



Universidad Nacional Autónoma de
México y Universidad Michoacana
de San Nicolás de Hidalgo



Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas
UNAM-UMSNH

**Análisis asintótico a tiempo largo de las soluciones
del problema periódico para la ecuación de
Schrödinger no lineal cuadrática**

T E S I S

que para obtener el grado de

Maestro en Ciencias Matemáticas

presenta

Carlos Enrique Rodríguez Tzintzun

Asesor:

Doctor en Ciencias

Pavel Naumkin

Morelia, Michoacán, México

Junio, 2025

Dedicatoria

A mis padres, Damián Rodríguez Pérez y Graciela Tzintzun Guzmán, por siempre estar presentes mostrando su apoyo, comprensión y cariño. Han sido el pilar más importante a lo largo de este camino.

A mis hermanas, Dania Rodríguez Tzintzun y Janeth Rodríguez Tzintzun, por ser fuente de inspiración y el mejor lugar para estar.

Agradecimientos

A mi asesor, Pavel Naumkin, por su apoyo, acompañamiento y mentoría.

A la mesa de jurado, conformada por los investigadores: Dr. Carlos Osvaldo Osuna Castro, Dr. Pavel Naumkin, Dr. Abdon Eddy Choque Rivero, Dr. Jesús Muciño Raymundo y Dr. Eugenio Pacelli Balanzario Gutiérrez, por ayudar con su experiencia y observaciones a concretar este trabajo.

A mis maestros, por sus enseñanzas.

A la Universidad Nacional Autónoma de México y a la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, por siempre abrirme sus puertas.

A las bibliotecas del Centro de Ciencias Matemáticas y de la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, junto con su personal, por ser el mejor lugar de estudio.

A mis amigos y compañeros, por hacer más ameno el camino.

Resumen

La ecuación de Schrödinger es, sin lugar a dudas, una de las ecuaciones de la física-matemática más importantes que existen. Si bien en muchos casos la obtención de una solución en términos de funciones analíticas resulta imposible, el análisis asintótico permite estudiar propiedades importantes de las soluciones a ciertos límites, sin la necesidad de conocerlas explícitamente. La ecuación de Schrödinger no lineal es una extensión de dicha ecuación que considera términos no lineales de la función de onda. En el presente trabajo se obtiene el perfil asintótico a tiempo largo de las soluciones periódicas de una ecuación de Schrödinger no lineal unidimensional en el espacio, donde el término de no linealidad está dado por el negativo del cuadrado de la función de onda y se considera a este como única fuente de interacción, todo lo anterior en presencia de condiciones iniciales y de frontera periódicas. Se toma como base una ecuación diferencial ordinaria de primer orden obtenida al buscar las estimaciones a priori del problema y se muestra la manera en la que esta absorbe gran parte del análisis.

Palabras Clave: Perfil Asintótico, Ecuaciones Diferenciales Parciales, Ecuación de Schrödinger, No Linealidad, Cuadrática.

Abstract

The Schrödinger equation is, without doubt, one of the most important equations through mathematical-physics. Even though it's not always possible to find a solution in terms of analytic functions, asymptotics can provide valuable information about them to certain limits without really knowing them explicitly. The nonlinear Schrödinger equation extends the classic point of view and adds nonlinear terms of the wave function. The present work provides the asymptotic profile of the periodic solutions for a one-dimensional nonlinear Schrödinger equation, where the nonlinearity is given by the negative of the square of the wave function, being this the only source of interaction, and all of it constrained to periodic boundary value-initial value conditions. A first order differential equation, found in the a priori estimates, is proposed as the key part of the analysis.

Índice general

Dedicatoria	II
Agradecimientos	III
1 Introducción	1
2 Estimaciones	6
2.1 Estimaciones para una ecuación diferencial ordinaria	6
2.2 Estimaciones a priori del sistema	11
3 Prueba del Teorema 1	17
Bibliografía	18

Capítulo 1

Introducción

En el mundo de la matemática, la física o incluso la ciencia en general, pocas ecuaciones tienen la fortuna de tomar un lugar como el que le pertenece a la ecuación de Schrödinger. Esta se encuentra en el génesis de la teoría cuántica y básicamente modela todo lo que en un principio se requiere saber sobre un fenómeno cuántico y, a partir de ella, se fundamentan también los fenómenos del mundo que conocemos y experimentamos diariamente. Matemáticamente hablando, es una fuente inagotable de estudio y es foco de atención de diversas áreas de las matemáticas desde su nacimiento hace ya un siglo, siendo actualmente uno de los objetos de mayor actividad académica. *Grosso modo*, imaginemos una partícula de masa $m > 0$, sujeta a un potencial V infinitamente diferenciable, la ecuación de Schrödinger es

$$i\hbar\Psi_t = -\frac{\hbar^2}{2m}\Psi_{xx} + V\Psi,$$

donde \hbar es la conocida constante de Planck. En la teoría cuántica, la interpretación estadística de la ecuación nos dice que $|\Psi(t, x)|^2$ es la densidad de probabilidad asociada a la partícula en un punto dado y

$$\int_a^b |\Psi(t, x)|^2 dx$$

es la probabilidad de encontrarla entre los puntos a y b del espacio, a cierto tiempo t . Es posible simplificar las unidades del problema y considerar la ecuación

$$i\Psi_t + \Psi_{xx} = V\Psi.$$

A ella suelen añadirse términos adicionales, según el modelo físico que representen, siendo los más comunes aquellos que son lineales (como en el oscilador armónico o el átomo de hidrógeno). Sin embargo, es posible contemplar términos no lineales y entonces considerar una ecuación más general del tipo

$$i\Psi_t + \Psi_{xx} = F(\Psi)$$

donde F es una función no lineal (generalmente en forma de potencias) de la función de onda y sus derivadas, cuando esto ocurre decimos que estamos ante una ecuación de

Schrödinger no lineal. Este tipo de ecuación resulta interesante ya que aparece tanto en situaciones del tipo cuántico (por ejemplo en el condensado de Bose-Einstein, por medio de la ecuación de Gross-Pitájevski), como en modelos de óptica o mecánica de fluidos no directamente relacionados a la teoría cuántica (por ejemplo en ondas de agua sobre la superficie libre de un fluido ideal). Actualmente contamos con una extensa literatura referente a esta forma de la ecuación y se conoce una amplia gama de aplicaciones, destacando los fenómenos mencionados anteriormente además de los de propagación de ondas en medios no lineales o la incidencia de rayos láser en donde hay presencia de sensibilidad a la amplitud de onda (un capítulo entero dedicado a estos y otros fenómenos se encuentra en [1]), comúnmente en estos escenarios aparecen términos no lineales cúbicos que se presentan como $|\Psi|^2\Psi$. Cuando encontramos que la no linealidad de F está dada por términos cuadráticos de Ψ , su norma, sus derivadas o alguna combinación de ellas, decimos que estamos ante una **ecuación de Schrödinger no lineal cuadrática**. La investigación puramente teórica de este tipo de ecuaciones ha ganado cada vez más popularidad, realizándose cada vez más estudios sobre problemas bien planteados de las mismas y también del comportamiento a tiempo largo de sus soluciones (por ejemplo [2] y [3]). Ahora bien, lo más natural es pensar primero en términos cuadráticos en la forma de $\lambda\Psi^2$, con $\lambda \in \mathbf{C}$ (como en [2]). Nosotros nos interesaremos por un caso especial de la ecuación $i\Psi_t + \Psi_{xx} = -i\Psi^2$ que, mediante el cambio $u(t, x) = \overline{\Psi(t, x)}$, resultará conveniente expresar como

$$u_t + iu_{xx} = -u^2.$$

Hay diversas maneras de estudiar una ecuación como la recién obtenida, sabemos que debemos asignar primero condiciones iniciales y de frontera, además de establecer un dominio adecuado, posteriormente se propone encontrar una forma explícita de u en términos de funciones analíticas. La experiencia nos indica que lo último puede resultar prácticamente imposible y que hay que escoger bien el tipo de problema a resolver. Condiciones del tipo periódico vienen a la mente, pues éstas igualan o "pegan" los valores en los extremos, facilitando en ocasiones el trabajo, aparte de su frecuente aparición en la práctica; un **problema periódico** se define entonces como aquel en el que las condiciones iniciales y de frontera, tanto como las soluciones buscadas, son periódicas. Como sabemos, cuando ocurre que es complicado dar un algoritmo para la obtención de una solución explícita, establecer la existencia y unicidad de la solución en al menos un conjunto cerrado del dominio es el primero y más importante de los pasos. Posteriormente lo ideal es, con ello, buscar sus propiedades más importantes, dentro de las cuales destaca su comportamiento en el tiempo al infinito. Situación que se obtiene formalmente mediante el **análisis asintótico a tiempo largo**, el objetivo principal de este trabajo. A lo largo de nuestra investigación, utilizaremos la definición típica de la notación O grande del análisis asintótico: decimos que $f(t) = O(g(t))$, cuando $t \rightarrow \infty$, siempre que exista un número real $C > 0$ de modo que

$$|f(t)| \leq C|g(t)|$$

para todo $t \geq 0$. La definición general y más información sobre el tema se puede encontrar en [4], a nosotros nos bastará lo recién enunciado. Hasta aquí, hemos expuesto el tipo de problema en el que estamos interesados, es momento de plantearlo.

Consideremos el problema periódico para la ecuación de Schrödinger no lineal cuadrática

$$\begin{cases} u_t + iu_{xx} = -u^2, & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ u(0, x) = \phi(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

donde $\Omega = [-\pi, \pi]$. Asumimos que la condición inicial $\phi(x)$ es una función 2π periódica y estudiamos las soluciones que satisfacen la condición de frontera $u(t, x) = u(t, x + 2\pi)$ para toda $x \in \mathbb{R}$ y $t > 0$.

El comportamiento asintótico a tiempo largo de las soluciones periódicas de una gran variedad de ecuaciones de evolución no lineales se encuentra en [5] y [6]. La presente investigación tiene como objetivo hacer un desarrollo más adecuado y preciso de [7], realizando las modificaciones pertinentes para obtener el perfil asintótico de las soluciones de (1.1). En el Lema 1 de [7] (que es la base de la construcción del análisis asintótico del problema) se establece que, dado el problema de Cauchy

$$y'(t) = -y^2(t) + R(t), \quad y(0) = \varepsilon e^{i\varphi},$$

con $\varepsilon > 0$ y $\varphi \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, si $T, C > 0$ y $|R(t)| \leq C\varepsilon^4(1 + \varepsilon t)^{-4}$ para toda $t \in (0, T]$, entonces la estimación para las soluciones de dicho problema está dada por

$$\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon t} < |y(t)| < \frac{4\varepsilon}{1 + \varepsilon t}$$

para toda $t \in (0, T]$. Sin embargo, es posible proponer como contra ejemplo el caso en que $R(t) = 0$ para todo $t \in (0, T]$. En tal situación, la solución del problema de Cauchy

$$y'(t) = -y^2(t), \quad y(0) = \varepsilon,$$

(que cumple las hipótesis del lema para cualquier $\varepsilon > 0$ y $y(0) = \varepsilon e^{i\varphi}$, con $\varphi = 0$) es $y(t) = \varepsilon(1 + \varepsilon t)^{-1}$, que contradice la cota inferior para la norma de las soluciones, pues $\varepsilon(1 + \varepsilon t)^{-1} = |y(t)|$ para todo $t > 0$, contrario a la desigualdad estricta enunciada sobre el intervalo $(0, T]$. Así pues, proponemos ahora en el Lema 1 considerar el intervalo completo $[0, T]$ y ajustar las estimaciones para la norma de las soluciones de la siguiente manera

$$\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon t} - \frac{\varepsilon^2}{(1 + \varepsilon t)^2} < |y(t)| < \frac{2\varepsilon}{1 + \varepsilon t}$$

para toda $t \in [0, T]$, que elimina el problema y nos permite acercarnos incluso un poco más por la derecha, dejando el resto del lema intacto. Como se verá en la Sección 2.1 y a lo largo de todo el trabajo, la modificación es mínima pero significativa. Se sigue el mismo procedimiento pero es necesario hacer ajustes en cada lema, resultando en el nuevo perfil asintótico de las soluciones de (1.1) para tiempo largo que se presenta en el Teorema 1, que si bien permite más libertad respecto de aquel propuesto en [7], resulta más adecuado. Nuestro propósito es mostrar las condiciones suficientes en las que dicho comportamiento está determinado por la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{dv(t)}{dt} = -v^2(t), \quad v(0) = \varepsilon,$$

cuya solución es $v(t) = \varepsilon(1 + \varepsilon t)^{-1}$. Como veremos, será posible reducir las estimaciones de la ecuación diferencial parcial a estimaciones de tal ecuación diferencial ordinaria más un término de corrección, todo ello gracias al uso de las series de Fourier y estimaciones a priori.

Prestemos atención a la siguiente notación. Denotamos al espacio de Sobolev para el caso de funciones periódicas mediante

$$\mathbf{H}^s(\Omega) = \left\{ \phi \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \|\phi\|_{\mathbf{H}^s}^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle k \rangle^{2s} |\hat{\phi}_k|^2 < \infty \right\}$$

para $s \geq 0$, donde $\langle k \rangle = \sqrt{1 + k^2}$ y $\hat{\phi}_k = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} e^{-ikx} \phi(x) dx$ es el k -ésimo coeficiente de Fourier de la función periódica $\phi(x)$ de periodo 2π , de manera que

$$\phi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{\phi}_k e^{ikx}.$$

En $\mathbf{L}^2(\Omega)$ la identidad de Parseval establece que $\|\phi\|_{\mathbf{L}^2}^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}_k|^2$. Similarmente, como $\partial_x \phi = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\partial_x \phi)_k e^{ikx}$ e integrando por partes

$$(\partial_x \hat{\phi})_k = \frac{1}{2\pi} e^{-ikx} \phi(x) \Big|_{-\pi}^{\pi} + ik \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(x) e^{-ikx} dx = ik \hat{\phi}_k,$$

se tiene que $\|\partial_x \phi\|_{\mathbf{L}^2}^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2 |\hat{\phi}_k|^2$. De donde, en el caso $s = 1$,

$$\|\phi\|_{\mathbf{H}^1}^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle k \rangle^2 |\hat{\phi}_k|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}_k|^2 + k^2 |\hat{\phi}_k|^2 = \|\phi\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\partial_x \phi\|_{\mathbf{L}^2}^2.$$

Escribimos entonces

$$\mathbf{H}^1(\Omega) = \left\{ \phi \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \|\phi\|_{\mathbf{H}^1}^2 = \|\phi\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\partial_x \phi\|_{\mathbf{L}^2}^2 < \infty \right\}.$$

Introducimos también el espacio de Sobolev homogéneo

$$\dot{\mathbf{H}}^s(\Omega) = \left\{ \phi \in \mathbf{H}^s(\Omega) : \hat{\phi}_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \phi(x) dx = 0 \right\}$$

y el espacio de Lebesgue homogéneo $\dot{\mathbf{L}}^2(\Omega) = \left\{ \phi \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \hat{\phi}_0 = 0 \right\}$, de modo que

$$\|\phi\|_{\dot{\mathbf{H}}^s}^2 = \sum_{|k| \geq 1} \langle k \rangle^{2s} |\hat{\phi}_k|^2.$$

Es importante notar que si $\phi \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, entonces $\phi - \hat{\phi}_0 \in \dot{\mathbf{H}}^1(\Omega)$ y siempre es posible considerar la norma $\|\phi\|_{\dot{\mathbf{H}}^1}$, mediante la relación

$$\|\phi - \hat{\phi}_0\|_{\dot{\mathbf{H}}^1} = \sum_{|k| \geq 1} \langle k \rangle^2 |\widehat{(\phi - \hat{\phi}_0)}_k|^2 = \sum_{|k| \geq 1} \langle k \rangle^2 |\hat{\phi}_k|^2 = \|\phi\|_{\dot{\mathbf{H}}^1}.$$

Finalmente, de ahora en más, denotaremos mediante $\mathbf{C}(\mathbf{I}; \mathbf{B})$ al espacio de funciones continuas del intervalo \mathbf{I} al espacio de Banach \mathbf{B} . Una buena base para las propiedades de los espacios $\mathbf{L}^2(\Omega)$ y las series e integrales de Fourier se puede consultar en [8] y [9]. Elementos para entender a mayor profundidad los espacios de Sobolev se encuentran en [10] y [11].

La conclusión principal del presente trabajo es el siguiente

Teorema 1. *Consideremos la condición inicial $\phi \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, que satisface $\hat{\phi}_0 = \varepsilon e^{i\varphi}$, con $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, $\varphi \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ y $\|\phi\|_{\mathbf{H}^1} \leq \varepsilon^2$. Entonces existe una única solución $u \in \mathbf{C}([0, \infty); \mathbf{H}^1(\Omega))$ para el problema periódico (1.1). Además el comportamiento asintótico*

$$u(t, x) - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon t} = O\left(\varepsilon(1 + \varepsilon t)^{-(1+\gamma)}\right),$$

donde $\gamma = \frac{2}{3}$, se verifica cuando $t \rightarrow \infty$ uniformemente respecto a $x \in \Omega$.

Observación 1. *Del Teorema 1 se sigue que si escribimos a la solución en la forma $u(t, x) = |u(t, x)|e^{i\psi(t, x)}$, entonces*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t, x) = 0.$$

Observación 2. *Un ejemplo típico de una tal condición inicial es*

$$\phi(x) = \delta e^{-a\delta x^2}, \quad x \in \Omega, \quad a > 0,$$

con $\delta \sim \varepsilon$ y donde $\varphi = 0$.

De hecho, definiendo $F(\delta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-a\delta x^2} dx$,

$$\hat{\phi}_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(x) dx = \delta \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-a\delta x^2} dx = \delta F(\delta).$$

Claro que $F(\delta) \leq 1$. Del teorema del valor medio para integrales se sigue que existe $\xi \in \Omega$, tal que $e^{-a\delta\xi^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-a\delta x^2} dx = F(\delta)$. Entonces, para δ suficientemente pequeño,

$$\frac{1}{2} \leq e^{-a\delta\pi^2} \leq e^{-a\delta\xi^2} = F(\delta) \leq 1.$$

Luego $\lim_{\delta \rightarrow 0} \delta F(\delta) = 0$. Lo anterior nos permite hacer $\delta F(\delta) = \varepsilon$ y así $\hat{\phi}_0 = \varepsilon$. Para verificar la condición de la norma observemos que

$$\begin{aligned} \|\partial_x \phi\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} |\partial_x \phi(x)|^2 dx = 4a^4 \delta^4 \int_{-\pi}^{\pi} x^2 e^{-2a\delta x^2} dx \leq 4a^2 \delta^4 \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx \\ &= 4a^2 \delta^4 \frac{x^3}{3} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 4a^2 \delta^4 \left(\frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi^3}{3} \right) = a^2 \delta^4 \frac{8}{3} \pi^3. \end{aligned}$$

De la identidad $\delta F(\delta) = \varepsilon$, obtenemos $\delta^4 = \varepsilon^4 / F(\delta)^4$. También, si hacemos a tal que $a^2 \left(\frac{\varepsilon^4}{F(\delta)^4} \right) \frac{8}{3} \pi^3 = \frac{1}{2} \varepsilon^4$, o bien que $a^2 = \frac{1}{2} \frac{3}{8\pi^3} F^4(\delta)$, entonces $\|\partial_x \phi\|_{\mathbf{L}^2}^2 \leq \frac{1}{2} \varepsilon^4$. Así, $\|\phi\|_{\mathbf{H}^1} \leq \sqrt{2} \|\partial_x \phi\|_{\mathbf{L}^2} \leq \varepsilon^2$.

El trabajo está organizado de la siguiente manera. En la Capítulo 2, Sección 2.1, se encuentran estimaciones para el valor medio $\hat{u}_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t, x) dx$. Estimaciones a priori para las soluciones de (1.1) se encuentran en la Sección 2.2. Finalmente el Teorema 1 se demuestra en el Capítulo 3.

Capítulo 2

Estimaciones

2.1 Estimaciones para una ecuación diferencial ordinaria

En el siguiente lema estudiamos la estimación para las soluciones de la ecuación diferencial ordinaria

$$y'(t) = -y^2(t) + R(t), \quad t \geq 0. \quad (2.1)$$

Lema 1. *Supongamos, para (2.1), la condición inicial $y(0) = \varepsilon e^{i\varphi}$, con $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño y $\varphi \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$. Si $C, T > 0$ y $|R(t)| \leq C\varepsilon^4(1 + \varepsilon t)^{-4}$ para todo $t \in [0, T]$, entonces la estimación*

$$\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon t} - \frac{\varepsilon^2}{(1 + \varepsilon t)^2} < |y(t)| < \frac{2\varepsilon}{1 + \varepsilon t}$$

es cierta para toda solución de (2.1) y todo $t \in [0, T]$.

Demostración. Sea $y(t)$ solución de (2.1) que satisface la condición inicial requerida. Escribimos $y(t) = r(t)e^{i\psi(t)}$, con $r(t) = |y(t)|$, luego $y'(t) = r'(t)e^{i\psi(t)} + i\psi'(t)r(t)e^{i\psi(t)}$. Sustituyendo en (2.1) se tiene que

$$r'(t) + i\psi'(t)r(t) = -r^2(t)e^{i\psi(t)} + R(t)e^{-i\psi(t)};$$

o bien, tomando partes real e imaginaria, que

$$\begin{aligned} r'(t) &= -r^2(t) \cos \psi(t) + \operatorname{Re}(R(t)e^{i\psi(t)}), \\ \psi'(t) &= -r(t) \sin \psi(t) + \frac{1}{r(t)} \operatorname{Im}(R(t)e^{-i\psi(t)}). \end{aligned}$$

Probemos las estimaciones

$$\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon t} - \frac{\varepsilon^2}{(1 + \varepsilon t)^2} < r(t) < \frac{2\varepsilon}{1 + \varepsilon t}, \quad |\psi(t)| < \frac{\frac{\pi}{4} + \varepsilon}{(1 + \varepsilon t)^\gamma}, \quad (2.2)$$

con $\gamma = \frac{2}{3}$, para todo $t \in [0, T]$.

La afirmación es trivialmente cierta cuando $t = 0$. Para el caso $t \in (0, T]$, procedemos por contradicción. Por continuidad de $r(t)$ y como $r(0) = \varepsilon$, consideremos a $T_0 \in (0, T]$, el primer tiempo en que (2.2) no se cumple. En cuyo caso ocurre alguna de las desigualdades

$$\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon t} - \frac{\varepsilon^2}{(1 + \varepsilon t)^2} \leq r(t) \leq \frac{2\varepsilon}{1 + \varepsilon t} \quad |\psi(t)| \leq \frac{\frac{\pi}{4} + \varepsilon}{(1 + \varepsilon t)^\gamma} \quad (2.3)$$

para todo $t \in [0, T_0]$. Antes que nada y considerando la hipótesis sobre la norma de $R(t)$, observe que

$$\begin{aligned} |Re(R(t)e^{-i\psi(t)})| &\leq C\varepsilon^2 \frac{(1 - \varepsilon)^2}{(1 - \varepsilon)^2} (1 + \varepsilon t)^{-2} \varepsilon^2 (1 + \varepsilon t)^{-2} \\ &\leq D \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon^2}{1 + \varepsilon t} \right)^2 \varepsilon^2 (1 + \varepsilon t)^{-2} \\ &\leq D \left(\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon t} - \frac{\varepsilon^2}{(1 + \varepsilon t)^2} \right)^2 \varepsilon^2 (1 + \varepsilon t)^{-2} \\ &\leq D |y(t)|^2 \varepsilon^2 (1 + \varepsilon t)^{-2} = Dr^2(t) \varepsilon^2 (1 + \varepsilon t)^{-2}, \end{aligned}$$

donde $D = C(1 - \varepsilon)^{-2}$ y la última desigualdad siendo consecuencia directa de la suposición hecha en (2.3). De forma análoga se consigue que

$$|Im(R(t)e^{-i\psi(t)})| \leq Dr^2(t) \varepsilon^2 (1 + \varepsilon t)^{-2}.$$

Luego

$$Re(R(t)e^{-i\psi(t)}) = Im(R(t)e^{-i\psi(t)}) = r^2(t) O(\varepsilon^2 (1 + \varepsilon t)^{-2}).$$

Obteniendo las nuevas expresiones

$$\begin{aligned} r'(t) &= -r^2(t) \cos \psi(t) + r^2(t) O(\varepsilon^2 (1 + \varepsilon t)^{-2}), \\ \psi'(t) &= -r(t) \sin \psi(t) + O(\varepsilon^3 (1 + \varepsilon t)^{-3}), \end{aligned}$$

que son de utilidad para contradecir (2.3).

Primero atacamos las desigualdades correspondientes a la norma de las soluciones. Por un lado, puesto que $|\psi(t)| \leq \frac{\pi}{4} + \varepsilon$ y, para ε pequeño, $1/2 \leq \cos(\frac{\pi}{4} + \varepsilon) \leq \cos \psi(t)$, entonces

$$r'(t) \leq -\frac{1}{2} r^2(t) + r^2(t) O(\varepsilon^2 (1 + \varepsilon t)^{-2}).$$

Integrando de cero a $t \leq T_0$,

$$\int_0^t \frac{1}{r^2(\tau)} dr \leq \int_0^t \left[-\frac{1}{2} + O(\varepsilon^2 (1 + \varepsilon \tau)^{-2}) \right] d\tau;$$

obtenemos

$$-\frac{1}{r(t)} + \frac{1}{\varepsilon} \leq -\frac{1}{2}t + O(\varepsilon).$$

Es decir

$$r(t) \leq \frac{\varepsilon}{1 + \frac{1}{2}\varepsilon t + O(\varepsilon^2)}.$$

Claramente, para un ε adecuado, $1 + \varepsilon t < 2 + \varepsilon t + O(\varepsilon^2)$, entonces

$$r(t) < \frac{2\varepsilon}{1 + \varepsilon t}$$

para cada $t \in [0, T_0]$. Por otro lado, debido a que $\cos \psi \leq 1$,

$$-r^2(t) + r^2(t)O(\varepsilon^2(1 + \varepsilon t)^{-2}) \leq r'(t),$$

y simplificando para $r(t)$ e integrando nuevamente de cero a $t \leq T_0$, resulta en

$$\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon t + O(\varepsilon^2)} \leq r(t).$$

Tomando el ε correcto $O(\varepsilon^2) < \varepsilon$, después

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon t}\right)(1 + \varepsilon t + O(\varepsilon^2)) = 1 + \varepsilon t - \varepsilon + O(\varepsilon^2) < 1 + \varepsilon t,$$

esto es

$$\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon t} - \frac{\varepsilon^2}{(1 + \varepsilon t)^2} < r(t)$$

siempre que $t \in [0, T_0]$. Entonces

$$\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon t} - \frac{\varepsilon^2}{(1 + \varepsilon t)^2} < r(t) < \frac{2\varepsilon}{1 + \varepsilon t} \quad (2.4)$$

para todo $t \in [0, T_0]$.

Para $\psi(t)$, recordemos que $\psi(0) \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$. Asumiendo que $0 < \psi(0) \leq \frac{\pi}{4}$, existe $\delta > 0$ tal que $\delta \frac{\pi}{4} \leq \psi(0) \leq \frac{\pi}{4}$ y, como $(1 + \varepsilon t)^\gamma \leq (1 + \varepsilon t)$, por continuidad podemos tomar $T_1 \in [0, T]$ de modo que

$$\delta \frac{\pi}{4} \leq \psi(t) \leq \frac{\pi}{4} + \varepsilon$$

para todo $t \in [0, T_1]$. Además,

$$|\sin \psi - \psi| \leq \frac{1}{3!}|\psi|^3 + \frac{1}{5!}|\psi|^5 + \dots \leq \frac{1}{2^2} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \dots\right) |\psi|^3 \leq \frac{1}{3}|\psi|^3.$$

En el caso actual siempre ocurre que $0 < \psi(t)$, después $-(\sin \psi - \psi) \leq \frac{\psi^3}{3}$, entonces

$$\begin{aligned} \psi'(t) &= -r(t)\psi(t) - r(t)(\sin \psi(t) - \psi(t)) + O(\varepsilon^3(1 + \varepsilon t)^{-3}) \\ &\leq -r\psi(t) \left(1 - \frac{\psi^2(t)}{3}\right) + \delta \frac{\pi}{4} O(\varepsilon^3(1 + \varepsilon t)^{-2}) \\ &\leq -r(t)\psi(t) \left(1 - \frac{\psi^2(t)}{3}\right) + \psi(t)O(\varepsilon^3(1 + \varepsilon t)^{-2}). \end{aligned}$$

Obteniendo

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t)} \leq -r(t) \left(1 - \frac{\psi^2(t)}{3}\right) + O(\varepsilon^3(1 + \varepsilon t)^{-2}).$$

Ahora prestemos atención a que, como ε es pequeño a conveniencia, $\psi^2(t) \leq \frac{\pi}{4} + \varepsilon \leq 1$ para toda $t \in [0, T_1]$, después $2/3 \leq 1 - \psi^2(t)/3 \leq 1$. Si a ello agregamos la suposición hecha en (2.3) sobre $r(t)$, entonces

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t)} \leq -\frac{2}{3} \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon t} + \frac{2}{3} \frac{\varepsilon^2}{(1 + \varepsilon t)^2} + O(\varepsilon^3(1 + \varepsilon t)^{-2}).$$

Integrando de cero a $t \leq T_1$ y acotando la integral del segundo sumando obtenemos

$$\ln \frac{\psi(t)}{\psi(0)} \leq -\frac{2}{3} \ln(1 + \varepsilon t) + \frac{2}{3} \varepsilon + O(\varepsilon^2).$$

El paso siguiente es simplificar para $\psi(t)$. Antes debemos advertir lo siguiente: si $c_1 > 0$ es la constante que emerge de $O(\varepsilon^2)$, necesariamente ocurre que

$$e^{\frac{2}{3}\varepsilon + O(\varepsilon^2)} \leq 1 + \frac{2}{3}\varepsilon + c_1\varepsilon^2 + O\left(\left(\frac{2}{3}\varepsilon + c_1\varepsilon^2\right)^2\right) \leq 1 + \frac{2}{3}\varepsilon + c_0\varepsilon^2$$

para alguna $c_0 > 0$. Gracias a esto y tomando ε tan pequeño como para que la desigualdad $\frac{2}{3}\frac{\pi}{4}\varepsilon + \frac{\pi}{4}c_0\varepsilon^2 < \varepsilon$ se cumpla, podemos simplificar para $\psi(t)$ y verificar que

$$\psi(t) \leq \psi(0) \frac{e^{\frac{2}{3}\varepsilon + O(\varepsilon^2)}}{(1 + \varepsilon t)^\gamma} \leq \frac{\frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}\frac{\pi}{4}\varepsilon + \frac{\pi}{4}c_0\varepsilon}{(1 + \varepsilon t)^\gamma} < \frac{\frac{\pi}{4} + \varepsilon}{(1 + \varepsilon t)^\gamma},$$

siendo $\gamma = \frac{2}{3}$. Esto es

$$\psi(t) < \frac{\frac{\pi}{4} + \varepsilon}{(1 + \varepsilon t)^\gamma}$$

para todo $t \in [0, T_1]$. Análogamente, si asumimos que $-\pi/4 \leq \psi(0) \leq 0$, por continuidad existe $T_2 \in [0, T]$ y $\mu > 0$ tal que

$$-\frac{\frac{\pi}{4} + \varepsilon}{(1 + \varepsilon t)^\gamma} < -\mu \frac{\frac{\pi}{4}}{(1 + \varepsilon t)} \leq \psi(t)$$

para todo $t \in [0, T_2]$. En este caso $0 \leq \sin \psi - \psi \leq -\psi^3/3$ y así

$$\begin{aligned} \psi'(t) &\geq -r(t)\psi(t) + r(t) \frac{\psi^3(t)}{3} + \mu \frac{\frac{\pi}{4}}{1 + \varepsilon t} O(\varepsilon^3(1 + \varepsilon t)^{-2}) \\ &\geq -r(t)\psi(t) \left(1 - \frac{\psi^2(t)}{3}\right) - \psi(t) O(\varepsilon^3(1 + \varepsilon t)^{-2}). \end{aligned}$$

De nuevo, la libertad sobre ε nos permite garantizar para todo $t \in [0, T_2]$ la desigualdad $2/3 \leq 1 - \psi^2(t)/3 \leq 1$. Si junto a ello consideramos (2.3), entonces

$$\psi'(t)/\psi(t) \geq -2 \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon t} + O(\varepsilon^3(1 + \varepsilon t)^{-2}).$$

Ahora bien, antes de simplificar para $\psi(t)$ pongamos atención al hecho de que, para alguna constante $c_0 > 0$, se tiene que $e^{O(\varepsilon^2)} \leq 1 + c_0\varepsilon^2 \leq 1 + \varepsilon + c_0\varepsilon^2$. De esta manera, integrando de cero a $t \leq T_2$, resolviendo para $\psi(t)$ y como $-\pi/4 \leq \psi(0)$, obtenemos

$$\psi(t) \geq \psi(0) \frac{1}{(1 + \varepsilon t)^2} e^{O(\varepsilon^2)} \geq -\frac{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\varepsilon + \frac{\pi}{4}c_0\varepsilon^2}{(1 + \varepsilon t)^2} > -\frac{\frac{\pi}{4} + \varepsilon}{(1 + \varepsilon t)^2};$$

habiendo tomado ε tal que $\frac{\pi}{4}\varepsilon + \frac{\pi}{4}c_0\varepsilon^2 < \varepsilon$. Finalmente, puesto que $\gamma \leq 1$ y por consiguiente $(1 + \varepsilon t)^\gamma < (1 + \varepsilon t)^2$, entonces

$$\psi(t) > -\frac{\frac{\pi}{4} + \varepsilon}{(1 + \varepsilon t)^\gamma}$$

siempre que $t \in [0, T_2]$. Arribamos pues a que

$$|\psi(t)| < \frac{\frac{\pi}{4} + \varepsilon}{(1 + \varepsilon t)^\gamma} \quad (2.5)$$

para todo $t \in [0, T_2]$.

En conclusión, si escogemos $T^* = \min[T_0, T_1, T_2]$, (2.4) y (2.5) son válidas para todo $t \in [0, T^*]$, constituyendo una contradicción de (2.3). Lo que demuestra el lema. \square

Enseguida obtenemos el comportamiento asintótico a tiempo largo de las soluciones de (2.1).

Lema 2. *Supongamos, para (2.1), la condición inicial $y(0) = \varepsilon e^{i\varphi}$, con $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño y $\varphi \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$. Si $C > 0$ y $|R(t)| \leq C\varepsilon^4(1 + \varepsilon t)^{-4}$ para todo $t \geq 0$. Entonces el comportamiento asintótico para las soluciones de (2.1)*

$$y(t) - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon t} = O\left(\varepsilon(1 + \varepsilon t)^{-(1+\gamma)}\right),$$

con $\gamma = \frac{2}{3}$, es cierto cuando $t \rightarrow \infty$.

Demostración. Sea $y(t)$ solución de (2.1) que satisface la condición inicial requerida. Como en el Lema 1, escribimos $y(t) = r(t)e^{i\psi(t)}$ y obtenemos

$$r'(t) = -r^2(t) \cos \psi(t) + r^2(t)O(\varepsilon^2(1 + \varepsilon t)^{-2})$$

para cada $t \geq 0$. También en (2.2) podemos ver que $\psi(t) = O((1 + t)^{-\gamma})$, cuando $t \rightarrow \infty$. Además

$$|\cos \psi - 1| = \frac{1}{2}\psi^2 + \frac{1}{4!}\psi^4 + \dots \leq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \dots\right)\psi^2 \leq \frac{2}{3}\psi^2,$$

consecuentemente $-(1 + O((1 + t)^{-2\gamma})) \leq -\cos \psi \leq -(1 - O((1 + t)^{-2\gamma}))$. Luego

$$r'(t) = -r^2(t)[1 + O((1 + t)^{-2\gamma})] + r^2(t)O((1 + t)^{-2}),$$

o bien, gracias a que $(1 + t)^{2\gamma} \leq (1 + t)^2$ y a la notación O grande,

$$r'(t)/r^2(t) = -1 + O((1 + t)^{-2\gamma})$$

para $t \rightarrow \infty$. Tomemos $t \geq 0$. Integrando de cero a t obtenemos

$$-\frac{1}{r(t)} + \frac{1}{\varepsilon} = -t + O(1),$$

o lo que es igual

$$r(t) = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon t + O(\varepsilon)}.$$

Entonces

$$r(t) - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon t} = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon t + O(\varepsilon)} - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon t} = \frac{O(\varepsilon^2)}{(1 + \varepsilon t)(1 + \varepsilon t + O(\varepsilon))}.$$

Tomando $\beta > 0$ tal que $1 + \varepsilon t \leq \beta(1 + \varepsilon t + \varepsilon O(1))$, establecemos

$$r(t) - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon t} = O\left(\frac{\varepsilon^2}{(1 + \varepsilon t)^2}\right)$$

para $t \rightarrow \infty$.

El Lema 1 implica que

$$|\psi(t)| < \frac{\frac{\pi}{4} + \varepsilon}{(1 + \varepsilon t)^\gamma}$$

para todo $t \geq 0$. Por desigualdad triangular

$$\begin{aligned} \left|y(t) - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon t}\right| &\leq \left|r(t) - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon t}\right| + \left|y(t) - r(t)\right| \\ &\leq \left|r(t) - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon t}\right| + r(t)|e^{i\psi(t)} - 1| \\ &\leq \left|r(t) - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon t}\right| + r(t)|\psi(t)| \end{aligned}$$

y la notación O grande provee $A, \beta > 0$ tales que

$$\begin{aligned} \left|y(t) - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon t}\right| &\leq \frac{A\varepsilon^2}{(1 + \varepsilon t)^2} + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon t + \varepsilon O(1)} \frac{\frac{\pi}{4} + \varepsilon}{(1 + \varepsilon t)^\gamma} \\ &\leq \frac{A\varepsilon^2}{(1 + \varepsilon t)^2} + \frac{\beta\varepsilon}{1 + \varepsilon t} \frac{\frac{\pi}{4} + \varepsilon}{(1 + \varepsilon t)^\gamma} \\ &\leq \frac{A\varepsilon^2}{(1 + \varepsilon t)^{1+\gamma}} + \frac{\beta\frac{\pi}{4}\varepsilon}{(1 + \varepsilon t)^{1+\gamma}} + \frac{\beta\varepsilon^2}{(1 + \varepsilon t)^{1+\gamma}} \end{aligned}$$

para t grande, pues $1 + \gamma < 2$. Por tanto

$$y(t) - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon t} = O\left(\varepsilon(1 + \varepsilon t)^{-(1+\gamma)}\right)$$

cuando $t \rightarrow \infty$, que es lo que se pedía. □

2.2 Estimaciones a priori del sistema

Primero declaramos la existencia local de las soluciones para el problema periódico (1.1). La prueba sigue un procedimiento bien conocido para mostrar la existencia y unicidad local de la solución mediante una solución débil del problema y el uso del principio de contracción de Banach sobre esta, un ejemplo de este procedimiento se puede consultar en [6].

Teorema 2. *Supongamos, para (1.1), la condición inicial $\phi \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, de norma $\|\phi\|_{\mathbf{H}^1}$ suficientemente pequeña. Entonces existe un tiempo $T > 1$ tal que el problema periódico (1.1) posee una única solución $u \in \mathbf{C}([0, T]; \mathbf{H}^1(\Omega))$.*

Probamos en seguida para las soluciones locales de (1.1) una estimación uniforme con respecto a $T > 0$.

Lema 3. *Supongamos, para (1.1), la condición inicial $\phi \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ tal que su valor medio es $\hat{\phi}_0 = \varepsilon e^{i\varphi}$, con $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, $\varphi \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ y cuya norma homogénea cumple que $\|\phi\|_{\dot{\mathbf{H}}^1} \leq \varepsilon^2$. Si u es la solución declarada en el Teorema 2, entonces las estimaciones*

$$|\hat{u}_0(t)| < \frac{2\varepsilon}{1 + \varepsilon t}, \quad \|u\|_{\dot{\mathbf{H}}^1} < \frac{2\varepsilon^2}{(1 + \varepsilon t)^2},$$

son ciertas para todo $t \geq 0$.

Demostración. Sea u la solución de (1.1) declarada en el Teorema 2. De forma análoga al Lema 1, procedamos por contradicción y tomemos $T > 0$ el primer tiempo en que

$$|\hat{u}_0(t)| \leq \frac{2\varepsilon}{1 + \varepsilon t}, \quad \|u\|_{\dot{\mathbf{H}}^1} \leq \frac{2\varepsilon^2}{(1 + \varepsilon t)^2} \quad (2.6)$$

se cumple para todo $t \in [0, T]$. Antes que nada, representamos a u en su serie de Fourier:

$$u(t, x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{u}_n(t) e^{inx}, \quad \hat{u}_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t, x) e^{-inx} dx.$$

Sustituyendo en (1.1) obtenemos

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} [\hat{u}'_n(t) - in^2 \hat{u}_n(t)] e^{inx} = - \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{u}_n(t) e^{inx} \right)^2.$$

La parte derecha es

$$\begin{aligned} - \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{u}_n(t) e^{inx} \right)^2 &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{u}_l(t) \hat{u}_k(t) e^{ix(l+k)} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{u}_{n-k}(t) \hat{u}_k(t) e^{inx}, \end{aligned}$$

habiendo hecho $n = l + k$. Igualando con la parte izquierda y simplificando arribamos al sistema

$$\hat{u}'_n(t) - in^2 \hat{u}_n(t) = - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{u}_{n-k}(t) \hat{u}_k(t) \quad (2.7)$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$ y $t \geq 0$.

Concentrémonos primero en el estudio de la norma $|\hat{u}_0(t)|$. Haciendo $n = 0$ en (2.7) obtenemos

$$\hat{u}'_0(t) = -\hat{u}_0^2(t) + R_0(t),$$

con $R_0(t) = -\sum_{k \neq 0} \hat{u}_{-k}(t) \hat{u}_k(t)$, una ecuación diferencial ordinaria de la forma de (2.1). Queremos usar en ella el Lema 1. Esto es, veamos que $|R_0(t)| \leq C\varepsilon^4(1 + \varepsilon t)^{-4}$ para alguna $C > 0$, siempre que $t \in [0, T]$. Dado que $|\hat{u}_k(t)| = |\hat{u}_{-k}(t)|$, entonces $|R_0(t)| \leq \sum_{k \neq 0} |\hat{u}_k(t)|^2$. Luego, usando Parseval,

$$|R_0(t)| \leq \sum_{k \neq 0} |\hat{u}_k(t)|^2 \leq \sum_{k \neq 0} (1 + k^2) |\hat{u}_k(t)|^2 = \sum_{k \neq 0} \langle k \rangle^2 |\hat{u}_k(t)|^2 = \|u\|_{\dot{H}^1(\Omega)}^2.$$

Pero hemos supuesto que $\|u\|_{\dot{H}^1} \leq 2\varepsilon^2(1 + \varepsilon t)^{-2}$, por lo que $|R_0(t)| \leq 4\varepsilon^4(1 + \varepsilon t)^{-4}$ para todo $t \in [0, T]$. Así, por Lema 1, concluimos que

$$|\hat{u}_0(t)| < \frac{2\varepsilon}{1 + \varepsilon t} \quad (2.8)$$

para todo $t \in [0, T]$.

Veamos ahora qué ocurre con la norma $\|u\|_{\dot{H}^1}$. Definimos $v_n = \hat{u}_n e^{-in^2 t}$, entonces $v'_n(t) = [\hat{u}'_n(t) - in^2 \hat{u}_n(t)] e^{-in^2 t}$, o bien $v'_n(t) = -\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{u}_{n-k}(t) \hat{u}_k(t) e^{-in^2 t}$. Pero $\hat{u}_k = v_k e^{ik^2 t}$ y $\hat{u}_{n-k} = v_{n-k} e^{i(n-k)^2 t}$, sustituyendo

$$v'_n(t) = -\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{iF_{n,k} t} v_{n-k}(t) v_k(t),$$

donde $F_{n,k} = -in^2 + i(n-k)^2 + ik^2 = -2ik(n-k)$. Separando los términos que contienen a v_0 logramos que

$$v'_n(t) = -2\hat{u}_0(t) v_n(t) + R_n(t)$$

para cada $n \in \mathbb{Z}$, $t \geq 0$ y dónde $R_n = -\sum_{k \neq 0, n} e^{iF_{n,k} t} v_{n-k} v_k$. De esta forma

$$\frac{d}{dt} |v_n(t)|^2 = v'_n(t) \overline{v_n(t)} + v_n(t) \overline{v'_n(t)} = -4|v_n(t)|^2 \operatorname{Re}(\hat{u}_0) + 2\operatorname{Re}(R_n(t) \overline{v_n(t)}),$$

o bien

$$\frac{d}{dt} |v_n(t)|^2 = -4|v_n(t)|^2 \operatorname{Re}(\hat{u}_0) + 2\operatorname{Re}(R_n(t) \overline{v_n(t)}),$$

que multiplicando por $1 + n^2 = \langle n \rangle^2$ y sumando sobre n deviene en

$$\frac{d}{dt} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle n \rangle^2 |v_n(t)|^2 = -4\operatorname{Re}(\hat{u}_0) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle n \rangle^2 |v_n(t)|^2 + 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{Re}(\langle n \rangle^2 R_n(t) \overline{v_n(t)}).$$

Así, gracias a que $|v_n| = |\hat{u}_n|$ y a Parseval, logramos la expresión

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|_{\dot{H}^1}^2 = -4\operatorname{Re}(\hat{u}_0) \|u(t)\|_{\dot{H}^1}^2 + 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{Re}(\langle n \rangle^2 R_n(t) \overline{v_n(t)}) \quad (2.9)$$

para toda $t \geq 0$, una ecuación diferencial ordinaria similar a (2.1) para la norma de u .

Buscamos apoyarnos de nuevo en el Lema 1, concentrémonos en el último sumando de la ecuación recién obtenida (2.9). Para ello denotemos

$$w(t, x) = u(t, x) - \hat{u}_0(t) = \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} \hat{u}_n(t) e^{inx}.$$

Como

$$\begin{aligned} R_n &= - \sum_{k \neq 0, n} e^{iF_{n,k}t} v_{n-k} v_k = - \sum_{k \neq 0, n} e^{-2ik(n-k)} [\hat{u}_{n-k} e^{-i(n-k)^2 t}] [\hat{u}_k e^{-ik^2 t}] \\ &= - \sum_{k \neq 0, n} \hat{u}_{n-k} \hat{u}_k e^{-in^2 t} \end{aligned}$$

es cierto para toda $n \in \mathbb{Z}$, se consigue que $R_n e^{in^2 t} = - \sum_{k \neq 0, n} \hat{u}_{n-k} \hat{u}_k$. También notemos que $w^2 = \sum_{n \neq 0} \sum_{k \neq 0} \hat{u}_{n-k} \hat{u}_k e^{inx}$ y con ello $\widehat{w^2}_n = \sum_{k \neq 0, n} \hat{u}_{n-k} \hat{u}_k$. Por consiguiente

$$-R_n(t) e^{in^2 t} = \sum_{k \neq 0, n} \hat{u}_{n-k}(t) \hat{u}_k(t) = \widehat{w^2}_n(t, x).$$

Así, tomando valor absoluto, multiplicando por $\langle n \rangle^2$ y sumando sobre n a ambos extremos,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle n \rangle^2 |R_n(t)|^2 = \|w^2\|_{\mathbf{H}^1}^2.$$

Estudiamos ahora a $\|w^2\|_{\mathbf{H}^1}^2$. Claro que

$$\begin{aligned} \|w^2\|_{\mathbf{H}^1}^2 &= \|w^2\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\partial_x w^2\|_{\mathbf{L}^2}^2 = \|w^2\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|2w \partial_x w\|_{\mathbf{L}^2}^2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |w^2|^2 dx + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 4|w \partial_x w|^2 dx \\ &\leq \|w\|_{L^\infty}^2 \left(\|w\|_{\mathbf{L}^2}^2 + 4\|\partial_x w\|_{\mathbf{L}^2}^2 \right) \leq 4\|w\|_{L^\infty}^2 \|w\|_{\mathbf{H}^1}^2. \end{aligned}$$

Ahora bien, en vista de que $w = u - \hat{u}_0$ y $u \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, w es una función continua. Luego existe $x^* \in \Omega$ tal que $|w(t, x^*)| \leq |w(t, x)|$, para cada $x \in \Omega$ y podemos escribir $w(t, x) = w(t, x^*) + \int_{x^*}^x \partial_s w(t, s) ds$. Después

$$\begin{aligned} |w(t, x)| &\leq |w(t, x^*)| + \int_{x^*}^x |\partial_s w(t, s)| ds \leq |w(t, x^*)| + \int_{-\pi}^{\pi} |\partial_x w(t, x)| dx \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |w(t, x^*)| dx + \int_{-\pi}^{\pi} |\partial_x w(t, x)| dx \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |w(t, x)| dx + \int_{-\pi}^{\pi} |\partial_x w(t, x)| dx \\ &\leq \sqrt{2\pi} \left(\|w\|_{\mathbf{L}^2} + \|\partial_x w\|_{\mathbf{L}^2} \right) \end{aligned}$$

(esto último usando Cauchy-Schwartz). Tomando cuadrados y el supremo sobre Ω en ambos extremos obtenemos $\|w\|_{L^\infty}^2 \leq 2\pi \left(\|w\|_{\mathbf{L}^2} + \|\partial_x w\|_{\mathbf{L}^2} \right)^2$. Pero para escalares siempre ocurre que $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$, entonces $\|w\|_{L^\infty}^2 \leq 4\pi \left(\|w\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\partial_x w\|_{\mathbf{L}^2}^2 \right)$, o bien $\|w\|_{L^\infty}^2 \leq 4\pi \|w\|_{\mathbf{H}^1}^2$. Sustituyéndolo más arriba en la desigualdad para $\|w^2\|_{\mathbf{H}^1}^2$ arribamos a

$$\|w^2\|_{\mathbf{H}^1}^2 \leq 16\pi \|w\|_{\mathbf{H}^1}^4 = 16\pi \|u\|_{\mathbf{H}^1}^4 \leq 16\pi \varepsilon^8 (1 + \varepsilon t)^{-8}.$$

Lo que concluye que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle n \rangle^2 |R_n(t)|^2 \leq 16\pi \varepsilon^8 (1 + \varepsilon t)^{-8}$$

para toda $t \in [0, T]$.

Volvamos a (2.9). En el último sumando, aplicando Hölder y la desigualdad recién establecida, vemos que

$$\begin{aligned}
2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{Re}(\langle n \rangle^2 R_n(t) \overline{v_n(t)}) &\leq 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\langle n \rangle R_n(t)| |\langle n \rangle \overline{v_n(t)}| \\
&\leq 2 \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle n \rangle^2 |R_n(t)|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle n \rangle^2 |v_n(t)|^2 \right)^{1/2} \\
&\leq 32\pi (\varepsilon^8 (1 + \varepsilon t)^{-8})^{1/2} (\|u\|_{\dot{\mathbf{H}}^1}^2)^{1/2} \\
&\leq 32\pi \varepsilon^4 (1 + \varepsilon t)^{-4} \|u\|_{\dot{\mathbf{H}}^1}.
\end{aligned}$$

Lo que en (2.9), después de todo este esfuerzo, se refleja como

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|_{\dot{\mathbf{H}}^1}^2 \leq -4 \operatorname{Re}(\hat{u}_0) \|u(t)\|_{\dot{\mathbf{H}}^1}^2 + \|u\|_{\dot{\mathbf{H}}^1} O(\varepsilon^4 (1 + \varepsilon t)^{-4})$$

para cada $t \in [0, T]$. Si prestamos atención, esto ya es bastante cercano a lo visto en la demostración del primer lema. Bastaría resolver la desigualdad

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|_{\dot{\mathbf{H}}^1} \leq -4 \operatorname{Re}(\hat{u}_0) \|u(t)\|_{\dot{\mathbf{H}}^1} + O(\varepsilon^4 (1 + \varepsilon t)^{-4}), \quad (2.10)$$

que surge al desarrollar la derivada perteneciente al miembro izquierdo. Sin embargo, el factor $\operatorname{Re}(\hat{u}_0)$ es problemático. Ello se soluciona recordando que, gracias a la hipótesis que induce la contradicción, $\hat{u}_0 = -\hat{u}_0^2 + R_0$, con $R_0 \leq 4\varepsilon^4 (1 + \varepsilon t)^{-4}$. Por Lema 1 tal cosa implica, expresando $\hat{u}_0(t) = |\hat{u}_0(t)| e^{i\psi(t)}$, que

$$\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon t} - \frac{\varepsilon^2}{(1 + \varepsilon t)^2} < |\hat{u}_0(t)| < \frac{2\varepsilon}{1 + \varepsilon t}, \quad |\psi(t)| < \frac{\frac{\pi}{4} + \varepsilon}{(1 + \varepsilon t)^\gamma},$$

con $\gamma = \frac{2}{3}$. Gracias a ello $\frac{1}{2} \leq \cos(\frac{\pi}{4} + \varepsilon) \leq \cos \psi(t)$ (pues ψ está dominada por una función decreciente y ε es suficientemente pequeño). Entonces

$$\frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon t} - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^2}{(1 + \varepsilon t)^2} < |\hat{u}_0(t)| \cos \psi(t) = \operatorname{Re}(\hat{u}_0),$$

de donde

$$-4 \operatorname{Re}(\hat{u}_0) \leq -2 \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon t} + 2 \frac{\varepsilon^2}{(1 + \varepsilon t)^2}.$$

Esto en (2.10) se ve como

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|_{\dot{\mathbf{H}}^1} \leq -2 \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon t} \|u(t)\|_{\dot{\mathbf{H}}^1} + 2 \frac{\varepsilon^2}{(1 + \varepsilon t)^2} \|u(t)\|_{\dot{\mathbf{H}}^1} + O(\varepsilon^4 (1 + \varepsilon t)^{-4})$$

para toda $t \in [0, T]$. Aprovechando la notación O grande podemos encontrar algo aún mejor. Para algún $C > 0$, por supuesto que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{\dot{\mathbf{H}}^1} &\leq -2 \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon t} \|u(t)\|_{\dot{\mathbf{H}}^1} + 2 \frac{\varepsilon^2}{(1 + \varepsilon t)^2} \|u(t)\|_{\dot{\mathbf{H}}^1} + C \frac{\varepsilon^4}{(1 + \varepsilon t)^4} \\ &\leq -2 \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon t} \|u(t)\|_{\dot{\mathbf{H}}^1} + 4 \frac{\varepsilon^4}{(1 + \varepsilon t)^4} + C \frac{\varepsilon^4}{(1 + \varepsilon t)^4} \\ &\leq -2 \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon t} \|u(t)\|_{\dot{\mathbf{H}}^1} + \frac{\varepsilon^3}{(1 + \varepsilon t)^4} \end{aligned}$$

(recordando que $\|u(t)\|_{\dot{\mathbf{H}}^1} \leq 2\varepsilon^2(1 + \varepsilon t)^{-2}$ y ε es libremente pequeño). En consecuencia llegamos a la expresión

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|_{\dot{\mathbf{H}}^1} \leq -2 \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon t} \|u(t)\|_{\dot{\mathbf{H}}^1} + \frac{\varepsilon^3}{(1 + \varepsilon t)^4},$$

que ahora sí es soluble. Multiplicando ambos miembros por $e^{2\varepsilon \int_0^t (1 + \varepsilon s)^{-1} ds}$, sucede que

$$\frac{d}{dt} \left(e^{2\varepsilon \int_0^t (1 + \varepsilon s)^{-1} ds} \|u(t)\|_{\dot{\mathbf{H}}^1} \right) \leq e^{2\varepsilon \int_0^t (1 + \varepsilon s)^{-1} ds} \varepsilon^3 (1 + \varepsilon t)^{-4}$$

para toda $t \in [0, T]$. Integrando de cero a $t \in [0, T]$,

$$e^{2\varepsilon \int_0^t (1 + \varepsilon s)^{-1} ds} \|u(t)\|_{\dot{\mathbf{H}}^1} - \|u(0)\|_{\dot{\mathbf{H}}^1} \leq \int_0^t e^{2\varepsilon \int_0^\tau (1 + \varepsilon s)^{-1} ds} \varepsilon^3 (1 + \varepsilon \tau)^{-4} d\tau.$$

Por hipótesis $\|u(0)\|_{\dot{\mathbf{H}}^1} = \|\phi\|_{\dot{\mathbf{H}}^1} \leq \varepsilon^2$, luego

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{\dot{\mathbf{H}}^1} &\leq \varepsilon^2 e^{-2\ln(1 + \varepsilon t)} + e^{-2\ln(1 + \varepsilon t)} \int_0^t e^{2\ln(1 + \varepsilon \tau)} \varepsilon^3 (1 + \varepsilon \tau)^{-4} d\tau, \\ &\leq \varepsilon^2 (1 + \varepsilon t)^{-2} + \varepsilon^2 (1 + \varepsilon t)^{-2} \int_0^t \varepsilon (1 + \varepsilon \tau)^{-2} d\tau, \\ &\leq \varepsilon^2 (1 + \varepsilon t)^{-2} + \varepsilon^2 (1 + \varepsilon t)^{-2} \left(1 - (1 + \varepsilon t)^{-1} \right) \\ &\leq \varepsilon^2 (1 + \varepsilon t)^{-2} [2 - (1 + \varepsilon t)^{-1}] < 2\varepsilon^2 (1 + \varepsilon t)^{-2} \end{aligned}$$

es decir,

$$\|u(t)\|_{\dot{\mathbf{H}}^1} < 2\varepsilon^2 (1 + \varepsilon t)^{-2} \tag{2.11}$$

para toda $t \in [0, T]$, lo que en conjunto con (2.8) constituye una contradicción. El Lema 3 está probado. \square

Capítulo 3

Prueba del Teorema 1

Culminemos el camino. Fijamos, para el problema periódico (1.1), la condición inicial $\phi \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ y a su promedio como $\hat{\phi}_0 = \varepsilon e^{i\varphi}$, donde $\varepsilon > 0$ es pequeño a voluntad y $\varphi \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$. Además, también decretamos la desigualdad $\|\phi\|_{\dot{\mathbf{H}}^1} \leq \varepsilon^2$. La primera parte del Teorema es consecuencia directa de observar que

$$\|\phi\|_{\mathbf{H}^1}^2 = |\hat{\phi}_0|^2 + \|\phi\|_{\dot{\mathbf{H}}^1}^2 \leq 2\varepsilon^2 = \varepsilon_0^2,$$

con $\varepsilon_0 > 0$ tan pequeño como queramos, ya que el Teorema 2 establece la existencia de un tiempo $T > 1$ tal que el problema periódico (1.1) posee una única solución $u \in \mathbf{C}([0, T]; \mathbf{H}^1(\Omega))$. La existencia de $u \in \mathbf{C}([0, \infty); \mathbf{H}^1(\Omega))$ se tiene a razón de un argumento estándar de continuación, encontrando la solución débil del sistema y usando el principio de contracción de Banach sobre esta en intervalos que cubren al espacio requerido (para teoría y ejemplos de este procedimiento véanse [12], [6] y [13]). Una vez establecida la solución para todo tiempo no negativo, podemos escribir a u en su serie compleja de Fourier: $u(t, x) = \hat{u}_0(t) + \sum_{k \neq 0} \hat{u}_k(t) e^{ikx}$. Gracias al Lema 1, en Lema 3 se muestra el procedimiento para obtener la ecuación

$$\hat{u}'_0(t) = -\hat{u}_0^2(t) + R_0(t), \quad \hat{u}_0(0) = \varepsilon e^{i\varphi},$$

con $|R_0(t)| \leq 4\varepsilon^4(1 + \varepsilon t)^{-4}$ para todo $t \geq 0$. Lo que, por Lema 2, significa que

$$\hat{u}_0(t) - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon t} = O\left(\varepsilon(1 + \varepsilon t)^{-(1+\gamma)}\right),$$

con $\gamma = \frac{2}{3}$, es válido cuando $t \rightarrow \infty$. Así mismo, en Lema 3 se observa el desarrollo mediante el cual

$$\|u\|_{\dot{\mathbf{H}}^1} < \frac{2\varepsilon^2}{(1 + \varepsilon t)^2}$$

siempre que $t \geq 0$. Con todo lo anterior podemos afirmar que

$$u(t, x) - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon t} = \hat{u}_0(t) - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon t} + \sum_{k \neq 0} \hat{u}_k(t) e^{ikx} = O\left(\varepsilon(1 + \varepsilon t)^{-(1+\gamma)}\right),$$

con $\gamma = \frac{2}{3}$, cuando $t \rightarrow \infty$. Concluimos que el Teorema 1 es cierto.

Bibliografía

- [1] C. Sulem and P. L. Sulem, *The nonlinear Schrödinger equation: Self-focusing and wave collapse*. New York: Springer, 1999. [2](#)
- [2] I. Bejenaru and T. Tao, *Sharp well-posedness and ill-posedness results for a quadratic non-linear Schrödinger equation*. *Journal of Functional Analysis*, **233**(1), 228-259, 2006. [2](#)
- [3] N. Hayashi, T. Mizumachi, and P. I. Naumkin, *Time decay of small solutions to quadratic nonlinear Schrödinger equations in 3D*. *Differential Integral Equations* 16 (2) 159 - 179, 2003. [2](#)
- [4] N. G. De Bruijn, *Asymptotic methods in analysis*. Amsterdam: North-Holl. Publ. Co., 1958. [2](#)
- [5] N. Hayashi, P. I. Naumkin, and J. A. Rodríguez-Ceballos, *Asymptotics of solutions to the periodic problem for the nonlinear damped wave equation*. *NoDEA Nonlinear Differ. Equ. Appl.* **17**(3), 355-369, 2010. [3](#)
- [6] E. I. Kaikina, P. I. Naumkin, and I. A. Shishmarev, *Periodic problem for a model nonlinear evolution equation*. *Adv. Differ. Equ.* **7**(5), 581-616, 2002. [3](#), [11](#), [17](#)
- [7] N. Hayashi and P. I. Naumkin, *Large time asymptotics of solutions to the periodic problem for the quadratic nonlinear Schrödinger equation*. *NoDEA Nonlinear Differ. Equ. Appl.* **30**, 23, 2023. [3](#)
- [8] A. N. Kolmogorov and S. V. Fomin, *Elements of the theory of functions and functional analysis*. Moscow: Mir, 1982. [5](#)
- [9] L. Grafakos, *Classical Fourier analysis*. New York: Springer, 2014. [5](#)
- [10] J. R. Iorio and V. M. Iorio, *Fourier analysis and partial differential equations*. Cambridge: Camb. Univ. Press, 2001. [5](#)
- [11] G. B. Folland, *Real analysis: Modern techniques and its applications*. 2 ed., New York: Wiley-Intersci. Publ. Co., 1999. [5](#)
- [12] L. C. Evans, *Partial differential equations*. Providence: Am. Math. Soc., 1998. [17](#)
- [13] P. I. Naumkin and I. A. Shishmarev, *Nonlinear nonlocal equations in the theory of waves*. Providence: Am. Math. Soc. **133**, 1994. [17](#)

Formato de Declaración de Originalidad y Uso de Inteligencia Artificial

Coordinación General de Estudios de Posgrado
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo



A quien corresponda,

Por este medio, quien abajo firma, bajo protesta de decir verdad, declara lo siguiente:

- Que presenta para revisión de originalidad el manuscrito cuyos detalles se especifican abajo.
- Que todas las fuentes consultadas para la elaboración del manuscrito están debidamente identificadas dentro del cuerpo del texto, e incluidas en la lista de referencias.
- Que, en caso de haber usado un sistema de inteligencia artificial, en cualquier etapa del desarrollo de su trabajo, lo ha especificado en la tabla que se encuentra en este documento.
- Que conoce la normativa de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, en particular los Incisos IX y XII del artículo 85, y los artículos 88 y 101 del Estatuto Universitario de la UMSNH, además del transitorio tercero del Reglamento General para los Estudios de Posgrado de la UMSNH.

Datos del manuscrito que se presenta a revisión		
Programa educativo	Maestría en Ciencias Matemáticas	
Título del trabajo	Análisis asintótico a tiempo largo de las soluciones del problema periódico para la ecuación de Schrödinger no lineal cuadrática	
	Nombre	Correo electrónico
Autor/es	Carlos Enrique Rodríguez Tzintzun	cert.z
Director	Pavel Naumkin	pavelni@matmor.unam.mx
Codirector		
Coordinador del programa	Elmar Wagner	elmar.wagner@umich.mx

Uso de Inteligencia Artificial		
Rubro	Uso (sí/no)	Descripción
Asistencia en la redacción	si	Para corroborar la ortografía y el uso de signos de puntuación.

Formato de Declaración de Originalidad y Uso de Inteligencia Artificial

Coordinación General de Estudios de Posgrado
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo



Uso de Inteligencia Artificial		
Rubro	Uso (sí/no)	Descripción
Traducción al español	no	
Traducción a otra lengua	no	
Revisión y corrección de estilo	no	
Análisis de datos	no	
Búsqueda y organización de información	si	Para obtener más información sobre la definición, teoría y aplicaciones, junto con su respectiva bibliografía (debidamente consultada y corroborada), de las ecuaciones de Schrödinger no lineales. Incluyendo su versión cuadrática.
Formateo de las referencias bibliográficas	no	
Generación de contenido multimedia	no	
Otro	no	

Datos del solicitante	
Nombre y firma	Carlos Enrique Rodríguez Tzintzun
Lugar y fecha	Morelia, Michoacán, México a 20 de Mayo del 2025

Carlos Enrique Rodríguez Tzintzun

Análisis asintótico a tiempo largo de las soluciones del problema periódico para la ecuación de Schr

 Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Detalles del documento

Identificador de la entrega

trn:oid:::3117:461167368

Fecha de entrega

21 may 2025, 9:25 a.m. GMT-6

Fecha de descarga

21 may 2025, 9:27 a.m. GMT-6

Nombre de archivo

Análisis asintótico a tiempo largo de las soluciones del problema periódico para la ecuación de S....pdf

Tamaño de archivo

611.1 KB

24 Páginas




6764 Palabras

28.114 Caracteres

11% Overall Similarity


The combined total of all matches, including overlapping sources, for each database.

Top Sources

- 9%  Internet sources
- 7%  Publications
- 0%  Submitted works (Student Papers)

Integrity Flags

1 Integrity Flag for Review

-  **Replaced Characters**
222 suspect characters on 17 pages
Letters are swapped with similar characters from another alphabet.

Our system's algorithms look deeply at a document for any inconsistencies that would set it apart from a normal submission. If we notice something strange, we flag it for you to review.

A Flag is not necessarily an indicator of a problem. However, we'd recommend you focus your attention there for further review.