



Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS
"MAT. LUIS MANUEL RIVERA GUTIÉRREZ"

"Propiedades electrodébiles en neutrinos de Dirac"

Tesis que para obtener el grado de
MAESTRO EN INGENIERÍA FÍSICA

Presenta

Juan Pablo Gutiérrez Montes

Asesor: Dr. Eduardo Salvador Tututi Hernández

Co-Asesor: Dr. Javier Montaña Domínguez

Morelia, Michoacán

Agosto 2023

A mi familia y amigos

Abstract

In this work the electroweak properties of Dirac neutrinos within the context of the minimally extended Standard Model are explored. In particular, the form factors associated with the diagrams that contribute to the radiative correction at one-loop order of the $\bar{\nu}_i\nu_i Z$ coupling are identified.

The computation is carried out in covariant general gauge (R_ξ) and the results are shown to be independent of the gauge choice (at least in the dominant terms of the form factors expansion). Therefore, the contribution of diagrams containing Goldstone pseudo-bosons is also addressed; In particular, we show that the result is in agreement with the case $\xi \rightarrow \infty$, that is, the result obtained in the unitary norm.

A numerical evaluation is carried out and a comparison is established with the results of the neutrino dipole magnetic moment.

Resumen

En este trabajo se exploran las propiedades electrodébiles de neutrinos de Dirac dentro del contexto del Modelo Estándar mínimamente extendido. En particular se identifican los factores de forma asociados a los diagramas que contribuyen a la corrección radiativa a orden de un lazo del acoplamiento $\bar{\nu}_i \nu_i Z$.

El cálculo se lleva a cabo en la norma general covariante (norma R_ξ) y se muestra que los resultados son independientes del parámetro de fijación de norma (al menos en los términos dominantes de la expansión de los factores de forma). Se aborda, por lo tanto, la contribución de los diagramas que contienen pseudo-bosones de Goldstone; en particular se busca mostrar que el resultado esté en acuerdo con el caso $\xi \rightarrow \infty$, es decir, que coincida con el resultado del cálculo en la norma unitaria.

Se realiza una evaluación numérica y se establece una comparación con los resultados del momento magnético dipolar del neutrino.

Palabras clave: momento, dipolar, masa, factor, forma.

Índice general

1. Introducción	2
2. Antecedentes	4
2.1. Modelo estándar	4
2.1.1. Interacciones débiles	5
2.1.2. Modelo electrodébil	9
2.2. Masa de neutrinos y modelo mínimamente extendido (MME) .	27
2.2.1. Mezcla (Mixing) en el sector leptónico	30
2.2.2. Formalismo para oscilaciones de neutrinos en el vacío .	33
2.3. Momentos dipolares en fermiones del ME	35
2.3.1. Momento magnético anómalo del electrón	35
2.3.2. Momento magnético anómalo en neutrinos de Dirac . .	38
2.3.3. Momentos dipolares débiles en el modelo estándar . . .	39
3. Planteamiento del problema	41
3.1. El modelo estándar mínimamente extendido	41
3.2. El Problema	44
3.2.1. Norma unitaria	44
3.2.2. Norma general	45
4. Resultados y discusión	50
4.1. Norma unitaria	50
4.2. Norma general	51
5. Conclusiones	53
Bibliografía	56

Capítulo 1

Introducción

Transiciones tales como $\mu \rightarrow e\gamma$, que violan sabor leptónico, se pueden entender como transiciones de tipo dipolares, ya que se dan mediante interacciones de tipo dipolar magnética que se caracterizan por términos proporcionales a $\sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$. Entonces los momentos dipolares magnéticos (MDM) de las partículas involucradas son cantidades importantes en la explicación de estas transiciones.

Desde hace unas décadas, los MDM se han estudiado ampliamente en leptones cargados y quarks; esta área comienza con el trabajo de Julian Schwinger sobre el momento dipolar magnético del electrón en 1948 [1].

Más recientemente, se han hecho esfuerzos por determinar los momentos dipolares magnéticos débiles (WMDM) de los fermiones más pesados, no solamente desde el punto de vista teórico [2, 3], sino también experimental [4].

Dentro de estos estudios también se han encontrado valores para los MDM de los neutrinos [5], que son diferentes de cero a pesar de que los neutrinos sean partículas eléctricamente neutras. Sin embargo, hasta donde se ha podido revisar la bibliografía disponible sobre el tema, no se han estudiado los WMDM de los neutrinos, lo que es el objetivo principal de este trabajo; este estudio se realiza en el marco del modelo estándar mínimamente extendido (MME) [6] para incluir componentes derechos de los campos quirales de los neutrinos y permitir, con esto, términos de masa para los neutrinos. Lo anterior, de acuerdo a la predicción de masa diferente de cero para estas partículas que deriva de la observación del fenómeno de oscilación en neutrinos solar y de otras fuentes [7]-[18].

Por lo anterior este texto comprende, en su segundo capítulo, una revisión

de las ideas y descubrimientos que condujeron a teorizar la existencia del neutrino y al establecimiento del sector electro-débil del Modelo Estándar para posteriormente extender estas nociones al contexto del MME; así mismo, se aborda el formalismo básico para las oscilaciones de neutrinos y se comenta sobre el panorama actual de los MDM y WMDM en fermiones de ME.

En el tercer capítulo, se discute la estructura de la función del vértice $\bar{\nu}_i \nu_i Z$ y se identifican los factores de forma relacionados con los WMDM. Se establecen, en forma integral, las amplitudes de probabilidad asociadas a los diagramas involucrados en la corrección radiativa a orden de un lazo del acoplamiento $\bar{\nu}_i \nu_i Z$ tanto en norma unitaria como en norma general.

Finalmente, en los capítulos cuatro y cinco, se exponen los resultados analíticos encontrados, los valores obtenidos para los WMDM en neutrinos de Dirac y se establecen comparaciones y aclaraciones pertinentes, entre ellas, se muestra que el resultado obtenido es independiente de la elección del parámetro de norma.

Capítulo 2

Antecedentes

2.1. Modelo estándar

Desde su formulación original en la década de los setentas, el Modelo Estándar (ME) de partículas elementales ha acumulado un largo historial de corroboraciones experimentales y éxito predictivo con un nivel de precisión muy alto [19, 20]. Hoy en día es la teoría física más ampliamente aceptada para describir las interacciones fundamentales; sin embargo aún presenta problemas relacionados con, por ejemplo, la gran cantidad de parámetros libres (alrededor de veinte) que deben ser introducidos a mano [21], además de problemas como el de la cuantización de la carga [22] y de la masa del bosón de Higgs [22] que no se han logrado explicar satisfactoriamente; este es el caso también del llamado problema de la jerarquía [23] que se pregunta por la enorme diferencia que existe entre la magnitud de algunas interacciones fundamentales.

Otro de los aspectos que no se explican desde el modelo estándar tiene que ver con los valores diferentes de cero de las masas de los neutrinos y su origen [6, 22] ya que partir de la observación de neutrinos provenientes de diversas fuentes [6, 24] se ha podido constatar el fenómeno de oscilación que implica el cambio de sabor leptónico durante la propagación de los neutrinos [6, 22]. Esto implica, contrariamente a la predicción del ME, que los neutrinos deben tener masa. Esta situación ha puesto al estudio de los neutrinos en el centro de interés de la comunidad teórica y experimental ya que constituyen una de las vías más aparentes para encontrar nueva física más allá del ME.

Para lidiar con las discrepancias entre teoría y experimento se han propuesto diferentes extensiones del modelo estándar [6], entre ellas aquella que

únicamente requiere añadir los componentes derechos a los campos de los neutrinos, se conoce como modelo estándar mínimamente extendido. La particularidad de estos campos de neutrinos derechos con respecto al resto de campos fermiónicos del ME es que son invariantes bajo las simetrías del ME; al ser singletes del grupo $SU(3)_c \times SU(2)_L$ no interactúan ni fuerte ni electrodébilmente, siendo capaces únicamente de una muy ligera interacción gravitatoria [6] debida a la magnitud de su masa ($m_{\nu_e} \approx 1.1eV$) [6]; por esta razón se denominan neutrinos estériles, en contraposición a los neutrinos activos que participan en interacciones débiles. Este modelo mínimamente extendido forma parte del marco teórico en el que se desarrolla este trabajo y sus resultados pasan por la consideración de los componentes derechos de los campos de neutrinos.

2.1.1. Interacciones débiles

Las interacciones débiles caracterizan diversos procesos en la naturaleza estando presentes en los decaimientos de piones ($\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$, $\pi^- \rightarrow \mu^- \nu_\mu$) y de muones ($\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$), y en particular el decaimiento beta ($n \rightarrow p e^- \bar{\nu}_e$) que es de relevancia histórica central para la construcción de los primeros modelos de este tipo de interacción fundamental.

La historia de las interacciones débiles se remonta al descubrimiento de la radioactividad por Henri Becquerel en 1896 y su posterior observación de que la relación e/m de las partículas beta emitidas naturalmente en ciertos decaimientos de núcleos atómicos era la misma que para los electrones, identificando así que este tipo de radiación estaba, efectivamente, conformada por este tipo de partículas.

A comienzos del siglo siguiente, James Chadwick hace aportaciones cruciales en la física atómica mostrando que el espectro del decaimiento beta es continuo, es decir, que los electrones involucrados en decaimientos beta no tienen una única energía característica. Este hallazgo sugería una aparente violación del principio de conservación de la energía. Mas tarde, en 1932, a Chadwick se le atribuyó el descubrimiento del neutrón.

Para resolver la aparente violación del principio de conservación de la energía en el decaimiento beta, en 1929, Wolfgang Pauli propone que la energía podría conservarse si en el proceso estuviera también involucrada una nueva partícula de spin $1/2$, que debería tener carga eléctrica neutra: el neutrino (electrónico). La existencia de esta partícula fue demostrada posteriormente por el experimento de Clyde Cowan y Frederick Reines en 1956.

Tomando en cuenta las consideraciones de Pauli sobre el neutrino, en 1933 Enrico Fermi propone el primer modelo efectivo para bajas energías del decaimiento beta, inspirado fuertemente en la descripción de la dispersión electrón-muón provista por la electrodinámica cuántica (QED).

En analogía con QED, Fermi propone un término de interacción de la forma

$$H_{weak} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{p} \gamma_\mu n \bar{e} \gamma^\mu \nu_e, \quad (2.1)$$

donde G_F es la constante de interacción de Fermi a la que le correspondería un valor experimental de $1.16639 \times 10^{-5} GeV^{-2}$ [26]; este término provee una buena descripción del proceso de decaimiento beta a bajas energías.

Esta teoría no es renormalizable ya que los cálculos a nivel de lazo involucrarían potencias cada vez más altas de G_F , por tanto la amplitud de probabilidad tendría que contener potencias más altas de los momentos en el numerador, obteniendo términos que crecen sucesivamente en una expansión perturbativa [25].

Sin embargo este modelo da un indicio de la existencia de los mediadores masivos de la interacción débil ya que, de existir, la contribución de su propagador y por tanto la información sobre su masa estarían incluidas en el valor de la constante G_F , lo que bajo la consideración de que la constante real de acoplamiento de los procesos débiles fuera del orden de la constante de acoplamiento en procesos electromagnéticos (α), entonces a la masa del mediador del proceso le correspondería un valor del orden de GeV [26, 25]. Este hecho se confirmó experimentalmente en 1983 con el descubrimiento de los bosones W y Z [28].

Este modelo se puede ampliar para incorporar el hecho de que las interacciones con neutrinos violan paridad, para tener en cuenta esto, se puede utilizar explícitamente el proyector de quiralidad izquierdo ($P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)$) en la expresión para las corrientes de modo que, incluyendo términos similares para quarks se tiene

$$J_\mu^\dagger = \bar{u}_\nu \gamma^\mu P_L u_e + \bar{u}_u \gamma_\mu P_L V_{CKM} u_d. \quad (2.2)$$

Aquí

$$u_\nu = \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}, \quad u_e = \begin{pmatrix} e \\ \mu \\ \tau \end{pmatrix}, \quad u_u = \begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix}, \quad u_d = \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

en la formulación que considera tres generaciones de materia y V_{CKM} es la matriz de mezcla de los quarks, que se introduce para tener en cuenta los procesos donde no se conserva el número de sabor leptónico.

Este operador de quiralidad se introduce para reflejar el hecho de que sólo los componentes con quiralidad izquierda de los campos fermiónicos participan en las interacciones débiles. Estos componentes corresponden con partículas de helicidad izquierda y antipartículas de helicidad derecha en el límite $m \rightarrow 0$. Esta aseveración concuerda con las observaciones originalmente hechas por Wu *et al.* sobre la violación de la simetría de paridad en el proceso de decaimiento beta del cobalto-60 [27].

Nótese que la expresión en (2.2) introduce también una forma conocida como V-A en los factores del Hamiltoniano dado por

$$H_{weak} = J_\mu^\dagger J^\mu, \quad (2.4)$$

ya que esta dado como producto de corrientes de Dirac cada uno formado por una parte vectorial (V) proporcional a γ_μ menos una parte axial (A) proporcional a $\gamma_\mu \gamma^5$. Esta forma impone una violación máxima de paridad en el modelo ya que bajo una transformación de paridad P se tiene

$$P \bar{\psi}_a(t, \vec{x}) \gamma_\mu \psi_b(t, \vec{x}) P^{-1} = \bar{\psi}_a(t, -\vec{x}) \gamma^\mu \psi_b(t, -\vec{x}), \quad (2.5)$$

$$P \bar{\psi}_a(t, \vec{x}) \gamma_\mu \gamma^5 \psi_b(t, \vec{x}) P^{-1} = -\bar{\psi}_a(t, -\vec{x}) \gamma^\mu \gamma^5 \psi_b(t, -\vec{x}), \quad (2.6)$$

con lo que la forma del Hamiltoniano cambia a V+A. El mismo cambio de forma aparece bajo transformación de conjugación de carga por lo que la simetría es violada también de manera maximal y el Hamiltoniano no se mantiene invariante, esto implica que sólo los componentes izquierdos de los campos quirales participan en interacciones débiles cargadas. No obstante, la simetría bajo conjugación de carga y paridad (CP) se preserva en este modelo ya que la aplicación sucesiva de las citadas transformaciones regresa al Hamiltoniano a su forma V-A original.

Con estas consideraciones se tiene una buena descripción de las interacciones débiles que cambian la carga eléctrica a bajas energías, pero para el

régimen de altas energías la teoría sigue siendo no renormalizable [26]. En este modelo, además, hace falta la consideración de las interacciones débiles que preservan la carga eléctrica, es decir, aquellas en las que intervienen las corrientes neutras. Una revisión de la propuesta anterior que incluye corrientes neutras puede escribirse como

$$H_{weak} = \frac{4G_F}{\sqrt{2}}(J^\mu J_\mu^\dagger + rK^\mu(x)K_\mu(x)), \quad (2.7)$$

con

$$\begin{aligned} K^\mu(x) = & \sum_{quarks} (\epsilon_L(q)\bar{q}\gamma_\mu P_L q + \epsilon_R(q)\bar{q}\gamma_\mu P_R q) \\ & + \frac{1}{2} \sum_\nu \bar{\nu}\gamma_\mu P_L \nu + \frac{1}{2} \sum_l \bar{l}\gamma_\mu (g_l^V - \gamma^5 g_l^A) l, \end{aligned} \quad (2.8)$$

donde r es un parámetro que expresa la intensidad relativa entre las interacciones débiles cargadas y las neutras. Los diferentes parámetros $\epsilon_L(q)$, $\epsilon_R(q)$, g_l^V , g_l^A incluidos en $K^\mu(x)$ son [5]:

$$\epsilon_L(u) = \frac{1}{2} - \frac{2}{3}sw^2, \quad (2.9)$$

$$\epsilon_R(u) = -\frac{2}{3}sw^2, \quad (2.10)$$

$$\epsilon_L(d) = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3}sw^2, \quad (2.11)$$

$$\epsilon_R(d) = \frac{1}{3}sw^2, \quad (2.12)$$

$$g_l^V = -\frac{1}{2} + 2sw^2, \quad (2.13)$$

$$g_l^A = -\frac{1}{2}, \quad (2.14)$$

donde se ha utilizado la notación abreviada $sw = \sin(\theta_W)$, $cw = \cos(\theta_W)$ para el seno y coseno del ángulo de Weinberg. En este modelo, pese a incluirse interacciones de corrientes neutras y brindar una buena descripción a bajas energías, se preserva la no-renormalizabilidad del modelo de Fermi. Al orden mas bajo la sección eficaz de la dispersión $\nu_e e$ es proporcional a $G_F^2 (P_{\nu_e} - P_e)^2$ por tanto diverge a altas energías, lo que entra en contradicción con la cota impuesta a los procesos de tipo s-wave que impone $\sigma_{total}^2 \leq \frac{16\pi}{s}$ [5].

2.1.2. Modelo electrodébil

Las interacciones débiles fueron unificadas con las interacciones electromagnéticas en el marco de la teoría electrodébil propuesta por Glashow, Weinberg y Salam en la década de los sesentas; en donde se propone incluir estos dos tipos de interacción en una sola teoría bajo el grupo de simetría $SU_L(2) \times U_Y(1)$ [29]. También se considera un doblete de campos escalares complejos para que, a través del mecanismo de Higgs, se generen términos de masa para los bosones y fermiones de la teoría posterior a la ruptura espontánea de esta simetría ($SU_L(2) \times U_Y(1) \rightarrow U_Q(1)$) dejando una simetría residual asociada a $U_Q(1)$.

Se considera por cada generación de materia, un doblete formado por los componentes de quiralidad izquierda del neutrón y del leptón y un singlete que correspondería con la componente derecha del leptón. La componente derecha del neutrino se deja explícitamente fuera del modelo, para tomar en cuenta que en el espectro de decaimientos débiles únicamente se observan neutrinos (antineutrinos) de quiralidad izquierda (derecha). Entonces para una generación de materia se tiene

$$\psi_L = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

y

$$\psi_R = e_R, \quad (2.16)$$

de modo que el grupo de isospín débil $SU_L(2)$ actúa de manera no trivial sólo en los componentes izquierdos de los campos. Bajo este grupo de transformaciones el Lagrangiano para estos campos está dado por

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}_L \not{\partial} \psi_L + i\bar{\psi}_R \not{\partial} \psi_R = i\bar{\nu}_L \not{\partial} \nu_L + i\bar{e} \not{\partial} e, \quad (2.17)$$

esta expresión es invariante bajo transformaciones del grupo $SU_L(2)$, sólo si no se consideran términos de masa para el campo del electrón. Cabe señalar que en la teoría de Glashow, Weinberg y Salam (GWS) no se puede construir un término de masa de Dirac para el neutrino de la forma $-m_{\nu_e}^2 (\bar{\nu}\nu) = -m_{\nu_e}^2 (\bar{\nu}_R \nu_L + \bar{\nu}_L \nu_R)$ ya que la componente derecha queda excluida de la formulación.

La corriente conservada de Noether, asociada al grupo en cuestión, para este Lagrangiano es

$$J_i^\mu = \bar{\psi}_L \gamma^\mu \left(\frac{\sigma_i}{2} \psi_L \right), \quad (2.18)$$

donde σ_i ($i = 1, 2, 3$) son las matrices de Pauli. Esta corriente es conocida como corriente de isospín débil y actúa sólo sobre componentes de quiralidad izquierda. Las correspondientes cargas conservadas son

$$\tau_i = \int d^3x J_i^0(x) = \int d^3x \psi_L^\dagger \frac{\sigma_i}{2} \psi_L, \quad (2.19)$$

y son los operadores de isospín débil cuyas relaciones de conmutación satisfacen la relación

$$[\tau_i, \tau_j] = i\epsilon_{ijk}\tau_k. \quad (2.20)$$

El Lagrangiano antes definido es invariante también bajo transformaciones globales de fase, las cuales forman el grupo de simetría $U(1)$. Considerando transformaciones infinitesimales de la forma usual se puede llegar a una expresión para la corriente asociada a esta simetría dada por

$$j_\mu = \bar{\psi}_L \gamma_\mu G \psi_L + \bar{\psi}_R \gamma_\mu G \psi_R, \quad (2.21)$$

donde G es el generador de la transformación. Identificando $G = Q$ como el operador de carga eléctrica, se obtiene la corriente eléctrica

$$j_\mu^{em} = Q_e \bar{e}_L \gamma_\mu e_L + Q_e \bar{e}_R \gamma_\mu e_R = -\bar{e} \gamma_\mu e. \quad (2.22)$$

Dado que los generadores de $SU_L(2)$ y $U(1)$ no conmutan, no se puede tener una base de eigenestados comunes, sin embargo, sus relaciones de conmutación,

$$[Q, \tau_i] = [\tau_3, \tau_i] = i\epsilon_{3ij}\tau_j, \quad (2.23)$$

indican que la relación

$$[Q - \tau_3, \tau_i] = 0, \quad (2.24)$$

se cumple; por lo anterior, el operador $\alpha(Q - \tau_3)$ (el factor α es a ser determinado) puede ser entendido como el generador de un grupo $U_Y(1)$ conocido como grupo de hipercarga débil. Para satisfacer la relación fenomenológica de Klein-Nishijima [25], se elige $\alpha = 2$. De esta forma se define el operador de hipercarga débil como

$$Y = 2(Q - \tau_3), \quad (2.25)$$

o alternativamente

$$Q = \tau_3 + \frac{Y}{2}; \quad (2.26)$$

el operador Y tiene una corriente conservada asociada, dada por

$$j_\mu^Y = Y_L \bar{\psi}_L \gamma_\mu \psi_L + Y_R \bar{\psi}_R \gamma_\mu \psi_R, \quad (2.27)$$

que satisface

$$j_\mu^{em} = j_\mu^3 + \frac{j_\mu^Y}{2}. \quad (2.28)$$

Se tiene entonces que el Lagrangiano es invariante bajo transformaciones del grupo de simetría $SU_L(2) \times U_Y(1)$.

Para tener una descripción de las interacciones en término de bosones mediadores se pide que la teoría sea invariante de norma como es usual; para ello se rempazan las derivadas usuales con derivadas covariantes que contienen a los campos de norma que dan lugar a los términos de interacción. De modo que las expresiones

$$D_\mu^L \psi_L = (\partial_\mu + ig A_{i\mu} \frac{\sigma_i}{2} + ig' B_\mu \frac{Y_L}{2}) \psi_L, \quad (2.29)$$

y

$$D_\mu^R \psi_R = (\partial_\mu + ig' B_\mu \frac{Y_R}{2}) \psi_R, \quad (2.30)$$

son usadas en lugar de las derivadas convencionales ($\not{\partial}\psi$) en el Lagrangiano $\mathcal{L} = i\bar{\psi}_L \not{\partial}\psi_L + i\bar{\psi}_R \not{\partial}\psi_R$ establecido en la ecuación (2.17). Entonces este Lagrangiano en su forma invariante de norma es

$$\mathcal{L}_l = i\bar{\psi}_L (\partial_\mu + ig A_{i\mu} \frac{\sigma_i}{2} + ig' B_\mu \frac{Y_L}{2}) \psi_L + i\bar{\psi}_R (\partial_\mu + ig' B_\mu \frac{Y_R}{2}) \psi_R, \quad (2.31)$$

donde $A_{i\mu}$ ($i=1,2,3$) son los campos de norma asociados al grupo $SU_L(2)$ y B_ν es el campo de norma asociado a $U_Y(1)$; g y g' son las constantes de acoplamiento asociadas respectivamente a estos grupos. La dinámica de los campos de norma está descrita por el Lagrangiano

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{4} W_{\mu\nu}^i W_i^{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}, \quad (2.32)$$

donde

$$W_{\mu\nu}^i = \partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i - g\epsilon_{ijk} A_\mu^j A_\nu^k \quad (2.33)$$

y

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu. \quad (2.34)$$

Los Lagrangianos \mathcal{L}_G y \mathcal{L}_l son invariantes bajo transformaciones del grupo $SU_L(2) \times U_Y(1)$; consideran, además de los términos dinámicos de los leptones, la dinámica y las interacciones de los cuatro campos bosónicos vectoriales correspondientes a los generadores de los grupos $SU_L(2)$ y $U_Y(1)$; sin embargo, no contiene términos de masa para los bosones ni para los leptones cargados.

En la teoría de GWS los términos de masa de los leptones deben ser generados mediante acoplamiento de Yukawa, para esto es necesario el rompimiento espontáneo de la simetría asociada a $SU_L(2) \times U_Y(1)$. El mecanismo de Higgs dotaría de masa a los bosones W^\pm y Z , característicos de la interacción débil, mientras que no se producirá un término de masa para el fotón.

Para discutir este proceso generalmente se comienza por considerar un potencial de la forma

$$V(\phi) = \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2, \quad (2.35)$$

donde $\lambda > 0$ y $\mu^2 < 0$ y ϕ es el doblete con hipercarga Y_H de campos complejos mencionado anteriormente y que tiene la forma

$$\phi = \begin{pmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^0 \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

Aquí, los superíndices se refieren a la carga eléctrica asociada al campo. El potencial $V(\phi)$ tiene un mínimo para el cual se tiene que $\frac{\partial V}{\partial \phi} = 0$. Este mínimo se alcanza para valores de $|\phi|$ dados por $|\phi|^2 = -\frac{\mu^2}{2\lambda} \equiv \frac{\nu^2}{2}$ con ν el valor de expectación del Higgs en el vacío. Entonces el doblete ϕ adquiere un valor de expectación no nulo en el vacío de forma que

$$\langle 0|\phi|0\rangle = \vec{\nu} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\nu}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (2.37)$$

Los operadores τ_i y Y no cancelan a $\vec{\nu}$ pero $Q\vec{\nu} = (\tau_3 + \frac{Y}{2})\vec{\nu} = 0$. Esto quiere decir que las simetrías asociadas a $SU_L(2)$ y $U_Y(1)$ están rotas individualmente, pero la simetría asociada al producto $SU_L(2) \times U_Y(1)$ no lo está. Después de la ruptura espontánea de simetría queda una simetría residual asociada a $U_Q(1)$.

Es conveniente reexpresar ϕ en coordenadas polares como

$$\phi = \begin{pmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^0 \end{pmatrix} = e^{(i/\nu) \sum \epsilon_i T_i} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\nu+H}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (2.38)$$

Con esto ϕ depende ahora de cuatro parámetros reales (ϵ_i, H) en lugar de dos campos escalares complejos. Estos nuevos parámetros tienen todos valor de expectación nulo, es decir,

$$\langle 0|\epsilon_i|0\rangle = \langle 0|H|0\rangle = 0. \quad (2.39)$$

La dinámica de los campos formados por ϕ está contenida en el Lagrangiano

$$\mathcal{L}_s = (D_\mu\phi)^\dagger(D^\mu\phi) - \mu^2\phi^\dagger\phi - \lambda(\phi^\dagger\phi)^2, \quad (2.40)$$

y los acoplamientos de Yukawa que dotan de masa a los leptones cargados se representan mediante un Lagrangiano de la forma

$$\mathcal{L}_{LY} = -C_e(\bar{\psi}_R(\phi^\dagger\psi_L) + (\bar{\psi}_L\phi)\psi_R); \quad (2.41)$$

de forma que el Lagrangiano de la teoría se compone de la suma de (2.41), (2.40), (2.32) y (2.31). Como este Lagrangiano es invariante bajo transformaciones de la forma $S = e^{-\frac{i}{v}\sum_i\epsilon_i T_i}$ se puede reescribir en términos de

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\nu+H}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad (2.42)$$

para obtener las mismas expresiones pero considerando esta nueva forma para ϕ . Con lo anterior se obtiene, en el sector de los campos escalares

$$\begin{aligned} (D_\mu\phi)^\dagger(D_\mu\phi) &= \frac{1}{4}g^2(\nu+H)^2W_\mu^\dagger W^\mu + \frac{1}{2}\partial_\mu H\partial^\mu H \\ &+ \frac{1}{8}(\nu+H)^2(gA_{3\mu} - g'B_\mu)^2, \end{aligned} \quad (2.43)$$

de donde se puede identificar $m_W = \frac{g\nu}{2}$ como la masa del bosón W^\pm . El término en los campos neutros contiene la matriz

$$\frac{\nu^2}{8} \begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix}, \quad (2.44)$$

que se puede diagonalizar usando las combinaciones lineales

$$A_\mu = swA_{3\mu} + cwB_\mu \quad (2.45)$$

y

$$Z_\mu = cwA_{3\mu} - swB_\mu, \quad (2.46)$$

donde se ha usado la notación abreviada para el seno y coseno del ángulo de Weinberg definida anteriormente. Estas combinaciones llevan a

$$\begin{aligned} \frac{\nu^2}{8}(gA_{3\mu} - g'B_\mu)^2 &= \frac{\nu^2}{8}(A_\mu^2(gsw - g'cw)^2 + Z_\mu^2(gcw + g'sw)^2 \\ &\quad + 2A_\mu Z^\mu(gsw - g'cw)(gcw - g'sw)). \end{aligned} \quad (2.47)$$

Para obtener la descripción de un fotón sin masa se debe satisfacer entonces

$$gsw = g'cw, \quad (2.48)$$

de donde derivan las expresiones

$$cw = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \quad (2.49)$$

y

$$sw = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}. \quad (2.50)$$

También se puede identificar la masa del bosón Z en términos del valor de expectación del vacío del Higgs y las constantes de acoplamiento g y g' como

$$m_Z = \frac{\nu}{2}(gcw + g'sw) = \frac{\nu}{2}(\sqrt{g^2 + g'^2}) = \frac{g\nu}{2cw}, \quad (2.51)$$

mientras que el potencial de Higgs después de la ruptura espontánea toma la forma

$$V(\phi) = \frac{\nu^2\mu^2}{4} - \mu^2 H^2 + \lambda(\nu H^3 + \frac{1}{4}H^4), \quad (2.52)$$

de donde se puede identificar el término de masa del Higgs

$$M_H = -2\mu^2. \quad (2.53)$$

Con lo anterior se puede escribir una expresión final para \mathcal{L}_S como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_S &= \frac{1}{2}(\partial_\mu H \partial^\mu H - M_H^2 H^2) - \frac{gM_H^2}{4m_W} H^3 - \frac{g^2 M_H^2}{32m_W^2} H^4 \\ &\quad + gm_W(H + \frac{g}{4m_W} H^2)W_\mu^\dagger W^\mu + m_W^2 W_\mu^\dagger W^\mu \\ &\quad + \frac{gm_Z}{2cw}(H + \frac{g}{4m_W} H^2)Z_\mu Z^\mu + \frac{1}{2}m_Z^2 Z_\mu Z^\mu, \end{aligned} \quad (2.54)$$

donde H es un campo escalar eléctricamente neutro y preserva su invarianza bajo transformaciones del grupo $U_Q(1)$ incluso si no acopla con A_μ .

En cuanto al sector de campos de norma se divide en

$$\mathcal{L}_G = L_G^0 + L_G^1 + L_G^2 \quad (2.55)$$

donde

$$\mathcal{L}_G^0 = -\frac{1}{4}A_{\mu\nu}^i A_i^{\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu} B^{\nu\mu}, \quad (2.56)$$

$$\mathcal{L}_G^1 = \frac{g}{2}\epsilon_{ijk}A_\mu^j A_\nu^k A_i^{\mu\nu}, \quad (2.57)$$

y

$$\mathcal{L}_G^2 = -\frac{g^2}{4}\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm}A_\mu^j A_\nu^k A_l^\mu A_m^\nu. \quad (2.58)$$

En las expresiones anteriores $A_{\mu\nu}^i \equiv \partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i$ y $B_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$.

Los términos \mathcal{L}_G^1 y \mathcal{L}_G^2 representan la autointeracción de los campos $A_{\mu\nu}^i$ característica de las teorías no abelianas. Usando que $A_{\mu\nu}^1 A_1^{\mu\nu} + A_{\mu\nu}^2 A_2^{\mu\nu} = 2W_{\mu\nu}^\dagger W^{\mu\nu}$ y $A_{\mu\nu}^3 A_3^{\mu\nu} + B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} = A_{\mu\nu} A^{\mu\nu} + Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu}$ se logra reescribir

$$\mathcal{L}_G^0 = -\frac{1}{2}W_{\mu\nu}^\dagger W^{\mu\nu} - \frac{1}{4}Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} - \frac{1}{4}A_{\mu\nu} A^{\mu\nu}, \quad (2.59)$$

$$\mathcal{L}_G^1 = igW^{\dagger\mu}W^\nu(swA_{\mu\nu} + cwZ_{\mu\nu}) + ig(W^\mu W_{\mu\nu}^\dagger - W^{\mu\dagger}W_{\mu\nu})(swA^\nu + cwZ^\nu) \quad (2.60)$$

y

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_G^2 = & -\frac{1}{2}g^2(W_\mu^\dagger W^\mu W_\nu^\dagger W^\nu - W^{\mu\dagger}W_\mu^\dagger W^\nu W_\nu) \\ & - g^2W_\mu^\dagger W^\mu (sw^2 A_\nu A^\nu + cw^2 Z_\nu Z^\nu + 2swcw A_\nu Z^\nu) \\ & + g^2W_\mu^\dagger W_\nu (sw^2 A^\mu A^\nu + cw^2 Z^\mu Z_\mu + swcw(A^\mu Z^\nu + A^\nu Z_\mu)). \end{aligned} \quad (2.61)$$

Como se puede observar \mathcal{L}_G^2 incluye sólo términos que involucran bosones cargados; los términos que involucran sólo bosones neutros se han cancelado.

Con los términos $-\frac{1}{2}W_{\mu\nu}^\dagger W^{\mu\nu}$ de la ecuación (2.59), $igswA^\nu(W^\mu W_{\mu\nu}^\dagger - W^{\mu\dagger}W_{\mu\nu})$ de (2.60) y $-g^2sw(W_\mu^\dagger W^\mu A_\nu A^\nu - W_\mu^\dagger W_\nu A^\mu A^\nu)$ de (2.61) se puede construir un único término:

$$-\frac{1}{2}(D_\mu W_\nu - D_\nu W_\mu)^\dagger (D^\mu W^\nu - D^\nu W^\mu). \quad (2.62)$$

Aquí, la derivada covariante de W_μ esta dada por

$$D_\mu W_\nu = (\partial_\mu + igswA_\mu)W_\nu; \quad (2.63)$$

de esta expresión se puede apreciar que W_μ es un campo con carga eléctrica positiva dada por gsw , cuya interacción con el campo electromagnético es descrita a través de transformaciones de simetría asociadas al grupo $U_Q(1)$. Nótese que A_μ y Z_μ son campos eléctricamente neutros.

En el sector leptónico los leptones cargados ganan masa a través de su interacción con escalares, esto proviene de los acoplamientos de Yukawa que toman la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{lY} &= -C_e(\bar{\psi}_R(\phi^\dagger\psi_L) + (\bar{\psi}_L\phi)\psi_R) \\ &= -\frac{C_e}{\sqrt{2}}(\nu + H)(\bar{e}_R e_L + \bar{e}_L e_R) = -\frac{C_e}{\sqrt{2}}(\nu + H)(\bar{e}e), \end{aligned} \quad (2.64)$$

donde C_e es la constante de dichos acoplamientos, relacionada con la intensidad de los mismos; de ésta expresión identificar la masa $m_e = \frac{C_e\nu}{\sqrt{2}}$. Con esto se logra expresar C_e en términos de la masa del electrón como

$$C_e = \frac{\sqrt{2}m_e}{\nu}. \quad (2.65)$$

Estas cantidades están relacionadas con la intensidad de los acoplamientos de Yukawa. Entonces se tiene para el sector de Yukawa,

$$\mathcal{L}_{lY} = -m_e\bar{e}e - \frac{gm_e}{2m_W}H\bar{e}e, \quad (2.66)$$

y en el Lagrangiano para los leptones

$$\mathcal{L}_l = \bar{\psi}_L i\gamma^\mu D_\mu^L \psi_L + \bar{\psi}_R i\gamma^\mu D_\mu^R \psi_R. \quad (2.67)$$

El primer término de la expresión anterior explícitamente es

$$\bar{\psi}_L i\gamma^\mu D_\mu^L \psi_L = \bar{\psi}_L i\gamma^\mu [\partial_\mu + \frac{ig}{\sqrt{2}}(W_\mu\sigma_+ + W_\mu^\dagger\sigma_-) + \frac{i}{\sqrt{2}}(gA_{3\mu}\sigma_3 - g'B_\mu)]\psi_L, \quad (2.68)$$

y el segundo término de (2.67) se puede expresar como

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_R i\gamma^\mu D_\mu^R \psi_R &= \bar{\psi}_R i\gamma^\mu (\partial_\mu + ig'\frac{Y_R}{2}B_\mu)\psi_R \\ &= \bar{e}_R i\gamma^\mu \partial_\mu e_R + g'\bar{e}_R \gamma^\mu e_R B_\mu, \end{aligned} \quad (2.69)$$

contienen los términos cinéticos esperados para los leptones dados por

$$\bar{\psi}_L i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_L + \bar{\psi}_R i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_R = \bar{\nu}_L i\gamma^\mu \partial_\mu \nu_L + \bar{e} i\gamma^\mu \partial_\mu e \quad (2.70)$$

así como los diversos acoplamientos entre las corrientes y los bosones de norma. Por otro lado, los términos que involucran a corrientes cargadas se escriben

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{cc}^l &= -\frac{g}{\sqrt{2}} [(\bar{\psi}_L \gamma^\mu \sigma_+ \psi_L) W_\mu + (\bar{\psi}_L \gamma^\mu \sigma_- \psi_L) W_\mu^\dagger] \\ &= -\frac{g}{\sqrt{2}} (J^{\mu\dagger} W_\mu + J^\mu W_\mu^\dagger), \end{aligned} \quad (2.71)$$

aquí se tiene

$$J_\mu = \bar{\psi}_L \gamma^\mu \sigma_- \psi_L = \bar{\nu}_L \gamma_\mu e_L = j_\mu^1 + i j_\mu^2. \quad (2.72)$$

En cuanto a los acoplamientos de las corrientes neutras, se tiene la expresión

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{nc}^l &= -g A_{3\mu} (\bar{\psi}_L \gamma^\mu \frac{\sigma_3}{2} \psi_L) - \frac{g'}{2} B_\mu (-\bar{\psi}_L \gamma^\mu \psi_L - 2\bar{\psi}_R \gamma^\mu \psi_R) \\ &= -g j_\mu^3 A_3^\mu - \frac{g'}{2} j_\mu^Y B^\mu, \end{aligned} \quad (2.73)$$

o en términos de A^μ y Z^μ

$$\mathcal{L}_{nc}^l = -(gsw j_\mu^3 + \frac{g'}{2} cw j_\mu^Y) A^\mu - (gcw j_\mu^3 - \frac{g'}{2} sw j_\mu^Y) Z^\mu, \quad (2.74)$$

y dado que las corrientes neutras están relacionadas por $j_\mu^{em} = j_\mu^3 + \frac{1}{2} j_\mu^Y$, se tiene que el factor que acompaña a A_μ en el primer término del Lagrangiano es

$$\begin{aligned} gsw j_\mu^3 + \frac{g'}{2} cw j_\mu^Y &= g' cw j_\mu^{em} + (gsw - g' cw) j_\mu^3 \\ &= gsw j_\mu^{em} + \frac{1}{2} (g' cw - gsw) j_\mu^3 = e j_\mu^{em}, \end{aligned} \quad (2.75)$$

donde se ha usado que $g' cw - gsw = 0$ o alternativamente $\frac{1}{e^2} = \frac{1}{g'^2} + \frac{1}{g^2}$; mientras que la parte acoplada a Z_μ es

$$gcw j_\mu^3 - \frac{g'}{2} sw j_\mu^Y = \frac{g}{cw} (j_\mu^3 - sw^2 j_\mu^{em}) = \frac{g}{cw} j_\mu^Z, \quad (2.76)$$

donde la corriente j_μ^Z esta dada por

$$j_\mu^Z = j_\mu^3 - sw^2 j_\mu^{em} = (\bar{\psi}_L \gamma^\mu T_3 \psi_L) - sw^2 (Q \bar{e}_L \gamma^\mu e_L + \bar{e}_R \gamma^\mu e_R), \quad (2.77)$$

identificando las ‘‘cargas débiles’’ $Z_L \equiv T_{3L} - Qsw^2$ y $Z_R \equiv -Qsw^2$ se deja escribir como

$$j_\mu^Z = (\bar{\psi}_L \gamma^\mu Z_L \psi_L + \bar{\psi}_R \gamma^\mu Z_R \psi_R). \quad (2.78)$$

Las corrientes neutras son digonales en sabor y contienen ambos componentes quirales de los leptones cargados y se caracterizan por su carga $T_3 - sw^2 Q$. El Lagrangiano para corrientes neutras se puede escribir finalmente de forma abreviada como

$$\mathcal{L}_{nc}^l = -e j_\mu^{em} A^\mu - \frac{g}{cw} j_\mu^Z Z^\mu, \quad (2.79)$$

la cual es la expresión usual para la corrientes neutras tras la ruptura de simetría.

Modelo para una generación de quarks

Para incluir la interacción de los quarks de la primera generación en el modelo se introduce un doblete formado por

$$\psi_L^q = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \quad (2.80)$$

y dos singletes bajo transformaciones de $SU_L(2)$

$$\psi_R^u = u_R \quad (2.81)$$

y

$$\psi_R^d = d_R. \quad (2.82)$$

Además, es necesario agregar al Lagrangiano los términos invariantes de norma correspondientes de forma que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_q &= \bar{\psi}_L^q i \gamma^\mu D_\mu^L \psi_L^q + \bar{u}_R i \gamma^\mu D_\mu^R u_R + \bar{d}_R i \gamma^\mu D_\mu^R d_R \\ &= \bar{\psi}_L^q i \gamma^\mu (\partial_\mu + ig A_\mu + \frac{i}{2} g' Y_L B_\mu) \psi_L^q + \bar{u}_R i \gamma^\mu (\partial_\mu + \frac{i}{2} g' Y_R^u B_\mu) u_R \\ &\quad + \bar{d}_R i \gamma^\mu (\partial_\mu + \frac{i}{2} g' Y_R^d B_\mu) d_R, \end{aligned} \quad (2.83)$$

así como los acoplamientos de Yukawa de los quarks dados por

$$\mathcal{L}_q^Y = -C_u((\bar{\psi}_L^q \phi^c)u_R + \bar{u}_R(\phi^{c\dagger}\psi_L^q)) - C_d((\bar{\psi}_L^q \phi)d_R + \bar{d}_R(\phi^\dagger\psi_L^q)), \quad (2.84)$$

donde $\phi^c = \begin{pmatrix} \frac{\nu+H}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$.

La invarianza de norma bajo transformaciones de $U_Y(1)$ se cumple para estos acoplamientos dadas las relaciones

$$Y_L - Y_R^u = Y_{H^c} \quad (2.85)$$

y

$$Y_L - Y_R^d = Y_H. \quad (2.86)$$

Los acoplaminetos de Yukawa toman la forma

$$\mathcal{L}_q^Y = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\nu + H)(C_u \bar{u}u + C_d \bar{d}d). \quad (2.87)$$

Después de la ruptura espontánea de simetría, se identifican las masas de los quarks u y d

$$m_u = \frac{1}{\sqrt{2}}\nu C_u \quad (2.88)$$

y

$$m_d = \frac{1}{\sqrt{2}}\nu C_d. \quad (2.89)$$

Con lo que

$$\mathcal{L}_q^Y = -m_u \bar{u}u - m_d \bar{d}d - \frac{gm_u}{2m_W} \bar{u}uH - \frac{gm_d}{2m_W} \bar{d}dH \quad (2.90)$$

tiene una forma análoga a la de los leptones pero con términos de masa y de interacción para ambos quarks.

Por su parte \mathcal{L}_q , en la ecuación (2.83) contiene, además de los términos cinéticos esperados para los quarks, a los términos

$$\mathcal{L}_{cc}^q = -\frac{1}{\sqrt{2}}g\bar{\psi}_L^q\gamma^\mu(\tau_+W_\mu + \tau_-W_\mu^\dagger)\psi_L^q = -\frac{1}{\sqrt{2}}g(J^{\mu\dagger}W_\mu + J^\mu W_\mu^\dagger) \quad (2.91)$$

y

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{nc}^q &= -\frac{1}{2}\bar{\psi}_L\gamma_\mu(gA_3^\mu\sigma_3 + g'B^\mu Y_L)\psi_L - \frac{1}{2}g'Y_R^i\bar{\psi}_R^i\gamma^\mu\psi_R^i B^\mu \\ &= -gj_\mu^3 A_3^\mu - \frac{1}{2}g'j_\mu^Y B^\mu. \end{aligned} \quad (2.92)$$

Asimismo \mathcal{L}_{nc}^q , en términos de A_μ y Z_μ , es

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{nc}^q &= - (gswj_\mu^3 + \frac{1}{2}g'cwj_\mu^Y)A^\mu - (gcwj_\mu^3 - \frac{1}{2}g'swj_\mu^Y)Z^\mu \\ &= - e j_\mu^{em} A^\mu - \frac{g}{cw} j_\mu^{Zq} Z^\mu,\end{aligned}\tag{2.93}$$

donde la corriente asociada a Z para los quarks

$$\begin{aligned}j_\mu^{Zq} &= j_\mu^3 - sw^2 j_\mu^Y = \bar{\psi}^q \gamma^\mu (T_3 - sw^2 Q) \psi^q \\ &= \bar{\psi}_L^q \gamma^\mu Z_L \psi_L^q + \bar{u}_R \gamma^\mu Z_R^u u_R + \bar{d}_R \gamma^\mu Z_R^d d_R\end{aligned}\tag{2.94}$$

preserva el sabor de los quarks y se acopla a ambos componentes quirales. También puede ser escrita como

$$j_\mu^{Zq} = \frac{1}{2} \bar{u} \gamma_\mu (g_V^u - g_A^u \gamma^5) u + \frac{1}{2} \bar{d} \gamma_\mu (g_V^d - g_A^d \gamma^5) d,\tag{2.95}$$

donde $g_V = Z_L + Z_R$ y $g_A = Z_L - Z_R$. A su vez, como $Z_R = -sw^2 Q$ y $Z_L = T_3 - sw^2 Q$ se tiene que todas estas cantidades dependen únicamente de θ_W .

Hasta este punto, donde se ha descrito un modelo para una generación de quarks y leptones, se tienen en el modelo siete parámetros independientes: g , g' , λ , μ^2 , C_e , C_u y C_d previo a la ruptura de simetría y posterior a ella son reemplazados por: e , θ_W , m_W , M_H , m_e , m_u y m_d .

Extensión para varias generaciones de materia

Para extender esta discusión a un modelo para tres generaciones de materia, es común considerar primero el modelo para dos generaciones, para el cual se introduce el ángulo de Cabibbo " θ_c " tal que $\cos(\theta_c) = \frac{G^{(0)}}{G_F}$ y $\sin(\theta_c) = \frac{G^{(1)}}{G_F}$ donde $G^{(0)}$ y $G^{(1)}$ son las constantes de Fermi observadas experimentalmente para los procesos que preservan y violan extrañeza respectivamente. Las amplitudes de estos procesos pueden entonces ser obtenidas a partir de una corriente de la forma

$$H_\mu^\dagger = \bar{u} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) d_c,\tag{2.96}$$

que difiere del término propuesto para una generación sólo en la sustitución $d \rightarrow d_c \equiv d \cos(\theta_c) + s \sin(\theta_c)$ donde s es el campo del quark extraño (strange).

Sin embargo, realizar una sustitución similar en el sector de corrientes neutras j_μ^z resulta en términos que sugieren que las transiciones neutras con

cambio de sabor $s \rightarrow d$ tendrían una probabilidad similar de ocurrir a la de los procesos $s \rightarrow u$, lo que entra en fuerte contradicción con las observaciones.

En 1970, Glashow, Iliopoulos y Maiani introducen el quark encanto (charm), para formar junto con s_c el complemento ortogonal de d_c , esto es, un segundo doblete de quarks $\begin{pmatrix} c \\ s_c \end{pmatrix}$ se agrega al modelo junto con el doblete $\begin{pmatrix} u \\ d_c \end{pmatrix}$. Aquí s_c y d_c estarían relacionados con d y s a través de

$$\begin{pmatrix} d_c \\ s_c \end{pmatrix} = V_c \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \cos(\theta_c) & \sin(\theta_c) \\ -\sin(\theta_c) & \cos(\theta_c) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}. \quad (2.97)$$

Entonces si las constantes de acoplamiento con Z_μ son iguales para ambos dobletes, los procesos neutros con cambios de sabor estarán suprimidos a todos los ordenes del desarrollo perturbativo debido a la ortogonalidad de la rotación de Cabbibo, i.e., debido a que $V_c^T V_c = 1$. De esta manera, las contribuciones de los quarks a las corrientes cargadas y neutras que son necesarias para reproducir las transiciones que cumplen $\Delta S = 0$ y $|\Delta S| = 1$ a bajas energías son de la forma

$$J_\mu(\text{quarks}) = \frac{1}{2} \bar{d}_c \gamma_\mu (1 - \gamma^5) u + \frac{1}{2} \bar{s}_c \gamma_\mu (1 - \gamma^5) c \quad (2.98)$$

y

$$j_\mu^z(\text{quarks}) = \frac{1}{2} \bar{u} \gamma_\mu (g_V^u - g_A^u \gamma^5) u + \frac{1}{2} \bar{d} \gamma_\mu (g_V^d - g_A^d \gamma^5) d \quad (2.99)$$

$$+ \frac{1}{2} \bar{c} \gamma_\mu (g_V^u - g_A^u \gamma^5) c + \frac{1}{2} \bar{s} \gamma_\mu (g_V^d - g_A^d \gamma^5) s. \quad (2.100)$$

La forma de estas corrientes sugiere entonces que los componentes izquierdos de u , c , d_c y s_c se agrupen en dos dobletes bajo transformaciones del grupo $SU(2)$ de forma que se tiene

$$\begin{pmatrix} u_L \\ d_{cL} \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} c_L \\ s_{cL} \end{pmatrix}, \quad (2.101)$$

mientras que los componentes derechos se quedan como singletes u_R , d_R , c_R y s_R .

La presencia de un ángulo de mezcla en la parte de quiralidad izquierda del sector de quarks, establece una importante distinción entre la base de norma y la base de masa. En la primera, los eigenestados tienen definidas

propiedades bajo transformaciones de norma, mientras que en la segunda base los eigenestados tienen un valor de masa definido adquirida a través del rompimiento espontáneo de simetría. Esta distinción entre bases persiste en la extensión del modelo para tres generaciones al igual que la posibilidad de mixing entre diferentes familias de quarks.

El considerar fermiones adicionales en el modelo, exige modificar los acoplamientos de fermiones con bosones de norma y de fermiones con escalares mientras que no afecta los sectores escalares ni de norma puro. El Lagrangiano invariante de norma para fermiones en el caso de tres generaciones de materia es

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_f &= \bar{\psi}_L i\gamma^\mu D_\mu^L \psi_L + \bar{\psi}_R i\gamma^\mu D_\mu^R \psi_R \\
&= \bar{l}_{\alpha L} i\gamma^\mu D_\mu^L l_{\alpha L} + \bar{e}'_{\alpha R} i\gamma^\mu D_\mu^R e'_{\alpha R} + \bar{q}_{\alpha L} i\gamma^\mu D_\mu^L q_{\alpha L} \\
&\quad + \bar{u}'_{\alpha R} i\gamma^\mu D_\mu^R u'_{\alpha R} + \bar{d}'_{\alpha R} i\gamma^\mu D_\mu^R d'_{\alpha R},
\end{aligned} \tag{2.102}$$

donde

$$D_\mu^L l_{\alpha L} = (\partial_\mu + i\frac{1}{2}g\sigma_i A_\mu^i - i\frac{1}{2}g' B_\mu) l_{\alpha L}, \tag{2.103}$$

$$D_\mu^R e'_{\alpha R} = (\partial_\mu - ig' B_\mu) e'_{\alpha R}, \tag{2.104}$$

$$D_\mu^L q_{\alpha L} = (\partial_\mu + i\frac{1}{2}g\sigma_i A_\mu^i + i\frac{1}{6}g' B_\mu) q_{\alpha L}, \tag{2.105}$$

$$D_\mu^R u'_{\alpha R} = (\partial_\mu + i\frac{2}{3}g' B_\mu) u'_{\alpha R}, \tag{2.106}$$

$$D_\mu^R d'_{\alpha R} = (\partial_\mu - i\frac{1}{3}g' B_\mu) d'_{\alpha R}. \tag{2.107}$$

Además

$$l_{\alpha L} = \begin{pmatrix} \nu'_{eL} \\ e'_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu'_{\mu L} \\ \mu'_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu'_{\tau L} \\ \tau'_L \end{pmatrix}, \tag{2.108}$$

$$q_{\alpha L} = \begin{pmatrix} u'_L \\ d'_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c'_L \\ s'_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t'_L \\ b'_L \end{pmatrix}, \tag{2.109}$$

$$e'_{\alpha R} = e'_R, \mu'_R, \tau'_R, \tag{2.110}$$

$$u'_{\alpha R} = u'_R, c'_R, t'_R \tag{2.111}$$

y

$$d'_{\alpha R} = d'_R, s'_R, b'_R, \tag{2.112}$$

donde $\alpha = 1, 2, 3$; en las expresiones anteriores los neutrinos se asumen con masa exactamente igual a cero y se usa la notación primada para denotar estados en base de norma, mientras que los campos sin primar están expresados en base de masa. Esta convención respecto a la notación se invierte en el siguiente subcapítulo sobre masa de neutrinos donde se especifica debidamente.

El sector de acoplamientos de Yukawa se puede escribir como

$$\mathcal{L}_Y = -(C_{\alpha\beta}^e (\bar{l}_{\alpha L} \phi) e'_{\beta R} + C_{\alpha\beta}^u (\bar{q}_{\alpha L} \phi^c) u'_{\beta R} + C_{\alpha\beta}^d (\bar{q}_{\alpha L} \phi) d'_{\beta R} + h.c.), \quad (2.113)$$

donde C^f para $f = e, u, d$ son matrices de 3×3 . Hay una por cada conjunto de fermiones igualmente cargados.

Tras el rompimiento espontáneo de simetría, para expresar la teoría en norma unitaria se elige

$$\phi \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(\nu + H)\chi \quad (2.114)$$

y

$$\phi^c \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(\nu + H)\chi^c, \quad (2.115)$$

donde $\chi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\chi^c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, entonces los acoplamientos de Yukawa se pueden escribir en esta norma como

$$(\bar{l}_{\alpha L} \phi) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\nu + H)\bar{e}'_{\alpha L}, \quad (2.116)$$

$$(\bar{q}_{\alpha L} \phi) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\nu + H)\bar{d}'_{\alpha L} \quad (2.117)$$

y

$$(\bar{q}_{\alpha L} \phi^c) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\nu + H)\bar{u}'_{\alpha L}, \quad (2.118)$$

con lo que se obtiene

$$\mathcal{L}_Y = -(1 + \frac{H}{\nu})(\bar{e}'_L M'_e e'_R + \bar{u}'_L M'_u u'_R + \bar{d}'_L M'_d d'_R + h.c.), \quad (2.119)$$

donde $M'_f = \frac{\nu}{\sqrt{2}} C_{\alpha\beta}^f$ para $f = e, u, d$. Estas matrices no son, en general, ni simétricas ni hermitianas pero pueden ser diagonalizadas mediante transformaciones bi-unitarias, cada una de ellas se puede escribir en la forma

$$M'_f = H_f T_f, \quad (2.120)$$

con H_f una matriz hermitiana y definida positiva, i.e. todos sus eigenvalores son reales y positivos, que cumple que

$$H_f^2 = M'_f M_f{}^\dagger, \quad (2.121)$$

entonces se puede probar que T_f es unitaria y H_f puede ser diagonalizada mediante otra matriz unitaria que cumpla

$$M_f^2 = S_f H_f S_f{}^\dagger \quad (2.122)$$

de forma que

$$M'_f = S_f{}^\dagger M_f S_f T_f; \quad (2.123)$$

esto quiere decir que se puede transformar la matriz de masa en la base de estados de norma en una matriz diagonal expresada en términos de los eigenestados de masa, tal que los términos resultantes de los acoplamientos de Yukawa cumplen

$$\bar{\psi}'_{fL} M'_f \psi'_{fR} = \bar{\psi}_{fL} M_f \psi_{fR}, \quad (2.124)$$

para $f = e, u, d$. En esta expresión, los eigenestados de masa están relacionados a los eigenestados en base de norma mediante transformaciones diferentes para las componentes izquierdas y derechas de los campos fermiónicos dadas por

$$\psi_{fL} \equiv B_{fL} \psi'_{fL} = S_f \psi'_{fL} \quad (2.125)$$

y

$$\psi_{fR} \equiv B_{fR} \psi'_{fR} = S_f T_f \psi'_{fL}. \quad (2.126)$$

M^f son matrices diagonales tales que

$$M_e = \text{diagonal}(m_e, m_\mu, m_\tau), \quad (2.127)$$

$$M_u = \text{diagonal}(m_u, m_c, m_t) \quad (2.128)$$

y

$$M_d = \text{diagonal}(m_d, m_s, m_b), \quad (2.129)$$

de manera que el Lagrangiano de los acoplamientos de Yukawa adquiere la forma

$$\mathcal{L}_Y = -\left(1 + \frac{H}{\nu}\right) [m_\alpha^e (\bar{e}_\alpha e_\alpha) + m_\alpha^u (\bar{u}_\alpha u_\alpha) + m_\alpha^d (\bar{d}_\alpha d_\alpha)]. \quad (2.130)$$

Del Lagrangiano para fermiones en su forma invariante de norma escrito anteriormente, se obtienen expresiones para las corrientes neutras y cargadas: primero, la corriente electromagnética viene dada por

$$\begin{aligned} j_\mu^{em} &= \bar{e}'\gamma_\mu Qe' + \bar{u}'\gamma_\mu Qu' + \bar{d}'\gamma_\mu Qd' \\ &= \bar{e}'\gamma_\mu B_e Q B_e^\dagger e' + \bar{u}'\gamma_\mu B_u Q B_u^\dagger u' + \bar{d}'\gamma_\mu B_d Q B_d^\dagger d', \end{aligned} \quad (2.131)$$

como B_{fR} y B_{fL} conmutan con Q y son unitarios se tiene

$$B_{fL} Q B_{fL}^\dagger = Q \quad (2.132)$$

y

$$B_{fR} Q B_{fR}^\dagger = Q, \quad (2.133)$$

es decir que en cada caso se tiene que $Q = T_3 + \frac{Y}{2}$ es proporcional a la identidad con coeficientes de proporcionalidad idénticos para ambas bases. Por tanto al final se tiene

$$j_\mu^{em} = \bar{e}\gamma_\mu Qe + \bar{u}\gamma_\mu Qu + \bar{d}\gamma_\mu Qd. \quad (2.134)$$

En segundo lugar, la expresión para j_μ^z resulta

$$j_\mu^Z = \bar{\nu}'_L \gamma_\mu Z \nu'_L + \bar{e}'\gamma_\mu Ze' + \bar{u}'\gamma_\mu Zu' + \bar{d}'\gamma_\mu Zd', \quad (2.135)$$

que dada la unitariedad de $B_{fL(R)}$ y sus propiedades de conmutación con Z , se tiene de manera análoga al caso de la corriente electromagnética que

$$j_\mu^Z = \bar{\nu}_L \gamma_\mu Z \nu_L + \bar{e}\gamma_\mu Ze + \bar{u}\gamma_\mu Zu + \bar{d}\gamma_\mu Zd, \quad (2.136)$$

entonces se cumple

$$B_{fL}(T_3 - Qsw^2)B_{fL}^\dagger = T_3 - Qsw^2 \quad (2.137)$$

$$B_{fL}(Qsw^2)B_{fL}^\dagger = Qsw^2. \quad (2.138)$$

La diagonalidad respecto al sabor de las corrientes neutras prevalece tras el cambio de base. Cada componente quiral de los campos fermiónicos es “mapeado” a sí mismo tras la interacción con Z_μ . En las expresiones anteriores se ha asumido que la transformación de base para neutrinos es $\nu_L \equiv S_\nu \nu'_L$ donde S_ν es una matriz unitaria arbitraria en el caso de neutrinos sin masa.

Por su parte, para las corrientes cargadas se tiene

$$J_\mu^\dagger = j_\mu^1 + ij_\mu^2 = \bar{l}_L \gamma_\mu \sigma_+ l_L + \bar{q}_L \gamma_\mu \sigma_+ q_L = \bar{\nu}'_L \gamma_\mu e'_L + \bar{u}'_L \gamma_\mu d'_L, \quad (2.139)$$

aquí $\bar{\nu}'_L \gamma_\mu e'_L = \bar{\nu}_L \gamma_\mu S_\nu S_e^\dagger e_L$ y dado que S_ν es una matriz unitaria arbitraria, se puede elegir tal que se cumpla $\nu_l \equiv S_\nu S_e^\dagger = 1$. Esta elección sólo es válida para neutrinos sin masa; para cualquier otro caso se tiene necesariamente que $V_l \neq 1$. Usando esta elección se escribe finalmente

$$\bar{\nu}'_L \gamma_\mu e'_L = \bar{\nu}_L \gamma_\mu e_L, \quad (2.140)$$

por tanto no hay mezcla (mixing) entre generaciones para el sector leptónico en el modelo estándar, dado que los neutrinos son considerados con masa exactamente igual a cero.

Por su parte la contribución de los quarks a la corriente cargada es

$$\bar{u}'_L \gamma_\mu d'_L = \bar{u}_L \gamma_\mu S_u S_d^\dagger d_L. \quad (2.141)$$

Aquí, a diferencia del sector leptónico, $S_u S_d^\dagger \neq 1$ y por tanto las diferentes generaciones están mezcladas en los eigenestados de masa de los quarks. El mixing puede ser asociado enteramente a los quarks tipo up o a los tipo down, pero de acuerdo a la convención más usual que considera lo segundo se define

$$d''_L \equiv S_u S_d^\dagger d_L, \quad (2.142)$$

con lo que se puede escribir la corriente cargada completa para el modelo como

$$J_\mu^\dagger = \bar{\nu}_L \gamma_\mu e_L + \bar{u}_L \gamma_\mu d''_L. \quad (2.143)$$

En la discusión anterior $S_u S_d^\dagger \equiv V_{CKM}$ es la matriz de Cabbibo-Kobayashi-Masakawa o matriz de mezcla del sector de quarks, la cual contiene tres ángulos de mezcla ($\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23}$) y una fase que provee de un mecanismo para la violación de CP. El ángulo asociado con la mezcla de las dos primeras familias puede ser indentificado con el ángulo de Cabbibo introducido anteriormente ($\theta_{12} = \theta_C$).

Es así como en el modelo estándar se considera una matriz de mezcla en el sector de quarks pero no así para el sector leptónico. En la siguiente sección esto es de interés central, ya que la observación de neutrinos masivos implica necesariamente que en el modelo se debe introducir una matriz de mezcla en el sector leptónico análoga a la matriz CKM para quarks, con la finalidad de proveer una descripción que considere neutrinos con valores de masa diferentes de cero.

2.2. Masa de neutrinos y modelo mínimamente extendido (MME)

“The neutrino is the smallest bit of material reality ever conceived of by man, the largest is the universe. To attempt to understand something of one in terms of the other is the attempt to span the dimension in which lie all maifestation of natural law. [25]” -Reines and Cowan

En el ME los neutrinos son considerados como partículas de masa cero y en su descripción sólo se toman en cuenta los componentes de quiralidad izquierda de estos campos en las interacciones débiles, por esta razón se les llama neutrinos activos; en contraposición, los llamados neutrinos estériles, no participan en la interacción débil. En este contexto, estos fermiones sin masa cumplen $\vec{\sigma} \cdot \vec{p}\psi_L = -\psi_L$. Sin embargo los experimentos con neutrinos de diversas fuentes, en los últimos años, han evidenciado el fenómeno de oscilación de neutrinos, lo que implica la existencia de valores pequeños pero diferentes de cero de la masa de los neutrinos [6, 33].

El mecanismo de generación de masas de Higgs en su forma estándar no da cuenta por sí mismo de las masas de los neutrinos por lo que se ha sugerido que nuevos mecanismos son necesarios. También se desconoce si los neutrinos con masa definida conservan el número leptónico de manera global (neutrinos de Dirac) o violan la conservación de esa cantidad por dos unidades (neutrinos de Majorana). En este ultimo caso, el neutrino es su propia antipartícula.

Estas características deben ser determinadas experimentalmente mediante la observación de ciertos procesos clave como el decaimiento beta doble ($\beta\beta_{2\nu}$) y el decaimiento beta sin neutrinos ($\beta\beta_{0\nu}$), que probarían las hipótesis de Dirac y Majorana respectivamente [25, 32].

A los fermiones les corresponden términos de masa de la forma

$$-m(\bar{\psi}_{aL}\psi_{bR} + \bar{\psi}_{bR}\psi_{aL}). \quad (2.144)$$

Estos términos de masa se componen del producto de spinores de Weyl con quiralidades opuestas. Para fermiones de Dirac, estos dos campos de Weyl son diferentes, es decir, $\psi_{aR} \neq \psi_{bR}^c$. Entonces a un neutrino de Dirac le corresponde

$$-m_D(\bar{\nu}_L\nu_R + \bar{\nu}_R\nu_L) = -m_D\bar{\nu}_D\nu_D, \quad (2.145)$$

como término de masa. Aquí $\nu_D = \nu_R + \nu_L$ es un campo de Dirac de cuatro componentes, este término conserva el número fermiónico y por tanto no existe mixing entre sus componentes, m_D viola además la conservación de la tercera componente de isospín débil por media unidad ($\Delta t_L^3 = \frac{1}{2}$) [32]. Este tipo de términos puede obtenerse mediante el mecanismo de Higgs de forma análoga a la masa de los quarks si se hace la extensión mínima al modelo estándar, que considera los componentes derechos de los campos de neutrinos, o neutrinos estériles, que sólo interactúan mediante mixing o interacciones de Yukawa. Este es el tipo de términos de masa que se consideran en el modelo estándar mínimamente extendido en el que se desarrolla la investigación propuesta inicialmente.

Un neutrino de Majorana por su parte cumple que $\psi_{bR} = \psi_{aR}^c$ donde $\nu_{iR}^c = C\bar{\nu}_{iL}^T = i\gamma^2\gamma^0\bar{\nu}_{iL}^T$ con ($i = a, b$) es el espinor asociado a ν_{iR} mediante conjugación de carga; la última igualdad se cumple para la representación de Pauli-Dirac. Con esto, la forma general del término de masa para fermiones toma la forma

$$-\frac{m_T}{2}(\bar{\nu}_L\nu_R^c + \bar{\nu}_R^c\nu_L) = -\frac{m_T}{2}\bar{\nu}_M\nu_M, \quad (2.146)$$

para neutrinos activos; donde $\nu_M \equiv \nu_L + \nu_R^c$ es un campo auto conjugado que cumple $\nu_M = \nu_M^c = C\bar{\nu}_M^T$. De lo anterior, es claro que en el contexto de Majorana el neutrino es su propia antipartícula.

Los términos de masa de Majorana violan la conservación del número leptónico en dos unidades, ya que representan la aniquilación o creación de dos neutrinos y violan la conservación de la tercera componente de isospín débil por una unidad ($\Delta t_L^3 = 1$). Estos términos de masa pueden ser generados en contextos mas allá del modelo estándar.

Un neutrino estéril también puede tener un término de masa de Majorana asociado de la forma

$$-\frac{m_S}{2}(\bar{\nu}_L^c\nu_R + \bar{\nu}_R\nu_L^c) = -\frac{m_S}{2}(\bar{\nu}_L^c C\bar{\nu}_L^{cT} + \nu_L^{cT} C\nu_L^c) = -\frac{m_S}{2}\bar{\nu}_{MS}\nu_{MS}, \quad (2.147)$$

donde $\nu_{MS} = \nu_L^c + \nu_R = \nu_{MS}^c$. En este caso se conserva la tercer componente de isospín débil ($\Delta t_L^3 = 0$), así que puede ser generado por un singlete de Higgs [32].

En el caso más general pueden estar involucrados ambos tipos de neutrinos (Majorana y Dirac) en un modelo mixto que incluya neutrinos activos y estériles, en dichos modelos se tiene un Lagrangiano de la forma

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \bar{\nu}_L & \bar{\nu}_L^c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_T & m_D \\ m_D & m_S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_R^c \\ \nu_R \end{pmatrix} + h.c. \quad (2.148)$$

para una sola familia de neutrinos. El Lagrangiano anterior está expresada en la base de norma, y los términos que involucran m_D son iguales dadas las equivalencias anteriormente discutidas. La diagonalización de esta matriz resulta en dos eigenestados de masa que son de tipo Majorana ya que cumplen $\nu_{iM} = \nu_{iL} + \nu_{iR}^c = \nu_{iM}^c$ y sus dos eigenvalores m_i asociados ($i = 1, 2$).

Las bases de norma y de masa están relacionadas por transformaciones unitarias, en general diferentes, para campos izquierdos y derechos de forma que se cumple

$$\begin{pmatrix} \nu'_{1L} \\ \nu'_{2L} \end{pmatrix} = A_L^{\nu\dagger} \begin{pmatrix} \nu_L \\ \nu_L^c \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} \nu'_{1R} \\ \nu'_{2R} \end{pmatrix} = A_R^{\nu\dagger} \begin{pmatrix} \nu_R^c \\ \nu_R \end{pmatrix}, \quad (2.149)$$

donde la notación primada indica eigenestados en base de masa, y se cumple $A_L^\nu = A_R^{\nu*} K$ donde K es una matriz diagonal que para preservar la relación $\nu_{iR}^c = C\bar{\nu}_{iL}^c$, se elige $K = I_{2 \times 2}$. El hecho de que los eigenestados de la base de norma no se correspondan directamente con los eigenestados de masa determinada, implica que los eigenestados de neutrinos de sabor se expresan como una superposición de eigenestados de masa definida, esto está estrechamente ligado con el fenómeno de oscilación discutido más adelante.

El modelo de masas mixto es interesante ya que permite obtener varios casos relevantes como límites de éste. Tomando el límite $m_D \rightarrow 0$ se tiene el caso de masa de Majorana pura. La matriz de masa en este caso es diagonal y sus eigenvalores cumplen $m_1 = m_T$, $m_2 = m_S$, mientras que sus eigenestados satisfacen

$$\nu'_{1L} = \nu_L, \quad (2.150)$$

$$\nu'_{2L} = \nu_L^c, \quad (2.151)$$

y

$$\nu'_{1R} = \nu_R^c, \quad (2.152)$$

$$\nu'_{2R} = \nu_R. \quad (2.153)$$

El caso de Dirac puro se puede obtener como el límite $m_T \rightarrow 0$, $m_S \rightarrow 0$. Esto nos deja formalmente con dos eigenestados de masa de Majorana dados por

$$\nu'_{1L} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\nu_L + \nu_L^c), \quad (2.154)$$

$$\nu'_{2L} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\nu_L - \nu_L^c), \quad (2.155)$$

$$\nu'_{1R} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\nu_R^c + \nu_R), \quad (2.156)$$

$$\nu'_{2R} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\nu_R^c - \nu_R), \quad (2.157)$$

cuyos eigenvalores asociados son $m_1 = m_D$ y $m_2 = -m_D$. Aquí, ν_1 y ν_2 son degenerados en el sentido de que $|m_1| = |m_2|$. Expandiendo el término de masa se puede escribir

$$-\mathcal{L} = \frac{m_D}{2}(\bar{\nu}'_{1L}\nu'_{1R} - \bar{\nu}'_{2L}\nu'_{2R}) + h.c. = m_D(\bar{\nu}_L\nu_R + \bar{\nu}_R\nu_L), \quad (2.158)$$

de donde se puede ver claramente que el término conserva el número leptónico ya que no hay mezcla de tipo $\nu_L\nu_L^c$ o $\nu_R\nu_R^c$. Entonces un neutrino de Dirac es equivalente a dos neutrinos de Majorana con mezcla maximal entre ellos (45°) y masas iguales pero de signo opuesto. Este límite comprende el caso de interés para este trabajo en el que se consideran masas de este tipo para los neutrinos. Tener este tipo de construcción para los neutrinos implica que sus propagadores serán análogos a los del resto de fermiones del ME.

El límite $m_S \gg m_D, m_T$ se conoce como modelo de seesaw en el que los neutrinos estériles son sumamente masivos comparados con el resto. En este caso los eigenvalores están dados por $m_1 \approx m_T - \frac{m_D^2}{m_S}$, $m_2 \approx m_S$ y los eigenestados por las expresiones

$$\nu'_{1L} \approx \nu_L - \frac{m_D}{m_S}\nu_L^c \approx \nu_L, \quad (2.159)$$

y

$$\nu'_{2L} \approx \frac{m_D}{m_S}\nu_L + \nu_L^c \approx \nu_L^c. \quad (2.160)$$

A bajas energías comparadas con m_S , ν_2 se desacopla para dar lugar a una teoría efectiva que involucra un único neutrino de Majorana $\nu_{1M} \approx \nu_L + \nu_R^c$.

Otro caso interesante derivado del modelo mixto es el caso pseudo-Dirac, que es un caso perturbativo del modelo de masa de Dirac pura, donde $m_D \gg m_T, m_S$. Se caracteriza por una ligera violación del número leptónico y una pequeña diferencia entre las magnitudes de los eigenvalores de masa.

2.2.1. Mezcla (Mixing) en el sector leptónico

Como ocurre en la descripción del ME, los neutrinos sin masa no se mezclan (a diferencia de los quarks) al ser degenerados en masa son eigenestados

del operador de masa que tienen en común, lo que implica la conservación por separado de los números de sabor leptónicos (L_e, L_μ, L_τ) dado que las corrientes cargadas no diagonales no aparecen (ej. $\bar{\nu}_e \mu$). En este caso las reacciones que implican un cambio de sabor leptónico están prohibidas.

Independientemente de cual sea el origen de la masa de los neutrinos y la estructura matemática por la cual se rigen (Dirac o Majorana), los valores de masa distintos de cero implican disparidad entre las bases de norma y la base de masa definida. Esto da origen a fenómenos de mezcla análogos al presente en el sector de quarks del ME discutido anteriormente. Estos valores de masa han sido inferidos a partir de observaciones de neutrinos de diversas fuentes siendo los neutrinos solares, atmosféricos y los de reactor los más típicamente citados. En particular el problema del déficit de neutrinos solares, en el que el flujo de neutrinos electrónicos producidos mediante reacciones termonucleares al interior del sol pareciera ser menor que lo predicho por los cálculos, deja en claro la posibilidad de que los neutrinos oscilen en partículas con diferente sabor leptónico, para lo cual es necesario que existan estos valores de masa diferentes de cero.

Para tres generaciones de materia se definen los vectores de componentes quirales de eigenestados en base de norma

$$\nu_L = \begin{pmatrix} \nu_{1L} \\ \nu_{2L} \\ \nu_{3L} \end{pmatrix}, \quad (2.161)$$

$$\nu_L^c = \begin{pmatrix} \nu_{1R}^c \\ \nu_{2R}^c \\ \nu_{3R}^c \end{pmatrix}, \quad (2.162)$$

y de manera análoga para ν_R, ν_R^c ; entonces los términos de masa de Dirac se generalizan a

$$\mathcal{L}_D = -(\bar{\nu}_L M_D \nu_R + \bar{\nu}_R M_D^\dagger \nu_L), \quad (2.163)$$

donde M_D es una matriz arbitraria de 3×3 que puede ser diagonalizada mediante una transformación bi-unitaria de la forma

$$A_L^{\nu\dagger} M_D A_R^\nu = (M_D)_{diag} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix}, \quad (2.164)$$

con eigenestados de masa

$$\nu'_L = A_L^{\nu\dagger} \nu_L, \quad (2.165)$$

y

$$\nu'_R = A_R^{\nu\dagger} \nu_R, \quad (2.166)$$

de modo que la parte leptónica de la corriente débil que aumenta la carga se escribe como

$$J_W^{l\mu\dagger} = 2\bar{\nu}_L \gamma^\mu V_l e_L, \quad (2.167)$$

donde $V_l = A_L^{\nu\dagger} A_L^e$ y $V_{PMNS} \equiv V_l^\dagger$ es la matriz de Pontecorvo, Maki, Nakagawa y Sakata (PMNS) análoga a la matriz de mezcla CKM en el sector de quarks. Al igual que la matriz CKM, la matriz PMNS depende de tres ángulos de mezcla y una fase que provee un mecanismo para la violación de CP [32].

Los términos de masa de tipo Majorana por su cuenta cumplen

$$\mathcal{L}_T = -\frac{1}{2}(\bar{\nu}_L M_T \nu_R^c + \bar{\nu}_R^c M_T^\dagger \nu_L) = -\frac{1}{2}(\bar{\nu}_L M_T C \bar{\nu}_L^T + \bar{\nu}_L^T C M_T^\dagger \nu_L) \quad (2.168)$$

donde M_T es una matriz simétrica, $M_T = M_T^T$, lo que se cumple para todas las matrices de masa de Majorana, esta matriz puede ser diagonalizada mediante una transformación bi-unitaria de la forma de la ecuación (2.164) pero tal que se cumpla que

$$A_L^\nu = A_L^{\nu*} K. \quad (2.169)$$

Generalmente se elige $K = I$ para preservar la relación $\nu_R^c = C \bar{\nu}_L^T$. En este caso, las fases que contiene A_L^ν están determinadas de manera única por el requerimiento de eigenvalores m_i reales y positivos.

En el caso de Majorana, para tres generaciones de materia $V_l^\dagger \equiv V_{PMNS}$ se puede parametrizar como

$$V_l^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & \delta_{13} e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13} e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\alpha_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\alpha_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.170)$$

con $c_{ij} \equiv \cos(\theta_{ij})$, $s_{ij} \equiv \sin(\theta_{ij})$, θ_{ij} los ángulos de mezcla, δ la fase relacionada con violación de CP mencionada anteriormente y α_1, α_2 fases de Majorana.

Una expresión similar es válida en el caso Dirac pero tal que las fases de Majorana sean igual a cero ($\alpha_1 = \alpha_2 = 0$). Entonces se tiene

$$(V_l^\dagger)_{(D)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13} e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13} e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.171)$$

Esta expresión también incluye tres ángulos de mezcla y una fase δ que permite la violación de CP.

2.2.2. Formalismo para oscilaciones de neutrinos en el vacío

Aquí se expone brevemente el formalismo de oscilaciones para dos sabores de neutrino. Sean ν_e y ν_μ dos neutrinos de sabor relacionados a la base de masa mediante la transformación

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}, \quad (2.172)$$

o en notación de kets

$$|\nu_e\rangle = \cos(\theta)|\nu_1\rangle + \sin(\theta)|\nu_2\rangle, \quad (2.173)$$

$$|\nu_\mu\rangle = -\sin(\theta)|\nu_1\rangle + \cos(\theta)|\nu_2\rangle, \quad (2.174)$$

con $\theta = \theta_{12}$ uno de los tres ángulos de mezcla de la matriz PMNS.

Si para un tiempo $t=0$ hay un estado puro $|\nu(0)\rangle = |\nu_\mu\rangle$ con momento definido $|\vec{p}|$ entonces su evolución para un tiempo posterior $t > 0$ esta dada por

$$\begin{aligned} |\nu(t)\rangle &= -\sin(\theta)|\nu_1\rangle e^{-iE_1 t} + \cos(\theta)|\nu_2\rangle e^{-iE_2 t} \\ &\approx (-\sin(\theta)|\nu_1\rangle e^{\frac{-im_1^2 t}{2E}} + \cos(\theta)|\nu_2\rangle e^{\frac{-im_2^2 t}{2E}}) e^{-iEt} \end{aligned} \quad (2.175)$$

donde se ha usado $E_i = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m_i^2} \approx E + \frac{m_i^2}{2E}$ con $E \approx |\vec{p}|$ para neutrinos relativistas, para los cuales $x \approx ct$ o $x \approx t$ en unidades donde $c = 1$. Entonces, después de cubrir una distancia $x = L \approx t$, la probabilidad de ν_μ de oscilar en un neutrino electrónico ν_e esta dada por

$$\begin{aligned} P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_e}(L) &= |\langle \nu_e | \nu(t) \rangle|^2 \\ &= \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) \left| -e^{\frac{-im_1^2 t}{2E}} + e^{\frac{-im_2^2 t}{2E}} \right|^2 = \sin^2(2\theta) \sin^2\left(\frac{\Delta m^2 L}{4E}\right) \\ &= \sin^2(2\theta) \sin^2\left(\frac{1.27 \Delta m^2 (eV^2) L (km)}{E (GeV)}\right) \end{aligned} \quad (2.176)$$

con $\Delta m^2 = m_2^2 - m_1^2$. La longitud de la oscilación se define como

$$L_{osc} \equiv \frac{4\pi E}{\Delta m^2}. \quad (2.177)$$

Estas oscilaciones en el vacío dependen únicamente de $|\Delta m^2|$ y no de la escala absoluta de masa o de la jerarquía de masas. Para valores grandes de $\frac{\Delta m^2 L}{E}$ las oscilaciones son promediadas en la práctica dados los fenómenos de dispersión y la incertidumbre en la energía de los neutrinos de tal forma que

$$P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_e}(L) = \frac{1}{2} \sin^2(2\theta), \quad (2.178)$$

que es el mismo resultado que se obtiene para una superposición incoherente de ν_1 y ν_2 .

Para el caso que considera tres sabores de neutrinos, la probabilidad de oscilación entre un sabor inicial a y un sabor final b tras recorrer una distancia L esta dada por

$$\begin{aligned} P_{\nu_a \rightarrow \nu_b}(L) = & \delta_{ab} - 4 \sum_{i < j} \text{Re}(V_{ai}^* V_{bi} V_{aj} V_{bj}^*) \sin^2\left(\frac{\Delta_{ij} L}{4E}\right) \\ & + 2 \sum_{i < j} \text{Im}(V_{ai}^* V_{bi} V_{aj} V_{bj}^*) \sin\left(\frac{\Delta_{ij} L}{2E}\right), \end{aligned} \quad (2.179)$$

donde ν_a y ν_b son eigenestados de sabor (en base de norma), Δ_{ij} es la diferencia de los cuadrados de las masas m_j y m_i (en base de masa); esto es $\Delta_{ij} = \Delta m_{ij}^2 \equiv m_j^2 - m_i^2$ y V es la matriz de mezcla leptónica PMNS.

Para antineutrinos, es decir para el caso $\bar{\nu}_a \rightarrow \bar{\nu}_b$, la probabilidad de oscilación esta dada por

$$\begin{aligned} P_{\nu_a \rightarrow \nu_b}(L) = & \delta_{ab} - 4 \sum_{i < j} \text{Re}(V_{ai}^* V_{bi} V_{aj} V_{bj}^*) \sin^2\left(\frac{\Delta_{ij} L}{4E}\right) \\ & - 2 \sum_{i < j} \text{Im}(V_{ai}^* V_{bi} V_{aj} V_{bj}^*) \sin\left(\frac{\Delta_{ij} L}{2E}\right) \end{aligned} \quad (2.180)$$

que es la misma expresión que para $\nu_b \rightarrow \nu_a$ salvo por el signo del último término.

En el modelo de tres sabores puede haber diferencias entre $P_{\nu_a \rightarrow \nu_b}(L)$ y $P_{\nu_b \rightarrow \nu_a}(L)$ debido a las fases que violan CP en V . La combinación $V_{ai}^* V_{bi} V_{aj} V_{bj}^*$

es independiente de las convenciones que se tomen respecto a las fases y por esto se le clasifica como invariante de Jarlskog [32]. Dado que las fases de Majorana no cuentan para estos efectos, la violación de CP en las oscilaciones de neutrinos requiere la mezcla de por lo menos tres familias como es el caso de la matriz CKM.

2.3. Momentos dipolares en fermiones del ME

La predicción para la razón giromagnética de partículas puntuales de spin $\frac{1}{2}$ que ofrece la ecuación de Dirac, es decir, el cálculo que se puede hacer a nivel árbol, es $g = 2$. Calculando la corrección radiativa a nivel de un lazo del vértice γee , Julian Schwinger mostró en 1948, que existía una pequeña contribución adicional (anomalía) al momento magnético del electrón proveniente de dicho cálculo, solucionando así la discrepancia que existía entre el valor diferente de cero medido experimentalmente para $\frac{g-2}{2}$ y el valor que resultaría de usar el factor de Landé $g = 2$ proporcionado por la teoría de Dirac [1].

Esta discrepancia pasó a ser conocida como el momento magnético anómalo del electrón, y al verificarse experimentalmente consituyó una de las pruebas más fehacientes de la alta precisión de las predicciones de QED. El cálculo de Schwinger sentó las bases del estudio de momentos dipolares electromagnéticos que fueron después buscados y encontrados para otras partículas leptónicas.

2.3.1. Momento magnético anómalo del electrón

Un espinor de Dirac para una partícula cargada obedece

$$(i\not{D} - m)\psi = 0, \quad (2.181)$$

donde $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$. Multiplicando por $(i\not{D} + m)$ se obtiene

$$(\not{D}^2 + m^2)\psi = (D_\mu^2 + m^2 + \frac{e}{2}F_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu})\psi = 0, \quad (2.182)$$

donde se ha usado $\not{D}^2 = D_\mu^2 + \frac{e}{2}F_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}$, en esta expresión $F_{\mu\nu} = (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)$ y $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$. El término $\frac{e}{2}F_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}$ es el término de interacción con el campo electromagnético. En la representación de Weyl

$$\frac{e}{2}F_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} = -e \begin{pmatrix} (\vec{B} + i\vec{E}) \cdot \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & (\vec{B} - i\vec{E}) \cdot \vec{\sigma} \end{pmatrix}, \quad (2.183)$$

con lo que

$$\left[(\partial_\mu + ieA_\mu)^2 + m^2 - e \begin{pmatrix} (\vec{B} + i\vec{E}) \cdot \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & (\vec{B} - i\vec{E}) \cdot \vec{\sigma} \end{pmatrix} \right] \psi = 0. \quad (2.184)$$

Llevando esta expresión a espacio de momentos es posible escribir

$$\frac{(H - eA_0)^2}{2m} \psi = \left[\frac{m}{2} + \frac{(\vec{p} - e\vec{A})^2}{2m} - \frac{2e}{2m} \vec{B} \cdot \vec{S} \pm i \frac{e}{m} \vec{E} \cdot \vec{S} \right] \psi. \quad (2.185)$$

En el límite no relativista, la ecuación de Dirac en presencia de un campo electromagnético se asocia con un Hamiltoniano de la forma

$$H = \frac{\vec{p}}{2m} + V(r) + \frac{e}{2m} \vec{B} \cdot (\vec{L} + g\vec{S}), \quad (2.186)$$

de donde se puede identificar la razón giromagnética del electrón o factor de Landé $g = 2$.

Una manera covariante de buscar correcciones al factor g es buscar a nivel de lazo, términos adicionales de la forma $F_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}$. Esto es una corrección al vértice de interacción γee , cuya amplitud invariante asociada esta dada por

$$i\mathcal{M}_0^\mu = -ie\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) \quad (2.187)$$

con el momento del fotón sujeto a la condición $q^\mu = p'^\mu - p^\mu$. Usando la identidad de Gordon

$$\bar{u}(p')(p^\mu + p'^\mu)u(p) = (2m)\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) + i\bar{u}(p')\sigma^{\mu\nu}(p^\nu - p'^\nu)u(p), \quad (2.188)$$

se logra reexpresar la amplitud invariante como

$$\mathcal{M}_0^\mu = -e\left(\frac{p^\mu + p'^\mu}{2m}\right)\bar{u}(p')u(p) - \frac{e}{2m}i\bar{u}(p')q_\nu\sigma^{\mu\nu}u(p). \quad (2.189)$$

Entonces se puede identificar g como 2.

Teniendo en cuenta las simetrías de QED, la expresión más general a cualquier orden de lazo para la corrección al vértice se puede expresar como

$$i\mathcal{M}^\mu = \bar{u}(p')(f_1\gamma^\mu + f_2q^\mu + f_3p^\mu + f_4p'^\mu)u(p) \quad (2.190)$$

usando $q^\mu = p'^\mu - p^\mu$ y redefiniendo f_3 y f_4 de forma adecuada se tiene

$$i\mathcal{M}^\mu = \bar{u}(p')(f_1\gamma^\mu + f_3p^\mu + f_4p'^\mu)u(p). \quad (2.191)$$

Usando la identidad de Ward

$$q_\mu \mathcal{M}^\mu = 0 \quad (2.192)$$

se obtiene

$$\begin{aligned} & q_\mu [\bar{u}(p')(f_1\gamma^\mu + f_3p^\mu + f_4p'^\mu)u(p)] \\ &= (q \cdot p)f_3\bar{u}(p')u(p) + (q \cdot p')f_4\bar{u}(p')u(p) = 0 \end{aligned} \quad (2.193)$$

y dado que $q \cdot p = p' \cdot p - m^2 = -q \cdot p'$ se deduce que $f_3 = f_4$; con esto la amplitud invariante queda escrita como

$$i\mathcal{M}^\mu = \bar{u}(p')f_3(p^\mu + p'^\mu)u(p) \quad (2.194)$$

y usando de nuevo la identidad de Gordon se obtiene

$$i\mathcal{M}^\mu = \bar{u}(p')f_3[(2m)\gamma^\mu + iq_\nu\sigma^{\mu\nu}]u(p) \quad (2.195)$$

o de forma alternativa

$$i\mathcal{M}^\mu = (-ie)\bar{u}(p')(F_1\gamma^\mu + i\frac{q_\nu\sigma^{\mu\nu}}{2m}F_2)u(p) \quad (2.196)$$

que es la forma final del vértice. Aquí $F_{1,2} = F_{1,2}(q^2)$ son los factores de forma eléctrico y magnético respectivamente.

A orden cero en teoría de perturbaciones, la gráfica del acoplamiento γee arroja los valores $F_1 = 1$ y $F_2 = 0$. A órdenes superiores en la expansión perturbativa F_2 y g están relacionados mediante la expresión

$$g = 2 + 2F_2(0). \quad (2.197)$$

A nivel de un lazo, de los cuatro diagramas que contribuyen al vértice $\gamma\bar{e}e$, solamente uno puede contribuir con términos proporcionales a $\sigma^{\mu\nu}q_\nu$. Estos diagramas se ilustran en la Figura (2.1), los otros tres diagramas sólo pueden aportar términos proporcionales a γ^μ y por lo tanto no tendrán contribuciones al factor magnético.

El diagrama en la Figura (2.1) tiene una amplitud invariante asociada dada por

$$i\mathcal{M}_\epsilon^\mu = -e^3\bar{u}(p') \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\nu(\not{q} + \not{k} + m)\gamma^\mu(\not{k} + m)\gamma_\nu}{(k-p)^2((q+k)^2 - m^2)(k^2 - m^2)} u(p) \quad (2.198)$$

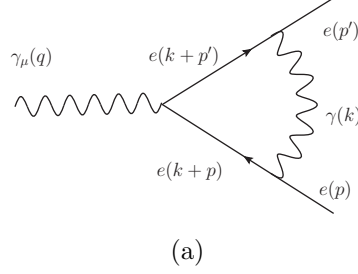


Figura 2.1: Diagrama de Feynman que contribuye al momento magnético del electrón en la corrección a vértice $\gamma\bar{e}e$ a nivel de un lazo.

en la norma unitaria, aquí $u(p)$ respresenta el campo del electrón con momento “ p ” de la Figura (2.1). Esta expresión puede ser resuelta mediante parametrización de Feynman u otros métodos para obtener un valor de $F_2(0)$ dado por

$$F_2(0) = \frac{\alpha}{2\pi}, \quad (2.199)$$

donde α es la constante de estructura fina en QED [34, 35]. Esto implica un valor corregido para g dado por

$$g = 2 + \frac{\alpha}{\pi} \approx 2.00232... \quad (2.200)$$

2.3.2. Momento magnético anómalo en neutrinos de Dirac

En los modelos para neutrinos de Dirac basados en el grupo de simetría $SU(2)_L \times U(1)_Y$, los diagramas que contribuyen a nivel de un lazo al vértice de interacción electromagnética del neutrino son los indicados en la Figura (2.2).

La renormalizabilidad de la teoría garantiza la finitud de los factores de forma, de manera que asumiendo $m_{\nu_i} \ll m_W$, $m_{\nu_i} \ll m_{l_i}$ se obtiene

$$\Gamma_\mu = -\frac{eG_F}{4\sqrt{2}\pi^2} (m_{\nu_i} P_R + m_{\nu_j} P_L) \sigma_{\mu\nu} q^\nu \sum_l U_{li} U_{lj}^* f(r_l) \quad (2.201)$$

donde $r_l \equiv (\frac{m_l}{m_W})^2$ y $f(r_l) \equiv \frac{3}{4(1-r_l)^2} (-2 + 5r_l - r_l^2 + \frac{2r_l^2 \ln(r_l)}{1-r_l}) \approx -\frac{3}{2} + \frac{3}{4}r_l + \dots$ [5]. Entonces para $i = j$, es decir el caso del dipolo estático, se tiene

$$m_{\nu_i} P_R + m_{\nu_j} P_L = m_{\nu_i} \quad (2.202)$$

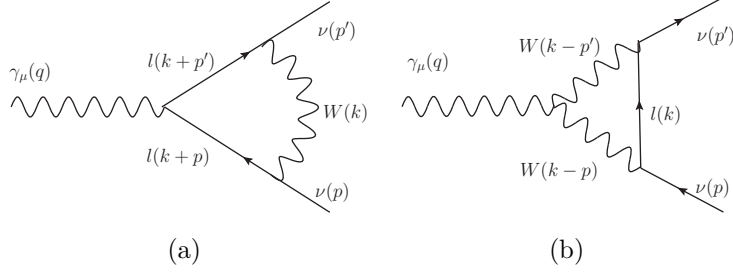


Figura 2.2: Diagramas de Feynman que contribuyen al vértice $\gamma\bar{\nu}\nu$ a nivel de un lazo.

y por tanto

$$\Gamma_\mu = -\frac{eG_F}{4\sqrt{2}\pi^2} m_{\nu_i} \sigma_{\mu\nu} q^\nu \sum_l U_{li} U_{lj}^* f(r_l). \quad (2.203)$$

Ya que no hay término proporcional a $\sigma_{\mu\nu} q^\nu \gamma^5$ en la expresión anterior, se tiene que tanto el caso de violación de CP como el caso en el que se conserva el momento eléctrico dipolar no recibe corrección a nivel de un lazo, mientras que el momento magnético dipolar resulta

$$\mu_{\nu_i} = -\frac{eG_F}{4\sqrt{2}\pi^2} m_{\nu_i} \sum_l U_{li} U_{lj}^* f(r_l) \approx \frac{3eG_F}{8\sqrt{2}\pi^2} m_{\nu_i} \approx 3.1 \times 10^{-19} \mu_B \left(\frac{m_{\nu_i}}{1\text{eV}} \right) \quad (2.204)$$

con $\mu_B = \frac{e}{2m_e}$ el magnetón de Bohr y $G_F = \frac{\sqrt{2}g^2}{8m_W^2}$ la constante de Fermi. El resultado anterior puede ser expresado en términos de g y m_W como

$$\mu_{\nu_i} = \frac{3eg^2}{(8\pi)^2 m_W^2} m_{\nu_i}. \quad (2.205)$$

2.3.3. Momentos dipolares débiles en el modelo estándar

El Lagrangiano del acoplamiento débil $Zf\bar{f}$ en el modelo estándar más el término dipolar de interacción es

$$\mathcal{L}_{Zf\bar{f}} = \mathcal{L}^{SM} + \mathcal{L}^D, \quad (2.206)$$

donde

$$\mathcal{L}^{SM} = -\frac{g}{2\cos(\theta_W)} \bar{f} \gamma^\mu (g_V^f - g_A^f \gamma^5) f Z_\mu, \quad (2.207)$$

es el Lagrangiano de cuatro dimensiones presente en el modelo estándar, y

$$\mathcal{L}^D = -\frac{1}{2}\bar{f}\sigma^{\mu\nu}(F_M^Z - iF_E^Z\gamma^5)fZ_{\mu\nu} = \bar{f}\sigma^{\mu\nu}\partial_\nu^Z(F_M^Z - iF_E^Z\gamma^5)fZ_\mu, \quad (2.208)$$

es el Lagrangiano efectivo de cinco dimensiones inducido a nivel de un lazo. Este término caracteriza los momentos dipolares débiles; en él, F_M^Z y F_E^Z son los factores de forma magnético-débil y eléctrico-débil respectivamente. Entonces a $\mathcal{L}_{Zf\bar{f}}$ le corresponde una regla de Feynman dada por

$$\Gamma^\mu = -\frac{ig}{2\cos(\theta_W)}\gamma^\mu(g_V^f - g_A^f\gamma^5) + \sigma^{\mu\nu}q_\nu(F_M^Z - iF_E^Z\gamma^5), \quad (2.209)$$

que resulta en una amplitud tensorial [25, 31, 32]

$$\mathcal{M}^\mu = \bar{u}(p)\left(\frac{e}{2\cos(\theta_W)\sin(\theta_W)}\gamma^\mu(g_V^f - g_A^f\gamma^5) + i\sigma^{\mu\nu}q_\nu(F_M^Z - iF_E^Z\gamma^5)\right)u(p') \quad (2.210)$$

de donde

$$F_M^Z \equiv \frac{ea_f}{2m_f} \quad (2.211)$$

y

$$F_E^Z \equiv d_f. \quad (2.212)$$

En este contexto, se han calculado momentos dipolares débiles para distintos fermiones del ME, siendo algunos resultados destacables en las últimas décadas los de Hollik [36], Bernabeu [2], Queijeiro [37], Tavares [3] y Montaña *et al* [38].

Capítulo 3

Planteamiento del problema

3.1. El modelo estándar mínimamente extendido

El modelo mínimamente extendido [6], como ya se ha mencionado, incluye neutrinos derechos en la teoría, permitiendo la posibilidad de masa de los mismos. Para fines de discusión del problema solo se presenta el sector relevante de este modelo. En el sector de Yukawa se agregan leptones con una estructura análoga al caso de los quarks, que generan las masas de los quarks tipo u que (en el sector de Yukawa); en la norma unitaria se tiene

$$\mathcal{L}_{H,L} = - \left(\frac{v + H}{\sqrt{2}} \right) \left[\bar{\mathbf{l}}'_L Y^n \mathbf{l}'_R + \bar{\boldsymbol{\nu}}'_L Y^\nu \boldsymbol{\nu}'_R \right] + H.c., \quad (3.1)$$

donde Y^n es la matriz de los acoplamientos de Yukawa que puede ser diagonalizada en la forma usual, Y^ν es la nueva matriz de los acoplamientos de Yukawa. Los arreglos para los leptones cargados quirales y los neutrinos está dado por

$$\mathbf{l}'_{L(R)} = \begin{pmatrix} e'_{L(R)} \\ \mu'_{L(R)} \\ \tau'_{L(R)} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\nu}'_{L(R)} = \begin{pmatrix} \nu'_{e_{L(R)}} \\ \nu'_{\mu_{L(R)}} \\ \nu'_{\tau_{L(R)}} \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

La matriz Y^ν se puede diagonalizar en una forma semejante a Y^n , mediante una transformación bi-unitaria:

$$V_L^{\nu\dagger} Y^\nu V_R^\nu = Y^\nu,$$

donde $[Y^\nu]_{i,j} = y_i^\nu \delta_{i,j}$, ($i, j = 1, 2, 3$) es una matriz diagonal, con y_i^ν números reales y positivos. Las matrices V_L^ν y V_R^ν son dos matrices adecuadas unitarias de 3×3 .

Definimos los arreglos quirales de los leptones cargados masivos en la forma usual:

$$\mathbf{l}_{L(R)} = V_{L(R)}^{l\dagger} \mathbf{l}'_{L(R)} \equiv \begin{pmatrix} e_{L(R)} \\ \mu_{L(R)} \\ \tau_{L(R)} \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

y de manera análoga se tiene para los neutrinos quirales

$$\mathbf{n}_{L(R)} = V_{L(R)}^{\nu\dagger} \mathbf{\nu}'_{L(R)} \equiv \begin{pmatrix} \nu_{1L(R)} \\ \nu_{2L(R)} \\ \nu_{3L(R)} \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Si consideramos que $\nu = \nu_L + \nu_R$ y sustituyendo las Ecs. (3.3) y (3.4) en la Ec. (3.1), obtenemos

$$\mathcal{L}_{H,L} = - \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \frac{y_\alpha^l v}{\sqrt{2}} \bar{l}_\alpha l_\alpha - \sum_{k=1}^3 \frac{y_k^\nu v}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_k \nu_k - \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \frac{y_\alpha^l}{\sqrt{2}} \bar{l}_\alpha l_\alpha H - \sum_{k=1}^3 \frac{y_k^\nu}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_k \nu_k H. \quad (3.5)$$

Entonces, se puede identificar la correspondiente masa de los neutrinos como

$$m_k = \frac{y_k^\nu v}{\sqrt{2}}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (3.6)$$

Consecuentemente, como se puede apreciar de la Ec.(3.5), el último término es el que acopla neutrinos de Dirac con campos de Higgs.

Para el sector de corrientes cargadas, la mezcla de neutrinos de Dirac es semejante a la mezcla de quarks en el ME. Para ello consideremos la corriente:

$$J_{W,L}^\mu = 2\bar{\nu}'_L \gamma^\mu \mathbf{l}'_L = 2\bar{\mathbf{n}}_L U^\dagger \gamma^\mu \mathbf{l}_L, \quad (3.7)$$

con

$$U = V_L^{l\dagger} V_L^\nu,$$

la cual es la matriz de mezcla en el sector leptónico introducida anteriormente. Es conveniente definir los campos de neutrinos izquierdos de sabor como:

$$\boldsymbol{\nu}_L = U \mathbf{n}_L = V_L^{l\dagger} \mathbf{\nu}'_L$$

con

$$\boldsymbol{\nu}_L = \begin{pmatrix} \nu_{e_L} \\ \nu_{\mu_L} \\ \nu_{\tau_L} \end{pmatrix}.$$

Para el caso de la parte de la energía cinética, el Lagrangiano está dada por

$$\mathcal{L}_{\text{kin}}^\nu = \sum_{k=1}^3 \overline{\nu_k^i} \overleftrightarrow{\partial} \nu_k, \quad (3.8)$$

donde $\overleftrightarrow{\partial} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{\partial} - \overleftarrow{\partial})$, con $\overrightarrow{\partial} = \partial$ es la derivada normal y actúa sobre lo que está a su derecha y $\overleftarrow{\partial}$ es la derivada que actúa sobre lo que está a su izquierda ($\overleftarrow{\partial} \psi \equiv \partial \psi$) y, por supuesto, se debe mantener el orden en el producto de matrices de Dirac con espinores.

Para el caso de las corrientes neutras, la unitariedad de las matrices de mezcla de los leptones cargados y neutrinos, $V_{L,R}^l$ y V_L^ν implica el mecanismo de GIM, la expresión para el Lagrangiano que involucra las corrientes neutras débiles en términos de los campos con masa definitiva es la misma que la de los leptones primados:

$$\mathcal{L}_{NC} = -\frac{g}{2 \cos \theta_W} J_{Z,L}^\mu Z_\mu, \quad (3.9)$$

donde

$$\begin{aligned} J_{Z,L}^\mu &= 2g_L^\nu \overline{\boldsymbol{\nu}'_L} \gamma^\mu \boldsymbol{\nu}'_L + 2g_L^l \overline{\boldsymbol{l}'_L} \gamma^\mu \boldsymbol{l}'_L + 2g_R^l \overline{\boldsymbol{l}'_R} \gamma^\mu \boldsymbol{l}'_R \\ &= 2g_L^\nu \overline{\boldsymbol{n}_L} V_L^{\nu\dagger} \gamma^\mu V_L^\nu \boldsymbol{n}_L + 2g_L^l \overline{\boldsymbol{l}_L} V_L^{l\dagger} \gamma^\mu V_L^l \boldsymbol{l}_L + 2g_R^l \overline{\boldsymbol{l}_R} V_R^{l\dagger} \gamma^\mu V_R^l \boldsymbol{l}_R \\ &= 2g_L^\nu \overline{\boldsymbol{n}_L} \gamma^\mu \boldsymbol{n}_L + 2g_L^l \overline{\boldsymbol{l}_L} \gamma^\mu \boldsymbol{l}_L + 2g_R^l \overline{\boldsymbol{l}_R} \gamma^\mu \boldsymbol{l}_R. \end{aligned} \quad (3.10)$$

De acuerdo a la corriente cargada en la ecuación (3.7), el Lagrangiano correspondiente es:

$$\mathcal{L}_{CC} = -\frac{g}{2\sqrt{2}} J_{W,L}^\mu W_\mu + H.c. \quad (3.11)$$

Se debe enfatizar que no se están tomando en cuenta las correspondientes contribuciones a las corrientes neutras y cargadas de los quarks en las ecuaciones (3.9) y (3.11).

3.2. El Problema

Para determinar las propiedades electro débiles de neutrinos a nivel de un lazo, se considera el acoplamiento $\nu_i \bar{\nu}_i Z$, $i = 1, 2, 3$, cuyo vértice Γ_i^μ , en norma unitaria, contiene contribuciones que provienen de los diferentes diagramas de Feynman mostrados en la Figura (3.1)

$$-i\Gamma_T^\mu = -i \sum_{k=a}^c \Gamma_k^\mu, \quad (3.12)$$

donde $k = a, b, c$. El objetivo del trabajo es expresar la función vértice en factores de forma y encontrar los mismos, como:

$$\Gamma_T^\mu(q^2) = (V^Z(q^2) + A^Z(q^2)\gamma_5) \gamma_\mu + (F_M^Z(q^2) - iF_E^Z(q^2)\gamma_5) i\sigma_{\mu\nu}q^\nu. \quad (3.13)$$

En particular, determinar los factores de forma asociados con los momentos dipolares débiles $F_M^Z \equiv F_M^w(q^2)$ y $F_E^Z \equiv F_E^w(q^2)$. Se busca explorar la finitud de las soluciones en el régimen infrarojo (IR) así como en el ultravioleta (UV) y en particular se corroborará que los factores de forma asociados con los momentos dipolares eléctrico (F_E^w) y magnético (F_M^w) no contengan divergencias IR ni UV.

El cálculo se realizará, además, en norma general R_ξ donde se consideren diagramas adicionales derivados del teorema de Nambu-Goldstone que contienen pseudo-bosones y se busca igualmente establecer la finitud de los factores de forma y determinar valores numéricos. Para este caso se analizará también que las soluciones sean independientes de la elección del parámetro de norma ξ .

3.2.1. Norma unitaria

El Lagrangiano de Dirac para los neutrinos masivos tiene como consecuencia que los propagadores correspondientes sean análogos a la de los quarks y leptones cargados. Con estas consideraciones, si q es el momento del bosón Z , p y p' son los momentos de los neutrinos entrantes y salientes respectivamente y k es el momento asociado a Z , W y l virtuales en los diagramas a), b) y c) de la Figura (3.1), entonces las expresiones correspondientes a la amplitud invariante en cada caso están dadas respectivamente por

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_a^U &= \frac{(-1)^3 i^6 g^3}{(2 \cos(\theta_W))^3} \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\bar{u}(p') \Delta_a u(p)}{((k+p')^2 - m_k^2)((k+p)^2 - m_k^2)} \\ &\times \left[\frac{1}{k^2 - m_Z^2} (-g_{\alpha_1 \alpha_2} + \frac{k_{\alpha_1} k_{\alpha_2}}{m_Z^2}) \right]\end{aligned}\quad (3.14)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_b^U &= \frac{(-1)^3 i^6 g^3}{4 \cos(\theta_W)} U \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\bar{u}(p') \Delta_b u(p)}{((k+p')^2 - m_{l_\alpha}^2)((k+p)^2 - m_{l_\alpha}^2)} \\ &\times \left[\frac{1}{k^2 - m_W^2} (-g_{\alpha_1 \alpha_2} + \frac{k_{\alpha_1} k_{\alpha_2}}{m_W^2}) \right]\end{aligned}\quad (3.15)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_c^U &= \frac{(-1)^2 i^6 g^3 \cos(\theta_W) U}{2} \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\bar{u}(p') \gamma^{\alpha_1} P_L (\not{k} + m_{l_\alpha}) \gamma^{\alpha_4} P_L u(p)}{(k^2 - m_{l_\alpha}^2)} \\ &\times \left[\frac{1}{(k-p')^2 - m_W^2} (-g_{\alpha_1 \alpha_2} + \frac{(k-p')_{\alpha_1} (k-p')_{\alpha_2}}{m_W^2}) \right] \\ &\times \Delta_c \left[\frac{1}{(k-p)^2 - m_W^2} (-g_{\alpha_3 \alpha_4} + \frac{(k-p)_{\alpha_3} (k-p)_{\alpha_4}}{m_W^2}) \right]\end{aligned}\quad (3.16)$$

donde

$$\Delta_a \equiv \gamma^{\alpha_1} P_L (\not{k} + \not{p}' + m_k) \gamma^\mu P_L (\not{k} + \not{p} + m_k) \gamma^{\alpha_2} P_L \quad (3.17)$$

$$\Delta_b \equiv \gamma^{\alpha_1} P_L (\not{k} + \not{p}' + m_{l_\alpha}) \gamma^\mu (g_{l_\alpha}^V - g_{l_\alpha}^A \gamma^5) (\not{k} + \not{p} + m_{l_\alpha}) \gamma^{\alpha_2} P_L \quad (3.18)$$

$$\Delta_c \equiv (p - 2k - p')_\mu g_{\alpha_3 \alpha_2} + (k - p' - q)_{\alpha_3} g_{\alpha_2 \mu} + (q - p + k)_{\alpha_2} g_{\mu \alpha_3}. \quad (3.19)$$

Aquí $\mathcal{M} \equiv \bar{u}(p') \Gamma_T^\mu(q^2) u(p)$ y $m_k \equiv m_{\nu_i}$ lo que permite relacionar las amplitudes con el vértice general de acuerdo a la ecuación (3.13) y $U \equiv U_{ij} \equiv \sum_{\alpha=1}^3 U_{\alpha i} U_{\alpha j}^*$ con U_{ab} las entradas de la matriz de mezcla PMNS. Para el caso de los diagramas de la Figura (3.1), se tiene $i = j$ y por tanto $\sum_{\alpha=1}^3 U_{\alpha i} U_{\alpha j}^* = \sum_{\alpha=1}^3 U_{\alpha i} U_{\alpha i}^* = |U_{\alpha i}|^2$. En los diagramas anteriores se cumple además la condición de capa de masa, que en este caso es $q^2 = m_Z^2$ y la conservación de momento impuesta al vértice está dada por $q = p' - p$.

3.2.2. Norma general

En norma general, el cálculo incluye diagramas con pseudo-bosones escalares de acuerdo con el teorema de Nambu-Goldstone. Los diagramas que pueden

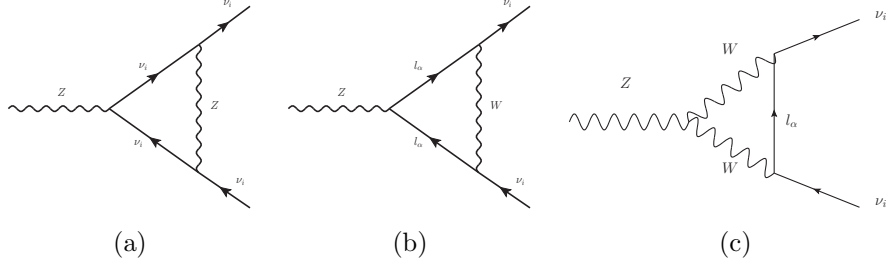


Figura 3.1: Diagramas de Feynman que contribuyen a los momentos dipolares débiles de ν a nivel de un lazo (norma unitaria).

contribuir a los momentos dipolares débiles eléctrico y magnético con términos proporcionales a $\sigma_{\mu\nu}q^\nu$ están indicados en la Figura (3.2). Las amplitudes de probabilidad correspondientes están dadas por:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{a1}^G &= \frac{(-1)^3 i^6 g^3}{(2 \cos(\theta_W))^3 \mu^{2\epsilon}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\bar{u}(p') \Delta_{a1} u(p)}{((k+p')^2 - m_k^2)((k+p)^2 - m_k^2)} \\ &\times \left[\frac{1}{k^2 - m_Z^2} (-g_{\alpha_1 \alpha_2} + \frac{(1 - \xi_Z) k_{\alpha_1} k_{\alpha_2}}{k^2 - \xi_Z m_Z^2}) \right] \end{aligned} \quad (3.20)$$

donde

$$\Delta_{a1} \equiv \gamma^{\alpha_1} P_L (\not{k} + \not{p}' + m_k) \gamma^\mu P_L (\not{k} + \not{p} + m_k) \gamma^{\alpha_2} P_L, \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{a2}^G &= \frac{(-1)^3 i^4 g^3}{8 \cos(\theta_W) (\frac{m_W}{m_k})^2 \mu^{2\epsilon}} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\bar{u}(p') \Delta_{a2} u(p)}{((k+p')^2 - m_k^2)((k+p)^2 - m_k^2)} \\ &\times \left[\frac{1}{k^2 - \xi_Z m_Z^2} \right] \end{aligned} \quad (3.22)$$

con

$$\Delta_{a2} \equiv \gamma^5 (\not{k} + \not{p}' + m_k) \gamma^\mu P_L (\not{k} + \not{p} + m_k) \gamma^5, \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{b1}^G &= \frac{(-1)^3 i^6 g^3}{4 \cos(\theta_W)} U \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\bar{u}(p') \Delta_{b1} u(p)}{((k+p')^2 - m_{l_\alpha}^2)((k+p)^2 - m_{l_\alpha}^2)} \\ &\times \left[\frac{1}{k^2 - m_W^2} (-g_{\alpha_1 \alpha_2} + \frac{(1 - \xi_W) k_{\alpha_1} k_{\alpha_2}}{k^2 - \xi_W m_W^2}) \right] \end{aligned} \quad (3.24)$$

donde

$$\Delta_{b1} \equiv \gamma^{\alpha_1} P_L (\not{k} + \not{p}' + m_{l_\alpha}) \gamma^\mu (g_{l_\alpha}^V - g_{l_\alpha}^A \gamma^5) (\not{k} + \not{p} + m_{l_\alpha}) \gamma^{\alpha_2} P_L, \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{b2}^G &= \frac{(-1)i^6 g^3}{4 \cos(\theta_W) m_W^2} U \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\bar{u}(p') \Delta_{b2} u(p)}{((k+p')^2 - m_{l_\alpha}^2)((k+p)^2 - m_{l_\alpha}^2)} \\ &\times \left[\frac{1}{k^2 - m_W^2 \xi_W} \right] \end{aligned} \quad (3.26)$$

con

$$\Delta_{b2} \equiv (m_k P_L - m_{l_\alpha} P_R) (\not{k} + \not{p}' + m_{l_\alpha}) \gamma^\mu (g_{l_\alpha}^V - g_{l_\alpha}^A \gamma^5) (\not{k} + \not{p} + m_k) (m_k P_R - m_{l_\alpha} P_L), \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{c1}^G &= \frac{(-1)^2 i^6 g^3 \cos(\theta_W) U}{2} \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\bar{u}(p') \gamma^{\alpha_1} P_L (\not{k} + m_{l_\alpha}) \gamma^{\alpha_4} P_L u(p)}{(k^2 - m_{l_\alpha}^2)} \\ &\times \left[\frac{1}{(k-p')^2 - m_W^2} (-g_{\alpha_1 \alpha_2} + \frac{(1-\xi_W)(k-p')_{\alpha_1} (k-p')_{\alpha_2}}{(k-p')^2 - \xi_W m_W^2}) \right] \Delta_{c1} \\ &\times \left[\frac{1}{(k-p)^2 - m_W^2} (-g_{\alpha_3 \alpha_4} + \frac{(1-\xi_W)(k-p)_{\alpha_3} (k-p)_{\alpha_4}}{(k-p)^2 - \xi_W m_W^2}) \right] \end{aligned} \quad (3.28)$$

donde

$$\Delta_{c1} \equiv ((p-2k+p')_\mu g_{\alpha_3 \alpha_2} + (k-p'-q)_{\alpha_3} g_{\alpha_2 \mu} + (q-p+k)_{\alpha_2} g_{\mu \alpha_3}), \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{c2}^G &= \frac{(-1)^2 i^6 g^3 (\sin(\theta_W))^2 m_Z U}{2 m_W} \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\bar{u}(p') \Delta_{c2} u(p)}{(k^2 - m_{l_\alpha}^2)} \\ &\times \left[\frac{1}{(k-p')^2 - \xi_W m_W^2} \right] (g_{\mu \alpha_3}) \\ &\times \left[\frac{1}{(k-p)^2 - m_W^2} (-g_{\alpha_3 \alpha_4} + \frac{(1-\xi_W)(k-p)_{\alpha_3} (k-p)_{\alpha_4}}{(k-p)^2 - \xi_W m_W^2}) \right] \end{aligned} \quad (3.30)$$

con

$$\Delta_{c2} \equiv (m_{\nu_i} P_L - m_{l_\alpha} P_R) (\not{k} + m_{l_\alpha}) \gamma^{\alpha_4} \frac{1}{2} (1 - \gamma^5), \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{c3}^G &= \frac{(-1)^2 i^6 g^3 (\sin(\theta_W))^2 m_Z U}{2m_W} \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\bar{u}(p') \Delta_{c3} u(p)}{(k^2 - m_{l_\alpha}^2)} \\
&\times \left[\frac{1}{(k-p')^2 - m_W^2} (-g_{\alpha_1 \alpha_2} + \frac{(1-\xi_W)(k-p')_{\alpha_1} (k-p')_{\alpha_2}}{(k-p')^2 - \xi_W m_W^2}) \right] \\
&\times (g_{\mu \alpha_2}) \left[\frac{1}{(k-p)^2 - \xi_W m_W^2} \right] \tag{3.32}
\end{aligned}$$

donde

$$\Delta_{c3} \equiv \gamma^{\alpha_1} \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) (\not{k} + m_{l_\alpha}) (m_{\nu_i} P_R - m_{l_\alpha} P_L), \tag{3.33}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{c4}^G &= \frac{(-1) i^6 g^3 \cos(2\theta_W) U}{4m_W^2 \cos(\theta_W)} \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\bar{u}(p') \Delta_{c4} u(p)}{(k^2 - m_{l_\alpha}^2)} \\
&\times \left[\frac{1}{(k-p')^2 - \xi_W m_W^2} \right] (p - 2k + p')^\mu \left[\frac{1}{(k-p)^2 - \xi_W m_W^2} \right] \tag{3.34}
\end{aligned}$$

con

$$\Delta_{c4} \equiv (m_{\nu_i} P_L - m_{l_\alpha} P_R) (\not{k} + m_{l_\alpha}) (m_{\nu_i} P_R - m_{l_\alpha} P_L). \tag{3.35}$$

En los diagramas anteriores se cumple igualmente $q = p' - p$ y $q^2 = m_Z^2$ y se han introducido los parámetros de norma ξ_W y ξ_Z los cuales son, en principio diferentes.

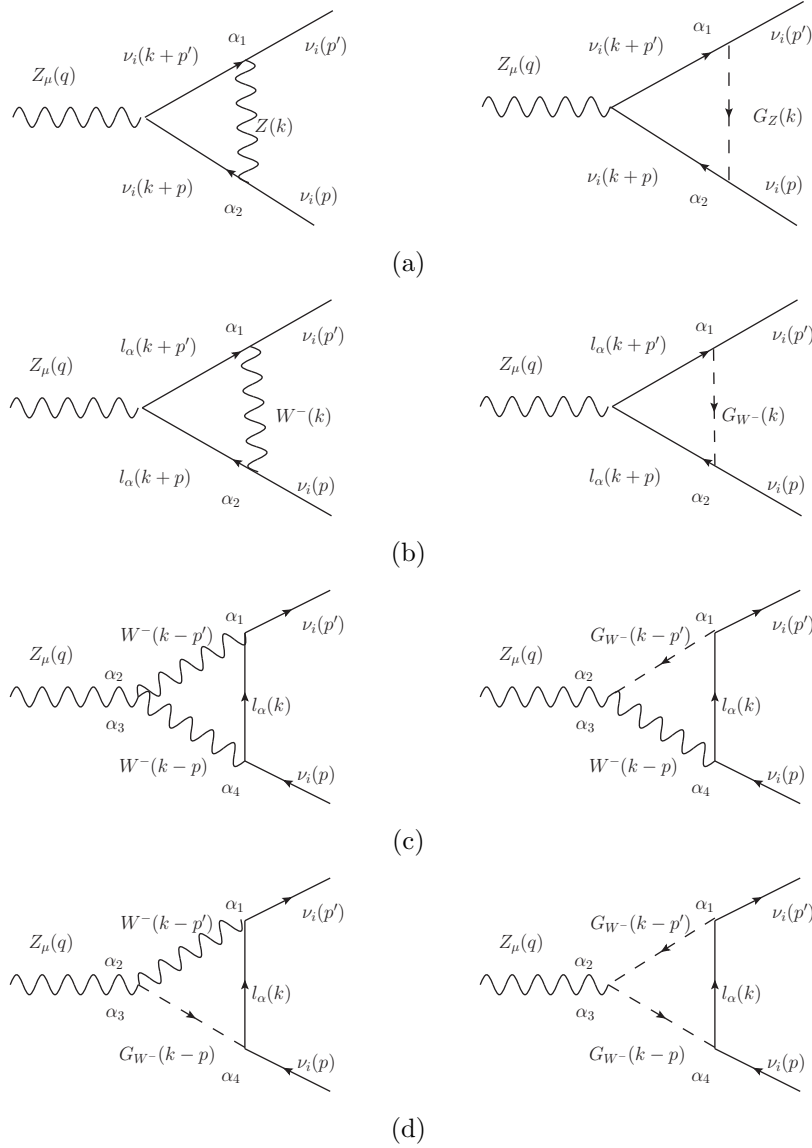


Figura 3.2: Diagramas de Feynman que contribuyen a los momentos dipolares débiles de ν a nivel de un lazo (norma general). Los diagramas a1, b1, c1 y d1 se ubican a la derecha y a2, b2, c2 y d2 a la izquierda.

Capítulo 4

Resultados y discusión

Los resultados expuestos a continuación han sido obtenidos mediante la paquetería de FeynCalc [39] y PackageX [40] a modo de comprobación obteniendo esencialmente los mismos resultados en ambos casos.

4.1. Norma unitaria

En norma unitaria, se encuentra que no hay presentes divergencias ultravioletas ni infrarrojas en los factores de forma de interés para el cálculo (F_E^w y F_M^w). Para los diagramas de la Figura (3.1) que se corresponden con las amplitudes de las ecuaciones (3.14)-(3.16) se encuentra que el término dominante en la expansión perturbativa de $F_M^w \equiv \mu_{\nu_i}^w$, proporcional a m_{ν_i} , está dado por la suma de las expresiones

$$\mu_{\nu_i}^{w(a)} \approx \frac{eG_F m_{\nu_i}}{48\sqrt{2}\pi^2 s_{2W}} (75 - 32\pi^2 + 96\text{Li}_2(2) + 66i\pi), \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \mu_{\nu_i}^{w(b)} \approx & \frac{eG_F m_{\nu_i}}{48\sqrt{2}\pi^2 t_W} (1 - 2c_W^2) \left(39 + 36c_W^2 + 6(6c_W^2 + 5) \ln(-c_W^2) \right. \\ & \left. + (c_W^2 + 1)(3c_W^2 + 1) \{ 2[\pi^2 + 6\text{Li}_2(c_W^2 + 1)] + 6\ln^2(-c_W^2) \} \right), \quad (4.2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_{\nu_i}^{w(c)} \approx & \frac{eG_F m_{\nu_i}}{8\sqrt{2}\pi^2 t_W} \left\{ R^2(3c_W^2 + 2) - 2(6c_W^4 + 3c_W^2 - 1)iR \ln \left(\frac{2c_W^2}{2c_W^2 - 1 + iR} \right) \right. \\
& - 2(6c_W^4 + 2c_W^2 - 1)c_W^2 \left[\text{Li}_2 \left(\frac{2c_W^2}{2c_W^2 - 1 + iR} \right) - \text{Li}_2 \left(\frac{2(c_W^2 - 1)}{2c_W^2 - 1 - iR} \right) \right. \\
& + \text{Li}_2 \left(\frac{2(1 - c_W^2)}{1 + iR} \right) - \text{Li}_2 \left(\frac{2c_W^2}{1 + iR} \right) + \text{Li}_2 \left(1 - \frac{1}{c_W^2} \right) \\
& \left. \left. + \frac{1}{2} \ln^2 \left(1 + \frac{2(c_W^2 - 1)}{1 + iR} \right) - \frac{1}{2} \ln^2 \left(\frac{2}{1 + iR} \right) - \frac{\pi^2}{6} \right] \right\}, \quad (4.3)
\end{aligned}$$

donde $t_W = s_W/c_W$, $s_{2W} = 2c_W s_W$, $c_W = m_W/m_Z$, $R \equiv \sqrt{4c_W^2 - 1}$ y $\mu_{\nu_i}^w = \sum_{k=a,b,c} \mu_{\nu_i}^{w(k)}$ es el factor de forma magnético-débil F_M^w que tiene dimensiones de inverso de masa y está relacionado con $a_{\nu_i}^w$ mediante $F_M^w = \frac{a_{\nu_i}^w e}{2m_{\nu_i}}$ donde $a_{\nu_i}^w$ es adimensional. Además, $e = \sqrt{4\pi\alpha(m_Z)}$ donde $\alpha(m_Z) \approx \frac{1}{129}$ es un valor efectivo para α en la escala de energía de la masa de bosón Z [41]. La evaluación numérica de la suma de estas expresiones conduce al valor

$$\mu_{\nu_i}^w = \sum_{k=a,b,c} \mu_{\nu_i}^{w(k)} \approx (7.58 + 0.28i)10^{-26} \frac{m_{\nu_i}}{(eV)^2} \quad (4.4)$$

Similarmente, la cantidad $d_{\nu_i}^w$, relacionada con el factor eléctrico-débil mediante $F_E^w = d_{\nu_i}^w$ resulta igual a cero para los diagramas considerados, con lo que este factor no recibe corrección a nivel de un lazo. Este caso, que es el de la norma unitaria, corresponde al límite $\xi \rightarrow \infty$ en norma general R_ξ . En la sección siguiente se establece que el resultado es independiente de la elección del parámetro de norma ξ .

4.2. Norma general

En la norma general R_ξ se corrobora que los factores de forma de interés (F_E^w y F_M^w) son libres de términos que contengan divergencias UV y IR. Al igual que en el caso de la norma unitaria se obtiene $F_E^w = d_{\nu_i}^w = 0$ para todos los diagramas. Los resultados analíticos de la expansión para $F_M^w \equiv \mu_{\nu_i}^w$ en norma general coinciden con los obtenidos para la norma unitaria donde no hay dependencia del parámetro de norma R_ξ .

La evaluación numérica del término dominante en la expansión perturbativa de $\mu_{\nu_i}^w$, proporcional a m_{ν_i} , es la suma de las contribuciones de los

diagramas de la Figura (3.2) con amplitudes correspondientes dadas por las ecuaciones (3.20)-(3.35) y resulta en el mismo valor obtenido en la ecuación (4.4). Se aprecia, con esto, que el cálculo en norma unitaria ofrece un resultado compatible con el obtenido usando la norma general R_ξ ofreciendo valores con el mismo orden de magnitud.

Capítulo 5

Conclusiones

El valor obtenido en la ecuación (4.4) puede ser comparado con el resultado establecido en la ecuación (2.205) teniendo en cuenta que

$$\mu_{\nu_i} \approx \frac{3eG_F m_{\nu_i}}{8\pi^2 \sqrt{2}} \approx 9.49075 \times 10^{-26} \frac{m_{\nu_i}}{(eV)^2}, \quad (5.1)$$

con lo que la razón entre el valor obtenido en la ecuación (4.4) y la ecuación (5.1) es

$$\frac{\mu_{\nu_i}^w}{\mu_{\nu_i}} = \frac{7.5845 \times 10^{-26} + 0.2778 \times 10^{-26}i}{9.49075 \times 10^{-26}} \approx 0.799146 + 0.0292794i, \quad (5.2)$$

que es un número complejo de magnitud

$$\left| \frac{\mu_{\nu_i}^w}{\mu_{\nu_i}} \right| \approx 0.799682. \quad (5.3)$$

Este valor representa una comparativa de las intensidades de los momentos dipolares en la interacción débil relativa a la interacción electromagnética en este modelo de neutrinos de Dirac y es independiente tanto del valor de la masa como del neutrino en cuestión.

Adicionalmente, se encuentra que los valores para $\mu_{\nu_i}^w$ son independientes de la elección del parámetro de norma $\xi = \xi_W = \xi_Z$ como se espera de un resultado consistente.

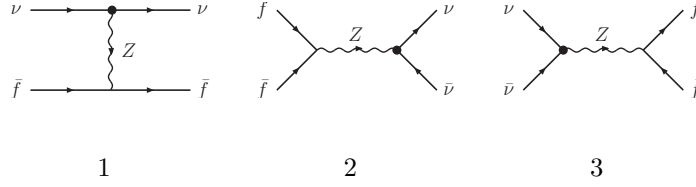


Figura 5.1: Dispersiones con interacción dipolar débil de neutrinos.

Para conocer las posibles consecuencias fenomenológicas de esta predicción teórica para $\mu_{\nu_i}^w$, puede ser de interés someterlo a prueba en procesos de dispersión de árbol mediados por el bosón Z , es decir, se podría estudiar el posible impacto en la sección eficaz de $\nu f \rightarrow \nu f$, así como también en situación de bosón Z resonante en $f\bar{f} \rightarrow \nu\bar{\nu}$ y, más aún, en colisiones ultra-energéticas $\nu\nu \rightarrow f\bar{f}$. Tales dispersiones, ilustradas en la Figura (5.1), no se han explorado en la literatura con la nueva pieza de interacción dipolar débil, esto es, usando la regla corregida para el vértice $Z\nu\bar{\nu}$ dada por la sustitución

$$\begin{aligned}
 -\frac{ig}{2\cos(\theta_W)}\gamma^\mu P_L &\rightarrow -\frac{ig}{2\cos(\theta_W)}\gamma^\mu P_L + \sigma^{\mu\nu}q_\nu(F_M^Z - iF_E^Z\gamma^5) \\
 &= -\frac{ig}{2\cos(\theta_W)}\gamma^\mu P_L + \sigma^{\mu\nu}q_\nu\mu_{\nu_i}^w,
 \end{aligned}
 \tag{5.4}$$

donde $F_E^Z = 0$ y $F_M^Z = \mu_{\nu_i}^w \approx (7.58 + 0.28i)10^{-26} \frac{m_{\nu_i}}{(eV)^2}$ de acuerdo con los resultados expuestos en la sección anterior.

Reglas de Feynman

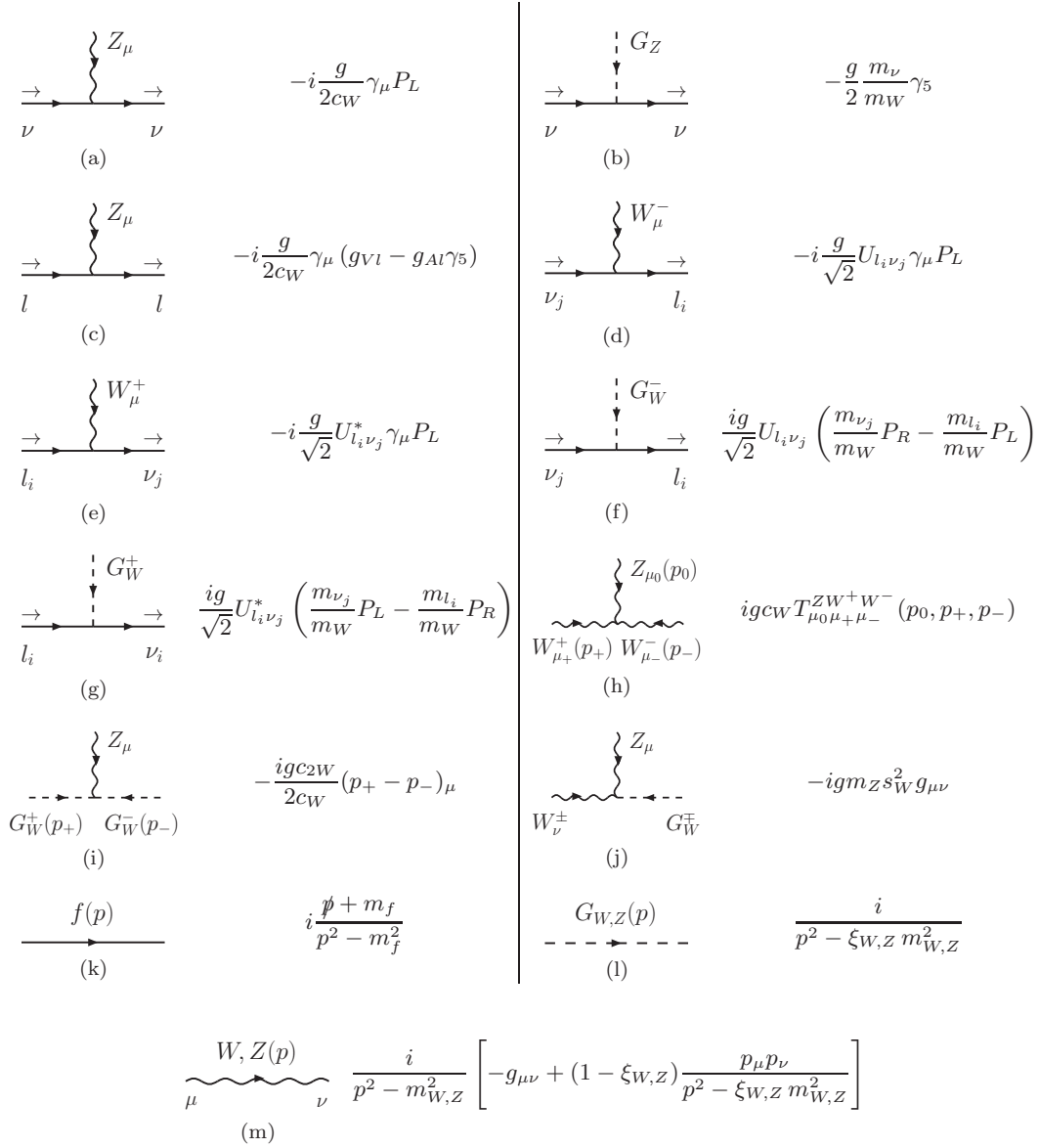


Figura 2: Reglas de Feynman en la norma general covariante R_ξ .

Aquí $g_{Vl} = -\frac{1}{2} + 2s_W^2$, $g_{Al} = -\frac{1}{2}$, y $T_{\mu_0 \mu_+ \mu_-}^{ZW^+W^-}(p_0, p_+, p_-) = (p_+ - p_-)_\mu g_{\mu_+ \mu_-} + (p_- - p_0)_\mu g_{\mu_- \mu_0} + (p_0 - p_+)_\mu g_{\mu_0 \mu_+}$.

Bibliografía

- [1] J. S. Schwinger, “On Quantum electrodynamics and the magnetic moment of the electron,” *Phys. Rev.* **73**, 416-417 (1948) doi:10.1103/PhysRev.73.416.
- [2] J. Bernabeu, J. Vidal and G. A. Gonzalez-Sprinberg, “The Weak magnetic moment of heavy quarks,” *Phys. Lett. B* **397**, 255-262 (1997) doi:10.1016/S0370-2693(97)00185-8.
- [3] M. A. Arroyo-Ureña, G. Tavares-Velasco and G. Hernández-Tomé, “Weak dipole moments of the tau lepton in models with an extended scalar sector,” *Phys. Rev. D* **97**, no.1, 013006 (2018) doi:10.1103/PhysRevD.97.013006.
- [4] R.L. Workman et al. (Particle Data Group), *Prog. Theor. Exp. Phys.* 2022, 083C01 (2022).
- [5] R. N. Mohapatra, P. B. Pal, *Massive Neutrinos in Physics and Astrophysics*, World Scientific, Singapore, (2004).
- [6] C. Giunti, W. Kim, *Fundamental of Neutrino Physics and Astrophysics*, Oxford University Press, New York, (2007).
- [7] Y. Fukuda *et al.* “Atmospheric muon-neutrino / electron-neutrino ratio in the multiGeV energy range”, *Phys. Lett. B* **335**, 237 (1994).
- [8] Y. Fukuda *et al.* “Evidence for oscillation of atmospheric neutrinos”, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 1562 (1998).
- [9] H. Sobel, “Atmospheric neutrinos in Super-Kamiokande”, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **91**, 127 (2001).

- [10] M. Ambrossio *et al.* “Atmospheric neutrino oscillations from upward through going muon multiple scattering in MACRO”, *Phys. Lett. B* **566**, 35 (2003).
- [11] M. Apollonio *et al.* “Search for neutrino oscillations on a long baseline at the CHOOZ nuclear power station”, *Eur. Phys. J. C* **27**, 331 (2003).
- [12] M. B. Smy *et al.* “Precise measurement of the solar neutrino day / night and seasonal variation in Super-Kamiokande-1”, *Phys. Rev. D* **69**, 011104(R) (2004).
- [13] S. N. Ahmed *et al.* “Measurement of the total active B-8 solar neutrino flux at the Sudbury Neutrino Observatory with enhanced neutral current sensitivity”, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 181301 (2004).
- [14] Y. Ashie *et al.* “Evidence for an oscillatory signature in atmospheric neutrino oscillation”, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 101801 (2004).
- [15] E. Aliu *et al.* “Evidence for muon neutrino oscillation in an accelerator-based experiment”, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 081802 (2005).
- [16] Y. Ashie *et al.* “A Measurement of atmospheric neutrino oscillation parameters by SUPER-KAMIOKANDE I”, *Phys. Rev. D* **71**, 112005 (2005).
- [17] W. W. M. Allison *et al.* “Neutrino oscillation effects in Soudan-2 upward-stopping muons”, *Phys. Rev. D* **72**, 052005 (2005).
- [18] P. Adamson *et al.* “First observations of separated atmospheric $\nu(\mu)$ and anti- $\nu(\mu)$ events in the MINOS detector”, *Phys. Rev. D* **73**, 072002 (2006).
- [19] S. M. Bilenky, “Neutrino and The Standard Model,” (2014). [arXiv:1408.1432 [hep-ph]].
- [20] G. B. Gelmini, “El boson de Higgs,”, Department of Physics and Astronomy, University of California, Los Angeles (UCLA), (2014). [arXiv:1407.1741 [physics.pop-ph]].
- [21] J. R. Ellis, “Limits of the standard model,” , CERN, Geneva, Switzerland, [arXiv:hep-ph/0211168 [hep-ph]].

- [22] R. Becker-Szendy, C. B. Bratton, D. Casper, S. T. Dye, W. Gajewski, K. Ganezer, M. Goldhaber, T. J. Haines, P. G. Halverson and D. Kielczewska, *et al.* “Neutrino measurements with the IMB detector,” Nucl. Phys. B Proc. Suppl. **38**, 331-336 (1995) doi:10.1016/0920-5632(94)00765-N.
- [23] C. Csáki and P. Tanedo, “Beyond the Standard Model,” doi:10.5170/CERN-2015-004.169.
- [24] S. Davidson, “Neutrino Physics,” CERN Yellow Rep. School Proc. **3**, 167-198 (2018) doi:10.23730/CYRSP-2018-003.167.
- [25] Q. H. Kim, X. Pham, *Elementary particles and their interactions*, Springer, Berlin, (1998).
- [26] F. Halzen, A. D. Martin, *Quarks and Leptons*, John Wiley And Sons, New York, (1991).
- [27] C. S. Wu, E. Ambler, R. W. Hayward, D. D. Hoppes and R. P. Hudson, “Experimental Test of Parity Conservation in β Decay,” Phys. Rev. **105**, 1413-1414 (1957) doi:10.1103/PhysRev.105.1413.
- [28] L. Di Lella and C. Rubbia, “The Discovery of the W and Z Particles,” Adv. Ser. Direct. High Energy Phys. **23**, 137-163 (2015) doi:10.1142/9789814644150_0006.
- [29] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **19**, 1264-1266 (1967) doi:10.1103/PhysRevLett.19.1264.
- [30] M.C. González-García, M. Yokoyama, “Neutrino Masses, Mixing, and Oscillations”(YITP, Stony Brook; ICREA, Barcelona; ICC, U. of Barcelona), (Tokyo U.; Kavli IPMU (WPI), U. Tokyo), (2019).
- [31] J. C. Romao, J. W.F Valle, *Neutrino in high energy and astroparticle physics*, Wiley VCH, Weinheim, (2015).
- [32] P. Langacker, *The Standard Model and Beyond*, CRC Press, New York, (2017).
- [33] Y. Fukuda *et al.* [Super-Kamiokande], “Evidence for oscillation of atmospheric neutrinos,” Phys. Rev. Lett. **81**, 1562-1567 (1998) doi:10.1103/PhysRevLett.81.1562.

- [34] M. D. Schwartz, *Quantum Field Theory and the Standard Model*, Cambridge University Press, Massachusetts, (2014).
- [35] B. Quezadas, MSc. Thesis *Propiedades magnéticas y cromomagnéticas de fermiones con violación de sabor*, FCFM-UMSNH, México, (2017).
- [36] W. Hollik, J. I. Illana, S. Rigolin, C. Schappacher and D. Stockinger, “Top dipole form-factors and loop induced CP violation in supersymmetry,” Nucl. Phys. B **551**, 3-40 (1999) [erratum: Nucl. Phys. B **557**, 407-409 (1999)] doi:10.1016/S0550-3213(99)00396-X.
- [37] R. Cuevas, J. Garcia and A. Queijeiro, “Radiative corrections to the weak-magnetic dipole moment of leptons in the unbroken minimal supersymmetric standard model,” Rev. Mex. Fis. **50**, 24-29 (2004).
- [38] J. Montaña-Domínguez, B. Quezadas-Vivian, F. Ramírez-Zavaleta and E. S. Tututi, “Weak dipole moments of heavy fermions with flavor violation induced by Z’ norma bosons,” J. Phys. G **49**, no.7, 075004 (2022) doi:10.1088/1361-6471/ac69ff.
- [39] R. Mertig, M. Bohm and A. Denner, “FEYN CALC: Computer algebraic calculation of Feynman amplitudes,” Comput. Phys. Commun. **64**, 345 (1991). doi:10.1016/0010-4655(91)90130-D.
- [40] H. H. Patel, “Package-X: A Mathematica package for the analytic calculation of one-loop integrals,” Comput. Phys. Commun. **197**, 276 (2015) doi:10.1016/j.cpc.2015.08.017 [arXiv:1503.01469 [hep-ph]].
- [41] A. Denner, S. Dittmaier, “Electroweak radiative corrections for collider physics”, Physics Reports **864**, 1-163, (2020).