de Control

Para probar las técnicas de control sin correr el riesgo de quemar los drivers se optó por construir un prototipo a escala que usa motores pequeños (ver figura 6.3). Al reducir el tamaño de los motores, los drivers no se sobrecargan demasiado pudiendo así probar las técnicas de control.

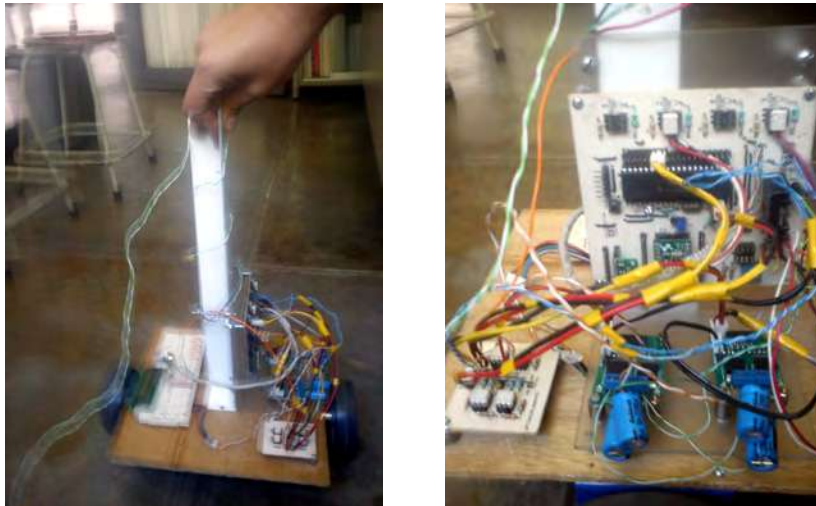


Figura 6.3: Prototipo pequeño

El prototipo a escala tiene la misma instrumentación que el prototipo grande con la diferencia que la fuente de 12V es sustituida por una fuente conmutada que se alimenta de la línea eléctrica.

Para la implementación del control PID, se utiliza la versión discreta [Astrom 1997] como se muestra a continuación:

$$u(kh) = P(kh) + I(kh) + D(kh) \quad (6.1)$$

donde

$P(kh)$  Ganancia proporcional

$I(kh)$  Ganancia integrativa

$D(kh)$  Ganancia derivativa

cada una de las ganancias están definidas en forma discreta de la siguiente manera:

$$P(kh) = Ke(kh) \quad (6.2)$$

$$I(kh) = I(kh - h) + \frac{Kh}{T_i} e(kh - h) \quad (6.3)$$

$$D(kh) = \frac{T_d}{T_d + Nh} D(kh - h) - \frac{KT_d N}{T_d + Nh} (y(kh) - y(kh - h)) \quad (6.4)$$

donde

$h$  Periodo de muestreo

$K$  Ganancia proporcional

$e(kh)$  Error actual

$e(kh - h)$  Error anterior

$T_i$  Tiempo integrativo

$I(kh - h)$  Acción integrativa anterior

$T_d$  Tiempo derivativo

$N$  Limitador de acción derivativa a altas frecuencias

$D(kh - h)$  Acción derivativa anterior

$y(kh)$  Salida actual

$y(kh - h)$  Salida anterior

La sintonización del controlador PID discreto se hizo a prueba y error con el prototipo pequeño, logrando estabilizarlo con los siguientes valores:

$K$	300
$T_i$	1
$T_d$	0.4
$N$	1
$h$	0.008

Cabe resaltar que la acción integral entre más grande mas afecta a la estabilidad del sistema, por lo que se omitió y los resultados con solo el controlador PD fueron suficientes para controlar el prototipo, lo cual coincide con la observación realizada en el capítulo anterior cuando se diseñó la retroalimentación de estado equivalente a una acción PD.

### 6.5.1. Selección del periodo de muestreo

El periodo de muestreo se selecciona en base al tiempo que tarda en ejecutar el microcontrolador todo el programa principal que incluye desde la obtención de mediciones, ejecución de algoritmos de filtrado y control hasta desplegado en el display. Por medio de una interrupción en el timer podemos definir exactamente el periodo de muestreo requerido para que se ejecute correctamente todo el programa. Cabe resaltar que el periodo de muestreo debe conocerse con precisión ya que es utilizado en la etapa de filtrado y de control.

La medición del tiempo de ejecución del programa se obtuvo configurando un pin de un puerto el cual enciende al momento que se comienza a ejecutar el algoritmo principal y se apaga cuando termina de ejecutarlo. De acuerdo a la figura (6.4) el tiempo que tarda en ejecutarse el algoritmo es de aproximadamente 6 ms y agregando un pequeño tiempo muerto de 2 ms para evitar posibles variaciones en el tiempo de ejecución se obtiene un periodo de muestreo de 8 ms.

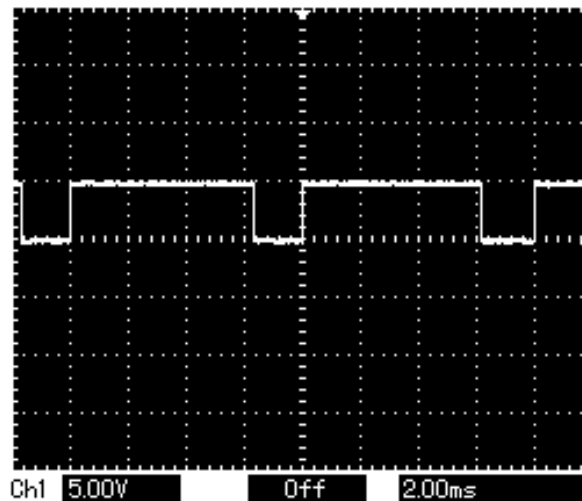


Figura 6.4: Periodo de muestreo

## 6.6. Balance de costos

Uno de los objetivos al iniciar esta tesis era generar un prototipo de bajo costo y con materiales de fácil acceso. La mayoría de los materiales fueron comprados en la ciudad, sólo algunos como los motores y el microcontrolador fueron traídos del extranjero. A continuación en la Tabla 6.2 y en la Tabla 6.3 se ve la lista de costos de material mecánico y de material de instrumentación respectivamente.

Cuadro 6.2: Costos del material mecánico

Material	Descripción	Cantidad	Costo (Pesos Mexicanos)
PTR	4 metros x 1"	1	\$58.00
Lamina de Inferior	Lamina de Acero 40 x 54 x 0.08 cm	1	\$80.00
Placa superior	Placa de Aluminio 40 x 54 x 0.6 cm	1	\$680.00
Chumaceras	3/4" de diámetro	2	\$300.00
Rodamientos	De bola 77 R-82Z	4	\$56.00
Ejes de Llantas	Eje de fabrica	2	\$400.00
Llantas	Rin 11"	2	\$300.00
Cadena	1m de cadena y seguros	1	\$75.00
Soleras cuadradas y Cilíndricas	Diferentes medidas cantidad en Kg	3.55	\$185.00
Solera común	3m de largo 1" de ancho	1	\$70.00
Catarinas	40B-10	4	\$308.00
Tubo	3m de largo 1" diámetro interior	1	\$144.00
Tornillos, rondanas y tuercas	Diferentes medidas	Paquete	\$183.00
Angulo	2" x 1/4"	1	\$86.00
Placa de Acrílico	29 x 11 cm	1	\$50.00
Otros componentes	cuñas, opresores, brocas, buril, etc.	Paquete	\$315.00
TOTAL			\$3267.00

El costo total sumando los totales de las tablas anteriores es \$8727.00. Este costo está muy por debajo del costo de la versión comercial como el Segway (\$5500.00 USD ó \$71,500.00

MX) ó la versión para desarrollo de Elector OSPV (960.00 € o \$15,840.00 MX). Cabe señalar que en este total sólo se tomó en cuenta el total de materiales y no tiene incluido el costo de desarrollo.

Cuadro 6.3: Costos de material de Instrumentación

Material	Descripción	Cantidad	Costo (pesos mexicanos)
Motores	Motores BaneBots PDX256	2	\$2400.00
Puente H	Cada puente cuenta con 4 Mosfets IRFZ42	2	\$104.00
Drivers del puente H	Un drivers IR2110 para disparar dos Mosfets	4	\$84.00
Acelerómetro	MMA7341L	1	\$280.00
Giroscopio	XV-3500CB	1	\$260.00
Microcontrolador	DSPic30f4011	1	\$82.00
Opto-acoplamiento	H11L1 uno para cada señal PWM	4	\$42.00
Batería de 12V	CP12200 12V@20Ah	1	\$860.00
Cargador de batería 12V	RT02-120040	1	\$254.00
Batería de AA	Steren 1.2V@1300mA	4	\$130.00
Display LCD	PWB 20434-CEM 4 lineas	1	\$214.00
Cables	Diferentes calibres	Paquete	\$50.00
Baquelitas	1 cara de 20 x 30 cm	1	\$100.00
Componentes electrónicos	Capacitores, resistencias, conectores, diodos, porta integrados, LED's, etc.	Paquete	\$600.00
TOTAL			\$5460.00

# CAPÍTULO 7

## Conclusiones

### 7.1. Conclusiones

En esta tesis se presentó el diseño y construcción de un vehículo autobalanceado sobre dos ruedas. Al construir un prototipo de manera local se logra reducir considerablemente los costos en materiales además de poder crear una plataforma modificable para mejoras o implementación de técnicas nuevas de control.

Para el correcto diseño y selección de actuadores y sensores el análisis matemático del prototipo es esencial ya que con él podemos saber el tipo de sistema a tratar y sus características. En este caso el sistema es de tipo No Lineal e inestable. Por medio de la simulación de modelo se pueden implementar varios tipos de control y observar el comportamiento del sistema antes de ser implementado. En base a las dos técnicas de control estudiadas se concluyó que ambas son equivalentes, ya que la retroalimentación de estados solo requiere retroalimentar  $\theta$  la cual es equivalente a una estrategia PD.

Los sensores para medir inclinación como el acelerómetro y el giro juegan un papel muy importante en el equilibrio del prototipo ya que dependiendo de la calidad de su medición se puede o no controlar el prototipo. Otra característica que afecta mucho a estos sensores es el ruido, teniendo que implementar alguna técnica de filtrado para reducirlo, en este prototipo se implementó la técnica de Filtro de Kalman la cual ayudó en gran medida a la reducción del ruido de medición pero no lo eliminó completamente.

En este trabajo se logró construir una estructura mecánica lo suficientemente robusta para soportar su propio peso y el peso de una persona de complejión media. Los materiales con los que fue construida la estructura se pueden encontrar de manera local haciendo posible reproducirla o modificar para nuevas adaptaciones. Sin embargo, al final no fue posible operar

adecuadamente todos los componentes juntos debido a que la operación de los motores contamina la señal entregada por el acelerómetro, afectando la medición del ángulo de inclinación y produciendo un comportamiento caótico en el control además de elevar el calentamiento de los drivers. Por esta razón el esquema completo solo fué probado en el prototipo pequeño descrito en el capítulo 6.



Figura 7.1: Prototipo construido

## 7.2. Trabajos Futuros

Los trabajos futuros que puede generar este trabajo son:

- Mejorar la etapa de potencia, cambiando los motores por unos mas grandes para aumentar la velocidad de desplazamiento. También en rediseñar los drivers de los motores para aumentar la capacidad de corriente que soportan y reducir su calentamiento.
- Implementación de otras estrategias de control (retroalimentación no lineal, modos deslizantes, etc.) y técnicas de diagnóstico de fallas en sensores para hacer mas seguro el manejo.
- Cambio de las fuentes de energía (baterías) por unas mas grandes para incrementar la autonomía del prototipo.

- 
- Rediseño de la estructura mecánica para reducir el peso del prototipo y balancear mejor el peso hacia el centro del mismo.
  - Agregar sensores como encoders para medir velocidad de desplazamiento que permitan realizar un control de velocidad de desplazamiento asistido, ya que actualmente este lo controla sólo el tripulante.



# Apéndice A

## Diagramas Eléctricos

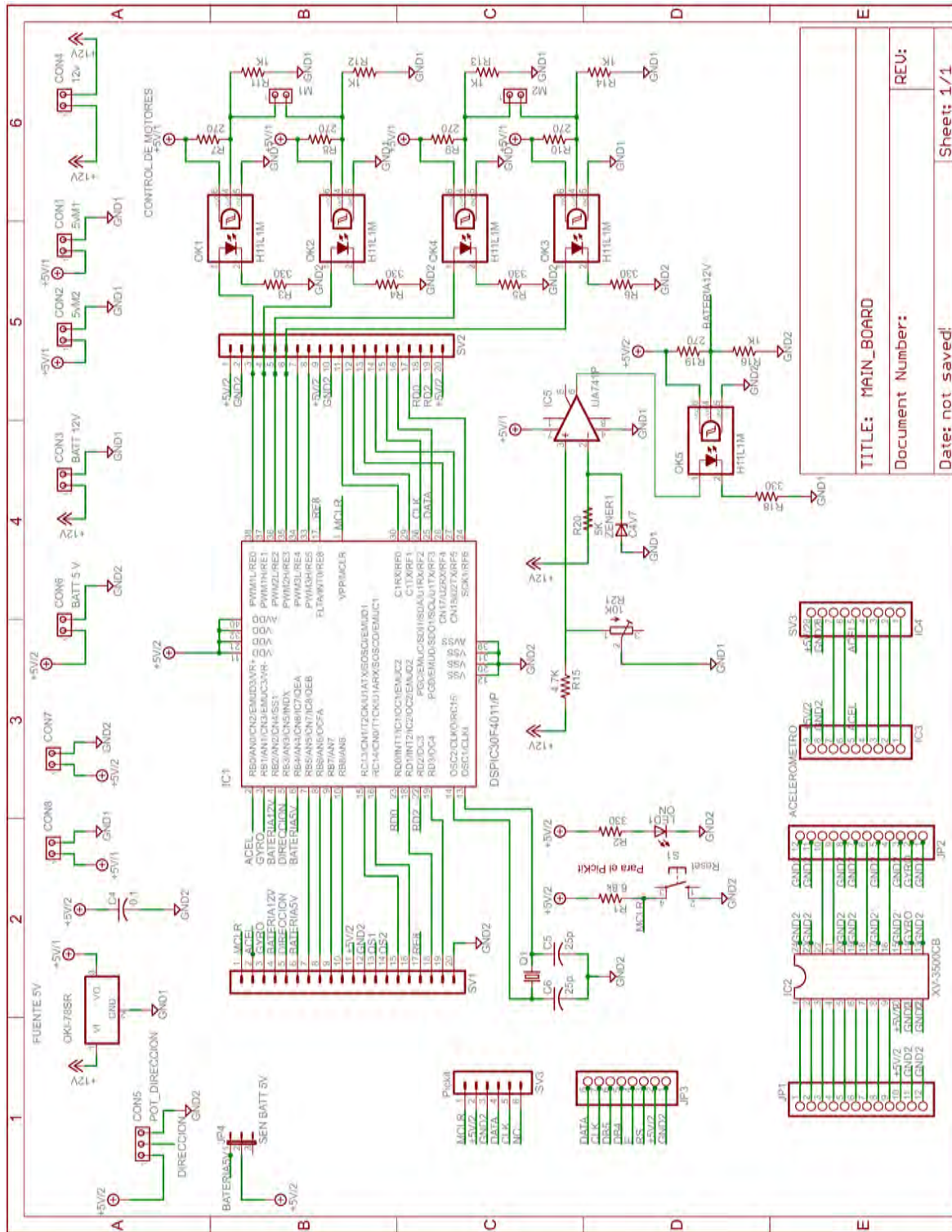
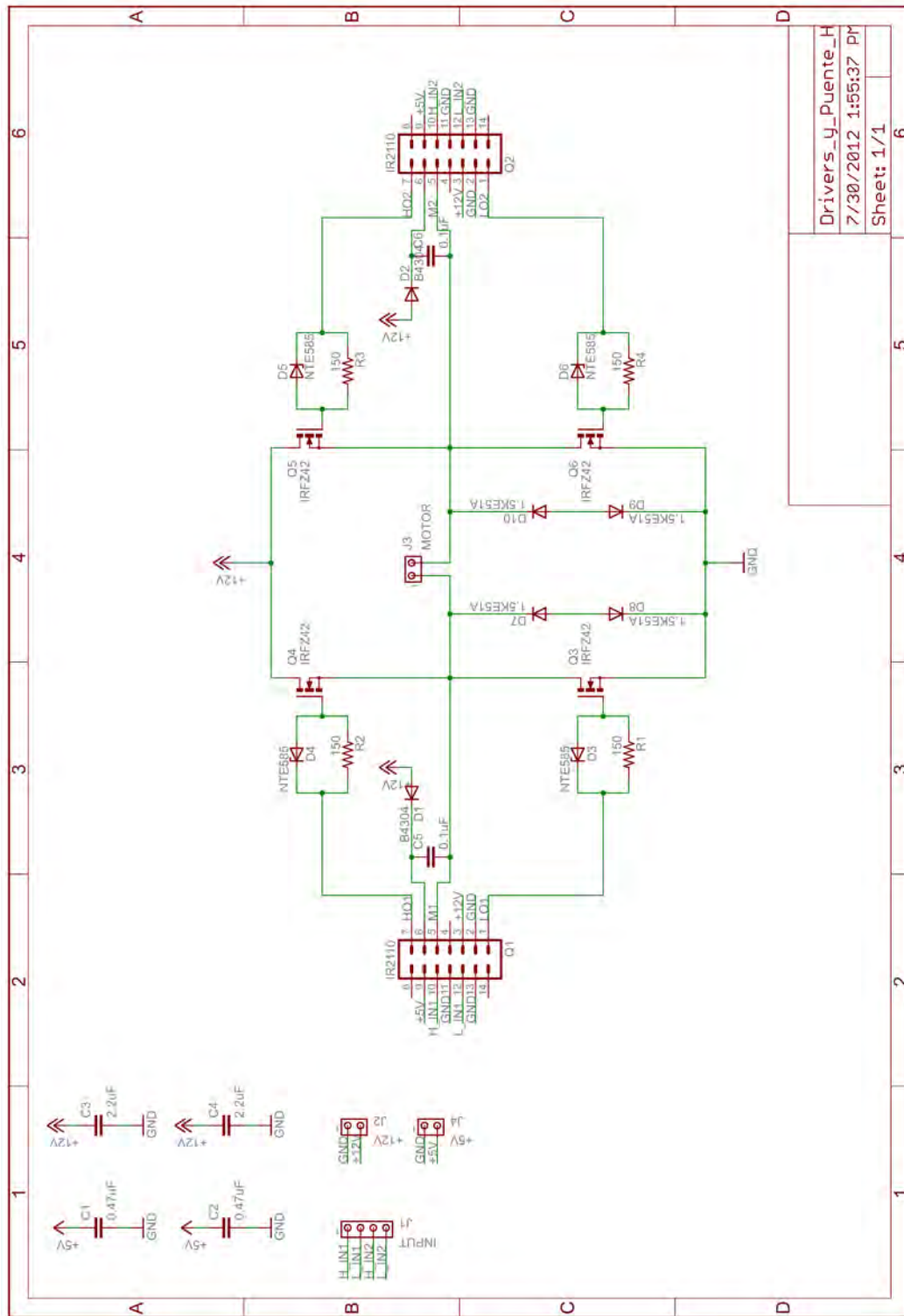


Figura A.1: Main Board

TITLE: MAIN\_BOARD  
 Document Number:  
 Date: not saved  
 Sheet: 1/1



Drivers_y_Puente_H	
7/30/2012 1:55:37 PM	
Sheet: 1/1	6

Figura A.2: Puente H y Drivers



# Apéndice B

## Diagramas en Simulink

Para la generación de los diagramas se utilizó la Herramienta de “Simulink 7.5 (R2010a) January 25, 2010”.

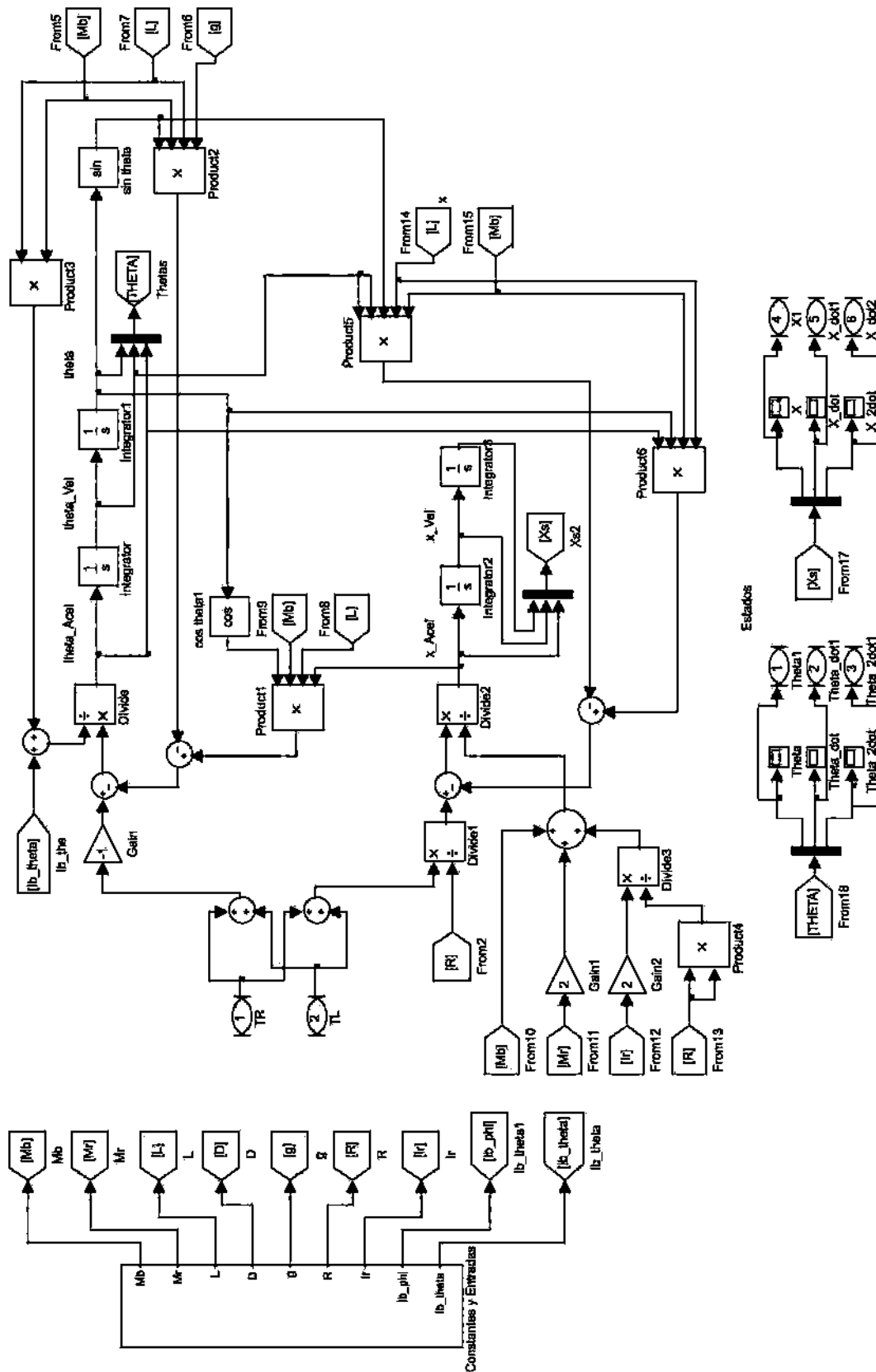


Figura B.1: Planta

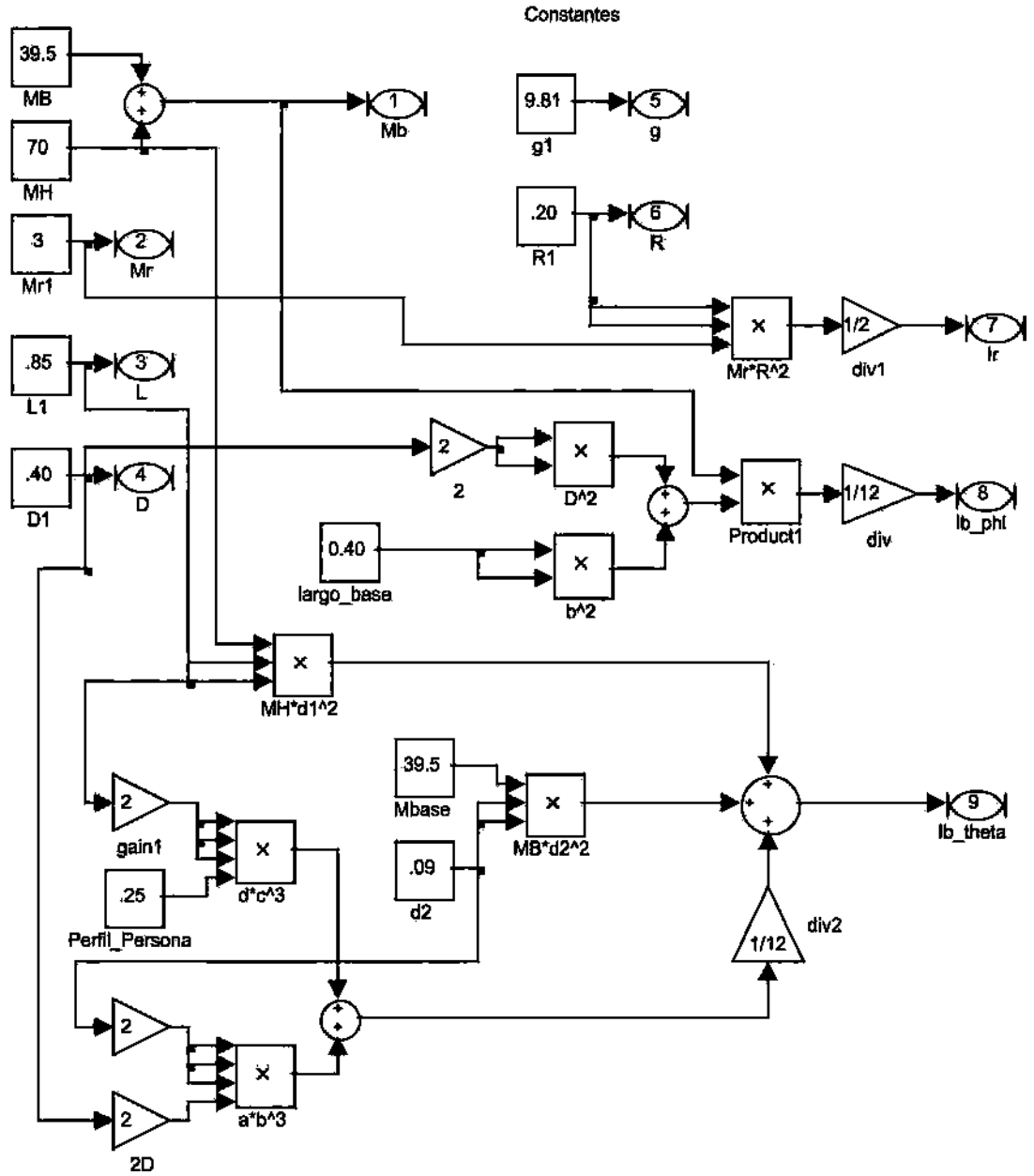


Figura B.2: Constantes



# Apéndice C

## Hojas de Datos

En esta apéndice se muestran las hojas de datos de todos los componentes físicos que fueron usados en el prototipo. Estos componentes son mostrados de manera resumida en la Tabla C.1.

Matrícula	Descripción	Liga de Internet
DSPIC30f4011	Microcontrolador	<a href="http://ww1.microchip.com/downloads/en/DeviceDoc/70135G">http://ww1.microchip.com/downloads/en/DeviceDoc/70135G</a>
MMA7341L	Acelerómetro	<a href="http://www.pololu.com/file/0J379/MMA7341L.pdf">http://www.pololu.com/file/0J379/MMA7341L.pdf</a>
XV-3500CB	Giroscopio	<a href="http://www.sure-electronics.net/download/DC-SS010_Ver1.0_EN.pdf">http://www.sure-electronics.net/download/DC-SS010_Ver1.0_EN.pdf</a>
H11L1	Opto-acoplador	<a href="http://www.isocom.com/datasheets/db92224.pdf">http://www.isocom.com/datasheets/db92224.pdf</a>
IR2110	Drivers de los Mosfets	<a href="http://www.irf.com/product-info/datasheets/data/ir2110.pdf">http://www.irf.com/product-info/datasheets/data/ir2110.pdf</a>
PG104	Diodo rectificador AR	<a href="http://pdf1.alldatasheet.net/datasheet-pdf/view/224443/BILIN/PG104.html">http://pdf1.alldatasheet.net/datasheet-pdf/view/224443/BILIN/PG104.html</a>
IRFZ42	Mosfet canal N	<a href="http://pdf1.alldatasheet.com/datasheet-pdf/view/114614/MOTOROLA/IRFZ42.html">http://pdf1.alldatasheet.com/datasheet-pdf/view/114614/MOTOROLA/IRFZ42.html</a>
UA741CN	Operacional	<a href="http://pdf1.alldatasheet.com/datasheet-pdf/view/25572/STMICROELECTRONICS/UA741CN.html">http://pdf1.alldatasheet.com/datasheet-pdf/view/25572/STMICROELECTRONICS/UA741CN.html</a>
NTE585	Diodo Shottky	<a href="http://www.nteinc.com/specs/500to599/pdf/nte585.pdf">http://www.nteinc.com/specs/500to599/pdf/nte585.pdf</a>
1.5KE51A	DIAC	<a href="http://pdf1.alldatasheet.com/datasheet-pdf/view/87118/VISHAY/1.5KE51A.html">http://pdf1.alldatasheet.com/datasheet-pdf/view/87118/VISHAY/1.5KE51A.html</a>
PWB 30434-CEM	Display LCD	<a href="http://www.eng.uwo.ca/electrical/e-shop/datasheets/LCD.pdf">http://www.eng.uwo.ca/electrical/e-shop/datasheets/LCD.pdf</a>
CP12200	Batería de 12V	<a href="http://vision-batt.cz/specifikace/cp12200.pdf">http://vision-batt.cz/specifikace/cp12200.pdf</a>

Cuadro C.1: Lista de Hojas de Datos



# Apéndice D

## Programas

### D.1. Configuraciones Iniciales del Microcontrolador

#### D.1.1. Convertidor A/D

```
/*
*****
***** Configuración ADC *****
*****
*/

void ADC_Ini(void)
{
    TRISB = 0b000001111;    // Coloca RB0, RB1, RB2 & RB3 como entradas
    ADPCFG = 0xFFFF0;      // RB0, RB1, RB2 & RB3 = Analógicos
    ADCON1 = 0x00EC;        // SIMSAM bit = 1
                            // Simultaneous sampling
                            // ASAM = 1 for auto sample after convert
                            // SSRC = 111 for 3Tad sample time

    ADCHS = 0x0003;         // Connect AN0 as CH0 input

    ADCSSL = 0x000F;        // AN0, AN1, AN2, AN3 A/D Input Pin Scan
    ADCON3 = 0x0302;        // Auto Sampling 3 Tad, Tad = internal 2 Tcy
    ADCON2 = 0x0300;        // CHPS = 1x implica muestreo simultaneo de
                            // CH0, CH1, CH2 & CH3
                            // SMPI = 0000 interrupción después de 1 conversión

    ADCON1bits.ADON = 1;    // Enciende ADC
}

```

### D.1.2. Modulo PWM

```
//%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% "Inicialización del Modulo PWM" %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%//
sptime = 0x0;

//Configuración Registro PTCON
config1 = (PWM_EN & PWM_OP_SCALE1 & PWM_IPCLK_SCALE1 & PWM_MOD_FREE);

//Configuración PWMCON1
config2 = (PWM_MOD3_IND & PWM_MOD2_IND & PWM_MOD1_IND & PWM_PDIS3H &
PWM_PDIS2H & PWM_PDIS1H & PWM_PDIS3L & PWM_PDIS2L & PWM_PDIS1L);

//Configuración PWMCON2
config3 = (PWM_SEVOPS1 & PWM_OSYNC_PWM & PWM_UEN);

// calculamos el periodo deseado utilizando la frecuencia del micro
PeriodoPWM = (FCY / 1000)-1; // Frecuencia del PWM = 1 KHz

OpenMCPWM(PeriodoPWM,sptime,config1,config2,config3);
```

### D.1.3. Timer 1

```
/*%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%*/
/*%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%* Configuración Timer 1*%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%*/
/*%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%*/

void Timer_Ini(void)
{
    T1CONbits.TCKPS = 1; // Preescalador 1:8
    TMR1 = 0xE0C0;      // Coloca Timer1 = 65,536 - 8,000 = 57,536 = E0C0
                       // Interrupción cada 8,000 ciclos o 0.008 s
                       // Duración de un ciclo c = 1 us (con el preescalador)-- FCY = 8 MHz
    IFS0bits.T1IF = 0; // Apagar bandera de Interrupción
    IPC0bits.T1IP = 7; // Prioridad de Interrupción = 7
    IEC0bits.T1IE = 1; // Habilita interrupciones en el Timer 1
    T1CONbits.TON = 1; // Habilita Timer 1
}
}
```

## D.2. Filtro de Kalman

```

/*****
/***** Filtro de Kalman *****/
/*****

// Tiempo de Muestreo
float Ts = 0.008;

//Matriz de Covarianza P
float P[2][2] = { {10000, 0},
                 {0, 10000}};

//Varianza R
float R = 100;

//Matriz de covarianza del ruido Q = [q_ace1,0;0,q_gyro]
// float q_ace1 = 0.01;
// float q_gyro = 0.01;
float Q[2][2] = {{0.01, 0},
                {0, 0.01}};

//Matriz inicial de los Estados
float x[2][2] = { {0, 0},
                 {0, 0}};

//Matriz A de la forma A = [1,-Ts;0,1] Ts = 0.008 s
float A[2][2] = { {1, -0.008},
                 {0, 1}};

//Matriz B = [Ts;0]
float B[2][1] = { {0.008},
                 {0}};

//Matriz C
float C[1][2] = {{1, 0}};

//Ganancia de Kalman
float K[2][1];

float gyro_ant;
float Pn[2][2];
float Acel_K;
int w=0;

float Kalman(float acel_rad, float gyro_rad)
{
/* Etapa de predicci3n*/
    if (w==0)
    {

```

```

        gyro_ant = gyro_rad;
        w = 1;
    }
    else
    {
        /* Etapa de Predicción */
        //x(:,k)=A*x(:,k-1)+B*gyro_ant
        x[0][1] = x[0][0] + A[0][1]*x[1][0] + B[0][0]*gyro_ant;
        x[1][1] = A[1][1]*x[1][0];

        Pn[0][0] = P[0][0]+A[0][1]*P[1][0] + (P[0][1]+A[0][1]*P[1][1])*A[0][1] + Q[0][0];
        Pn[0][1] = P[0][1]+A[0][1]*P[1][1];
        Pn[1][0] = Pn[0][1];
        Pn[1][1] = P[1][1] + Q[1][1];

        P[0][0] = Pn[0][0];
        P[0][1] = Pn[0][1];
        P[1][0] = Pn[1][0];
        P[1][1] = Pn[1][1];

        /* Etapa de Corrección */
        //Actualizacion de la ganancia de Kalman
        K[0][0] = P[0][0] / (P[0][0] + R);
        K[1][0] = P[1][0] / (P[0][0] + R);

        //Actualiza Estado
        x[0][0] = x[0][1] + K[0][0]*(acel_rad - x[0][1]);
        x[1][0] = x[1][1] + K[1][0]*(acel_rad - x[0][1]);

        //Actualiza la covarianza del error de estimación
        Pn[0][0] = P[0][0] - K[0][0]*P[0][0];
        Pn[0][1] = P[0][1] - K[0][0]*P[0][1];
        Pn[1][0] = P[1][0] - K[1][0]*P[0][0];
        Pn[1][1] = P[1][1] - K[1][0]*P[0][1];

        P[0][0] = Pn[0][0];
        P[0][1] = Pn[0][1];
        P[1][0] = Pn[1][0];
        P[1][1] = Pn[1][1];
    }

    //Regresa valor del acelerómetro
    AceI_K = x[0][0];
    gyro_ant=gyro_rad;

    return AceI_K;
}

```

## D.3. Rutinas del display LCD

```

/*****
/***** Funciones LCD *****/
/*****
// Inicialización de Display

#define BUS PORTF
#define E PORTFbits.RF4
#define RS PORTFbits.RF5

unsigned char ASCII[5];

void LCD_Command(unsigned char comando)
{
    unsigned char nible_sup, nible_inf;
    nible_sup=comando>>4;
    BUS=nible_sup;
    RS=0;
    E=1;
    __delay_us(1);
    E=0;
    if(comando<4)
        {__delay_ms(16);}
    else
        {__delay_us(40);}

    nible_inf=comando&0b00001111;
    BUS=nible_inf;
    RS=0;
    E=1;
    __delay_us(1);
    E=0;
    if(comando<4)
        {__delay_ms(16);}
    else
        {__delay_us(40);}
}

void LCD_Data(unsigned char data)
{
    unsigned char nible_sup, nible_inf;
    //BUS=data;
    nible_sup=data>>4;
    BUS=nible_sup;
    __delay_us(1);
    RS=1;
    __delay_us(1);
    E=1;
    __delay_us(1);
    // Separamos en nibles el dato,
    // primero mandamos el nible superior

```

```
    E=0;
    __delay_us(40);

    nibble_inf=data&0b00001111;           // Después el inferior
    BUS=nibble_inf;
    __delay_us(1);
    RS=1;
    __delay_us(1);
    E=1;
    __delay_us(1);
    E=0;
    __delay_us(40);
}

void LCD_PrintString (const char *p_texto)
{
    do{
        LCD_Data(*p_texto);
        p_texto++;
    }while(*p_texto);
}

void LCD_printInt(unsigned char *p_dato)
{
    unsigned char i;
    for(i=0;i<5;i++)
    {
        LCD_Data(*p_dato);
        p_dato++;
    }
}

void LCD_printInt_2(unsigned char *p_dato)
{
    unsigned char i;
    for(i=0;i<2;i++)
    {
        LCD_Data(*p_dato);
        p_dato++;
    }
}

void LCD_printInt_V(unsigned char *p_dato)
{
    unsigned char i;
    for(i=0;i<5;i++)
    {
        LCD_Data(*p_dato);
    }
}
```

```
        p_dato++;
    }
}

void int2ASCII(unsigned int dato)
{
    ASCII[0] = dato/10000 + 0x30;
    ASCII[1] = (dato%10000)/1000 + 0x30;
    ASCII[2] = (dato%1000)/100 + 0x30;
    ASCII[3] = (dato%100)/10 + 0x30;
    ASCII[4] = dato%10 + 0x30;

    LCD_printInt(ASCII);
}

void int2ASCII_2(unsigned int dato)
{
    //ASCII[0] = dato/10000 + 0x30;
    //ASCII[0] = (dato%10000)/1000 + 0x30;
    //ASCII[1] = (dato%1000)/100 + 0x30;
    ASCII[0] = (dato%100)/10 + 0x30;
    ASCII[1] = dato%10 + 0x30;

    LCD_printInt_2(ASCII);
}

void int2ASCII_V(unsigned int dato)
{
    ASCII[0] = dato/10000 + 0x30;
    ASCII[1] = (dato%10000)/1000 + 0x30;
    ASCII[2] = 0x2E;
    ASCII[3] = (dato%1000)/100 + 0x30;
    ASCII[4] = (dato%100)/10 + 0x30;

    LCD_printInt_V(ASCII);
}

void LCD_Ini(void)
{
    TRISF=0;
    PORTF=0;

    LCD_Command(0x33);
    LCD_Command(0x32);        //Modo 4 Bits

    LCD_Command(0x2c);        //Function Set: N=1 , F=0

    LCD_Command(0x08);        //Display OFF
}
```

```
LCD_Command(0x01);    //Clear Display
LCD_Command(0x06);    //Entry mode set: I/D=1 , S=0
LCD_Command(0x0C);    //Display ON: C=0 , B=0
}
```

## D.4. Código de Control

```

/*****
/***** Algoritmo de Control *****/
/*****

/* Constantes de Control */
// K = Ganancia Proporcional      Ti = Tiempo integrativo      Td = Tiempo derivativo
// N = Limitador de altas frecuencias  Uc = Referencia
float Kp = 300, Ti = 1, Td = 0.4;
float N = 1, e = 0, e_ant = 0, e_ant_ant = 0;
float y, y_ant = 0, Uc = 0, U;
float Prop, I, I_ant = 0, D, D_ant = 0;
float a, b, c;

void Control (float angulo)
{
    e = Uc - angulo;           // Calculo del error
    y = angulo;

    // Cálculo de  $P(k) = K(b \cdot Uc(k) - y(k))$  //
    Prop = Kp * e;

    // Cálculo de  $I(k) = I(k-1) + (K \cdot Ts) / (Ti) \cdot e(k)$  //
    if((U < PeriodoPWM*2) && (U > 0))           // Condición para Antiwindup
        I = I_ant + a * e;
    else
        I = I_ant;

    // Cálculo de  $D(k) = (Td / (Td + N \cdot Ts)) \cdot D(k-1) - ((K \cdot Td \cdot N) / (Td + N \cdot Ts)) \cdot (y(k) - y(k-1))$  //
    D = b * D_ant - c * (y - y_ant);

    // Cálculo de acción de control //
    U = Prop + I + D;

    I_ant = I;
    D_ant = D;
    y_ant = y;
}

```

## D.5. Interrupciones

```
void __attribute__((interrupt, no_auto_psv)) _T1Interrupt(void)
{
    IFS0bits.T1IF = 0;           // Limpia bandera de interrupción
    T1CONbits.TON = 0;          // Apaga Timer 1
    TMR1 = 0xE0C0;
    T1CONbits.TON = 1;          // Enciende Timer 1
    flag = 1;
}
```

## D.6. Código principal

```

/*****
/***** Programa Principal *****/
/*****

unsigned int flag=1;

//Definición de textos fijos en el LCD
const char texto[]={ "ANGULOS"}, texto1[]={ "ACEL: "}, texto2[]={ "GYRO: "};
const char texto3[]={ "Bateria: "}, texto4[]={ "Direccion: "};
const char texto5[]={ " Grados"}, texto6[]={ " Grados/s"}, texto7[]={ " V"};

int main (void)
{
    long int ADCacel, ADCgyro, ADCbateria, ADCdireccion;
    float acel, gyro, bateria;
    unsigned int config1, config2, config3, sptime, PeriodoPWM;

    /* Calculo de constantes de control */
    a = (Kp * Ts)/Ti;
    b = Td/(Td + N*Ts);
    c = (Kp*Td*N)/(Td + N*Ts);

    ADC_Ini();           // Inicialización del convertidor A/D
    LCD_Ini();           // Inicialización del LCD
    Timer_Ini();         // Inicialización del Timer 1

    //%%%%%%%%%% "Inicialización del Modulo PWM" %%%%%%%%%%%

    sptime = 0x0;

    //Configuración Registro PTCON
    config1 = (PWM_EN & PWM_OP_SCALE1 & PWM_IPCLK_SCALE1 & PWM_MOD_FREE);

    //Configuración PWMCON1
    config2 = (PWM_MOD3_IND & PWM_MOD2_IND & PWM_MOD1_IND & PWM_PDIS3H &
    PWM_PDIS2H & PWM_PDIS1H & PWM_PDIS3L & PWM_PDIS2L & PWM_PDIS1L);

    //Configuración PWMCON2
    config3 = (PWM_SEVOPS1 & PWM_OSYNC_PWM & PWM_UEN);

    // calculamos el periodo deseado utilizando la frecuencia del microcontrolador
    PeriodoPWM = (FCY / 40000)-1; // Frecuencia del PWM = 20 KHz
    Ciclo_Serv = PeriodoPWM*2;      // 100% del ciclo de servicio

    OpenMCPWM(PeriodoPWM,sptime,config1,config2,config3);

```

```

TRISD = 0;           // Puerto D como salida
PORTD = 0;          // Inicializa puerto
TRISE = 0;          // Puerto E como salida

while (1)
{
    if(flag==1)
    {
        PORTDbits.RD2 = 1;           // Pin de medición de periodo de Muestreo Ts
        IFS0bits.ADIF = 0;           // Limpia bandera de Interrupción
                                        // del ADC
        while (IFS0bits.ADIF==0);    // Conversión terminada?
        ADCacel   = ADCBUF1;
        ADCgyro   = ADCBUF2;
        ADCbateria = ADCBUF3;
        ADCdireccion = ADCBUF0;

        ////////////////////////////////////// "Conversiones" //////////////////////////////////////

        ADCacel   = (ADCacel*5000)/1023;           // Conversión a mV
        ADCgyro   = (ADCgyro*5000)/1023;           // Conversión a mV
        ADCbateria = (ADCbateria*5000)/1023;       // Conversión a mV
        ADCdireccion = (ADCdireccion*5000)/1023;   // Conversión a mV

        if(ADCgyro_ini==0)
            ADCgyro_ini = ADCgyro;

        acel = (ADCacel - 1659)/7.68;           // Conversión a grados
        gyro = (ADCgyro - ADCgyro_ini)/7.22;    // Conversión a grados/s
        bateria = (ADCbateria*13400)/5000;

        acel_rad = (3.1416*acel)/180;           // Conversion a Radianes
        gyro_rad = (3.1416*gyro)/180;           // Conversion a Rad/s

        Kalman(acel_rad, gyro_rad);
        Control(Acel_K);

        ////////////////////////////////////// "Salida a Actuadores" //////////////////////////////////////
        // Giro de Ruedas
        if(U < 0)
        {
            Reversa();
            U = -U;
        }
        else

```

```

        Avanzar();

// Zona muerta

if(U > 0) //lim inf 428 @ 20khz
    U = U + 428;

if(U > Ciclo_Serv) // 2*PeriodoPWM = 100%
    U = Ciclo_Serv;

// Invertir salida (por lógica de opto-acopladores)
U = Ciclo_Serv - U;

PDC1 = U;
PDC2 = U;

//%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% "Escritura en LCD" %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

/* Escritura de Acelerómetro en Display */
    posicion = (180*Acel_K)/3.1416;
    LCD_Command(0x80); //Posiciona el cursor en la primera línea
    LCD_PrintString(texto1);
    if(posicion<0)
    {
        LCD_Data(0x2D); // Escribe signo menos (-)
        posicion= - posicion;
    }
    else
        LCD_Data(0x20);
    LCD_Command(0x84);
    posicion = posicion*10;
    int2ASCII_2((int)posicion); //Escribe valor del ángulo de posición
    LCD_Command(0x88);
    LCD_PrintString(texto5);

/* Escritura de Acción de Control */
    LCD_Command(0xC0); //Posiciona el cursor en la segunda línea
    LCD_PrintString(texto);
    int2ASCII(U);

    PORTDbits.RD2 = 0; // Pin de medición de periodo de
Muestreo Ts
    flag = 0;
}
}
}

```

## D.7. Cálculo de Ganancias de Ackerman

```

%%%%%%%%%% CALCULO DE GANANCIAS DE ACKERMAN %%%%%%%%%%
clc
clear all
%%%%%%%%%% Parámetros del Modelo %%%%%%%%%%

mbase=39.5;
mpersona=70;
mb=mbase+mpersona;
mr=3;
g=9.81;
L=0.85;
ancho_barra=0.25;
D=0.4;
largo_base=0.95;
espesor_base=0.15;
R=0.20;
lr=(R^2)*mr/2;
lb_phi=mb*(D^2+largo_base^2)/12;
lb_theta=L^2*mpersona+mbase*(espesor_base/2)^2+(1/12)*((espesor_base^3)*2*D+(2*L)^3*ancho_b
arra);

f=mb+2*mr+2*(lr/(R^2));
Den=f*(lb_theta+mb*L^2)-(L*mb)^2;
a=(f*L*mb*g)/Den;
b=(f+L*mb*R)/Den;
c=-(L*mb)^2*g/Den;
d=(L*mb+f/R)/Den;
e=D/(R*lb_phi);

%%%%%%%%%% Variables del Modelo %%%%%%%%%%

A=[0 1 0 0;
  0 0 c 0;
  0 0 0 1;
  0 0 a 0];

A2=[0 1;
  0 0];

B=[0
  d
  0
  b];

B2=[0 0
  e -e];

C=[1 0 1 0];

```

```
eig(A)
```

```
P=[0,0,-2,-2]; %Polos propuestos
```

```
Gain=acker(A,B,P) %Obtención de Ganancias de Ackerman
```



# Apéndice E

## Momentos de Inercia

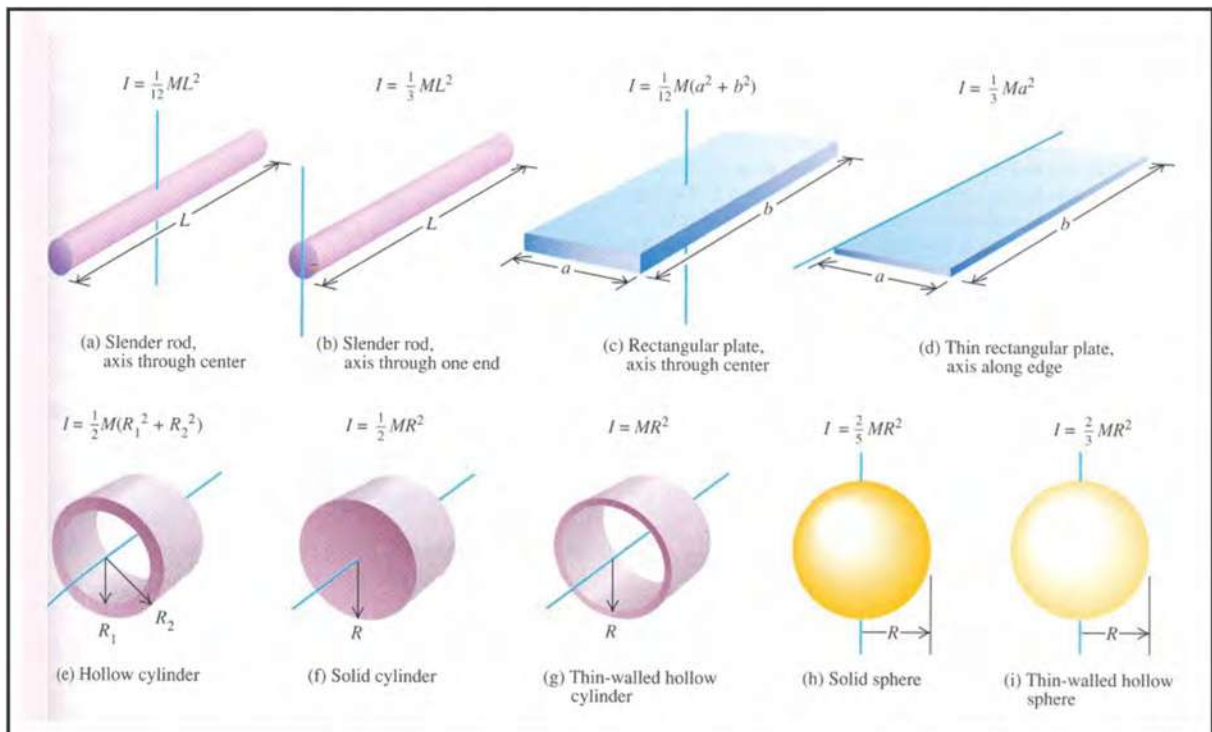


Figura E.1: Formulario de momentos de inercia más comunes [Landau 2003]



# Bibliografía

- [Segway 2001] Segway Inc., [Web en línea].<http://www.segway.com/>. [Consulta: 01-8-2012]
- [JOE 2002] Grasser, F., D'Arrigo, A., Colombi, S. y Rufer, A. C., “*JOE: a mobile, Inverted Pendulum*”, IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol. 49, No 1, 2002.
- [B. Scooter 2002] Balancing Scooter, [Web en línea].<http://www.tlb.org/scooter.html>. [Consulta: 01-8-2012].
- [W. Deal 2008] The Two Wheel Deal, [Web en línea].<https://engineering.purdue.edu/ece477/Webs/S08-Grp12/documents.html>. [Consulta: 01-8-2012].
- [Winglet 2008] Toyota Winglet P.T., [Web en línea].[http://www.toyota.co.jp/en/news/08/0801\\_1.html](http://www.toyota.co.jp/en/news/08/0801_1.html). [Consulta: 01-8-2012].
- [Honda 2009] Honda U3-X, [Web en línea].<http://world.honda.com/U3-X/>. [Consulta: 01-8-2012].
- [Moreno 2009] Leonardo Felipe Moreno Bustamante, “*Diseño e implementación de vehículo auto-balanceado sobre dos ruedas*”, Tesis de maestría, Universidad de Chile, 2009.
- [Wheelie 2009] Chris Krohne, “Elektor Wheelie - The electronics behind a rather special kind of vehicle”, *elektor electronics & microelectronics*. (Julio-Agosto 2009), p. 66.
- [OSPV 2011] Elektor OSPV, [Web en línea].<https://www.elektor.es/proyectos/elektor-ospv1.1812954.lynkx>. [Consulta: 01-8-2012]
- [PUMA 2011] P.U.M.A., [Web en línea].<http://www.segway.com/puma/>. [Consulta: 01-8-2012].
- [Yepez 2007] Yépez Mulia Enrique, Yépez Martínez Miztli Y., “*Mecánica Analítica*”, Las prensas de ciencias 1ªEd. 2007, p. 171-220

- [Chen 1999] Chen Chi-Tsong, “*Linear System Theory and Design*”, Oxford University Press, New York, 3ª Ed. 1999.
- [Landau 2003] Landau L. D., Lifshitz E. M., “*Mechanics*”, Butterworth Heinemann 3ª Ed. 2003.
- [Gottfried 2001] Gottfried Byron, “*Programación en C*” Mc Graw Hill 2ª Edición, 2001.
- [Astrom 1997] Astrom K. y Wittenmark, B. “*Computer Controlled Systems Theory and Design*”, Prentice-Hall 3ª Ed. 1997.
- [Poso 2010] Poso Espín David F., “*Diseño y Construcción de una Plataforma Didáctica para Medir Ángulos de Inclinación usando Sensores Inerciales como Acelerómetros y Giroscopios*”, Tesis de Licenciatura, Escuela Politécnica Nacional, Febrero 2010. p. 22
- [Kalman 1960] R. E. Kalman, “*A new Approach to Linear Filtering and Prediction*”, Transaction of the ASME, Journal of Basic Engineering 1960.
- [Greg 2001] Greg Wech, Gary Bishop, “*An introduction to the Kalman Filter*”, SIGGRAPH, 2001
- [Brookner 1998] Brookner Eli, “*Tracking and Kalman Filtering Made Easy*”, John Wiley & Sons, INC., 1998, p. 69
- [Optrex-Manual] Optrex Corporation, “*Dot Matrix Character LCD Module User’s Manual*”, [Manual en línea]. <http://www.eng.uwo.ca/electrical/e-shop/data-sheets/LCD.pdf>. [Consulta: 01-8-2012].
- [30f-Manual] Microchip, “*dsPIC30F Programmer’s Reference Manual*” [Manual en línea] <http://ww1.microchip.com/downloads/en/DeviceDoc/70157C.pdf>. [Consulta: 01-8-2012].
- [30f4011-Manual] Microchip, “*dsPIC30F4011/4012 Data Sheet*” [Manual en línea] <http://ww1.microchip.com/downloads/en/DeviceDoc/70135G.pdf>. [Consulta: 01-8-2012].
- [AN-978] International Rectifier, “*Application Note AN-978*”, [Manual en línea] <http://www.irf.com/technical-info/appnotes/an-978.pdf>. [Consulta: 01-8-2012].

- [dt98-2-Manual] International Rectifier, “*Bootstrap Component Selection For Control IC’s*”, dt98-2.pdf [Manual en línea] <http://www.irf.com/technical-info/design/tp/dt98-2.pdf>. [Consulta: 01-8-2012].
- [Yeonhoon 2006] Yeonhoon Kim, Soo Hyun Kim, Yoon Keun Kwak, “*Dynamic Analysis of a Nonholonomic Two-Wheeled Inverted Pendulum Robot*”, Journal of Intelligent and Robotics Systems, Springer 2006 vol. 44, p. 25-46.
- [Lego M. 2010] Sánchez Héctor, Aguirre Iñiqui, Patete Anna, “*Construcción y Control de un Péndulo Invertido utilizando la Plataforma Lego MINDSTORMS NXT*”, 4º Congreso Iberoamericano de estudiantes de Ingeniería Eléctrica (IV CIBELEC 2010), ISBN: 978-980-7185-1.
- [Jiménez 2011] Jiménez A., Ramirez S., Barriga O., Torres V., Argumedo P., “*Construcción y Control PID de un Péndulo Invertido en Dos Ruedas*”, Reunión de Otoño de Potencia, Electrónica y Computación (ROPEC) 2011 Internacional, ISBN: 978-607-95476-3-9.
- [Yamajuji 1989] Yamajuji K., Kawamura T., “*Postural Control of a monoaxial bicycle*”, J. Robot. Soc. of Japan 7(4), 1989, p. 74-79.
- [Ha 1996] Ha Y., Yuta S., “*Trajectory tracking control for navigation of the inverse pendulum type self-contained mobile robot*”, Robot Auton. Syst. 17,1996, p. 65-80.
- [Aracil 2005] Aracil J., Gordillo F., “*El Péndulo Invertido: Un Desafío para el Control No Lineal*”, Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial, Vol. 2 Num. 2, Abril 2005, p. 8-19.
- [Chen 1999] Chen Chi-Tsong. “Linear System Theory and Design” Oxford University Press 3ª Ed, New York. 1999. ISBN 0-19-511777-8.