



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO
FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

**Herramientas de Modelado Matemático de Sistemas Periódicos
Aplicadas al Cálculo de Estado Estable y al Diseño de Controladores**

TESIS

Que para obtener el grado de
MAESTRO EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA ELÉCTRICA

presenta

José Alberto Álvarez Martín -

Asesor de Tesis

Dr. J. Jesús Rico Melgoza

Co-Asesor de Tesis

Dr. José Juan Rincón Pasaye

Morelia, Michoacán - Junio de 2012

Para Alberto, María Teresa, Lucía y Diego.

Agradecimientos

Todo el trabajo aquí contenido lo dedico completamente a mis padres y a mis hermanos. Gracias por haber ido conmigo a lo largo de este camino y por entender lo que esto significa.

Quiero agradecer a la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, en especial a su División de Estudios de Posgrado en Ingeniería Eléctrica, por todo el apoyo y las facilidades que me brindaron durante estos dos años.

Agradezco también al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por haber apoyado económicamente mis estudios de maestría.

Del mismo modo, agradezco enormemente a todos los que estuvieron involucrados en este proceso, a mis compañeros de clase y a mis profesores, por su constante intercambio de ideas y por sus comentarios. Particularmente agradezco al maestro Isidro Lázaro Castillo y al Dr. Juan Anzúrez Marín por sus valiosas aportaciones a este trabajo de tesis, por haberme contemplado en muchas de las actividades relacionadas con el posgrado y por todas sus palabras de aliento.

Agradezco de manera especial al Dr. José Juan Rincón Pasaye, ya que con su asesoría, sus conocimientos y su visión, pude concretar esta tesis de la mejor manera posible.

Por último, le doy las gracias al Dr. Jesús Rico Melgoza, por todos los conocimientos que compartió conmigo, por todas las horas que dedicó a mi trabajo y por haberme guiado a lo largo de este camino. Le agradezco también por haberme impulsado a llegar más lejos, a buscar siempre los mejores resultados y principalmente por ayudarme a entender lo que se tiene que hacer para lograrlo.

Resumen

Una gran variedad de problemas en la ingeniería pueden ser modelados mediante un sistema dinámico con coeficientes variantes con el tiempo. La recurrente aparición de este tipo de sistemas en problemas prácticos ha impulsado el desarrollo de técnicas para su análisis y eventual control. En esta tesis se presentan herramientas que permiten estudiar sistemas variantes con el tiempo que muestran un comportamiento periódico a través del uso de la teoría de sistemas lineales, particularmente la teoría de Floquet. La obtención del estado estable en convertidores electrónicos de potencia y el diseño de controladores en sistemas periódicos son temas de especial interés que son abordados mediante estas herramientas.

En primera instancia, se utiliza la herramienta conocida como la Descomposición de Floquet para encontrar una expresión analítica aproximada para el cálculo de estado estable en sistemas periódicos, haciendo énfasis en su aplicación a los convertidores electrónicos de potencia, habiendo seleccionado al convertidor elevador (Boost) y al resonante (single ended) como casos de estudio.

Por otro lado, se utiliza la transformación de Floquet-Lyapunov para convertir un sistema lineal variante con el tiempo en uno invariante, con la intención de diseñar controladores sobre el sistema transformado que permitan la estabilización del sistema original. Metodologías como la colocación de polos y el control óptimo son utilizadas para determinar las leyes de control implementadas.

Por último, se hace uso de la metodología de aproximación de sistemas no lineales mediante una sucesión de sistemas lineales variantes con el tiempo. Este método iterativo permite calcular leyes de control que estabilizan al sistema no lineal en lazo cerrado.

Las diferentes metodologías revisadas en esta tesis son alternativas viables para el tratamiento de los sistemas periódicos y variantes con el tiempo. Esto se hace evidente al utilizar casos de estudio que arrojan resultados positivos y que permiten ilustrar paso a paso los procedimientos, resaltando su efectividad.

Abstract

A wide variety of engineering problems can be modeled mathematically by means of a dynamical system with time varying coefficients. The constant emergence of this type of systems in practical problems has been the main reason for developing analysis and control methodologies for them. In this thesis, a group of tools intended for time varying systems with periodicity conditions is presented, having a strong foundation in the linear system theory, particularly in Floquet theory.

First, the Floquet Decomposition is used to find an analytical approximated expression to obtain the steady state in linear time varying periodic systems, making emphasis in power converters, specifically the Boost and Single Ended Resonant Converters are analyzed.

Also the Floquet-Lyapunov transformation is employed to convert a linear time varying system into an invariant one, with the purpose of designing controllers based on the transformed system that allow the stabilization of the original system. Procedures like pole placement and optimal control are used to obtain the control laws.

Finally, the approximation methodology for nonlinear systems through a series of linear time varying systems is used. This iterative method allows the computation of control laws that stabilize the nonlinear system.

The methodologies presented in this thesis are suitable for treating time varying and periodic systems. This becomes evident by applying them to particular case studies that allow a clear understanding of the overall procedure and where positive results are obtained, highlighting the effectivity of such methodologies.

Contenido

Dedicatoria	III
Agradecimientos	V
Resumen	VII
Abstract	IX
Contenido	XI
Lista de Figuras	XV
Lista de Tablas	XIX
Lista de Símbolos	XXI
1. Introducción	1
1.1. Introducción	2
1.2. Objetivos	3
1.2.1. Objetivo general	3
1.2.2. Objetivos particulares	4

1.3. Justificación	4
1.4. Estado del Arte	5
1.5. Aportaciones	9
1.6. Publicaciones	10
1.7. Descripción de Capítulos	11
2. Sistemas Lineales Periódicos y Teoría de Floquet	13
2.1. Sistemas Lineales Variantes con el Tiempo	14
2.1.1. Ejemplos de Sistemas Lineales Variantes con el Tiempo	15
2.2. Matriz de Transición	19
2.2.1. Respuesta Homogénea	19
2.2.2. Propiedades de la Matriz de Transición	19
2.2.3. Cálculo de la Matriz de Transición	20
2.2.3.1. Serie de Peano-Baker	21
2.2.3.2. Serie de Magnus	22
2.2.4. Respuesta Completa	24
2.3. Teoría de Floquet	26
2.3.1. Matriz de Monodromía	27
2.3.2. Descomposición de Floquet	27
2.3.3. Transformación de Floquet-Lyapunov	30

3. Cálculo de Estado Estable	35
3.1. Introducción	36
3.2. Convertidores Electrónicos como Sistemas Periódicos	37
3.3. Respuesta Completa de un Sistema Periódico	38
3.4. Casos de Estudio	42
3.4.1. Convertidor Elevador (Boost)	43
3.4.2. Convertidor Resonante (Single Ended)	49
4. Control de Sistemas Periódicos	57
4.1. Metodología de Control para Sistemas Periódicos	58
4.2. Casos de Estudio	62
4.2.1. Ecuación de Mathieu	62
4.2.2. Control del Ángulo en las Palas de un Rotor de Helicóptero	67
4.3. Colocación de Polos para Sistemas Lineales Variantes con el Tiempo	71
4.4. Comparación entre la Colocación de Polos y la Teoría de Floquet	73
5. Control Óptimo de Sistemas Periódicos	77
5.1. Control Óptimo en Sistemas Periódicos	78
5.2. Caso de Estudio: Control del Ángulo en las Palas de un Rotor de Helicóptero	80
6. Sistemas No Lineales y Aproximaciones Lineales Variantes con el Tiempo	85

6.1. Introducción	86
6.2. Aproximaciones Lineales Variantes con el Tiempo	86
6.3. Casos de Estudio	88
6.3.1. Sistema No Lineal Teórico	88
6.3.1.1. Estabilización Mediante la Teoría de Floquet	93
6.3.2. Modelo No Lineal de un Brazo Robótico de dos Articulaciones	95
7. Conclusiones	101
7.1. Conclusiones Generales	102
7.2. Trabajos Futuros	105
Referencias	107
Publicaciones	113

Lista de Figuras

2.1. Los cuatro elementos de la matriz de transición $\phi(t)$, mediante la serie de Magnus y su expresión exacta.	25
3.1. Diagrama esquemático de la configuración de un convertidor elevador tipo Boost.	43
3.2. Evolución de los elementos de la matriz $\phi(t)$ del convertidor Boost a través de un período T	45
3.3. Elementos de la matriz $P(t)$ del convertidor Boost a través de un período T	47
3.4. Comportamiento de $i_L(t)$ mediante el cálculo simbólico de estado estable y por simulación por fuerza bruta para el convertidor Boost.	48
3.5. Comparación basada en el número de armónicos considerados en el cálculo simbólico del estado estable para $i_L(t)$	48
3.6. Comportamiento de $i_L(t)$ y $v_C(t)$ mediante el cálculo simbólico de estado estable y por simulación por fuerza bruta para el convertidor Boost.	49
3.7. Diagrama esquemático de la configuración de un convertidor resonante tipo Single Ended.	50
3.8. Evolución de los elementos de la matriz $\phi(t)$ del convertidor Single Ended a través de un período T	52

3.9. Elementos de $P(t)$ para el convertidor resonante a través de un período T . . .	53
3.10. Comportamiento de $i_L(t)$ y $v_C(t)$ mediante el cálculo simbólico de estado estable y por simulación por fuerza bruta para el convertidor resonante. . .	54
3.11. Comparación basada en el número de armónicos considerados en el cálculo simbólico del estado estable para $v_C(t)$	55
4.1. Respuesta del sistema de la ecuación de Mathieu en lazo abierto ante una entrada de tipo escalón.	63
4.2. Elementos de la matriz $L(t)$, para la ecuación de Mathieu, a través de dos períodos T	64
4.3. Evolución en el tiempo de los elementos de la matriz $K(t)$ para la ecuación de Mathieu.	65
4.4. Evolución en el tiempo de la ley de control $u(t)$ calculada para la ecuación de Mathieu.	66
4.5. Evolución en el tiempo del sistema en lazo cerrado para la ecuación de Mathieu.	66
4.6. Diagrama de un rotor principal en un helicóptero.	68
4.7. Elementos de la matriz $L(t)$, para el rotor de un helicóptero, a través de dos períodos T	69
4.8. Evolución en el tiempo de los elementos de la matriz $K(t)$ para el sistema del rotor principal del helicóptero.	70
4.9. Comportamiento de la ley de control $u(t)$ para el sistema del rotor principal del helicóptero.	71
4.10. Respuesta del sistema en lazo cerrado para el sistema del rotor principal del helicóptero.	72
4.11. Comparación del estado β calculado a través de la teoría de Floquet y mediante Colocación de Polos.	75

4.12. Comparación del estado $\dot{\beta}$ calculado a través de la teoría de Floquet y mediante Colocación de Polos.	75
4.13. Comparación de las leyes de control calculadas a través de la teoría de Floquet y mediante Colocación de Polos.	76
5.1. Evolución en el tiempo de los elementos de la matriz $K(t)$ para el sistema del rotor principal del helicóptero utilizando una ley de control óptima. . .	81
5.2. Comportamiento de la ley de control óptima $u(t)$ para el sistema del rotor principal del helicóptero.	82
5.3. Respuesta del sistema en lazo cerrado con control óptimo para el sistema del rotor principal del helicóptero.	83
6.1. Respuesta de los estados del sistema, x_1 y x_2 , en lazo abierto ante una entrada de tipo escalón.	89
6.2. Respuesta de los estados del sistema, x_1 y x_2 , en lazo abierto ante una entrada de tipo escalón, obtenidos mediante el proceso iterativo.	90
6.3. Comparación del estado x_1 en lazo abierto, mediante el proceso iterativo y la linealización del sistema original.	91
6.4. Comparación del estado x_2 en lazo abierto, mediante el proceso iterativo y la linealización del sistema original.	91
6.5. Respuesta en lazo cerrado al aplicar la ley de control, $u(t) = -K(t)x(t)$, obtenida en la octava iteración.	92
6.6. Respuesta en lazo cerrado al aplicar la ley de control, $u(t) = -K(t)x(t)$, obtenida en la octava iteración mediante la transformación de Floquet-Lyapunov.	94
6.7. Respuesta en lazo cerrado al aplicar la ley de control, $u(t) = -K(t)x(t)$, obtenida en la octava iteración mediante la transformación de Floquet-Lyapunov y el control óptimo.	94

6.8. Respuesta de los estados del sistema x_1 , x_2 , x_3 y x_4 , en lazo abierto ante una entrada de tipo escalón.	97
6.9. Comparación del estado x_1 en lazo abierto, mediante el proceso iterativo (tres iteraciones) y la respuesta del sistema original.	97
6.10. Respuesta en lazo cerrado al aplicar la ley de control, $u(t) = -K(t)x(t)$, obtenida en la séptima iteración.	99
6.11. Evolución en el tiempo de la ley de control, $u(t) = -K(t)x(t)$, utilizada para estabilizar al sistema no lineal.	99
6.12. Comportamiento de la matriz de ganancias $K(t)$ en el tiempo.	100

Lista de Tablas

3.1. Parámetros de simulación para el convertidor elevador tipo Boost.	44
3.2. Parámetros de simulación para el convertidor resonante tipo Single Ended.	51

Lista de Símbolos

n	Orden del sistema.
t_0	Tiempo inicial.
t_f	Tiempo final.
$x(t)$	Vector de estados.
x_0	Vector de condiciones iniciales.
$u(t)$	Vector de entradas.
$v(t)$	Entrada de referencia.
$y(t)$	Vector de salidas.
$A(t)$	Matriz dinámica de coeficientes del sistema.
$B(t)$	Matriz de coeficientes para las entradas del sistema.
$C(t)$	Matriz de coeficientes para las salidas del sistema.
$\phi(t, t_0)$	Matriz de transición de estados.
T	Período fundamental.
I_n	Matriz identidad de orden n .

$P(t)$	Matriz periódica de la descomposición de Floquet.
R	Matriz constante de la descomposición de Floquet.
$z(t)$	Vector de estados transformados.
$\bar{z}(t)$	Vector de estados transformados del sistema auxilliar.
$L(t)$	Matriz periódica de la descomposición real de Floquet.
R_1	Matriz constante de la descomposición real de Floquet.
$x^{[i]}(t)$	Vector de estados en la i -ésima iteración.
$K(t)$	Matriz de ganancia variante con el tiempo.
λ	Valor propio o eigenvalor.
$f(t)$	Función de excitación.
$x_c(t)$	Solución complementaria.
$x_p(t)$	Solución particular.
$x_{ss}(t)$	Vector de estados en estado estable.
ω_0	Frecuencia angular fundamental.
h	Número de armónicos.
Z	Matriz correspondiente a los covariantes de Frobenius de la matriz R .
v_C	Voltaje en el capacitor C .
i_L	Corriente en el inductor L .
$s(t)$	Función de conmutación para el convertidor elevador tipo Boost.
$c(t)$	Función de conmutación para el convertidor resonante tipo Single Ended.
\bar{B}	Matriz de coeficientes para las entradas del sistema transformado.

\bar{K}	Matriz de ganancia invariante con el tiempo del sistema transformado.
$e(t)$	Función en el tiempo correspondiente al error.
B^*	Pseudoinversa de la matriz $B(t)$.
γ	Número de Lock.
μ	Tasa de avance.
ψ	Producto de la velocidad angular ω por el tiempo t .
β	Ángulo de la pala con respecto al plano de giro del rotor.
$u^*(t)$	Vector de entradas óptimas.

Capítulo 1

Introducción

En esta tesis se aborda el problema de análisis y control de sistemas variantes con el tiempo, haciendo énfasis en el caso periódico, utilizando herramientas matemáticas que mantienen, como eje central, las ideas fundamentales de la teoría de Floquet para sistemas lineales. Además, se hace uso de la metodología de aproximaciones sucesivas para sistemas no lineales usando sistemas lineales variantes en el tiempo.

Diferentes enfoques y procedimientos son utilizados en diversos casos de estudio correspondientes a la electrónica de potencia y a la mecánica, con la intención de validar su efectividad y para constatar la importancia de investigar y desarrollar aún más estas herramientas. En este capítulo se presenta una breve introducción al tema de los sistemas periódicos variantes con el tiempo, también se dan a conocer los objetivos de este trabajo de tesis y se hace un recuento cronológico de todos aquellos trabajos relacionados de manera directa con el contenido de este documento.

1.1. Introducción

El interés formal sobre los sistemas periódicos en los campos de la ciencia e ingeniería data desde el siglo diecinueve, siendo Faraday, Mathieu, Floquet, Rayleigh y Hill, los primeros en analizar de manera rigurosa este tipo de sistemas [Faraday31], [Mathieu68], [Floquet83], [Strutt83], [Hill68]. Aun cuando el análisis de estos sistemas ha sido estudiado desde hace bastante tiempo y que se han hecho contribuciones importantes a este campo durante los últimos años, es importante notar que la cantidad de herramientas disponibles hoy en día para el análisis y control de los sistemas periódicos, es menor en comparación con las ya bien conocidas y posicionadas herramientas en los sistemas invariantes con el tiempo. Muchos de estos resultados y herramientas no pueden ser utilizados comúnmente en los sistemas variantes con el tiempo; es decir, no siempre se pueden generalizar los resultados para que sean aplicables a ambos casos.

Es precisamente, la dependencia del tiempo, en los sistemas variantes con el tiempo, la característica que los ha distinguido de manera importante en cuanto a su complejidad. Los sistemas periódicos son parte del conjunto de sistemas variantes con el tiempo y a su vez, presentan condiciones de periodicidad que los hacen un caso de estudio particular. Todos ellos exhiben un comportamiento similar y es por esto que pueden ser considerados como un conjunto de sistemas bien delimitado dentro de los sistemas variantes.

Recientemente, en el estudio de los sistemas periódicos, se han detectado las ventajas al utilizar los resultados de una teoría consolidada por Gaston Floquet, llamada teoría de Floquet, en honor a este matemático francés. Sus resultados se ven reflejados en un grupo de herramientas para el correcto análisis y el subsecuente control de estos sistemas. Si bien, estos resultados fueron publicados en 1883 [Floquet83] y han estado presentes desde entonces, es hasta la segunda mitad del siglo veinte que estos han encontrado un verdadero auge en su aplicación.

Ya hemos mencionado el vasto estudio que se ha hecho de los sistemas invariantes con el

tiempo y de la amplia gama de técnicas de análisis y de control que actualmente existen, pero a lo anterior se debe de añadir que al modelar sistemas y procesos en el mundo real, comúnmente se llegan a obtener representaciones de sistemas variantes con el tiempo y además periódicos. Por ejemplo, muchos sistemas mecánicos trabajan en un régimen periódico en su estado estable, que puede ser reducido a un modelo lineal periódico, este es el caso de los mecanismos de levas en los motores y los rotores principales y de cola en los helicópteros. Por otro lado, los sistemas eléctricos de potencia, bajo ciertas condiciones, exhiben un comportamiento periódico, tal es el caso de los convertidores electrónicos de potencia, que en estado estable presentan oscilaciones con este tipo de características.

Debido a que los sistemas periódicos están presentes en nuestro entorno y a su creciente interés en diversos campos de la ingeniería, es que se vuelve importante contar con herramientas adecuadas para su estudio. Es por esto que en esta tesis se plantean enfoques que utilizan como eje central la teoría de Floquet para el análisis y control de este tipo de sistemas, conjuntando todo en varios casos de estudio que pertenecen a los campos de la electrónica de potencia y de la mecánica.

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo general

Investigar diferentes herramientas de análisis y control para sistemas dinámicos periódicos, tanto lineales como no lineales y validar su utilización, con casos de estudio específicos, en las problemáticas de cálculo de estado estable y control retroalimentado.

1.2.2. Objetivos particulares

Como objetivo particular se busca utilizar el enfoque de aproximaciones sucesivas para sistemas no lineales a partir de sistemas variantes con el tiempo y probar su efectividad mediante simulación. También, se desea validar cómo la descomposición de Floquet permite calcular el estado estable de los sistemas periódicos de manera efectiva, con especial interés en los convertidores de electrónica de potencia.

Por otro lado, se busca obtener controladores lineales para sistemas periódicos basados en la transformación de Floquet-Lyapunov que permitan estabilizar el sistema en cuestión. Se utilizan dos metodologías de diseño para obtener estos controladores: la colocación de polos y el control óptimo mediante un regulador cuadrático lineal.

Es importante mencionar que todos estos objetivos son validados a nivel de simulación mediante diversos casos de estudio.

1.3. Justificación

Las herramientas de análisis y control de sistemas periódicos, a través de la teoría de Floquet se han ido desarrollando desde hace ya bastante tiempo y cada día aparecen aplicaciones novedosas [Mollerstedt00] [Wooden07] en donde su utilización pone en evidencia su efectividad. En particular, los campos de la mecánica y la electrónica son los que ha sido beneficiados con la mayoría de estas aplicaciones, aunque existen trabajos en donde se reportan resultados en las ciencias químicas y económicas [Carias11] [Mouche93], entre otras. En ingeniería eléctrica existe un especial interés en este tipo de sistemas debido al creciente uso de convertidores electrónicos de potencia, los cuales resultan ser elementos casi omnipresentes en los sistemas eléctricos actuales.

1.4. Estado del Arte

En lo referente al desarrollo de las bases teóricas de los sistemas periódicos, podemos encontrar trabajos que han sido claves a lo largo de su historia. Estas publicaciones fueron claves para las subsecuentes aplicaciones de esta teoría y los conceptos ahí plasmados siguen siendo vigentes hasta nuestros días.

El primer trabajo relacionado con los sistemas periódicos fue publicado por el físico inglés Michael Faraday en 1831 [Faraday31], al experimentar con membranas vibratorias en contacto con fluidos, en donde se observa el fenómeno de resonancia paramétrica, que no es más que la variación de alguno de los parámetros del sistema que almacenan energía a una frecuencia específica. Este fenómeno producía pequeñas ondas sobre el líquido en cuestión. Estos trabajos de Faraday, llevaron a otro importante físico británico, Lord Rayleigh (John Strutt), a revisar los resultados durante 1883 y a repetir los experimentos con la intención de medir de manera precisa la frecuencia a la que se presentaba el fenómeno de resonancia, probando que los resultados de Faraday en realidad eran correctos [Strutt83]. Lord Rayleigh hizo énfasis en que las ondas se pueden excitar paraméricamente en una copa de vino, al pasar un dedo humedecido por la circunferencia de la copa se escucha un sonido característico y se observan ciertos wavelets, término que tanto Faraday como Rayleigh utilizaron para describir ondas pequeñas en la superficie del líquido. Fue también en esta época en la que Joseph Fourier publica su trabajo acerca de la propagación del calor en los sólidos [Fourier22], y es ahí donde se establecen los primeros resultados de descomponer funciones periódicas en una suma infinita de funciones senoidales y cosenoidales más simples, lo cual sentaría las bases para el análisis armónico. Esta herramienta es conocida hoy en día como la serie de Fourier.

Por otro lado, en 1860, el físico alemán Franz Melde indujo vibraciones en un cable estirado al variar su tensión de manera periódica [Melde60]. El fenómeno de resonancia paramétrica también fue observado en sus experimentos, siendo que fueron planeados para probar la

interferencia entre ondas mecánicas.

Fue hasta 1868 que un matemático francés, de nombre Émile Mathieu, realizó el primer trabajo detallado del estudio de los sistemas periódicos variantes con el tiempo [Mathieu68]. En este trabajo, se ataca el problema de los modos de vibración en los lagos que tienen fronteras de forma elíptica y se propone una ecuación en la que sus coeficientes son funciones dependientes del tiempo. Esta ecuación se haría bastante famosa ya que se ha utilizado para modelar diversos tipos de sistemas con comportamientos similares, un ejemplo reciente de esto es el modelado de un péndulo invertido de pivote vertical, reportado por Armando Neves [Neves06].

Poco tiempo después de las contribuciones de Mathieu, otro matemático francés, de nombre Gastón Floquet, introdujo en 1883 lo que actualmente se conoce como la teoría de Floquet. Esta teoría forma la base de muchas de las descripciones actuales de los sistemas lineales periódicos y es utilizada en diversos campos de la ingeniería [Floquet83]. Los resultados obtenidos por Floquet son parte fundamental de este trabajo de tesis y serán detallados en los capítulos subsecuentes.

Otro de los trabajos más importantes en el estudio del comportamiento de los sistemas periódicos, es el que hizo el matemático estadounidense George Hill en 1886. Es aquí donde por primera vez se establecen los fundamentos matemáticos acerca de la teoría de estabilidad en este tipo de sistemas. En este trabajo se plantea el concepto que hoy se conoce como el determinante infinito de Hill. La importancia de este trabajo radica en que fue la primera solución publicada de un problema real que involucraba un sistema periódico. En este caso, el problema que trataba de resolver era el de dar una descripción adecuada del movimiento de la luna en su órbita alrededor de la tierra, para lograrlo utilizó una ecuación diferencial con coeficientes periódicos que establecía el efecto de la influencia gravitacional del sol y de la misma luna en su movimiento [Hill68].

A partir de aquí, se mencionarán los resultados obtenidos ya a inicios del siglo veinte. El

trabajo del físico alemán Walter Meissner en 1918, sobre la estabilidad de las barras laterales en las locomotoras de esa época [Meissner18], es uno de los más importantes ya que parte del resultado fue la publicación de una ecuación con parámetros variantes con el tiempo (funciones rectangulares), que contaba la particularidad de tener una solución exacta. Esto como consecuencia de que se puede ver a esta ecuación como un conjunto de dos ecuaciones con coeficientes constantes alternando en ciertos intervalos de tiempo. Este resultado llevó a otros dos científicos del área de la mecánica cuántica, Ralph Kronig y George Penney, a publicar en 1931 el hecho de que habían resuelto la ecuación de Schrodinger a través de una función rectangular de energía potencial, reduciéndose así la ecuación a una de Meissner, creando la posibilidad de obtener una solución exacta. Esto permitió el cálculo exacto de las energías permitidas en los electrones de los cristales [Kronig31].

En 1959, Charles Desoer [Desoer59] y Alfred Fettweis [Fettweis59], publicaron algunos de los primeros trabajos importantes en el área de circuitos eléctricos, calculando el estado estable de circuitos con elementos variantes con el tiempo y con interruptores accionados periódicamente. En 1961, Stephen Timoshenko presenta el estudio de estabilidad en estructuras que están sometidas a cargas periódicas y que presentan el fenómeno de buckling (pandeo), [Timoshenko61]. Uno de los primeros libros dedicados exclusivamente al análisis de los sistemas variantes con el tiempo, es el que escribió Henry D'Angelo en 1970, el cual presenta un compendio detallado de las bases para el análisis de este tipo de sistemas [D'Angelo70]. Del mismo modo John Alan Richards publica en el año de 1983 un libro dedicado al análisis de los sistemas periódicos variantes con el tiempo, en donde utiliza diversas herramientas en diferentes casos de estudio de la ingeniería [Richards83].

Para la década de los noventa, H. R. Visser presenta un trabajo de modelado y análisis en el área de los circuitos con interruptores periódicos en 1991 [Visser91], en el cual se presentan dos métodos, el primero de ellos analiza el comportamiento de estado estable en este tipo de circuitos y el segundo describe su respuesta transitoria. En este trabajo se utilizan los modelos promediados y herramientas de la teoría de Floquet para su análisis. Para el año de 1996, Gerald Heydt propone un método para el cálculo del estado estable periódico en

circuitos variantes con el tiempo en presencia de interruptores eléctricos, basándose en las propiedades de modulación de frecuencia de la transformada de Fourier [Heydt96]. Aunado a esto, se presenta una comparación entre los diferentes métodos discutidos en el documento, para distintas condiciones de periodicidad en los parámetros del sistema.

Es también durante los años noventa que se presentan algunos trabajos importantes en el área de control. Tal es el caso de Subhash Sinha, que en 1994 presenta sus resultados en el uso de la transformación de Floquet-Lyapunov para desarrollar controladores. Su metodología es aplicada a un péndulo invertido triple sujeto a cargas periódicas axiales [Sinha94]. Dos años después, presenta un trabajo subsecuente en el que establece los detalles del cálculo de la transformada de Floquet-Lyapunov, obteniendo la matriz de transición de manera simbólica [Sinha96]. En 1997, Mark Balas utiliza un enfoque muy similar al de Sinha para obtener observadores en sistemas de control periódicos, utilizando incluso las mismas herramientas [Balas97] y obteniendo una expresión de la matriz de transición con una aproximación numérica. A finales de la década, en 1999, Sinha vuelve a presentar un documento en donde muestra la obtención de controladores para la estabilización del ángulo de las palas en rotores principales de helicóptero, trabajando una vez más con las herramientas de la teoría de Floquet para la obtención de controladores periódicos [Sinha99].

En el transcurso de este siglo, diversas publicaciones se han hecho en relación al control y análisis de sistemas periódicos variantes con el tiempo, siendo el caso de Patrizio Colaneri, que en 2005 publicó un compendio de aspectos teóricos sobre estos sistemas aplicados a la aeronáutica. Los helicópteros son uno de los sistemas periódicos de más importancia actualmente ya que el modelo matemático de estas aeronaves en vuelo frontal contiene parámetros que varían de forma cíclica. El control de las vibraciones inducidas por el rotor principal en el fuselaje es importante ya que puede llegar a aumentar la vida útil del helicóptero al reducir la fatiga de los componentes [Colaneri05]. Incursionando en otras áreas, el trabajo publicado por Christopher Klausmeier en 2008 resulta muy interesante, ya que utiliza la teoría de Floquet para el estudio de sistemas poblacionales y de modelos depredador-presa [Klausmeier08], con lo que se muestra la gran variedad de campos de aplicación que pueden

llegar a tener los resultados propuestos por Floquet en 1883.

Por último, en 2010, Stephen Banks y María Tomás-Rodríguez publicaron sus resultados en un libro en donde se aborda la problemática de aproximar sistemas no lineales a través de aproximaciones sucesivas mediante sistemas variantes con el tiempo [Banks10]. Es en este trabajo en el que los autores plantean una forma de obtener una ley de control calculada a partir de los sistemas variantes utilizados en la aproximación para después aplicarla al sistema no lineal original, logrando el objetivo de control.

En esta tesis se sigue la línea de investigación mencionada en los párrafos anteriores, abordando los sistemas periódicos como caso de estudio principal y aplicando la teoría de Floquet al diseño de controladores y al cálculo de estado estable en convertidores electrónicos de potencia. También se lleva a cabo la aproximación de sistemas no lineales mediante una sucesión de sistemas variantes con el tiempo, para su eventual control.

1.5. Aportaciones

A continuación se enlistan las aportaciones más importantes del presente trabajo:

1. Se propone una metodología para el cálculo de estado estable en sistemas lineales periódicos, de manera exacta y basadas en el uso de la descomposición de Floquet para obtener una expresión cerrada de su solución, comparando los resultados contra un método de simulación por fuerza bruta.
 - (a) Se validó la metodología propuesta con varios casos de estudio; entre ellos, los convertidores electrónicos de potencia: Convertidor elevador tipo Boost y el convertidor resonante tipo Single Ended.
2. Se aplicó a varios casos de estudio, una metodología de control que usa la retroalimentación de estados en sistemas lineales periódicos, basada en la teoría de Floquet-

Lyapunov.

- (a) Aunado a esto, se plantea la utilización del control óptimo, en conjunción con la teoría de Floquet, para este mismo tipo de sistemas.
 - (b) En ambos casos, se evalúa la efectividad de los procedimientos al compararlos con una técnica de control existente para sistemas variantes con el tiempo.
3. Se revisan los conceptos de la aproximación de sistemas no lineales a partir de una serie de aproximaciones sucesivas variantes con el tiempo. Además, se plantea la utilización de una ley de control calculada a partir de la información de cada sistema lineal variante con el tiempo que forma parte de la aproximación, para su subsecuente aplicación al sistema no lineal original y su eventual control.
- (a) Se validó la metodología a través de dos casos de estudio: el primero corresponde a un caso teórico que sirve para ilustrar el procedimiento y el segundo consiste en el modelo matemático de un brazo robótico de dos articulaciones.

1.6. Publicaciones

Como parte de este trabajo de tesis se realizaron dos publicaciones en congresos interacionales:

1. **Exact Steady State Analysis in Power Converters Using Floquet Decomposition.** José Alberto Álvarez Martín, J. Jesús Rico Melgoza, José Juan Rincón Pasaye. Publicado en el North American Power Symposium (NAPS) en Boston, Massachusetts, Estados Unidos. Del 4 al 6 de Agosto de 2011. ISBN 978-1-4577-0419-2.
2. **Control de Sistemas Periódicos en el Marco de Referencia de Floquet.** José Alberto Álvarez Martín, J. Jesús Rico Melgoza, José Juan Rincón Pasaye. Publicado en la Reunión de Otoño de Potencia, Electrónica y Computación (ROPEC)

en Morelia, Michoacán, México. Del 9 al 11 de Noviembre de 2011. ISBN: 978-607-95476-3-9.

1.7. Descripción de Capítulos

El contenido de esta tesis se estructura en siete capítulos, los cuales se describen brevemente a continuación. En el capítulo uno, se presenta una introducción al tema de los sistemas periódicos, haciendo énfasis en la importancia que tienen estos sistemas para las áreas de la electrónica de potencia y la mecánica. También se hace un recuento en orden cronológico de los avances que se han ido dando en el campo de los sistemas periódicos y de la gran cantidad de aplicaciones que han surgido de la mano de estos avances. Por último, se da un panorama general de la estructura de este documento.

El capítulo dos plantea de manera general las bases de los sistemas lineales periódicos y se detallan los principales resultados de la teoría de Floquet. Se inicia con una descripción de los sistemas lineales variantes con el tiempo y se dan algunos ejemplos de éstos. Posteriormente se revisan los detalles de la matriz de transición, se establecen sus propiedades y se muestran tres métodos para obtenerla. Por último, se abordan los conceptos de matriz de Monodromía, la descomposición de Floquet y la transformación de Floquet-Lyapunov, todos de gran importancia para el desarrollo de esta tesis.

En el capítulo tres, se plantea una metodología basada en la descomposición de Floquet para el análisis exacto de estado estable de sistemas lineales periódicos, haciendo énfasis en su aplicación a convertidores electrónicos de potencia. Los casos del convertidor elevador (tipo Boost) y del convertidor resonante (tipo Single Ended), son utilizados como casos de estudio para la aplicación del procedimiento de cálculo, comparando los resultados con un método de simulación por fuerza bruta.

El capítulo cuatro muestra el desarrollo de una ley de control por retroalimentación de esta-

dos, usando la transformación de Floquet-Lyapunov. Se presentan los detalles de como esta transformación puede llevar un sistema lineal variante con el tiempo a una representación equivalente, pero invariante con el tiempo. Es precisamente esta característica la que permite diseñar un controlador con ganancias variantes con el tiempo que estabiliza al sistema original. De igual forma, dos casos de estudio son utilizados para ilustrar la aplicación de la metodología y para propósitos de comparación con otra técnica de control ya establecida.

En el capítulo cinco, se incursiona en el campo del control óptimo, planteando el problema del regulador lineal cuadrático a un sistema transformado a través de la transformación de Floquet-Lyapunov. Los mismos casos de estudio del capítulo cuatro son utilizados para mostrar la utilización de la metodología.

El capítulo seis presenta los detalles de la técnica de aproximación de sistemas no lineales mediante una aproximación a través de una serie de sistemas variantes con el tiempo. Aunado a esto, se plantea una metodología para la obtención de leyes de control calculadas a partir de un sistema lineal variante con el tiempo, que servirán para controlar el sistema no lineal original. Se presentan dos casos de estudio que permiten mostrar la aplicación de las técnicas y mostrar su efectividad. El primero de ellos es un ejemplo completamente teórico (sin representación real física) y el segundo corresponde al sistema de un brazo robótico de dos articulaciones.

Por último, en el capítulo siete se establecen las conclusiones generales y algunas observaciones para la posible mejora de los procedimientos estudiados.

Capítulo 2

Sistemas Lineales Periódicos y Teoría de Floquet

En este capítulo se presentan los fundamentos teóricos que sirven de base para la realización de esta tesis y para la aplicación de los enfoques de análisis y control planteados. Se introducen de manera formal los conceptos que forman parte de la teoría de Floquet y se establece la terminología a usar en los capítulos subsecuentes.

De manera general, se inicia una breve introducción sobre los sistemas variantes con el tiempo y se presentan ejemplos que ilustran la forma en que aparecen estos sistemas en el mundo real. También se hace especial énfasis en el concepto de matriz de transición y se presentan algunos procedimientos para obtenerla. Por último, se explican los detalles de dos herramientas que pertenecen a la teoría de sistemas periódicos: la descomposición de Floquet y la transformación de Floquet-Lyapunov.

2.1. Sistemas Lineales Variantes con el Tiempo

Normalmente, en los distintos métodos de análisis que existen en la ingeniería, se utilizan sistemas que pueden ser descritos por modelos causales, lineales e **invariantes con el tiempo**. Este tipo de sistemas han sido estudiados exhaustivamente y están bien documentados en la literatura. En este trabajo de tesis se abordarán sistemas que no necesariamente cumplen con la característica de ser **invariantes con el tiempo**, por lo tanto, la atención se ha centrado en el estudio de un grupo de sistemas mucho más amplio, el de los **sistemas variantes con el tiempo**. En su gran mayoría, los conceptos planteados en este capítulo se han tomado de los resultados expuestos en [D'Angelo70], [Mohler91] y [Rugh96].

Las ecuaciones que describen a los sistemas lineales variantes con el tiempo son similares en muchos aspectos a las de los sistemas invariantes con el tiempo, con la diferencia de que los coeficientes que acompañan a las variables de dichas ecuaciones son funciones del tiempo. Por lo tanto, estos sistemas se pueden representar en forma matemática y generalizada de la siguiente manera, en el caso escalar, mediante una ecuación diferencial de una sola señal de entrada $u(t)$ y una sola salida $x(t)$

$$\alpha_0(t) \frac{d^n x(t)}{dt^n} + \dots + \alpha_n(t)x(t) = \beta_0(t) \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \dots + \beta_m(t)u(t) \quad (2.1)$$

donde los coeficientes $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ y β_0, \dots, β_m son funciones del tiempo. El caso multivariable (varias entradas $u(t), \dots, u_m(t)$ y varias salidas $y_1(t), \dots, y_r(t)$) se puede representar a través de una descripción en espacio de estado de la siguiente manera

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = a_{11}(t)x_1(t) + \dots + a_{1n}(t)x_n(t) + b_{11}(t)u_1(t) + \dots + b_{1m}(t)u_m(t) \quad (2.2)$$

⋮

$$\frac{dx_n(t)}{dt} = a_{n1}(t)x_1(t) + \cdots + a_{nn}(t)x_n(t) + b_{n1}(t)u_1(t) + \cdots + b_{nm}(t)u_m(t) \quad (2.3)$$

donde $x_i(t)$ es el estado del sistema para $i = 1, \dots, n$.

$$y_1(t) = c_{11}(t)x_1(t) + \cdots + c_{1n}(t)x_n + d_{11}(t)u_1(t) + \cdots + d_{1m}(t)u_m(t) \quad (2.4)$$

⋮

$$y_r(t) = c_{r1}(t)x_1(t) + \cdots + c_{rn}(t)x_n + d_{r1}(t)u_1(t) + \cdots + d_{rm}(t)u_m(t) \quad (2.5)$$

El sistema multivariable descrito por (2.2), (2.3), (2.4) y (2.5), puede ser expresado en forma compacta como se muestra a continuación

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (2.6)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \quad (2.7)$$

Donde $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ y $D(t)$ son matrices de orden $n \times n$, $n \times m$, $r \times n$, y de $r \times m$ respectivamente, cuyos elementos son funciones del tiempo y el vector $x(t)$, de orden $n \times 1$, es el vector de estados del sistema. El vector $u(t)$ representa a las entradas del sistema y el vector $y(t)$ a las salidas.

2.1.1. Ejemplos de Sistemas Lineales Variantes con el Tiempo

La presencia de este tipo de sistemas en la naturaleza es bien conocida y el número de casos documentados en la literatura es considerable [Kronig31], [Klausmeier08]. Particularmente, la electrónica de potencia está compuesta en su mayoría por sistemas lineales variantes con el tiempo debido a que dependen de funciones de conmutación que llevan al sistema a diferentes configuraciones conforme avanza el tiempo. Estos sistemas son im-

portantes para la ingeniería ya que son los encargados de transformar la energía eléctrica disponible en una forma adecuada para su posterior alimentación. El convertidor elevador (Boost) y el convertidor resonante (Single Ended) son ejemplos de dispositivos de la electrónica de potencia y ambos, al ser modelados matemáticamente, presentan funciones dependientes del tiempo en sus coeficientes [De Keyser06]. Otro conjunto de ejemplos de sistemas variantes con el tiempo son los encontrados recientemente debido al desarrollo tan acelerado que ha sufrido la industria aeroespacial. El interés por aplicar mecanismos de control adaptivo a plantas que cambian sus parámetros de acuerdo a las condiciones del ambiente, ha llevado a los investigadores a desentrañar sistemas lineales variantes con el tiempo en el estudio de la dinámica de las aeronaves [Schulz07], [D'Angelo70].

Las ecuaciones que describen la dinámica de vuelo en las aeronaves contienen coeficientes que dependen explícitamente de la velocidad a la que se desplazan. Comúnmente, durante la época de aviación subsónica; es decir, cuando las velocidades en cuestión todavía no superaban la velocidad del sonido, se buscaba hacer constante la velocidad para entonces llegar a un sistema de ecuaciones con coeficientes constantes. Las aceleraciones relativamente bajas a las que podían aspirar con este tipo de aeronaves hacían que la suposición tuviera sentido y que se llegaran a obtener buenos resultados. Recientemente, las velocidades y aceleraciones que alcanzan las aeronaves modernas han hecho evidente que los parámetros que dependen de la velocidad cambian a un ritmo considerablemente más rápido [D'Angelo70]. El alto consumo de combustible desencadenado por las altas velocidades produce un cambio vertiginoso en la masa, el centro de gravedad y los momentos de inercia en la aeronave. Además, los cambios en las condiciones climáticas debidas al rápido ascenso inducen parámetros variantes con el tiempo. De este modo el análisis y control automático en la aeronáutica moderna requiere la utilización de modelos con parámetros variantes con el tiempo, planteados por ecuaciones diferenciales con coeficientes variables.

Dentro del mismo campo del desarrollo aeroespacial, se ha podido identificar otra problemática que introduce parámetros variantes con el tiempo. Esta condición aparece al describir las ecuaciones de la dinámica en movimiento de los satélites al intentar llevarlos a

que orbiten alrededor de algún cuerpo celeste; es decir, al desplazarlos de una órbita a otra [D'Angelo70]. Estas ecuaciones contienen variaciones cíclicas en los términos relacionados con el torque mientras el satélite se desplaza sobre la órbita. Los cambios de torque inducidos por las maniobras de control para mantener a la aeronave en el curso correcto y las pequeñas variaciones entre órbitas nos llevan a la introducción de parámetros que cambian con el tiempo, para este caso en particular, coeficientes periódicos y aperiódicos deben ser considerados en el grupo de ecuaciones diferenciales que describen al sistema.

Ahora, hasta el momento se han comentado ejemplos de sistemas lineales variantes con el tiempo, pero no hemos abordado la discusión de cómo es que estos surgen desde el punto de vista matemático. Normalmente, estos sistemas son el resultado de un proceso de linealización alrededor de un punto de operación de un sistema no lineal más general [Mohler91].

Supongamos que un objeto se mueve sobre una trayectoria $x^*(t)$, que es una solución particular de la siguiente ecuación dinámica, para la condición inicial $x(0) = x^*_0$

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t)) \quad (2.8)$$

donde el vector de estados $x(t) \in \mathbb{R}^n$, la entrada de control $u(t) \in \mathbb{R}^m$ y $f(\cdot)$ es diferenciable con respecto a los dos argumentos. Entonces

$$\frac{dx^*(t)}{dt} = f(x^*(t), u^*(t)) \quad (2.9)$$

describe a la trayectoria solución $x^*(t)$. Debido a que $f(\cdot)$ es diferenciable, cumple con la condición de Lipschitz y por lo tanto $x^*(t)$ es una solución única de (2.9).

Consideremos ahora un pequeño cambio conforme a la trayectoria solución $\delta x(t)$ provocado por un pequeño cambio en la entrada $\delta u(t)$, los cuales se pueden plantear de la siguiente manera

$$x(t) = x^*(t) + \delta x(t) \quad (2.10)$$

y

$$u(t) = u^*(t) + \delta u(t) \quad (2.11)$$

Lo cual nos permite hacer la resta de (2.9) y (2.8), obteniendo una ecuación general de perturbación

$$\delta \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) - f(x^*(t), u^*(t)) \quad (2.12)$$

Siempre y cuando $f(\cdot, \cdot)$ sea una función analítica, es posible formular su expansión en serie de Taylor, como sigue

$$f(x(t), u(t)) = f(x^*(t), u^*(t)) + \frac{\partial f}{\partial x}(x^*(t), u^*(t))\delta x(t) + \frac{\partial f}{\partial u}(x^*(t), u^*(t))\delta u(t) + r(x(t), u(t)) \quad (2.13)$$

El término $r(x(t), u(t)) = r(x^*(t) + \delta x(t), u^*(t) + \delta u(t)) = r(\delta x(t) + \delta u(t))$ representa el conjunto de términos de un orden mayor a uno. Si asumimos que $\delta x(t)$ y $\delta u(t)$ tienden al origen, el término $r(\delta x(t) + \delta u(t))$ se acercará a cero más rápidamente que los términos lineales en $\delta x(t)$ y $\delta u(t)$. Por lo tanto en un vecindario suficientemente pequeño de $x^*(t)$ y $u^*(t)$, la ecuación de perturbación (2.13) aproxima al sistema no lineal original. Despreciando los términos $r(x(t), u(t))$ se tiene

$$\delta \dot{x}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x^*(t), u^*(t))\delta x(t) + \frac{\partial f}{\partial u}(x^*(t), u^*(t))\delta u(t) \quad (2.14)$$

Si $x^*(t)$ y $u^*(t)$ son vectores apropiados para la trayectoria solución, entonces (2.14) es un sistema lineal variante con el tiempo con la siguiente estructura

$$\delta \dot{x}(t) = A(t)\delta x(t) + B(t)\delta u(t) \quad (2.15)$$

donde

$$A(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t)^*, u(t)^*) \quad (2.16)$$

$$B(t) = \frac{\partial f}{\partial u}(x(t)^*, u(t)^*) \quad (2.17)$$

En general, podemos decir que al llevar a cabo una linealización alrededor de una trayectoria solución de un sistema no lineal, se puede llegar a obtener un sistema lineal variante con el tiempo.

2.2. Matriz de Transición

La relación que existe entre las variables de estado de un sistema lineal, sus condiciones iniciales y la entrada, queda definida completamente por la **matriz de transición** [D'Angelo70], [Rugh96]. Si esta matriz es conocida, es posible deducir la solución de las ecuaciones diferenciales del sistema. A continuación abordaremos de manera más concreta los detalles de su obtención y sus principales propiedades.

2.2.1. Respuesta Homogénea

Consideremos ahora la ecuación dinámica de estado del sistema homogéneo; es decir, el caso en el que $u(t) \equiv 0$

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \quad (2.18)$$

La solución de (2.18) es conocida como la **respuesta homogénea** y se puede escribir de la siguiente manera

$$x(t) = \phi(t, t_0)x_0 \quad (2.19)$$

En donde $\phi(t, t_0)$ es conocida como la **matriz de transición de estados**. La primera columna de $\phi(t, t_0)$ es la solución de (2.18), considerando la condición inicial $x(t_0) = (1, 0, \dots, 0)^T$, la segunda columna de $\phi(t, t_0)$ es la solución de (2.18), con condición inicial $x(t_0) = (0, 1, \dots, 0)^T$ y así sucesivamente hasta llegar a que la condición inicial para obtener la última columna es $x(t_0) = (0, 0, \dots, 1)^T$.

2.2.2. Propiedades de la Matriz de Transición

El hecho de que a través de esta matriz se puedan conocer detalles importantes de un sistema, hace que sea importante conocer las propiedades inherentes de este tipo de

matrices, es por esto que algunas de las propiedades más importantes las podemos resumir como sigue:

1. $\phi(t, \tau)$ es no singular para todo t y τ .
2. $\phi(t, t) = I_n$. En este caso I_n es una matriz de orden n . Esta propiedad se deduce al hacer $t = t_0$ en la ecuación (2.19).
3. $\phi(t_2, t_1)\phi(t_1, t_0) = \phi(t_2, t_0)$. Esta propiedad nos indica que el producto de dos matrices de transición en diferentes intervalos de tiempo consecutivos, en este caso los intervalos $[t_0, t_1]$ y $[t_1, t_2]$, es igual a la matriz de transición tomando en cuenta el intervalo $[t_0, t_2]$.
4. $\phi^{-1}(t, \tau) = \phi(\tau, t) \forall t, \tau$. La inversa de la matriz de transición es igual a la matriz de transición del mismo sistema en sentido opuesto.
5. $\frac{d}{dt}\phi(t, \tau) = A(t)\phi(t, \tau)$. Esto se puede establecer al observar que para un sistema como el descrito por (2.18) con condición inicial $x(t_0) = x_0$, su respuesta es $x(t) = \phi(t, t_0)x_0$. Al derivar la respuesta homogénea dada por (2.19)

$$\dot{x}(t) = \frac{d\phi(t, \tau)}{dt}x_0 \quad (2.20)$$

y comparándola con la ecuación (2.18) podemos obtener

$$\frac{d\phi(t, t_0)}{dt}x_0 = A(t)\phi(t, t_0)x_0 \quad (2.21)$$

Estas propiedades serán utilizadas en los subsecuentes análisis y en el planteamiento de las metodologías propuestas en el presente documento.

2.2.3. Cálculo de la Matriz de Transición

Una vez que se ha dado la definición formal de la matriz de transición y que se han listado sus propiedades fundamentales, es posible hablar de las diferentes formas para

obtenerla. Actualmente existen diversos métodos con los que se puede calcular la matriz de transición [Moler03], sin embargo en este trabajo de tesis se ha hecho uso, en la mayoría de los casos, de la propiedad número 5 mencionada en la sección anterior para obtener una representación de la matriz de transición, a saber, $\phi(t, t_0)$ satisface la siguiente ecuación con las condiciones iniciales especificadas

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\phi(t, t_0) &= A(t)\phi(t, t_0) \\ \phi(t_0, t_0) &= I_n \end{aligned} \tag{2.22}$$

Al resolver el sistema de ecuaciones dado por (2.22), sujeto a las condiciones iniciales propuestas, se obtiene la matriz de transición del sistema dado. Ahora, es apropiado mencionar los detalles de otros dos métodos que se pueden utilizar para el mismo propósito y que dependiendo del sistema en cuestión, pueden arrojar resultados aceptables para la aproximación de la matriz de transición. Estos dos métodos son conocidos como las expansiones en series de Peano-Baker y de Magnus [Rugh96], [Blanes08].

2.2.3.1. Serie de Peano-Baker

Considere el sistema dado por (2.18). La matriz de transición para este sistema puede ser aproximada por la serie generalizada de **Peano-Baker** de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \phi(t, \tau) &= I + \int_{\tau}^t A(s_1)ds_1 + \int_{\tau}^t A(s_1) \int_{\tau}^{s_1} A(s_2)ds_2ds_1 + \dots \\ &+ \int_{\tau}^t A(s_1) \int_{\tau}^{s_1} A(s_2) \dots \int_{\tau}^{s_{i-1}} A(s_i)ds_i \dots ds_1 + \dots \end{aligned} \tag{2.23}$$

donde I es una matriz identidad de orden n . El uso de este tipo de serie se ilustra a continuación.

Ejemplo. Considere la siguiente matriz variante con el tiempo [Rugh96]

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Su matriz de transición expresada en la serie de Peano-Baker es

$$\phi(t, \tau) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \int_{\tau}^t \begin{bmatrix} 0 & s_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ds_1 + \int_{\tau}^t \begin{bmatrix} 0 & s_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \int_{\tau}^{s_1} \begin{bmatrix} 0 & s_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ds_2 ds_1 + \dots \quad (2.25)$$

Podemos observar que en este caso sólo los dos primeros términos de la serie son distintos a cero

$$\phi(t, \tau) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{(t^2 - \tau^2)}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

obteniéndose una representación compacta de la matriz de transición. Es importante mencionar que para sistemas de alto orden y complejidad, el cálculo a través de esta serie puede volverse complicado debido al número de integrales involucradas.

2.2.3.2. Serie de Magnus

Durante el final de la década de 1940, Wilhelm Magnus consideró la ecuación de Hausdorff y aproximó su solución utilizando el método de iteraciones de Picard, mientras trataba de resolver problemas relacionados con los operadores lineales en el campo de la mecánica cuántica. Su planteamiento fue el siguiente.

Asumiendo que el tiempo inicial es $t_0 = 0$ y con la intención de simplificar la notación, podemos considerar a $\phi(t)$ como una función de un sólo argumento y que es una solución fundamental de (2.22), descrita por la siguiente relación

$$\phi(t) = e^{\Omega(t)} \quad (2.27)$$

La intención de Magnus fue expresar la solución de la ecuación (2.22) a través de una exponencial y una función $\Omega(t)$, que se puede construir a través de una expansión en series, mediante la siguiente sumatoria

$$\Omega(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \Omega_k(t) \quad (2.28)$$

Entonces, la **expansión de Magnus** queda definida con la siguiente ecuación, en la cual sólo están representados los primeros cuatro términos de la serie

$$\begin{aligned} \Omega(t) = & \int_0^t A(s_1) ds_1 - \frac{1}{2} \int_0^t \left[\int_0^{s_1} A(s_2) ds_2, A(s_1) \right] ds_1 + \\ & \frac{1}{4} \int_0^t \left[\int_0^{s_1} \left[\int_0^{s_2} A(s_3) ds_3, A(s_2) \right] ds_2, A(s_1) \right] ds_1 + \\ & \frac{1}{12} \int_0^t \left[\int_0^{s_1} A(s_2) ds_2, \left[\int_0^{s_1} A(s_2) ds_2, A(s_1) \right] \right] ds_1 + \dots \end{aligned} \quad (2.29)$$

donde los corchetes que aparecen en la expresión (2.29) se denominan corchetes de Lie y se definen para dos matrices cuadradas arbitrarias X, Y como sigue

$$[X, Y] = XY - YX \quad (2.30)$$

obsérvese que el corchete de Lie produce la matriz cero para matrices que conmutan; es decir, si $XY = YX$. La expresión (2.29) involucra en cada corchete de Lie solamente a la matriz $A(t)$ con integrales de la misma respecto al tiempo. Podemos observar que el patrón de la serie y la obtención de sus coeficientes no es evidente. Para una explicación más detallada acerca del cálculo de los demás términos en la serie, sus coeficientes y lo relacionado a la convergencia de la misma, se puede consultar [Blanes08], [Butcher09]. La utilización de esta serie se presenta en el siguiente ejemplo.

Ejemplo. Considere el siguiente sistema [Mohler91]

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 + \alpha \cos^2(\omega t) & 1 - \alpha \sin(\omega t) \cos(\omega t) \\ -1 - \alpha \sin(\omega t) \cos(\omega t) & -1 + \alpha \sin^2(\omega t) \end{bmatrix} x(t) \quad (2.31)$$

donde α y ω son parámetros. Para este sistema en particular, es posible encontrar su matriz de transición en forma exacta, la cual se utiliza para compararla con la expansión en series de Magnus

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} e^{(\alpha-1)\omega t} \cos(\omega t) & e^{-\omega t} \sin(\omega t) \\ -e^{(\alpha-1)\omega t} \sin(\omega t) & e^{-\omega t} \cos(\omega t) \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Utilizando $\alpha = 1.2$, $\omega = 1$, podemos graficar la matriz de transición durante un período de tiempo, utilizando la forma exacta y la aproximación de Magnus. La comparación de los dos procedimientos se muestra en la Figura 2.1. Es posible observar que a lo largo del rango de tiempo seleccionado, la aproximación es cercana al resultado obtenido mediante la expresión exacta de la matriz de transición. La serie de Magnus fue truncada en el primer término de la expansión; es decir, la aproximación fue de primer orden y esto ocasiona que existan ligeras discrepancias entre los resultados. Al aumentar los términos en la serie de Magnus, la aproximación mejora sustancialmente y para este caso en particular se logra una reproducción exacta de la matriz de transición al utilizar los primeros cuatro términos.

2.2.4. Respuesta Completa

Hasta ahora, sólo se ha considerado la respuesta de un sistema variante con el tiempo que no está sujeto a excitaciones externas; es decir, únicamente la respuesta homogénea. En esta sección abordaremos la problemática de los sistemas en los que actúan fuerzas externas, mostrando la forma que tiene su solución.

Considere el sistema $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$, descrito en (2.6), en donde podemos apreciar la aparición la matriz B y el vector de entradas $u(t)$. La respuesta de este sistema ante la

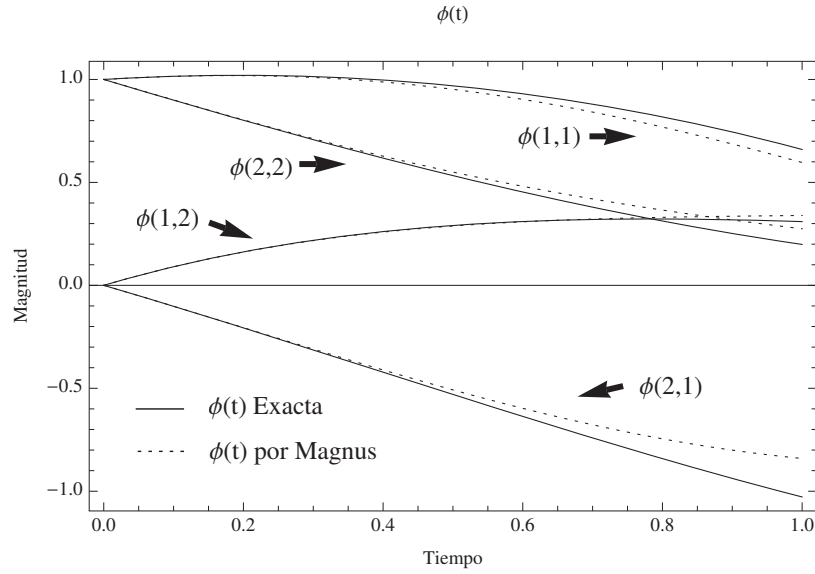


Figura 2.1: Los cuatro elementos de la matriz de transición $\phi(t)$, mediante la serie de Magnus y su expresión exacta.

condición inicial x_0 y la entrada $u(t)$ está dada por

$$x(t) = \phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \quad (2.33)$$

La solución al sistema (2.6), está compuesta por dos partes, la respuesta **complementaria u homogénea** (primer término) y la **respuesta particular o forzada** (segundo término). Podemos verificar que en realidad la ecuación (2.33) es solución de (2.6) al llevar a cabo el siguiente procedimiento. Derivando (2.33) se tiene

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}\phi(t, t_0)x_0 + \phi(t, t)B(t)u(t) + \int_{t_0}^t \frac{d}{dt}\phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \quad (2.34)$$

sustituyendo (2.22) en (2.34) se obtiene

$$\dot{x}(t) = A(t)\phi(t, t_0)x_0 + B(t)u(t) + \int_{t_0}^t A(t)\phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \quad (2.35)$$

factorizando $A(t)$

$$\dot{x}(t) = A(t) \left[\phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \right] + B(t)u(t) \quad (2.36)$$

de donde podemos observar que la expresión que está dentro de los corchetes es el lado derecho de la ecuación (2.33), por lo tanto, es solución del sistema dado por (2.6).

La ecuación (2.33) también revela que la problemática de encontrar la respuesta completa se resuelve prácticamente al calcular la matriz de transición $\phi(t, t_0)$, es por esta razón que el aspecto central del cálculo de la respuesta de un sistema se basa en la obtención de esta matriz.

2.3. Teoría de Floquet

El modelo en espacio de estados de un sistema lineal periódico es una representación matricial de un conjunto de ecuaciones diferenciales lineales, con la única distinción de tener matrices de coeficientes que evolucionan en el tiempo de manera periódica. Este tipo de sistemas, tienen la misma forma descrita por las ecuaciones (2.6) y (2.7), con la particularidad de que sus matrices de coeficientes son funciones del tiempo y están sujetas a las siguientes condiciones de periodicidad

$$A(t) = A(t + T), \quad B(t) = B(t + T), \quad C(t) = C(t + T), \quad D(t) = D(t + T) \quad (2.37)$$

donde T es el período fundamental del sistema.

Un resultado importante en el análisis de los sistemas lineales periódicos fue el que desarrolló Gaston Floquet en 1883 [Floquet83], el cual continúa siendo hasta el día de hoy, una de las metodologías de análisis más utilizadas en la literatura para este tipo de sistemas. Los resultados de Floquet han sido utilizados en diversas áreas de la ingeniería, dos ejemplos de esto son los análisis de estabilidad hechos a la dinámica del rotor principal de los

helicópteros en vuelo frontal [Wereley91] y los resultados obtenidos al tratar el fenómeno de pandeo (buckling) en las vigas que están sujetas a cargas periódicas axiales [Timoshenko61]. En las siguientes secciones se presentan los detalles acerca de los principales resultados de la teoría de Floquet y se definen las herramientas que servirán de base para los capítulos subsecuentes.

2.3.1. Matriz de Monodromía

Los resultados principales de la Teoría de Floquet están basados en la matriz de transición de estados, por lo tanto, esta matriz juega un papel fundamental en el análisis de los sistemas periódicos. Al evaluarla en cada período fundamental del sistema, se tiene un caso particular de la matriz de transición, el cual es explicado en las siguientes definiciones:

Definición 2.1. *La matriz de transición dada por $\phi(t + T, t)$, se conoce como la **matriz de monodromía en el tiempo t** .*

Definición 2.2. *La matriz constante, $\phi(t_0 + T, t_0)$, lleva el nombre de **matriz fundamental de monodromía**.*

Es común asumir que $t_0 = 0$, es por esto que la matriz de monodromía puede ser escrita como $\phi(T, 0)$. Habiendo definido lo anterior, podemos revisar los detalles de la descomposición de Floquet y la transformación Floquet-Lyapunov, que son considerados como resultados primordiales de la teoría de los sistemas lineales periódicos.

2.3.2. Descomposición de Floquet

Uno de los principales resultados del trabajo de Floquet fue el que normalmente se conoce como **la descomposición de Floquet**, la cual permite separar la matriz de transición de un sistema lineal periódico en el producto de dos matrices, siendo una de ellas

periódica ($P(t)$) y la otra constante (R). A continuación, se presenta dicho resultado de manera formal, no sin antes definir el concepto de matriz fundamental.

Definición 2.3. *Cualquier solución no singular del sistema homogéneo $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ de orden n , es llamada **matriz fundamental**.*

Teorema 2.1. *[D'Angelo70]. Si $\phi(t)$ es una matriz fundamental del sistema $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$, con $A(t)$ periódica y de período T , entonces $\phi(t+T)$ también es una matriz fundamental. Para cada $\phi(t)$, existe una matriz periódica no singular $P(t)$ de período T y una matriz constante R tal que*

$$\phi(t) = P(t)e^{Rt} \quad (2.38)$$

Demostración. Debido a que una matriz fundamental satisface la ecuación $\dot{\phi}(t) = A(t)\phi(t)$, es posible llegar a lo siguiente

$$\dot{\phi}(t+T) = A(t+T)\phi(t+T) \quad (2.39)$$

de donde se desprende que

$$\dot{\phi}(t+T) = A(t)\phi(t+T) \quad (2.40)$$

Por lo tanto, $\phi(t+T)$ es también una matriz fundamental ya que es solución de la ecuación diferencial del sistema. Debido a que el producto de una matriz constante K por una matriz fundamental del sistema, es también una matriz fundamental (ver el teorema 2.6 en [D'Angelo70]), es posible relacionar $\phi(t)$ y $\phi(t+T)$ a través de una matriz constante C

$$\phi(t+T) = \phi(t)C \quad (2.41)$$

para la cual se introduce la siguiente relación

$$C \equiv e^{RT} \quad (2.42)$$

sustituyendo (2.42) en (2.41) se llega a

$$\phi(t+T) = \phi(t)e^{RT} \quad (2.43)$$

Al definir a la matriz $P(t)$ como sigue

$$P(t) \equiv \phi(t)e^{-Rt} \quad (2.44)$$

y al sustituir (2.43) en (2.44), se obtiene

$$\begin{aligned} P(t+T) &= \phi(t)e^{RT}e^{-RT}e^{-Rt} \\ &= \phi(t)e^{-Rt} \end{aligned} \quad (2.45)$$

Comparando (2.44) y (2.45) se puede ver que

$$P(t+T) = P(t) \quad (2.46)$$

Con lo anterior se concluye que $P(t)$ es una matriz periódica. Al postmultiplicar la ecuación (2.44) por el término e^{Rt} llegamos a la ecuación (2.38). \square

Para obtener la matriz constante R , se debe de conocer previamente la matriz $\phi(t)$, para entonces poder utilizar la siguiente relación multivaluada

$$R = \frac{1}{T} \ln \phi(T) \quad (2.47)$$

La ecuación (2.47) involucra algunas operaciones intermedias que son necesarias para poder evaluarla. Se debe obtener el logaritmo de una matriz y para que esto pueda llevarse a cabo, la matriz debe ser invertible. El procedimiento para calcular el logaritmo de la matriz $\phi(T)$ consiste en encontrar una matriz V que contenga en sus columnas a los vectores propios de $\phi(T)$. Esto permite obtener lo siguiente

$$\bar{\phi}(T) = V^{-1}\phi(T)V \quad (2.48)$$

En donde $\bar{\phi}(T)$ es una matriz diagonal que contiene los valores propios de la matriz $\phi(T)$. Ahora, es posible calcular el logaritmo natural de cada uno de los elementos de la diagonal de $\bar{\phi}(T)$, obteniendo la matriz D , con lo cual se puede establecer la siguiente expresión

$$\ln \phi(T) = VDV^{-1} \quad (2.49)$$

La expresión (2.49) nos permite encontrar el logaritmo natural de la matriz de transición evaluada en el período fundamental para poder sustituirla en (2.47). Cabe mencionar que tanto $P(t)$ como R son matrices que pueden ser complejas. Una vez calculada la matriz R , es posible obtener la matriz $P(t)$ mediante la ecuación (2.44).

2.3.3. Transformación de Floquet-Lyapunov

El otro resultado principal dentro de la teoría de Floquet, es el que se conoce como la **transformación de Floquet-Lyapunov**. Aleksandr Lyapunov fue un matemático ruso que trabajó con sistemas de ecuaciones diferenciales de coeficientes variantes con el tiempo y que llegó a obtener muchos de los resultados que por otro lado obtenía Floquet [Floquet83]. Por este motivo, esta transformación lleva el nombre de estos dos profesores.

Esta conclusión, a la que llegaron ambos, surgió de la necesidad de obtener una representación equivalente de un sistema periódico. El equivalente encontrado a través de la transformación tiene la forma de un sistema invariante con el tiempo y ésta es precisamente su principal virtud, ya que a este sistema transformado se le pueden aplicar todas las técnicas de análisis y control para esta clase de modelos. El planteamiento es el siguiente: Considere la ecuación homogénea del sistema periódico

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \tag{2.50}$$

Utilizando la transformación de Floquet-Lyapunov, que está definida por el cambio a las nuevas coordenadas $z(t)$ dado por

$$x(t) = P(t)z(t) \tag{2.51}$$

Donde la matriz $P(t)$ es de período T y se obtiene a través de la expresión (2.44). Con lo anterior se puede llegar a una nueva representación del sistema original dado por (2.50),

que tiene la siguiente forma

$$\dot{z}(t) = Rz(t) \quad (2.52)$$

como sigue: Partiendo de (2.51) y derivando esta expresión con respecto al tiempo se tiene

$$\dot{x}(t) = \dot{P}(t)z(t) + P(t)\dot{z}(t) \quad (2.53)$$

despejando $\dot{z}(t)$

$$\dot{z}(t) = P^{-1}(t) \left[\dot{x}(t) - \dot{P}(t)z(t) \right] \quad (2.54)$$

Es posible derivar la expresión de la descomposición de Floquet $\phi(t) = P(t)e^{Rt}$, para obtener

$$\dot{\phi}(t) = \dot{P}(t)e^{Rt} + P(t)Re^{Rt} \quad (2.55)$$

despejando $\dot{P}(t)$

$$\dot{P}(t) = \left[\dot{\phi}(t) - P(t)Re^{Rt} \right] e^{-Rt} \quad (2.56)$$

Sustituyendo la propiedad de la matriz de transición dada por $\dot{\phi}(t) = A(t)\phi(t)$ y cancelando los términos semejantes se llega a lo siguiente

$$\dot{P}(t) = A(t)\phi(t)e^{-Rt} - P(t)R \quad (2.57)$$

Por lo tanto, al sustituir (2.57) y (2.50), en (2.54), se obtiene

$$\dot{z}(t) = P^{-1}(t) \left[A(t)x(t) - (A(t)\phi(t)e^{-Rt} - P(t)R) z(t) \right] \quad (2.58)$$

Al reordenar los términos

$$\dot{z}(t) = P^{-1}(t)A(t)x(t) - P^{-1}(t)A(t)\phi(t)e^{-Rt}z(t) + Rz(t) \quad (2.59)$$

Despejando $z(t)$ de la transformación de Floquet-Lyapunov se obtiene la siguiente expresión

$$\begin{aligned} x(t) &= P(t)z(t) \\ z(t) &= P^{-1}(t)x(t) \end{aligned} \quad (2.60)$$

Sustituyendo $z(t)$ en (2.59)

$$\dot{z}(t) = P^{-1}(t)A(t)x(t) - P^{-1}(t)A(t)\phi(t)e^{-Rt}P^{-1}(t)x(t) + Rz(t) \quad (2.61)$$

Si se toma en cuenta que $\phi^{-1}(t) = e^{-Rt}P^{-1}(t)$ y se sustituye en (2.61), es fácil ver que los dos primeros términos se cancelan entre sí y con esto se llega a la siguiente representación equivalente del sistema original

$$\dot{z}(t) = Rz(t) \quad (2.62)$$

Ahora, es posible utilizar en lugar de $P(t)$, la matriz $L(t)$, de período $2T$ y que se obtiene usando la siguiente expresión denominada descomposición real de Floquet.

$$L(t) = \phi(t)e^{-R_1t} \quad (2.63)$$

donde la matriz R_1 tiene la propiedad de ser siempre una matriz real y está dada por [Coddington55]

$$R_1 = \frac{1}{2T} \ln \phi(2T) \quad (2.64)$$

Al utilizar la matriz $L(t)$ en la transformación de Floquet-Lyapunov

$$x(t) = L(t)z(t) \quad (2.65)$$

es posible obtener una representación del sistema original que es invariante con el tiempo y que es completamente real

$$\dot{z}(t) = R_1z(t) \quad (2.66)$$

La ecuación dada por (2.63), se obtiene de la descomposición real de Floquet que se representa mediante la siguiente expresión

$$\phi(t) = L(t)e^{R_1t} \quad (2.67)$$

Estas dos transformaciones permiten simplificar el sistema periódico original a uno invariante con el tiempo que además permite la aplicación de la amplia gama de herramientas

de análisis para este tipo de sistemas.

Capítulo 3

Cálculo de Estado Estable

En este capítulo se presenta una metodología para obtener el estado estable de sistemas lineales periódicos, haciendo énfasis en los convertidores de potencia. Esta es una alternativa diferente a los métodos tradicionales ya que el procedimiento completo está basado en la descomposición de Floquet y es precisamente esta característica la que permite obtener expresiones directas para la solución de estado estable en sistemas excitados por funciones periódicas.

La metodología es ilustrada a través de la obtención de la respuesta de estado estable en dos casos de estudio, el primero de ellos es el convertidor elevador (Boost) y el segundo es el convertidor resonante (Single Ended).

3.1. Introducción

Los convertidores de potencia son dispositivos cuya utilización ha ido en crecimiento en los últimos años, abarcando desde aplicaciones en electrodomésticos hasta aplicaciones industriales en diversos campos, pero especialmente en los sistemas de generación, transmisión y distribución de energía eléctrica.

El análisis de estos convertidores es importante desde el punto de vista teórico y práctico, por lo tanto, la creciente utilización de estos circuitos en la red eléctrica y su rango tan amplio de aplicaciones han creado la necesidad de contar no solamente con mejores convertidores, sino también con mejores herramientas para entender y describir su comportamiento de una manera más precisa. Una de estas herramientas es la que comúnmente se conoce como el cálculo de estado estable. Normalmente, las formas de onda de corriente y voltaje en estado estable están compuestas por armónicos, que son señales periódicas que tienen una frecuencia que es un múltiplo entero de la frecuencia fundamental. Por esta razón, el análisis de estas componentes es importante para entender la contribución que tiene cada una en el estado estable.

Durante las últimas dos décadas se han hecho contribuciones importantes al área del análisis armónico de convertidores de potencia, [Bohmann89], [Jalali94]. Existen modelos que describen adecuadamente su comportamiento y se cuenta actualmente con procedimientos establecidos para su análisis. Sin embargo, este sigue siendo un tema interesante para muchos investigadores [Bramilla10], en donde la posibilidad de hacer contribuciones sigue latente debido a la complejidad de los algoritmos de análisis y su lenta adopción por parte de la industria [Arrillaga08]. Actualmente, los paquetes computacionales más utilizados, como ATP, P-Spice o PSCAD, no incluyen algoritmos para el análisis armónico como parte de su conjunto principal de rutinas.

La mayoría de los métodos de análisis armónico, [Semlyen88], [Perkins95], [Semlyen95], [Lima03], [Noda04], presentan enfoques de solución de estado estable mediante una aproxi-

mación numérica. En este capítulo se hace un tratamiento especial de la solución general para un sistema lineal variante con el tiempo, con la intención de proveer de expresiones analíticas para su uso en el cálculo de estado estable y en el análisis armónico. La descomposición de Floquet juega un papel fundamental en este procedimiento y su uso permite obtener una solución cerrada para un sistema sujeto a una entrada periódica. A modo de comparación y con la intención de validar la efectividad de la metodología, se utiliza la simulación por **fuerza bruta** que consiste en resolver numéricamente las ecuaciones diferenciales que describen al sistema hasta que el transitorio desaparezca, encontrando así las condiciones iniciales a partir de las cuales el sistema se encuentra en estado estable [Watson03].

3.2. Convertidores Electrónicos como Sistemas Periódicos

Los convertidores electrónicos de potencia están compuestos normalmente por circuitos lineales que son controlados a través de interruptores que cambian su estado periódicamente entre varias configuraciones. Es precisamente esta característica la que arroja coeficientes dependientes del tiempo en las ecuaciones diferenciales que describen su dinámica. De manera compacta, la ecuación que describe el comportamiento de estos circuitos se puede representar mediante, [Rashid10]

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + U(t) \quad (3.1)$$

en donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados y A es una matriz de orden $n \times n$ que contiene coeficientes periódicos variantes con el tiempo que cumplen con la siguiente propiedad

$$A(t) = A(t + T) \text{ para } kT \leq t \leq (k + 1)T \quad (3.2)$$

donde T es el período fundamental y $k \in \mathbb{Z}$. Por otro lado, $U(t)$ es un vector de entradas de orden $n \times 1$ y también exhibe un comportamiento periódico. La matriz $A(t)$ y el vector

de entradas $U(t)$ se pueden representar de manera generalizada mediante

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$U(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) & \cdots & u_n(t) \end{bmatrix}^T \quad (3.4)$$

El análisis que se plantea en este capítulo sólo considera el estado estable periódico del modelo descrito por (3.1); es decir, cuando el convertidor ha alcanzado su estado estable y su solución satisface la siguiente condición

$$x(t) = x(t + T) \text{ para } kT \leq t \leq (k + 1)T \quad (3.5)$$

A continuación se plantea la metodología para obtener una expresión que describa la respuesta completa periódica de un convertidor de potencia para entonces poder calcular su estado estable.

3.3. Respuesta Completa de un Sistema Periódico

Considere el siguiente sistema periódico de orden n

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (3.6)$$

y por simplicidad considere que el producto de $B(t)u(t) = f(t)$ y que el tiempo inicial es cero ($t_0 = 0$). La solución general del sistema dado en (3.6) se puede escribir como

$$x(t) = \phi(t, 0)x_0 + \int_0^t \phi(t, \tau)f(\tau) d\tau \quad (3.7)$$

De la solución (3.7), usando las propiedades de la matriz de transición presentadas en la sección 2.2.2 y denotando $\phi(t, 0) = \phi(t)$, podemos descomponer la matriz de transición que

aparece dentro de la integral para llegar a lo siguiente

$$x(t) = \phi(t)x_0 + \phi(t) \int_0^t \phi^{-1}(\tau)f(\tau) d\tau \quad (3.8)$$

Ahora, introduciendo las siguientes expresiones de la descomposición de Floquet

$$\phi(t) = P(t)e^{Rt} \quad (3.9)$$

$$\phi^{-1}(t) = e^{-Rt}P^{-1}(t) \quad (3.10)$$

y sustituyéndolas en (3.8), se puede reescribir la solución como

$$x(t) = P(t)e^{Rt}x_0 + P(t)e^{Rt} \int_0^t e^{-R\tau}P^{-1}(\tau)f(\tau) d\tau \quad (3.11)$$

En este punto es importante notar que primer término de (3.11) es la solución del sistema homogéneo, también conocida como solución complementaria $x_c(t)$ o no forzada, sujeto a la condición inicial $x(0) = x_0$, esto es

$$x_c(t) = P(t)e^{Rt}x_0 \quad (3.12)$$

Se puede concluir que esta solución no forzada del sistema será periódica si y sólo si $R = 0$. También podemos ver que si R tiene valores propios con parte real negativa, entonces el sistema es asintóticamente estable y la solución no forzada desaparecerá con el tiempo.

El segundo término de (3.11) representa a la respuesta forzada de la solución, conocida también como solución particular y será la única que prevalezca al transcurrir el tiempo si el sistema es asintóticamente estable, por esta razón también se conoce como la respuesta de estado estable del sistema.

$$x_p(t) = P(t)e^{Rt} \int_0^t e^{-R\tau}P^{-1}(\tau)f(\tau) d\tau \quad (3.13)$$

En este punto, se puede hacer uso de la expansión en series de Fourier para obtener una

representación de las matrices periódicas $P(t)$ y $P^{-1}(t)$ a través de las siguientes relaciones

$$P(t) = \sum_{m=-h}^h \bar{P}_m e^{jm\omega_0 t} \quad (3.14)$$

$$P^{-1}(t) = \sum_{k=-h}^h \hat{P}_k e^{jk\omega_0 t} \quad (3.15)$$

en donde ω_0 es la frecuencia angular fundamental $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, h es el número de armónicos considerados en la serie, \bar{P}_m y \hat{P}_k son los coeficientes de la expansión en series de Fourier de $P(t)$ y $P^{-1}(t)$ respectivamente. Al mismo tiempo, se puede hacer uso del teorema de Sylvester descrito en [D'Angelo70] y expresar los términos e^{Rt} y e^{-Rt} de la siguiente forma

$$e^{Rt} = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} Z_i \quad (3.16)$$

$$e^{-Rt} = \sum_{i=1}^n e^{-\lambda_i t} Z_i \quad (3.17)$$

Donde la variable λ_i representa a los valores propios de la matriz R que proviene de la descomposición de Floquet. La matriz Z_i corresponde a los covariantes de Frobenius de R y n es el orden del sistema.

Considerando un caso más general, en el que el vector de entrada $f(t)$ es periódico pero con una frecuencia fundamental diferente ω_i a la del sistema en cuestión, se puede llevar a cabo la expansión en series de Fourier de esta entrada

$$f(t) = \sum_{l=-h}^h F_l e^{jl\omega_i t} \quad (3.18)$$

y si se sustituye (3.15), (3.17) y (3.18) en la solución particular (3.13), se llega a lo siguiente

$$x_p(t) = P(t) e^{Rt} \int_0^t \left(\sum_{i=1}^n e^{-\lambda_i \tau} Z_i \right) \left(\sum_{k=-h}^h \hat{P}_k e^{jk\omega_0 \tau} \right) \left(\sum_{l=-h}^h F_l e^{jl\omega_i \tau} \right) d\tau \quad (3.19)$$

Agrupando las sumatorias como una sumatoria triple anidada y moviendo la integral dentro

de las sumatorias, se obtiene

$$x_p(t) = P(t)e^{Rt} \sum_{i=1}^n \sum_{k=-h}^h \sum_{l=-h}^h \left(Z_i \hat{P}_k F_l \int_0^t e^{(-\lambda_i + jk\omega_0 + jl\omega_i)\tau} d\tau \right) \quad (3.20)$$

llevando a cabo la integral, se llega a la siguiente expresión

$$x_p(t) = P(t)e^{Rt} \sum_{i=1}^n \sum_{k=-h}^h \sum_{l=-h}^h \left(Z_i \hat{P}_k F_l \frac{e^{(-\lambda_i + jk\omega_0 + jl\omega_i)t} - 1}{(-\lambda_i + jk\omega_0 + jl\omega_i)} \right) \quad (3.21)$$

es decir

$$x_p(t) = P(t)e^{Rt} \sum_{i=1}^n \sum_{k=-h}^h \sum_{l=-h}^h Z_i \hat{P}_k F_l \frac{e^{(-\lambda_i + jk\omega_0 + jl\omega_i)t}}{(-\lambda_i + jk\omega_0 + jl\omega_i)} - P(t)e^{Rt} K \quad (3.22)$$

de donde se puede observar que K queda definida como

$$K = \sum_{i=1}^n \sum_{k=-h}^h \sum_{l=-h}^h \frac{Z_i \hat{P}_k F_l}{(-\lambda_i + jk\omega_0 + jl\omega_i)} \quad (3.23)$$

a partir de aquí se pueden reemplazar los términos $P(t)$ y e^{Rt} utilizando la serie de Fourier (3.14) y el teorema de Sylvester (3.16) respectivamente

$$x_p(t) = \left(\sum_{m=-h}^h \bar{P}_m e^{jm\omega_0 t} \right) \left(\sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} Z_i \right) \sum_{i=1}^n \sum_{k=-h}^h \sum_{l=-h}^h Z_i \hat{P}_k F_l \frac{e^{(-\lambda_i + jk\omega_0 + jl\omega_i)t}}{(-\lambda_i + jk\omega_0 + jl\omega_i)} - P(t)e^{Rt} K \quad (3.24)$$

Al hacer uso de las siguientes propiedades de las matrices Z_i del teorema de Sylvester [D'Angelo70]

$$\begin{aligned} Z_i^2 &= Z_i \\ Z_i Z_j &= 0, \text{ para } i \neq j \end{aligned} \quad (3.25)$$

podemos simplificar la expresión de la solución particular y obtener

$$x_p(t) = \sum_{m=-h}^h \sum_{i=1}^n \sum_{k=-h}^h \sum_{l=-h}^h \left(\bar{P}_m Z_i \hat{P}_k F_l \frac{e^{j(m\omega_0 + k\omega_0 + l\omega_i)t}}{(-\lambda_i + jk\omega_0 + jl\omega_i)} - P(t)e^{Rt} K \right) \quad (3.26)$$

Las siguientes observaciones se pueden hacer acerca de la solución particular obtenida en (3.26):

- Si la parte real de todos los valores propios de la matriz R es negativa, entonces el segundo término en (3.26) tiende a cero conforme $t \rightarrow \infty$. Por otro lado, si la parte real es negativa, entonces la solución crece sin límite a medida que $t \rightarrow \infty$.
- El estado estable general es aperiódico a menos que ω_0 y ω_i sean múltiplos entre sí.
- Aun cuando la respuesta completa de estado estable se puede evaluar completamente de manera analítica utilizando (3.26), esto depende de la disponibilidad de una expresión exacta de la matriz de transición $\phi(t)$. En los casos de estudio subsecuentes, esta matriz se calcula a través de una aproximación numérica, haciendo que este enfoque pueda ser considerado como semianalítico.

Tomando en cuenta las observaciones anteriores, la solución particular dada por (3.26) se puede expresar de la siguiente manera con la intención de obtener una expresión simbólica para el estado estable de la solución

$$x_{ss}(t) = \sum_{m=-h}^h \sum_{i=1}^n \sum_{k=-h}^h \sum_{l=-h}^h \bar{P}_m Z_{\lambda_i} \hat{P}_k F_l \frac{e^{j(m\omega_0+k\omega_0+l\omega_i)t}}{(-\lambda_i+jk\omega_0+jl\omega_i)} \quad (3.27)$$

La expresión (3.27) es una ecuación completamente simbólica y algebraica que puede ser evaluada con un paquete computacional como Mathematica. También es importante notar que puede ser evaluada en un orden arbitrario, o bien específico con la intención de calcular los coeficientes armónicos de manera independiente; es decir, llevar a cabo las multiplicaciones matriciales involucradas de tal forma que la suma $m + k + l$ sea igual al armónico de interés.

3.4. Casos de Estudio

A continuación se muestra el uso de la relación (3.27) para encontrar el estado estable en dos convertidores de potencia. El primer caso de estudio corresponde al convertidor elevador, conocido también como convertidor tipo Boost. El segundo es un convertidor

resonante (Single Ended). Estos convertidores se encuentran presentes en muchos dispositivos electrónicos de la actualidad y su análisis es importante para la industria y para los diseñadores de este tipo de circuitos. Por esta razón se han escogido estas dos configuraciones como ejemplos para ilustrar la metodología descrita anteriormente, además de que al modelarlos, las ecuaciones que describen al sistema presentan la estructura requerida por el procedimiento. Los resultados, en ambos casos de estudio, son comparados con simulaciones por fuerza bruta con la intención de validar la efectividad de la metodología.

3.4.1. Convertidor Elevador (Boost)

La Figura 3.1 muestra la configuración del circuito lineal de un convertidor elevador [Ang95]. Una de las principales características de este tipo de convertidores es la presencia

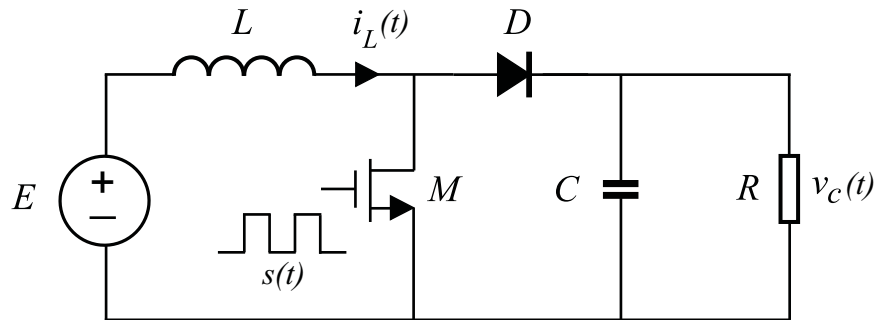


Figura 3.1: Diagrama esquemático de la configuración de un convertidor elevador tipo Boost.

de dispositivos que funcionan como interruptores, en este caso, el transistor M . La función de conmutación para este transistor puede ser definida de la siguiente forma

$$s(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 \leq t \leq T_D \\ 1 & \text{para } T_D \leq t \leq T \\ s(t-T) & \text{para todo } t > T \end{cases} \quad (3.28)$$

en donde T es el período de conmutación y T_D es el tiempo en el que el transistor está cerrado. Las ecuaciones que describen la dinámica de este convertidor se pueden escribir en

forma compacta como sigue

$$A(t) = \begin{bmatrix} -\frac{R_s(1-s(t))+R_D s(t)}{L} & -\frac{s(t)}{L} \\ \frac{s(t)}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

$$U(t) = \begin{bmatrix} \frac{E-s(t)V_f}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Podemos observar como la función de conmutación $s(t)$ aparece explícitamente como un coeficiente en las matrices $A(t)$ y $U(t)$, lo cual concuerda con la forma de un sistema descrito por (3.1). Dentro de la matriz $A(t)$, el coeficiente R_s representa la resistencia en conducción del transistor, R_D se utiliza para definir la resistencia en conducción del diodo y V_f es su caída de voltaje en conducción. El vector de estados para el convertidor tipo boost es el siguiente

$$x(t) = \begin{bmatrix} i_L(t) & v_C(t) \end{bmatrix}^T \quad (3.31)$$

en el cual se tienen como elementos a la corriente en el inductor $i_L(t)$ y el voltaje en el capacitor $v_C(t)$. En la Tabla 3.1 se dan los parámetros del convertidor.

La obtención de la matriz de transición para este caso de estudio fue hecha mediante la

Tabla 3.1: Parámetros de simulación para el convertidor elevador tipo Boost.

Parámetro	Valor
Inductancia (L)	0.2 mH
Capacitancia (C)	0.2 mF
Resistencia (R)	12.5 Ω
Fuente de Voltaje (E)	16 V
Caída de Voltaje en Diodo (V_f)	0.8 V
Período de Conmutación (T)	100 μs
Tiempo en alto (T_D)	50 μs
Resistencia del Transistor (R_S)	0.001 Ω
Resistencia del Diodo (R_D)	0.001 Ω

solución de forma numérica de la ecuación diferencial descrita por (2.22). La Figura 3.2 muestra el comportamiento de cada uno de los elementos de la matriz de transición para el convertidor Boost a lo largo de un período.

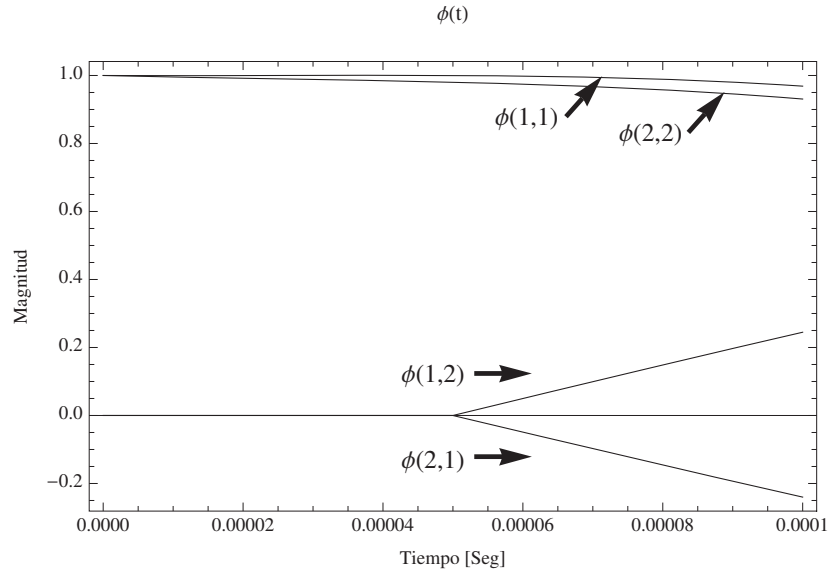


Figura 3.2: Evolución de los elementos de la matriz $\phi(t)$ del convertidor Boost a través de un período T .

Utilizando la descomposición de Floquet definida en (3.9), es posible calcular las matrices R y $P(t)$. Es necesario obtener la matriz de monodromía $\phi(T)$ para iniciar el procedimiento y encontrar R . En este caso, al evaluar $\phi(T)$ se tiene

$$\phi(T) = \begin{bmatrix} 0.968 & 0.240 \\ 0.244 & 0.930 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

La matriz dada por (3.32) tiene los siguientes valores propios $\lambda_1 = 0.949 + 0.24i$, $\lambda_2 = 0.949 - 0.24i$ y con estos es posible obtener una matriz V que lleve en sus columnas los

vectores propios asociados. La matriz V queda definida entonces de la siguiente manera

$$V = \begin{bmatrix} 0.055 + 0.701i & 0.055 - 0.701i \\ 0.710 & 0.710 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Habiendo obtenido la matriz V , podemos sustituir (3.33) y su inversa en la ecuación (2.49), siendo D una matriz cuadrada que lleva el logaritmo natural de los valores propios λ_1 y λ_2 en su diagonal, para obtener $\ln \phi(T)$

$$\ln \phi(T) = \begin{bmatrix} -0.000706 & -0.247531 \\ 0.252469 & -0.039793 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Entonces, sustituyendo (3.34) en la expresión (2.47), es posible obtener la matriz R para este convertidor

$$R = \begin{bmatrix} -7.06 & -2475.31 \\ 2524.69 & -397.93 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Teniendo el valor de la matriz R , se puede encontrar la matriz periódica $P(t)$ a través de (2.44). La expresión en el tiempo para la matriz $P(t)$ es larga, así que para efectos de mostrar su forma, sólo se incluyen los primeros términos de cada uno de sus elementos, obteniéndose lo siguiente

$$\begin{aligned} P_{1,1}(t) &= 0.997424 + 0.0031374 \cos(62831.9 t) - 0.000789818 \cos(125664 t) \dots \\ P_{1,2}(t) &= 0.0624174 - 0.0505419 \cos(62831.9 t) - 0.000049954 \cos(125664 t) \dots \\ P_{2,1}(t) &= -0.0624159 + 0.0505413 \cos(62831.9 t) + 0.0000489003 \cos(125664 t) \dots \\ P_{2,2}(t) &= 0.997372 + 0.00318833 \cos(62831.9 t) - 0.000789843 \cos(125664 t) \dots \end{aligned} \quad (3.36)$$

La evolución en el tiempo de los elementos de $P(t)$ se muestran en la Figura 3.3, en donde podemos observar el comportamiento periódico de todos sus elementos. La Figura 3.4 muestra el comportamiento de la corriente en el inductor L durante un período de tiempo

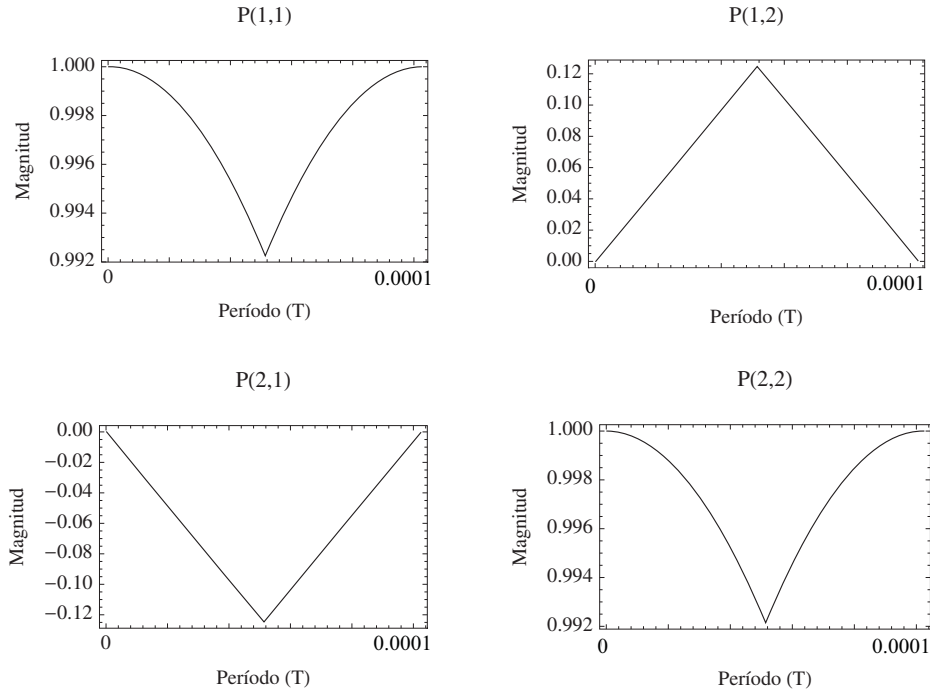


Figura 3.3: Elementos de la matriz $P(t)$ del convertidor Boost a través de un período T .

T , calculada a través de la expresión simbólica para el estado estable definida en (3.27) y mediante la solución por fuerza bruta. Cabe mencionar que en la Figura 3.4 sólo se muestra una ventana de tiempo correspondiente a un período fundamental en estado estable, en donde el transitorio ya desapareció. El tiempo mostrado en el eje horizontal sólo ilustra la evolución de ese período en particular; es decir, no corresponde con el tiempo total de evolución del sistema. Podemos observar como usando un número de armónicos $h = 15$ para llevar a cabo el cálculo simbólico, se obtienen resultados acertados en comparación con la solución numérica. También es posible observar el efecto del número de armónicos considerados en la aproximación. La Figura 3.5 muestra la comparación de los resultados obtenidos al usar $h = 1$ y $h = 8$. Se incluye también la solución numérica a modo de referencia.

Por último, en la Figura 3.6 se muestra el comportamiento de los dos estados $i_L(t)$ y $v_C(t)$

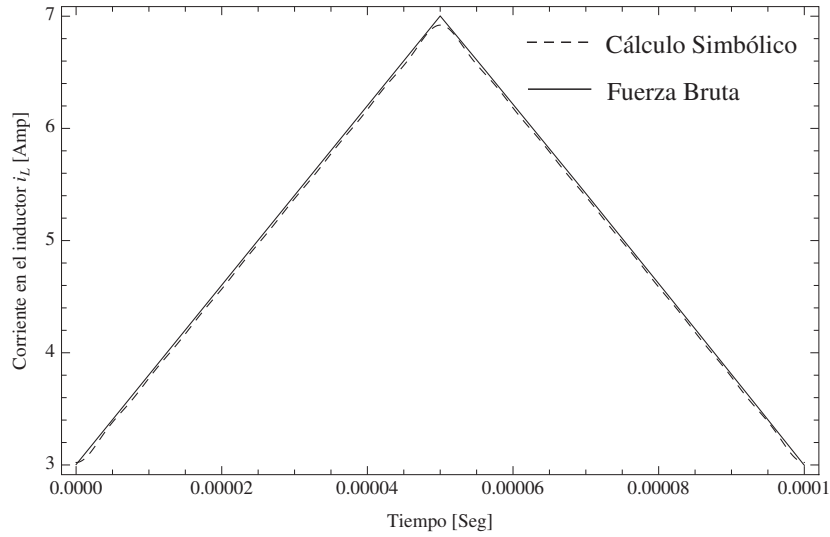


Figura 3.4: Comportamiento de $i_L(t)$ mediante el cálculo simbólico de estado estable y por simulación por fuerza bruta para el convertidor Boost.

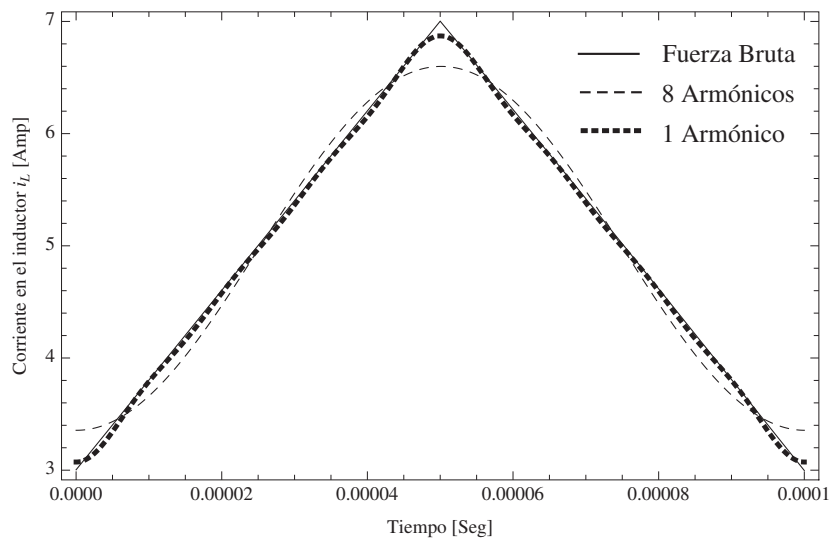


Figura 3.5: Comparación basada en el número de armónicos considerados en el cálculo simbólico del estado estable para $i_L(t)$.

a lo largo de un período T , utilizando el cálculo de estado estable de manera simbólica y mediante su solución numérica. Se puede constatar que las soluciones están sobrepuestas,

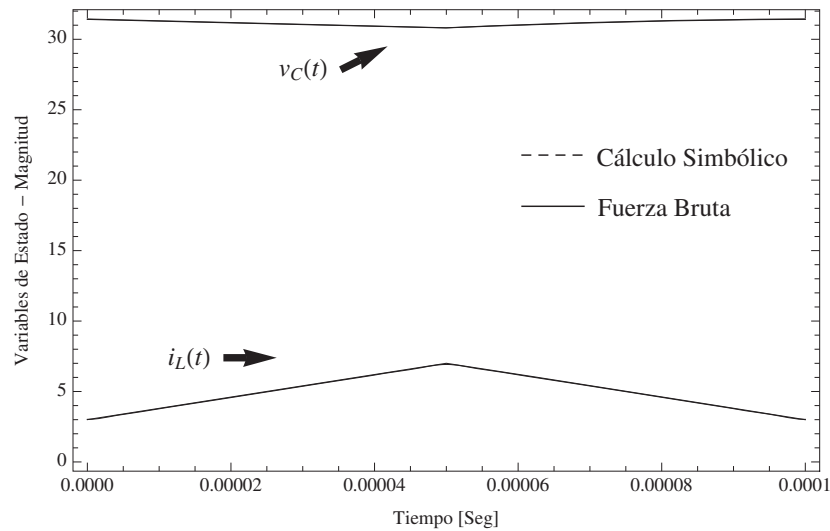


Figura 3.6: Comportamiento de $i_L(t)$ y $v_C(t)$ mediante el cálculo simbólico de estado estable y por simulación por fuerza bruta para el convertidor Boost.

mostrando una reproducción exacta de los valores del estado estable mediante el cálculo simbólico a través de la expresión (3.27).

3.4.2. Convertidor Resonante (Single Ended)

La Figura 3.7 muestra la configuración del circuito para un convertidor resonante tipo Single Ended. Del mismo modo que en el caso del convertidor elevador, la configuración cuenta con elementos que conmutan con el tiempo, tal es el caso del transistor M sujeto a la función de conmutación $c(t)$. La función de conmutación está definida de

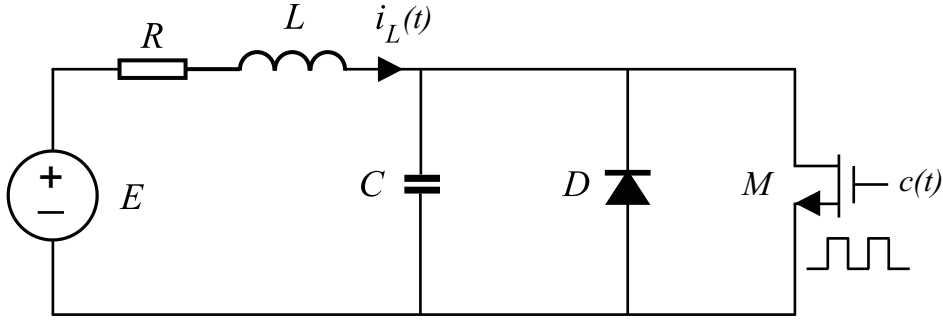


Figura 3.7: Diagrama esquemático de la configuración de un convertidor resonante tipo Single Ended.

manera similar que para el caso del convertidor boost y se muestra a continuación,

$$c(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 \leq t \leq T_D \\ 1 & \text{para } T_D \leq t \leq T \\ c(t-T) & \text{para todo } t > T \end{cases} \quad (3.37)$$

en donde de nueva cuenta el período de conmutación está representado por la letra T y el período de conducción por T_D . Las ecuaciones diferenciales que describen la dinámica de este circuito pueden ser representadas de manera compacta a través de las siguientes matrices

$$A(t) = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1-c(t)}{L} \\ \frac{1-c(t)}{C} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

$$U(t) = \begin{bmatrix} \frac{E}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

El hecho de que la función de conmutación $c(t)$ esté presente en los elementos de la matriz $A(t)$, convierte a este sistema en un sistema lineal variante con el tiempo de la forma descrita por (3.1).

El vector de estados para este convertidor es el mismo que para el convertidor elevador,

el cual está definido por la expresión (3.31). Los parámetros utilizados en la simulación se muestran en la Tabla 3.2.

Tal y como se realizó en el caso de estudio anterior, la obtención de la matriz de transición permite realizar la descomposición de Floquet, representando el punto de partida en el procedimiento. El sistema de ecuaciones planteado en (2.22), permite encontrar la matriz de transición para este convertidor. En este caso, se utilizó una solución numérica para resolver el sistema. La Figura 3.8 muestra el comportamiento de los elementos de la matriz $\phi(t)$ a través de un período.

De esta forma, con las expresiones dadas por la descomposición de Floquet (3.9) y (2.47), podemos calcular R y $P(t)$ para este convertidor resonante. Del mismo modo que en el caso de estudio anterior, es necesario obtener la matriz de monodromía $\phi(T)$ para iniciar el procedimiento y encontrar R . En este caso, al evaluar $\phi(T)$ se tiene

$$\phi(T) = \begin{bmatrix} 0.143 & 0.024 \\ -7.771 & 0.110 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

La matriz dada por (3.40) tiene los siguientes valores propios $\lambda_1 = 0.126 + 0.434i$, $\lambda_2 = 0.126 - 0.434i$ y con estos es posible obtener una matriz V que lleve en sus columnas los

Tabla 3.2: Parámetros de simulación para el convertidor resonante tipo Single Ended.

Parámetro	Valor
Inductancia (L)	50 μ H
Capacitancia (C)	16 nF
Resistencia (R)	5 Ω
Fuente de Voltaje (E)	100 V
Frecuencia de Conmutación (f_s)	63 kHz
Ciclo de Trabajo (d)	0.3

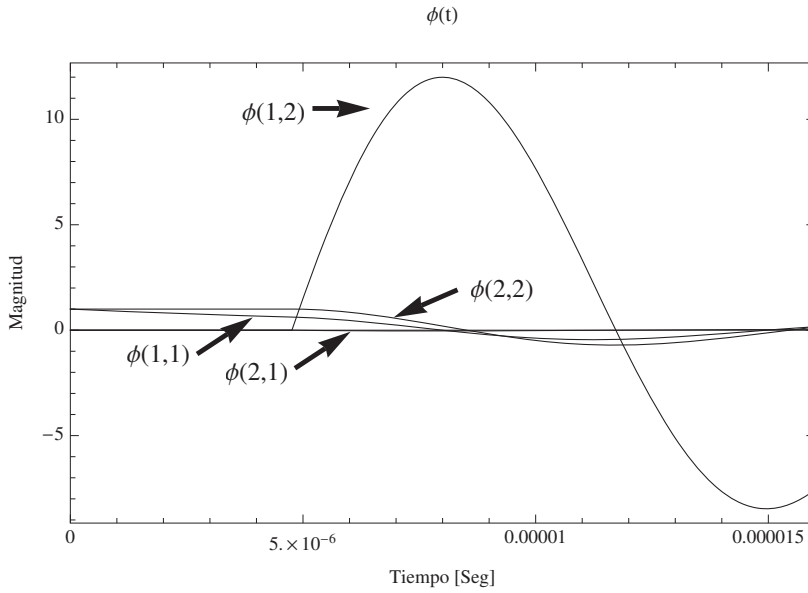


Figura 3.8: Evolución de los elementos de la matriz $\phi(t)$ del convertidor Single Ended a través de un período T .

vectores propios asociados. La matriz V queda definida de la siguiente manera

$$V = \begin{bmatrix} -0.002 - 0.055i & -0.002 + 0.055i \\ 0.998 & 0.998 \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

Teniendo los valores de V , podemos sustituir (3.41) y su inversa en la ecuación (2.49), siendo D una matriz cuadrada que lleva el logaritmo natural de los valores propios λ_1 y λ_2 en su diagonal, para obtener $\ln \phi(T)$

$$\ln \phi(T) = \begin{bmatrix} -0.743734 & 0.0719411 \\ -23.033 & -0.843567 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

Al sustituir (3.42) en la expresión (2.47), es posible obtener la matriz R para este convertidor

resonante. Los elementos de la matriz R son

$$R = \begin{bmatrix} -46855.3 & 4532.3 \\ -1451130 & -53144.7 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

Los elementos de la matriz $P(t)$ sobre un período de conmutación se ilustran en la Figura 3.9. Se puede apreciar como los cuatro elementos son efectivamente periódicos, como era de

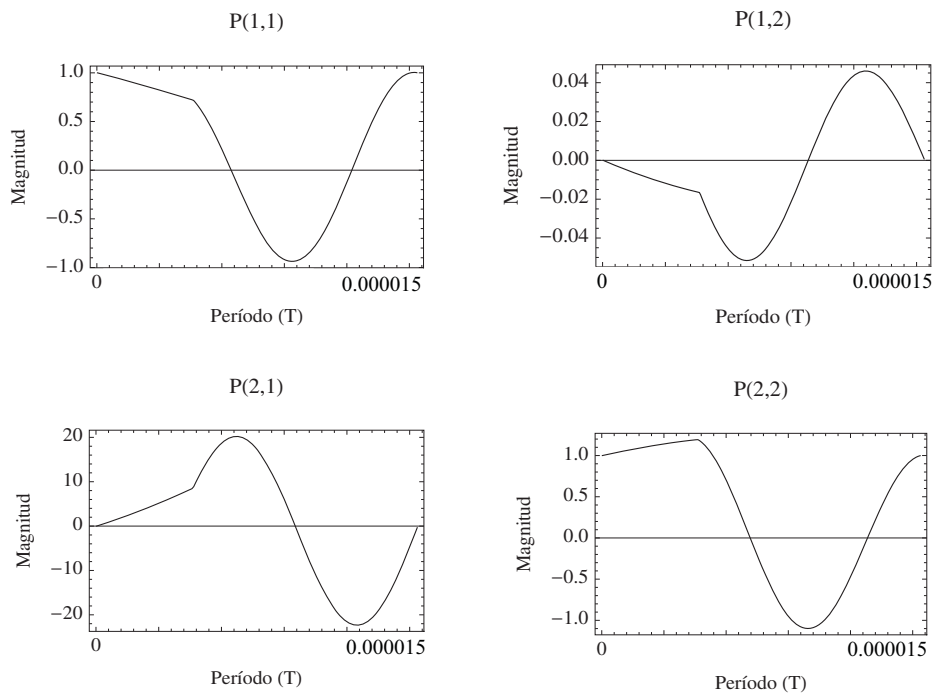


Figura 3.9: Elementos de $P(t)$ para el convertidor resonante a través de un período T .

esperarse. La expresión en el tiempo para la matriz $P(t)$ contiene muchos términos, es por esto que para ilustrar su forma, sólo se incluyen los primeros en cada uno de sus elementos,

como se muestra a continuación

$$\begin{aligned}
 P_{1,1}(t) &= 0.216119 + 0.767918 \cos(395841 t) - 0.00385673 \cos(791681 t) \\
 P_{1,2}(t) &= -0.00409993 + 0.0263914 \cos(395841 t) - 0.0169893 \cos(791681 t) \\
 P_{2,1}(t) &= 0.329585 - 10.4324 \cos(395841 t) + 7.06197 \cos(791681 t) \\
 P_{2,2}(t) &= 0.29312 + 0.640601 \cos(395841 t) + 0.0418218 \cos(791681 t)
 \end{aligned}
 \tag{3.44}$$

La Figura 3.10 muestra el comportamiento de los estados $i_L(t)$ y $v_C(t)$ en su estado estable, habiéndose calculado al evaluar la expresión simbólica (3.27) y mediante una aproximación numérica por fuerza bruta.

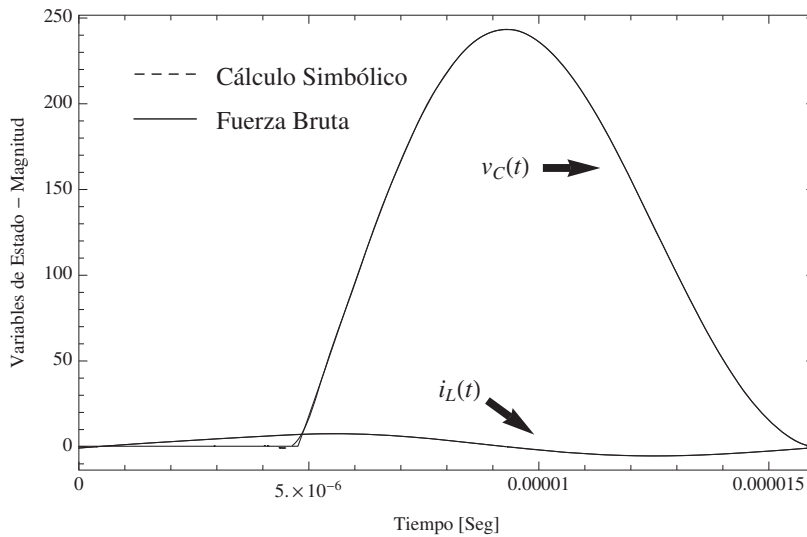


Figura 3.10: Comportamiento de $i_L(t)$ y $v_C(t)$ mediante el cálculo simbólico de estado estable y por simulación por fuerza bruta para el convertidor resonante.

La Figura 3.10 sólo se muestra una ventana de tiempo correspondiente a un período fundamental en estado estable, en donde el transitorio ya desapareció. El tiempo mostrado en el eje horizontal sólo ilustra la evolución de ese período en particular; es decir, no corresponde con el tiempo total de evolución del sistema. Para llevar a cabo la simulación del convertidor

resonante, también se utilizó un número de armónicos $h = 15$. Del mismo modo que para el caso de estudio del convertidor elevador, las dos soluciones obtenidas están sobrepuestas, indicando una reproducción exacta por parte del cálculo simbólico del estado estable en comparación con la obtención por simulación numérica.

El efecto que tiene el número de armónicos considerados en la aproximación puede apreciarse en la Figura 3.11, en donde se muestra la comparación de los resultados obtenidos al usar $h = 4$ y $h = 8$, también se incluye la solución numérica a modo de referencia.

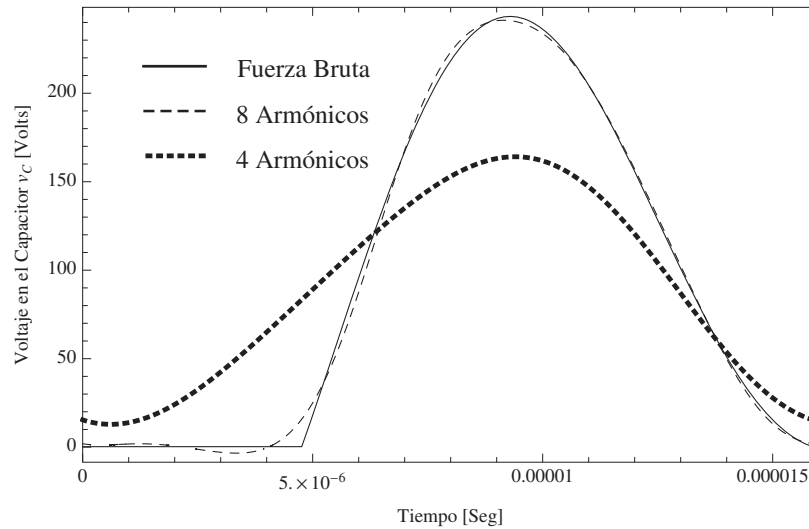


Figura 3.11: Comparación basada en el número de armónicos considerados en el cálculo simbólico del estado estable para $v_C(t)$.

Se puede observar como la descomposición de Floquet es el ingrediente principal en este procedimiento, permitiendo obtener expresiones simbólicas para el cálculo de estado estable en este tipo de convertidores. En este contexto, la teoría de Floquet brinda una amplia gama de herramientas para mejorar los análisis de estado estable que, hoy por hoy, son basados en su gran mayoría en procedimientos numéricos. Un ejemplo de esto es la posibilidad que brinda la ecuación (3.27) de calcular de manera separada cada coeficiente armónico,

evitando así la obtención de armónicos no característicos en el sistema deseado.

Es importante mencionar que en este capítulo no se incorporó alguna técnica de control para los convertidores basada en la teoría de Floquet. Lo anterior se debe en gran medida a que las ecuaciones diferenciales que describen la dinámica de los convertidores contienen funciones de conmutación que se caracterizan por ser poco suaves en su forma; es decir, tienen cambios abruptos inherentes al accionar del transistor. Aunado a esto, al incluir la parte correspondiente al control en las ecuaciones del sistema, se ha llegado a obtener un nuevo sistema con una estructura diferente a la que se necesita para llevar a cabo las estrategias de control propuestas en los capítulos siguientes, en algunos casos se han obtenido sistemas diferenciales-algebraicos y bilineales.

Capítulo 4

Control de Sistemas Periódicos

En este capítulo se presenta la problemática de diseño de una estrategia de control para los sistemas periódicos. En general, se establecen los detalles de un enfoque de control que utiliza el cálculo de la matriz de transición del sistema para después poder aplicar los conceptos de la descomposición de Floquet y la transformación de Floquet-Lyapunov. Al utilizar la transformación se obtiene un sistema invariante con el tiempo al cual se le aplica la metodología de colocación de polos para lograr la estabilización.

De manera introductoria se plantea formalmente la metodología que introdujo Subhash Sinha en [Sinha94], para después ejemplificarla con dos casos de estudio. El primero de estos casos corresponde al modelo de la ecuación de Mathieu, que sirve como un ejemplo teórico y el segundo al modelo que describe la dinámica del rotor principal de un helicóptero en vuelo frontal. En este segundo caso, la intención del control es estabilizar el ángulo que forman la palas del rotor con el plano de giro de las mismas.

4.1. Metodología de Control para Sistemas Periódicos

Considere el siguiente sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t)\end{aligned}\tag{4.1}$$

En donde el par $(A(t), B(t))$ es controlable y el par $(A(t), C(t))$ es observable. Si al sistema dado por (4.1) se le aplica la transformación lineal de Floquet-Lyapunov dada por

$$x(t) = L(t)z(t)\tag{4.2}$$

donde la matriz $L(t)$ es de período $2T$ y se calcula a través de la descomposición real de Floquet ($\phi(t) = L(t)e^{Rt}$), se obtiene un sistema invariante con el tiempo en su parte homogénea de la siguiente forma

$$\dot{z}(t) = Rz(t) + L^{-1}(t)B(t)u(t)\tag{4.3}$$

El vector que contiene a los nuevos estados transformados se representa mediante $z(t)$. A continuación se muestran los pasos para llegar a este resultado. Derivando la transformación dada por (4.2) se tiene

$$\dot{x}(t) = \dot{L}(t)z(t) + L(t)\dot{z}(t)\tag{4.4}$$

despejando $\dot{z}(t)$

$$\dot{z}(t) = L^{-1}(t) \left[\dot{x}(t) - \dot{L}(t)z(t) \right]\tag{4.5}$$

Ahora, es posible derivar la expresión de la descomposición real de Floquet $\phi(t) = L(t)e^{Rt}$, para obtener

$$\dot{\phi}(t) = \dot{L}(t)e^{Rt} + L(t)Re^{Rt}\tag{4.6}$$

despejando $\dot{L}(t)$

$$\dot{L}(t) = \left[\dot{\phi}(t) - L(t)Re^{Rt} \right] e^{-Rt}\tag{4.7}$$

Utilizando la propiedad de la matriz de transición dada por $\dot{\phi}(t) = A(t)\phi(t)$ y cancelando los términos semejantes se llega a la siguiente expresión

$$\dot{L}(t) = A(t)\phi(t)e^{-Rt} - L(t)R \quad (4.8)$$

Por lo tanto, al sustituir (4.8) y $\dot{x}(t)$ de la expresión (4.1), en (4.5), se obtiene

$$\dot{z}(t) = L^{-1}(t) [A(t)x(t) + B(t)u(t) - (A(t)\phi(t)e^{-Rt} - L(t)R) z(t)] \quad (4.9)$$

Reordenando la expresión anterior se llega a lo siguiente

$$\dot{z}(t) = L^{-1}(t)A(t)x(t) + L^{-1}(t)B(t)u(t) - L^{-1}(t)A(t)\phi(t)e^{-Rt}z(t) + Rz(t) \quad (4.10)$$

Por otro lado, es posible despejar $z(t)$ de la transformación de Floquet-Lyapunov para encontrar la siguiente expresión

$$\begin{aligned} x(t) &= L(t)z(t) \\ z(t) &= L^{-1}(t)x(t) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Sustituyendo $z(t)$ en (4.10)

$$\dot{z}(t) = L^{-1}(t)A(t)x(t) + L^{-1}(t)B(t)u(t) - L^{-1}(t)A(t)\phi(t)e^{-Rt}L^{-1}(t)x(t) + Rz(t) \quad (4.12)$$

Tomando en cuenta que $\phi^{-1}(t) = e^{-Rt}L^{-1}(t)$, se puede sustituir en el tercer término de (4.12) y llegar a

$$\dot{z}(t) = L^{-1}(t)A(t)x(t) + L^{-1}(t)B(t)u(t) - L^{-1}(t)A(t)\phi(t)\phi^{-1}(t)x(t) + Rz(t) \quad (4.13)$$

Cancelando términos se llega a la siguiente representación equivalente del sistema original

$$\dot{z}(t) = Rz(t) + L^{-1}(t)B(t)u(t) \quad (4.14)$$

Es posible observar en la expresión anterior que la parte homogénea pasó a estar formada por la matriz invariante con el tiempo R , lo cual representa una ventaja ya que ahora se pueden considerar técnicas de control para sistemas de esta naturaleza. A partir de este punto, se puede plantear el procedimiento para obtener un controlador que estabilice el

sistema definido por (4.1). Estableciendo el siguiente sistema auxiliar

$$\dot{\bar{z}}(t) = R\bar{z}(t) + \bar{B}v(t) \quad (4.15)$$

en donde la matriz \bar{B} es constante y se propone de forma que el par (R, \bar{B}) sea controlable. Es posible establecer una ley de control para este sistema auxiliar que tenga la siguiente forma

$$v(t) = -\bar{K}\bar{z}(t) \quad (4.16)$$

El error entre el sistema transformado (4.14) y el sistema auxiliar (4.15) queda definido como $e(t) = z(t) - \bar{z}(t)$ y su dinámica se puede describir mediante

$$\dot{e}(t) = Rz(t) + L^{-1}(t)B(t)u(t) - (R\bar{z}(t) + \bar{B}v(t)) \quad (4.17)$$

Si se sustituye la ley de control auxiliar (4.16) en (4.17), se obtiene

$$\dot{e}(t) = Rz(t) + L^{-1}(t)B(t)u(t) - R\bar{z}(t) - \bar{B}(-\bar{K}\bar{z}(t)) \quad (4.18)$$

o bien

$$\dot{e}(t) = Re(t) + L^{-1}(t)B(t)u(t) + \bar{B}\bar{K}\bar{z}(t) \quad (4.19)$$

Sustituyendo $\bar{z}(t)$ en 4.19

$$\dot{e}(t) = Re(t) + L^{-1}(t)B(t)u(t) + \bar{B}\bar{K}(z(t) - e(t)) \quad (4.20)$$

Simplificando se llega a lo siguiente

$$\dot{e}(t) = (R - \bar{B}\bar{K})e(t) + L^{-1}(t)B(t)u(t) + \bar{B}\bar{K}z(t) \quad (4.21)$$

La matriz \bar{K} será calculada para que la matriz $(R - \bar{B}\bar{K})$ sea Hurwitz y por esta razón los sistemas dados por (4.14) y (4.15) se pueden considerar equivalentes en el sentido de mínimos cuadrados si se cumple la siguiente condición

$$L^{-1}(t)B(t)u(t) = -\bar{B}\bar{K}z(t) \quad (4.22)$$

Lo anterior permite encontrar una relación para la acción de control $u(t)$

$$u(t) = -B^*(t)L(t)\bar{B}\bar{K}z(t) \quad (4.23)$$

En donde la matriz B^* es la pseudoinversa de la matriz $B(t)$. Al sustituir $z(t)$ en (4.23), se llega a la expresión de la ley de control en las coordenadas originales

$$u(t) = -B^*(t)L(t)\bar{B}\bar{K}L^{-1}(t)x(t) \quad (4.24)$$

$$u(t) = -K(t)x(t) \quad (4.25)$$

donde podemos ver que la ganancia variante con el tiempo $K(t)$ está definida por

$$K(t) = B^*(t)L(t)\bar{B}\bar{K}L^{-1}(t) \quad (4.26)$$

La expresión (4.24) es la ley de control que estabiliza al sistema original (4.1) mediante una retroalimentación de estados. Obsérvese que la matriz de ganancia $K(t)$ dada por (4.26) es una matriz de período $2T$. La matriz de ganancias constante \bar{K} puede ser calculada a través del procedimiento de colocación de polos para sistemas invariantes con el tiempo tal que $(R - \bar{B}\bar{K})$ sea Hurwitz.

Para obtener la ley de control que estabiliza al sistema dado por (4.1), es necesario calcular la matriz de transición, lo cual no es trivial. En este caso, se obtuvo una aproximación numérica de $\phi(t)$ mediante la utilización de la siguiente propiedad de la matriz de transición

$$\dot{\phi}(t) = A(t)\phi(t), \phi(0) = I \quad (4.27)$$

Es decir, se obtiene $\phi(t)$ resolviendo en forma numérica el sistema de ecuaciones dado por (4.27) con las condiciones iniciales indicadas. Una vez calculada $\phi(t)$, se obtiene la matriz R mediante (2.64) y $L(t)$ utilizando (2.63).

4.2. Casos de Estudio

En esta sección se hace uso de la metodología planteada mediante su aplicación a dos sistemas periódicos. El primero de ellos es conocido como el modelo de la ecuación de Mathieu y se utiliza como un ejemplo teórico del procedimiento de control. El segundo es el modelo que describe la dinámica en vuelo frontal del rotor principal de un helicóptero. Este caso de estudio es un ejemplo de mayor relevancia por su posible aplicación en el campo de la aeronáutica.

4.2.1. Ecuación de Mathieu

Esta ecuación aparece recurrentemente en diversos modelos matemáticos en la ingeniería y fue tratada originalmente por Mathieu al estudiar los modos de vibración en membranas con fronteras de forma elíptica [Mathieu68]. También, esta ecuación se ha utilizado para describir el movimiento de un péndulo con pivote oscilatorio simple [Neves06], entre otras aplicaciones.

Por su importancia histórica se ha utilizado esta ecuación como un caso de estudio. La ecuación de Mathieu con control puede escribirse en espacio de estados de la siguiente manera

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a - 2b \cos(2\pi t) & -d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (4.28)$$

Escogiendo $a = 1$, $b = 1$ y $d = 1$, podemos observar que el sistema es inestable en lazo abierto ante una entrada de tipo escalón, utilizando $x_1(0) = x_2(0) = 1$ como condiciones iniciales, tal y como lo muestra la Figura 4.1.

Utilizando (2.63) y (2.64), se obtienen las matrices R y $L(t)$. En este caso, el valor calculado

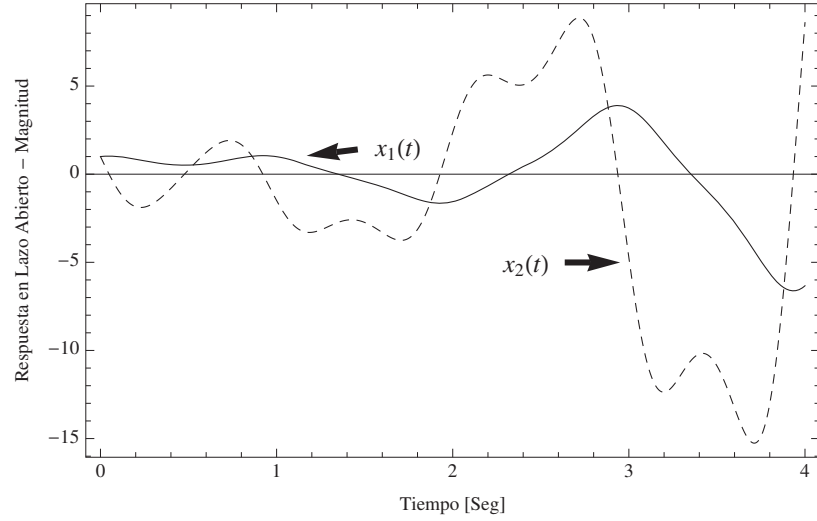


Figura 4.1: Respuesta del sistema de la ecuación de Mathieu en lazo abierto ante una entrada de tipo escalón.

de R es

$$R = \begin{bmatrix} -1.18 & -1.37 \\ -0.58 & 0.18 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

y los cuatro elementos de la matriz periódica $L(t)$, graficados a lo largo de dos períodos, se muestran en la Figura 4.2.

Eligiendo la matriz $\bar{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$, utilizando el método de colocación de polos para la matriz $(R - \bar{B}\bar{K})$ mediante la fórmula de Ackermann [Ogata98] y ubicándolos en las posiciones $(-5, -5)$, es posible calcular la matriz de ganancias constante \bar{K} , para después obtener la ley de control con ganancia variante en el tiempo planteada en (4.26) y utilizarla para encontrar la respuesta del sistema en lazo cerrado.

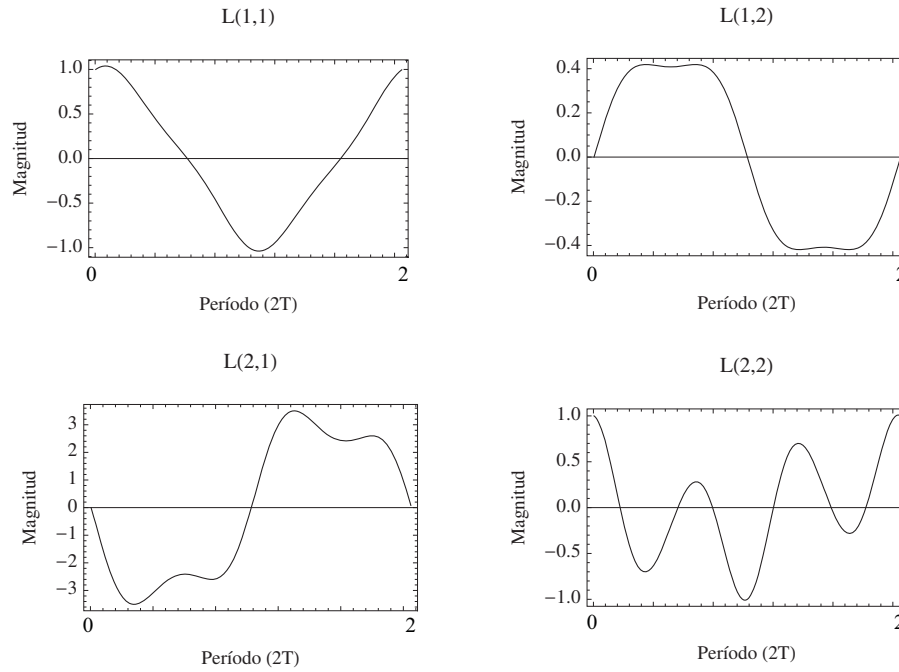


Figura 4.2: Elementos de la matriz $L(t)$, para la ecuación de Mathieu, a través de dos períodos T .

La matriz de ganancias \bar{K} calculada es

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} -11.12 & 9 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

Habiendo calculado \bar{K} es posible obtener la matriz de ganancias $K(t)$ que es variante con el tiempo y además periódica. Los elementos de la matriz $K(t)$ son funciones en el tiempo y estos se muestran en las siguientes expresiones, en donde sólo se consideran los primeros términos con el motivo de ilustrar su forma ya que la expresión completa es demasiado larga.

$$\begin{aligned} K_{1,1}(t) = & -0.0781833 \cos(\pi t)^2 - 2.96037 \cos(\pi t) \cos(3\pi t) - 6.56213 \cos(3\pi t)^2 \\ & + 9.45192 \cos(\pi t) \sin(\pi t) + \dots \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned}
 K_{1,2}(t) = & 2.28544 \cos(\pi t)^2 + 5.6255 \cos(\pi t) \cos(3\pi t) + 0.525043 \cos(3\pi t)^2 \\
 & + 0.136331 \cos(\pi t) \sin(\pi t) + \dots
 \end{aligned}
 \tag{4.32}$$

El comportamiento de los elementos de la matriz $K(t)$ dados por (4.31) y (4.32) se puede observar en la Figura 4.3. En este punto es posible construir la ley de control lineal por retro-

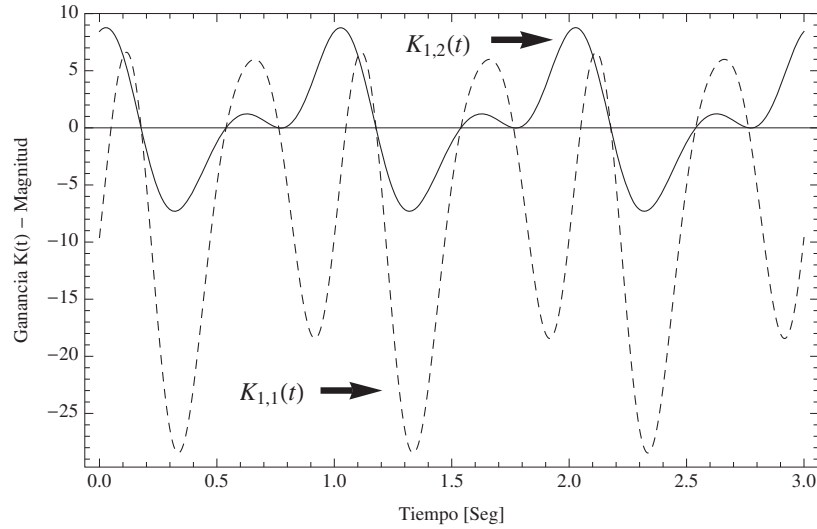


Figura 4.3: Evolución en el tiempo de los elementos de la matriz $K(t)$ para la ecuación de Mathieu.

alimentación de estados, $u(t) = -K(t)x(t)$, que estabiliza al sistema original. Graficándola se obtiene la Figura 4.4.

Con el motivo de corroborar que esta ley de control cumple su objetivo, se calcula la respuesta en lazo cerrado utilizando $x_1(0) = x_2(0) = 10$ como condiciones iniciales. La evolución del sistema retroalimentado se presenta en la Figura 4.5, de donde es posible observar que el sistema se estabiliza a partir de los 6 segundos y que se presentan oscilaciones en ambos estados antes de que estos lleguen a cero.

El sistema de la ecuación de Mathieu ha permitido ilustrar el diseño de un controlador que tiene como particularidad el hecho de que cuenta con una ganancia $K(t)$ que es periódica.

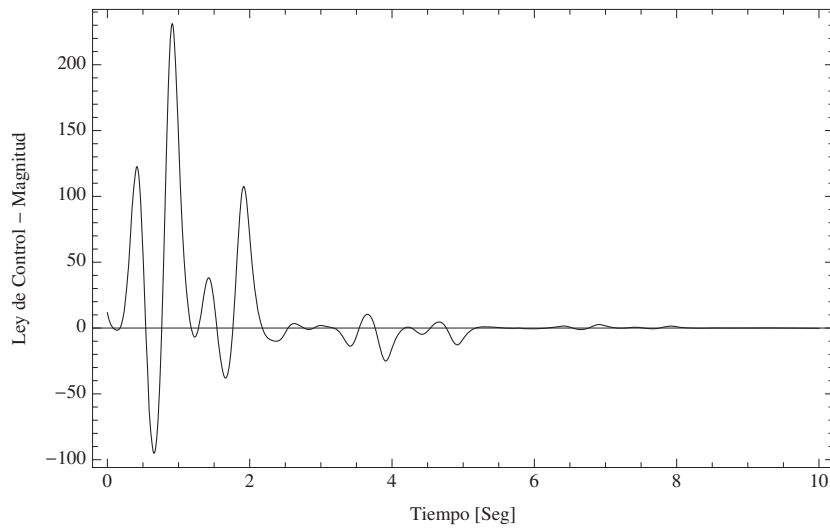


Figura 4.4: Evolución en el tiempo de la ley de control $u(t)$ calculada para la ecuación de Mathieu.

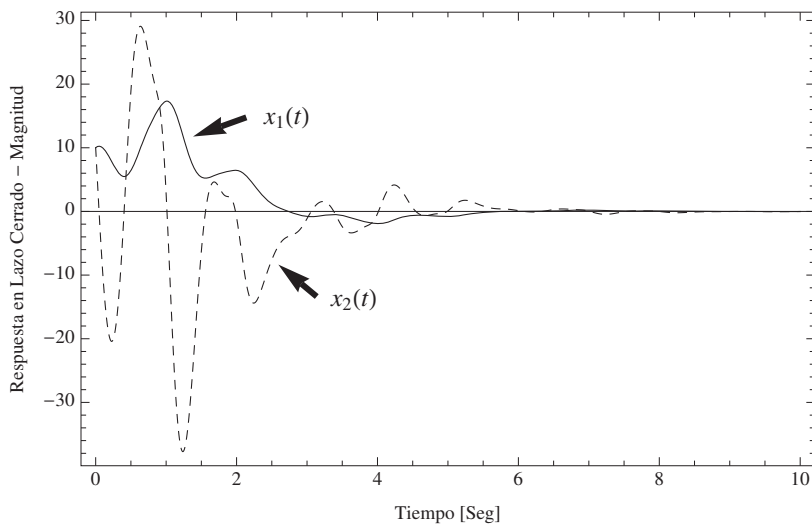


Figura 4.5: Evolución en el tiempo del sistema en lazo cerrado para la ecuación de Mathieu.

4.2.2. Control del Ángulo en las Palas de un Rotor de Helicóptero

En la aeronáutica, el control de vibraciones en los componentes de una aeronave juega un papel fundamental, particularmente en las aeronaves de ala rotatoria (Helicópteros) es un problema cotidiano que ocasiona fatiga en los componentes y reparaciones costosas.

Diversos métodos han sido planteados para atenuar estas vibraciones, la mayoría de estos están basados en el balanceo adecuado de las palas a través del uso de contrapesos y en el control de la trayectoria de la punta de la pala sobre un plano de referencia. Últimamente se han hecho modificaciones en algunos helicópteros para poder modificar el ángulo de las palas en pleno vuelo, asunto que hasta hace unos años sólo era posible hacerlo cuando el helicóptero estaba en tierra. Esto se logra colocando un actuador que va montado en el rotor principal y que tiene como objetivo modificar el ángulo. Al modificar el ángulo se puede disminuir el nivel de vibraciones en el rotor y en el fuselaje de la aeronave [Schulz07]. En este caso de estudio sólo se aborda el problema del control del ángulo de las palas.

Es posible obtener un modelo matemático de la dinámica en vuelo frontal del rotor principal de un helicóptero en particular, tal como se presenta en [Schulz07] y [Wereley91]. Este modelo puede ser llevado a la forma de un sistema lineal periódico, obteniéndose así expresiones para cada una de las palas en el helicóptero. Esto permite la aplicación de la metodología de diseño de controladores periódicos para el control del ángulo en cada una de las palas. El modelo que describe la dinámica de este sistema es el siguiente

$$A(\psi) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\left\{1 + \frac{\gamma}{8} \left(\frac{4}{3}\mu \cos \psi + \mu^2 \sin 2\psi\right)\right\} & -\frac{\gamma}{8} \left(1 + \frac{4}{3}\mu \sin \psi\right) \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

$$B(\psi) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\gamma}{8} \left(1 + \mu^2 + \frac{8}{3}\mu \sin \psi - \mu^2 \cos 2\psi\right) \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

En donde $\mu = 0.3$ y representa a la tasa de avance en el helicóptero, la cual es una constante

adimensional. Del mismo modo, $\gamma = 8$ es el número de Lock [Johnson80] y representa la tasa de fuerzas aerodinámicas e inerciales en la pala. En este caso, $\psi = \omega t$, donde ω es la velocidad angular. Estos serán los valores a utilizar en la simulación y fueron tomados de los resultados obtenidos por Schulz en [Schulz07], es en ese mismo trabajo es donde se explica a detalle la obtención del modelado matemático del rotor principal. El vector de estados para este sistema está dado por

$$x(t) = [\beta \quad \dot{\beta}]^T \quad (4.35)$$

El primer estado β , es la variable a controlar y representa el ángulo de la pala con respecto a la posición horizontal, tal como se muestra en la Figura 4.6.

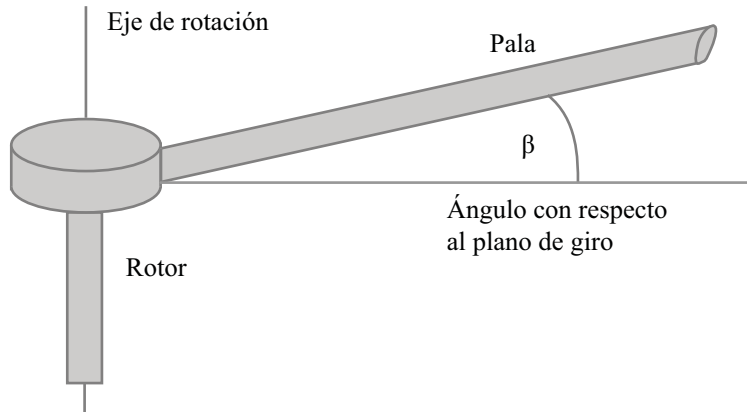


Figura 4.6: Diagrama de un rotor principal en un helicóptero.

La matriz R calculada para este sistema utilizando la expresión (2.64) es

$$R = \begin{bmatrix} 0.0038 & 0.954 \\ -1.041 & -1.003 \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

y a partir de la matriz R es posible obtener la matriz periódica $L(t)$ usando (2.63). La Figura 4.7 muestra la evolución de la matriz $L(t)$ a lo largo de dos períodos T . Es en esta figura en la que podemos observar el comportamiento periódico de sus cuatro elementos.

De igual forma que en el caso de estudio anterior, se propone la matriz $\bar{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ y

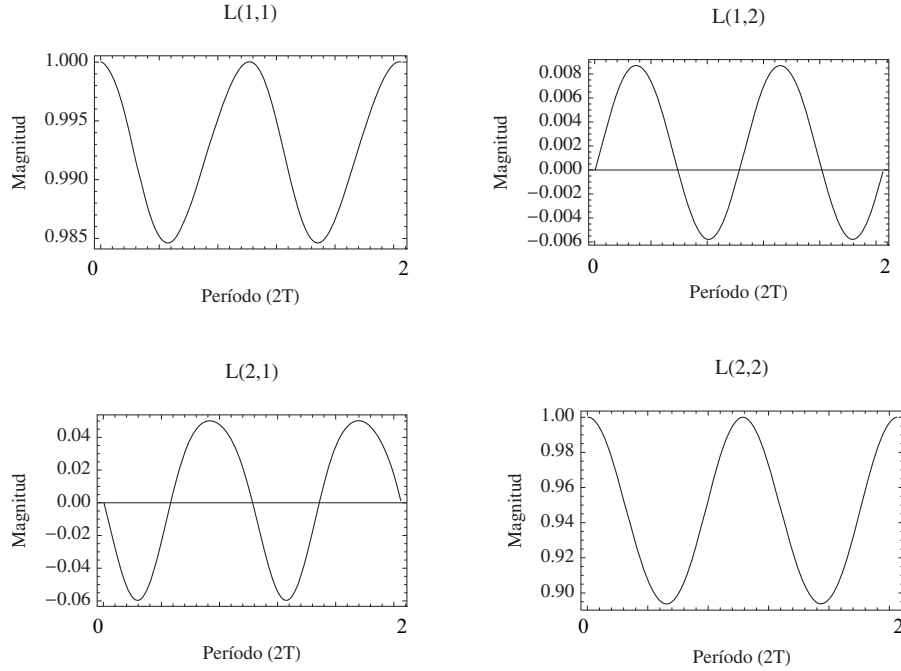


Figura 4.7: Elementos de la matriz $L(t)$, para el rotor de un helicóptero, a través de dos períodos T .

con esta es posible calcular la matriz de ganancias \bar{K} que permitirá obtener la matriz de ganancias variantes con el tiempo $K(t)$. A continuación se muestra el resultado obtenido para la matriz \bar{K} mediante el procedimiento de colocación de polos, ubicándolos en las posiciones $(-5, -5)$

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} 25.18 & 9 \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

Usando la expresión (4.26) se obtiene $K(t)$. La Figura 4.8 muestra la evolución en el tiempo de los elementos de la ganancia variante con el tiempo. En este caso, las funciones en el tiempo de los elementos de $K(t)$ tienen la siguiente forma

$$K_{1,1}(t) = \frac{23.97 + 1.25 \cos(2\pi t) - 0.005 \cos(2\pi t)^2 + 0.56 \sin(2\pi t)}{1.09 - 0.09 \cos(4\pi t) + 0.8 \sin(2\pi t)} + \frac{0.02 \cos(2\pi t) \sin(2\pi t) + 0.0008 \sin(2\pi t)^2}{1.09 - 0.09 \cos(4\pi t) + 0.8 \sin(2\pi t)} \quad (4.38)$$

$$K_{1,2}(t) = \frac{8.97 + 0.041\cos(2\pi t) - 0.02\cos(2\pi t)^2 - 0.18\sin(2\pi t)}{1.09 - 0.09\cos(4\pi t) + 0.8\sin(2\pi t)} + \frac{-0.01\cos(2\pi t)\sin(2\pi t) - 0.0003\sin(2\pi t)^2}{1.09 - 0.09\cos(4\pi t) + 0.8\sin(2\pi t)} \quad (4.39)$$

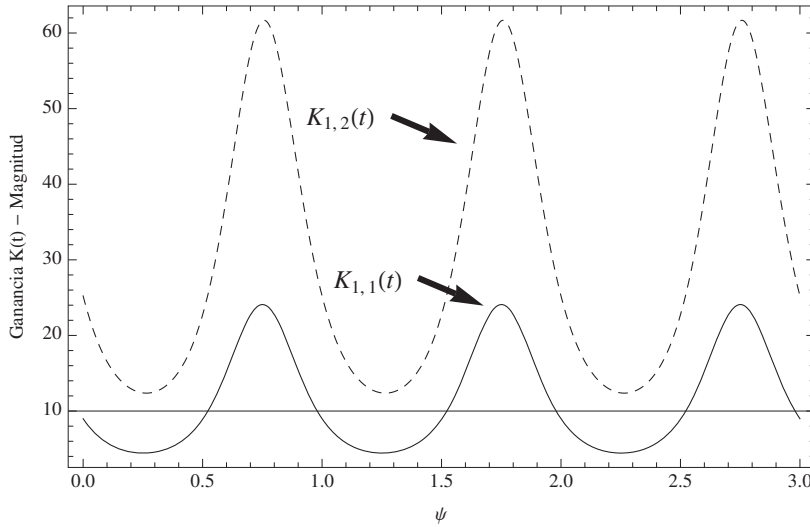


Figura 4.8: Evolución en el tiempo de los elementos de la matriz $K(t)$ para el sistema del rotor principal del helicóptero.

En la Figura 4.8 se hace evidente el comportamiento periódico de la matriz de ganancias. Esta periodicidad aparece debido a que está formada de la siguiente manera, $K(t) = B^*(t)L(t)\bar{B}\bar{K}L^{-1}(t)$, en donde $L(t)$ y su inversa son a su vez matrices periódicas. Una vez que se calcula matriz $K(t)$, se obtiene la ley de control variante con el tiempo, $u(t) = -K(t)x(t)$, que estabiliza al sistema original dado por (4.33) y (4.34). El comportamiento de esta ley de control en el tiempo se muestra en la Figura 4.9. Ahora, esta ley de control lineal se utiliza para retroalimentar al sistema original y conseguir la estabilización.

La respuesta del sistema en lazo cerrado, utilizando como condiciones iniciales $\beta(0) = \dot{\beta}(0) = 10$, se observa en la Figura 4.10, en ella se hace claro que el sistema se estabiliza en alrededor de dos unidades de tiempo.

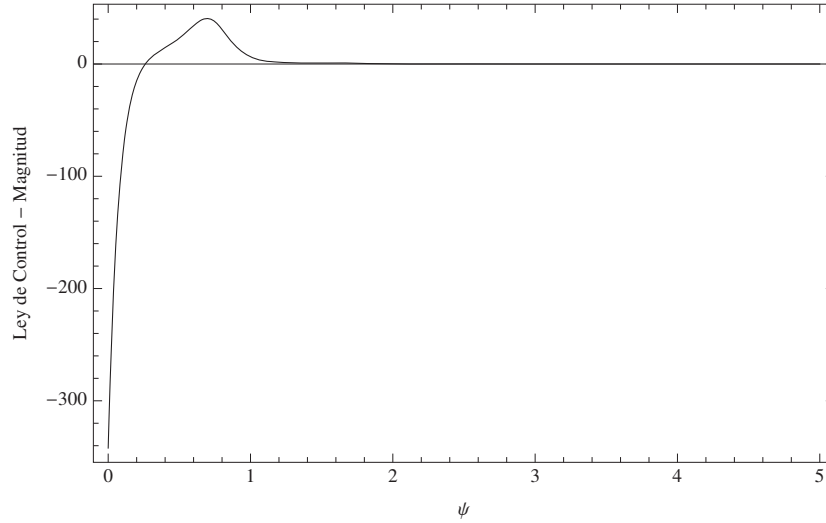


Figura 4.9: Comportamiento de la ley de control $u(t)$ para el sistema del rotor principal del helicóptero.

El estado β que representa el ángulo de la pala con respecto al plano de giro, presenta un pequeño sobreimpulso que desaparece rápidamente. En el segundo estado del sistema, $\dot{\beta}$, se hace evidente un sobreimpulso mucho mayor en comparación con el primer estado.

4.3. Colocación de Polos para Sistemas Lineales Variantes con el Tiempo

El concepto de la colocación de polos es bien conocido para los sistemas lineales invariantes en el tiempo, [Ogata98]. Por otro lado, es posible extender esta técnica a los sistemas variantes con el tiempo y realizar control sobre sistemas que presentan estas características.

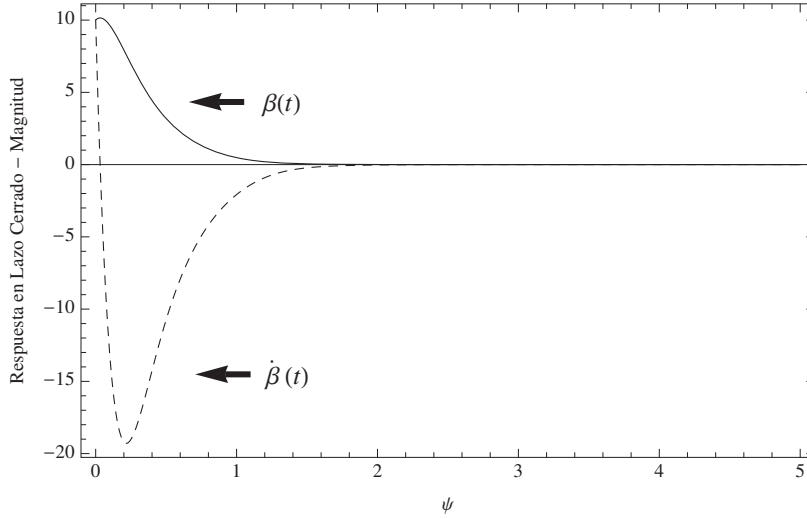


Figura 4.10: Respuesta del sistema en lazo cerrado para el sistema del rotor principal del helicóptero.

Esta metodología permite encontrar una ganancia variante con el tiempo $K(t)$ que estabiliza al sistema en cuestión. En seguida se muestra el procedimiento para realizar la colocación de polos en sistemas variantes con el tiempo.

Considere el siguiente sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t)\end{aligned}\tag{4.40}$$

asumiendo que el par $(A(t), B(t))$ es controlable para todo $t \in [0, T]$, la colocación de polos se logra al introducir la retroalimentación lineal de estados siguiente

$$u(t) = -K(t)x(t) + v(t)\tag{4.41}$$

en donde $v(t)$ es una nueva entrada de referencia y donde $K(t)$ es la matriz de ganancias variantes en el tiempo a diseñar para lograr la colocación de polos. Al sustituir (4.41) en

(4.40) obtenemos las ecuaciones del sistema en lazo cerrado

$$\dot{x}(t) = [A(t) - B(t)K(t)]x(t) + B(t)v(t) \quad (4.42)$$

Los valores propios del sistema en lazo cerrado estarán dados por el siguiente polinomio de coeficientes variantes en el tiempo

$$\det [\lambda I - (A(t) - B(t)K(t))] = \lambda^n + a_1(t)\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(t)\lambda + a_n \quad (4.43)$$

Si es posible elegir los elementos de la matriz $K(t)$ de manera que los coeficientes dados por $a_1(t), \dots, a_n(t)$ sean constantes y además

$$\lambda^n + a_1(t)\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(t)\lambda + a_n = 0 \quad (4.44)$$

tenga las raíces deseadas $(\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t))$ elegidas en el semiplano complejo izquierdo para todo $t \geq t_0$, se habrá resuelto el problema de estabilización por colocación de polos.

4.4. Comparación entre la Colocación de Polos y la Teoría de Floquet

En este apartado se presenta una comparación entre la metodología de control basada en la teoría de Floquet presentada en este capítulo y la técnica de colocación de polos aplicada directamente sobre el sistema original de la sección anterior; es decir, sin llevar a cabo ninguna transformación previa. Esto supone algunas ventajas y desventajas, las cuales se mencionarán más adelante.

Al aplicar esta técnica de colocación de polos al sistema que describe la dinámica del helicóptero descrito por (4.33) y (4.34), usando los mismos polos que en el caso de estudio anterior $(-5, -5)$, se puede calcular su respuesta en lazo cerrado. En este caso, el polinomio característico deseado en lazo cerrado es

$$(\lambda + 5)^2 = \lambda^2 + 10\lambda + 25 \quad (4.45)$$

Utilizando la ecuación (4.43) se puede establecer la siguiente igualdad

$$\det [\lambda I - (A(t) - B(t)K(t))] = \lambda^2 + 10\lambda + 25 \quad (4.46)$$

Desarrollando el determinante

$$\begin{aligned} & \lambda^2 + (1 + 1.09K_2 - 0.09K_2 \cos(4\pi t) + 0.4 \sin(2\pi t) + 0.8K_2 \sin(2\pi t))\lambda \\ & + (1 + 1.09K_1 + 0.4 \cos(2\pi t) - 0.09K_1 \cos(4\pi t) + 0.8K_1 \sin(2\pi t) + 0.09 \sin(4\pi t)) \quad (4.47) \\ & = \lambda^2 + 10\lambda + 25 \end{aligned}$$

Igualando coeficientes se obtiene

$$\begin{aligned} 1 + 1.09K_2 - 0.09K_2 \cos(4\pi t) + 0.4 \sin(2\pi t) + 0.8K_2 \sin(2\pi t) &= 10 \\ 1 + 1.09K_1 + 0.4 \cos(2\pi t) - 0.09K_1 \cos(4\pi t) + 0.8K_1 \sin(2\pi t) + 0.09 \sin(4\pi t) &= 25 \end{aligned} \quad (4.48)$$

y resolviendo para K_1 y K_2 se llega a las siguientes expresiones

$$K_1 = \frac{24 - 0.4 \cos(2\pi t) - 0.09 \sin(4\pi t)}{1.09 - 0.09 \cos(4\pi t) + 0.8 \sin(2\pi t)} \quad (4.49)$$

$$K_2 = \frac{9 - 0.4 \sin(2\pi t)}{1.09 - 0.09 \cos(4\pi t) + 0.8 \sin(2\pi t)} \quad (4.50)$$

A modo de comparación, la Figura 4.11 muestra la evolución del estado β con respecto del tiempo calculada a través de ambos procedimientos; es decir, mediante la metodología propuesta usando la teoría de Floquet y con la colocación de polos en el sistema original no transformado. La Figura 4.12 muestra el mismo concepto pero para el estado $\dot{\beta}$. Por último, la evolución en el tiempo de las leyes de control calculadas en cada procedimiento se observa en la Figura 4.13.

De las Figuras 4.11 y 4.12 se puede concluir que la diferencia es mínima entre los dos procedimientos, respondiendo los dos estados prácticamente de la misma manera. Es sólo en el estado $\dot{\beta}$ en el que se alcanza a percibir una ligera diferencia en sobreimpulso. De esta primera conclusión se desprenden algunas observaciones acerca de la comparación de los dos métodos y sus resultados.

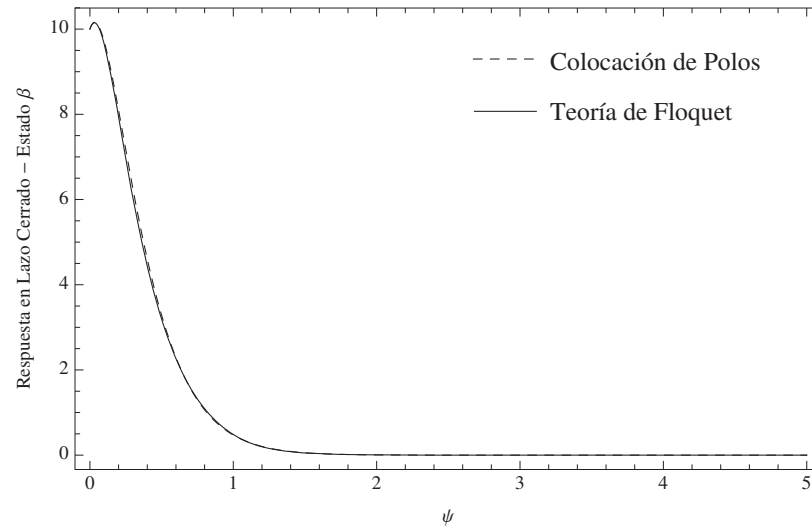


Figura 4.11: Comparación del estado β calculado a través de la teoría de Floquet y mediante Colocación de Polos.

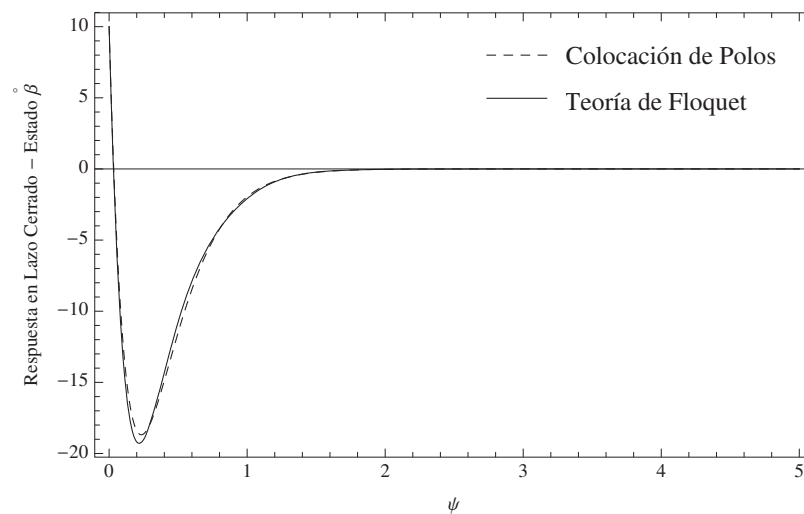


Figura 4.12: Comparación del estado $\dot{\beta}$ calculado a través de la teoría de Floquet y mediante Colocación de Polos.

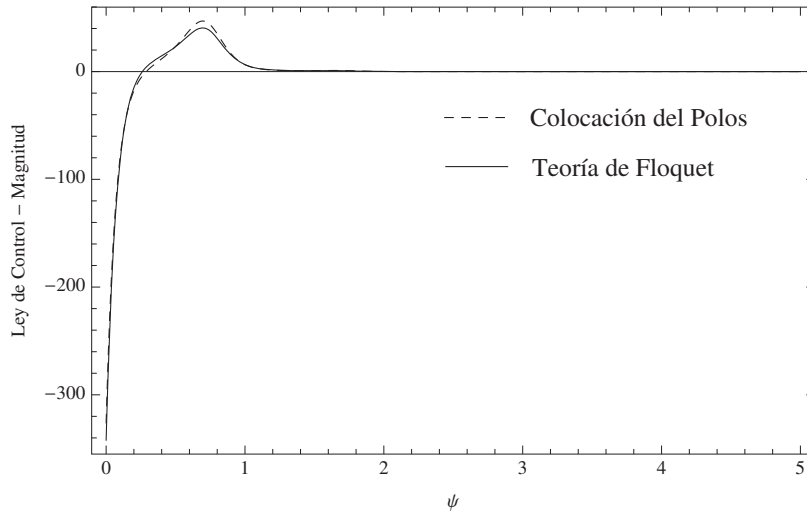


Figura 4.13: Comparación de las leyes de control calculadas a través de la teoría de Floquet y mediante Colocación de Polos.

Es importante observar que de ser necesario volver a calcular la matriz de ganancias $K(t)$ en un proceso iterativo, en el caso de la metodología de colocación de polos se tendría que resolver de nuevo el sistema de ecuaciones de manera simultánea dado por (4.43), repitiéndose este proceso en cada iteración de cálculo.

Por otro lado, si se tuviera que hacer esto en el caso de la metodología basada en la teoría de Floquet, bastaría con obtener de nuevo la matriz \bar{K} invariante con el tiempo para después calcular $K(t)$ a través de la expresión (4.26), la cual representa la realización de un producto matricial. Otra ventaja del enfoque de Floquet-Lyapunov es que al proveer un sistema transformado invariante en el tiempo, se permite el uso de metodologías basadas en sistemas lineales invariantes para diseñar controladores basados en optimización, por ejemplo, el diseño LQR (Linear Quadratic Regulator) para sistemas periódicos puede ser abordado con este enfoque como se presenta en el capítulo siguiente.

Capítulo 5

Control Óptimo de Sistemas Periódicos

Una vez que se ha revisado la problemática de control en sistemas lineales periódicos mediante el uso de la teoría de Floquet, se puede dar paso a la búsqueda de un controlador óptimo mediante el uso de las mismas herramientas.

Haciendo uso del sistema que describe la dinámica del rotor principal de un helicóptero, presentado en el capítulo anterior, se planteará la metodología para encontrar un regulador lineal cuadrático. Usando la descomposición de Floquet y la transformación de Floquet-Lyapunov se puede transformar al sistema periódico en uno invariante con el tiempo y así buscar un controlador óptimo que cumpla con el requisito de estabilizar el sistema cumpliendo con algún criterio de desempeño establecido.

5.1. Control Óptimo en Sistemas Periódicos

Como se comentó anteriormente, la transformación lineal de Floquet-Lyapunov, definida en (4.2), nos sirve para encontrar un sistema invariante con el tiempo que es equivalente al sistema periódico al cual se le aplica la transformación. Esto representa una ventaja importante en cuanto a que se pueden utilizar técnicas de control para sistemas invariantes en este sistema transformado y lograr el objetivo de control.

En el capítulo anterior se aplicó la teoría de Floquet para obtener este sistema invariante y así poder plantear un sistema auxiliar, al cual se le colocaron los polos en posiciones determinadas. Ahora, como se busca la obtención de un controlador óptimo, en lugar de utilizar la fórmula de Ackermann para la colocación de polos, se plantea en este sistema auxiliar el problema del regulador cuadrático lineal. Al resolverlo se puede encontrar la matriz de ganancias \bar{K} y usar ésta para encontrar $K(t)$ que es parte de la ley de control, definida por (4.25), que se utiliza para obtener el sistema en lazo cerrado.

Por lo tanto, se partirá del hecho de que ya se tiene el sistema resultante de aplicar la transformación (4.2). A continuación se establece la problemática del regulador cuadrático lineal.

Considere la planta

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t)\end{aligned}\tag{5.1}$$

sujeta al siguiente índice de desempeño

$$J = x^T(t_f)F(t_f)x(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} [x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)] dt\tag{5.2}$$

donde F , Q y R son matrices de dimensiones adecuadas que cumplen con: $F = F^T \geq 0$, $Q = Q^T \geq 0$ y $R = R^T > 0$, con las condiciones iniciales $x(t_0) = x_0$, $x(t_f) = x_f$, teniéndose

como restricción un tiempo final $x(t_f)$ finito. Para encontrar una ley de control óptima que establezca al sistema dado por (5.1) minimizando el índice de desempeño establecido en (5.2), se debe resolver una ecuación diferencial de Riccati, [Kirk04] [Naidu03], de la forma

$$\dot{P}(t) = -A^T(t)P(t) - P(t)A(t) - Q(t) + P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t) \quad (5.3)$$

sujeto a la restricción de que $P(t)$, que es la solución de (5.3), es una matriz simétrica y positiva definida. Esta solución se debe encontrar considerando la condición final $P(t_f) = F(t_f)$. Conociendo la matriz $P(t)$, es posible encontrar la matriz de ganancias $K(t)$ que está constituida por el siguiente producto de matrices

$$K(t) = R^{-1}(t)B^T(t)P(t) \quad (5.4)$$

y utilizarla en una retroalimentación de estados óptima

$$u^*(t) = K(t)x^*(t) \quad (5.5)$$

donde (*) se utiliza para definir a la ley de control y a los estados en el valor óptimo. La ecuación diferencial de Riccati (5.3) es un problema muy difícil de resolver en general; sin embargo, en el caso invariante con el tiempo la ecuación de Riccati se convierte en una ecuación algebraica

$$A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P = Q \quad (5.6)$$

la cual es mucho más simple de resolver.

En la siguiente sección se presentan los resultados de la aplicación de esta metodología al caso de estudio presentado en el capítulo anterior, que consiste en el control del ángulo de las palas en un rotor principal de helicóptero.

5.2. Caso de Estudio: Control del Ángulo en las Palas de un Rotor de Helicóptero

Al aplicar la transformación de Floquet-Lyapunov, dada por (4.2), al sistema descrito por las expresiones (4.33) y (4.34), se llega a un sistema invariante con el tiempo de la forma

$$\dot{z}(t) = Rz(t) + L^{-1}(t)B(t)u(t) \quad (5.7)$$

y se establece un sistema auxiliar

$$\dot{\bar{z}}(t) = R\bar{z}(t) + \bar{B}v(t) \quad (5.8)$$

para el cual existe una ley de control por retroalimentación de estados

$$v(t) = -\bar{K}\bar{z}(t) \quad (5.9)$$

hasta este momento, se ha repetido el procedimiento descrito en el capítulo 4. A partir de este punto, se calculará esta ganancia \bar{K} mediante el planteamiento del regulador cuadrático lineal, usando las matrices del sistema auxiliar (5.8). La matriz R está dada por (4.36) y \bar{B} es seleccionada de tal modo que el par R, \bar{B} sea controlable, en este caso se utilizó el siguiente valor

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

por lo tanto el sistema auxiliar queda definido como

$$\dot{\bar{z}}(t) = \begin{bmatrix} 0.0038 & 0.954 \\ -1.041 & -1.003 \end{bmatrix} \bar{z}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(t) \quad (5.11)$$

Ahora, utilizando los siguientes valores para el índice de desempeño

$$Q = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.25 \\ 0.25 & 0.5 \end{bmatrix}, R = 0.01, F = 0 \quad (5.12)$$

es posible calcular la solución de la ecuación diferencial de Riccati (5.3), obteniendo la siguiente matriz

$$P = \begin{bmatrix} 0.321 & 0.061 \\ 0.061 & 0.069 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

con este resultado se calcula la matriz de ganancias \bar{K} a través de (5.4). El valor de esta matriz es

$$K = \begin{bmatrix} 6.123 & 6.914 \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

Las matrices $L(t)$ y R , obtenidas en el capítulo 4, se muestran en (4.7) y (4.36) respectivamente y son utilizadas para formar la ganancia $K(t)$ mediante $K(t) = B^*(t)L(t)\bar{B}\bar{K}L^{-1}(t)$.

La Figura 5.1 muestra la evolución en el tiempo de $K(t)$. Del mismo modo, la ganancia

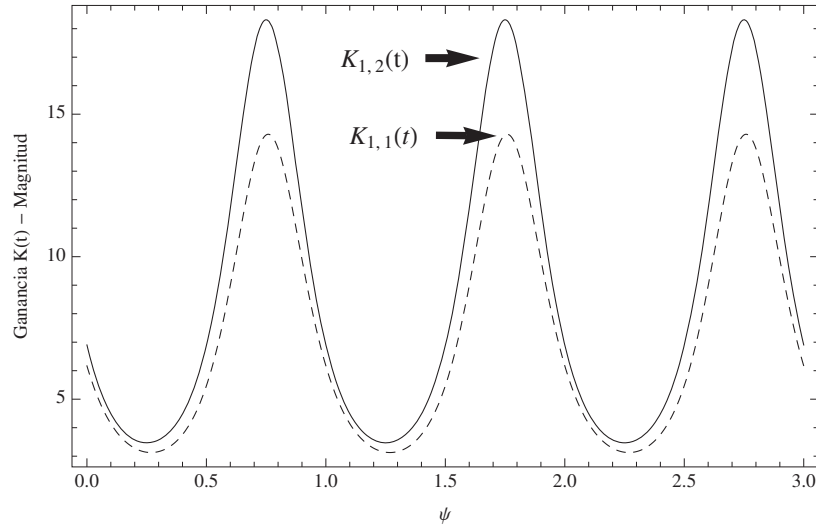


Figura 5.1: Evolución en el tiempo de los elementos de la matriz $K(t)$ para el sistema del rotor principal del helicóptero utilizando una ley de control óptima.

$K(t)$ recién calculada nos sirve para obtener la ley de control por retroalimentación lineal de estados mediante $u(t) = -K(t)x(t)$, su comportamiento se ilustra en la Figura 5.2.

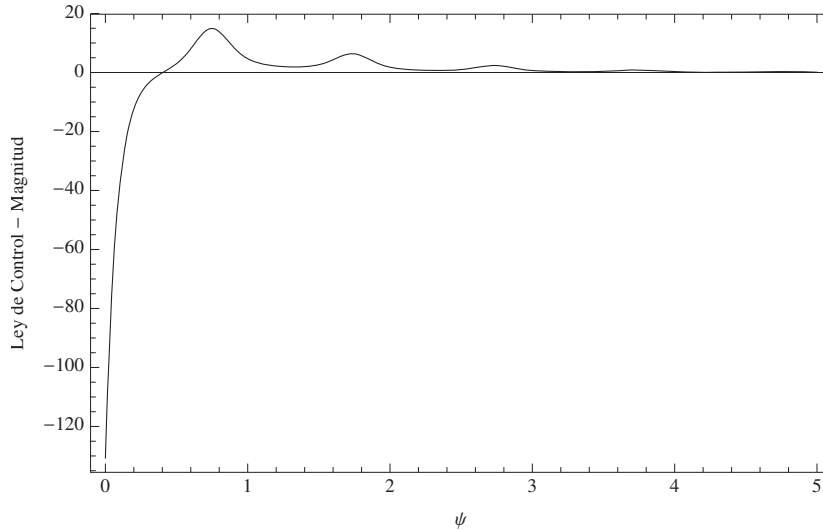


Figura 5.2: Comportamiento de la ley de control óptima $u(t)$ para el sistema del rotor principal del helicóptero.

Por último, la respuesta del sistema en lazo cerrado se puede calcular al resolver el sistema utilizando la ley de control obtenida. La Figura 5.3 muestra comportamiento en el tiempo del sistema retroalimentado.

Es posible observar como al aplicar la metodología de control óptimo sobre el sistema transformado se cumple el objetivo de control. Este objetivo también es alcanzado por las técnicas propuestas en el capítulo 4, en donde la colocación de polos permite calcular la ganancia $K(t)$ que utilizada en una retroalimentación de estados, logra estabilizar al sistema.

Por otro lado, al aplicar un criterio de desempeño como el propuesto en (5.2), se pueden buscar soluciones óptimas que permitan obtener un mejor comportamiento en ciertas variables del sistema; es decir, además de cumplir con el objetivo de estabilizar el sistema, se puede acotar alguna otra característica como la energía o penalizar cierta variable para que se mantenga por debajo de cierto valor.

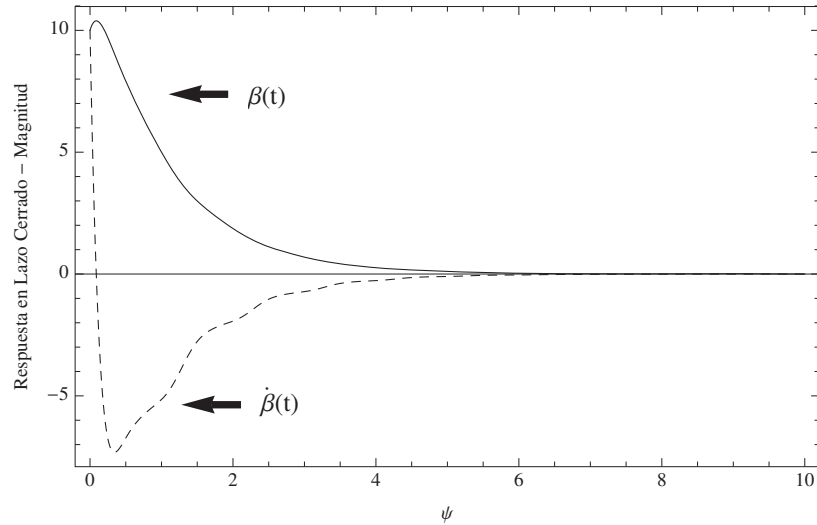


Figura 5.3: Respuesta del sistema en lazo cerrado con control óptimo para el sistema del rotor principal del helicóptero.

Aunado a esto y como parte medular del procedimiento, está el proceso de transformación del sistema original periódico y variante con el tiempo en uno invariante. Es a este sistema equivalente al que se le obtiene una ley de control óptima que sirve para estabilizar al sistema original y esto resulta en una tarea hasta cierto punto sencilla ya que la ecuación diferencial de Riccati que se plantea en el procedimiento contiene coeficientes que son constantes. Es cierto que se puede resolver una ecuación de Riccati con coeficientes variantes en el tiempo [Varga08], que equivaldría a aplicar la metodología de control óptimo directamente al sistema original (sin pasar por la transformación de Floquet-Lyapunov), pero es bien sabido que este puede ser un proceso que involucre una mayor cantidad de operaciones y por consecuencia más complejo.

Estas observaciones permiten concluir que la combinación de la transformación de Floquet-Lyapunov con la aplicación del control óptimo son alternativas viables y efectivas entre las ya conocidas técnicas de control para este tipo de sistemas.

Capítulo 6

Sistemas No Lineales y Aproximaciones Lineales Variantes con el Tiempo

En este capítulo se estudia la técnica para reemplazar un sistema no lineal por una secuencia de sistemas lineales variantes con el tiempo, cuyas soluciones convergen a la solución del sistema no lineal original.

Actualmente se cuentan con muchas metodologías para estudiar los sistemas no lineales, siendo la linealización alrededor de un punto de operación una de las más utilizadas. La aplicación del concepto de solución mediante iteraciones sucesivas para reproducir el sistema no lineal, permite obtener una mayor exactitud en comparación con el método tradicional de linealización por serie de Taylor. A modo de introducción, se revisan los detalles teóricos de la metodología, para posteriormente mostrar los resultados obtenidos al aplicar el procedimiento a dos casos de estudio particulares.

6.1. Introducción

La técnica de aproximación por iteraciones sucesivas para sistemas no lineales fue introducida originalmente por Banks y Tomás-Rodríguez en [Banks10] y ha mostrado ser una herramienta útil para el estudio de los sistemas dinámicos no lineales.

Este enfoque permite utilizar muchos de los resultados clásicos en el campo de los sistemas lineales para analizar sistemas no lineales. Como ya se ha mencionado, existen muchas vertientes en el estudio de este tipo de sistemas, en donde la linealización alrededor de un punto de operación sigue siendo una de las más utilizadas [Mohler91]. Dos de estos enfoques son: la representación del sistema mediante la solución de las series de Lie [Banks92] y sus métodos algebraicos [Banks01].

Los resultados recopilados en la teoría de sistemas lineales son ya bien conocidos y existe un gran número de publicaciones al respecto [Rugh96]. Es cierto también que las matemáticas relacionadas con los sistemas lineales son más simples en comparación con la teoría de sistemas no lineales. Por lo tanto resulta bastante atractivo manipular los problemas no lineales mediante herramientas de sistemas lineales.

6.2. Aproximaciones Lineales Variantes con el Tiempo

La metodología que se presenta a continuación es en cierto sentido una adaptación de la iteración de Picard que se utiliza en la teoría general de ecuaciones diferenciales no lineales. Considere el siguiente sistema no lineal invariante con el tiempo

$$\dot{x} = A(x)x, \quad x(0) = x_0 \tag{6.1}$$

Si el sistema (6.1) tiene un punto de equilibrio en el origen $x = 0$, su matriz $A(x)$ es localmente Lipschitz (que es la mínima consideración posible para asumir existencia y uni-

cidad de las soluciones), entonces el sistema dado por (6.1) puede ser aproximado por una secuencia de sistemas lineales variantes en el tiempo de la siguiente forma

$$\dot{x}^{[1]}(t) = A(x_0)x^{[1]}(t), \quad x^{[1]}(0) = x_0 \quad (6.2)$$

$$\dot{x}^{[2]}(t) = A(x^{[1]}(t))x^{[2]}(t), \quad x^{[2]}(0) = x_0 \quad (6.3)$$

⋮

$$\dot{x}^{[i-1]}(t) = A(x^{[i-2]}(t))x^{[i-1]}(t), \quad x^{[i-1]}(0) = x_0 \quad (6.4)$$

$$\dot{x}^{[i]}(t) = A(x^{[i-1]}(t))x^{[i]}(t), \quad x^{[i]}(0) = x_0 \quad (6.5)$$

para $i \geq 1$. La función inicial $x^{[0]}(t)$ comúnmente se utiliza para representar a las condiciones iniciales x_0 , aunque se puede generalizar el procedimiento para utilizar otras funciones iniciales.

Las soluciones de la secuencia $\{x^{[i]}(t)\}$ para $i \geq 1$, pertenecen a un sistema lineal variante con el tiempo en particular y pueden ser encontradas numéricamente. Estas, convergen a la solución del sistema no lineal original dado por (6.1) considerando que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \{x^{[i]}(t)\} \rightarrow x(t) \quad (6.6)$$

Es importante mencionar que la primera aproximación

$$\dot{x}^{[1]}(t) = A(x_0)x^{[1]}(t), \quad x^{[1]}(0) = x_0 \quad (6.7)$$

es en realidad un sistema lineal invariante con el tiempo ya que se reemplaza el estado $x(t)$ por la condición inicial x_0 y esto produce una matriz constante $A(x_0)$. El resto de las ecuaciones en el proceso iterativo sí cumplen con la forma de un sistema lineal variante con el tiempo. La prueba de convergencia de las aproximaciones puede ser encontrada en [Banks10].

Aunado a esto, es posible obtener una ley de control lineal por retroalimentación de estados en cada una de las iteraciones que aproximan al sistema original. Esta ley de control estabiliza al sistema lineal variante con el tiempo correspondiente a dicha iteración y tiene la siguiente forma

$$u^{[i]}(t) = -K^{[i]}(t)x^{[i]}(t) \quad (6.8)$$

La ley de control calculada en la última iteración logra estabilizar al sistema no lineal original. El cálculo de la matriz de ganancias $K(t)$ puede llevarse a cabo mediante la colocación de polos para sistemas variantes con el tiempo presentada en el capítulo 4.

6.3. Casos de Estudio

A continuación se muestran los resultados obtenidos al aplicar los conceptos explicados en las secciones anteriores a dos casos de estudio. El primero de ellos es un sistema no lineal teórico que ejemplifica el uso de la metodología y el segundo es un caso práctico en el que se utiliza el modelo de un brazo robótico de dos articulaciones.

6.3.1. Sistema No Lineal Teórico

El siguiente sistema no lineal teórico es un buen ejemplo para ilustrar el procedimiento de aproximaciones sucesivas. El modelo en espacio de estados se muestra a continuación

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(x_1) & -1 \\ 1 & -\cos(x_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (6.9)$$

el cual tiene condiciones iniciales en $x_1(0) = x_2(0) = 0.1$.

Llevando a cabo la simulación hasta $t_f = 3$ segundos, se obtiene el comportamiento mos-

trado en la Figura 6.1 para los estados del sistema cuando este es estudiado al aplicarle una entrada escalón

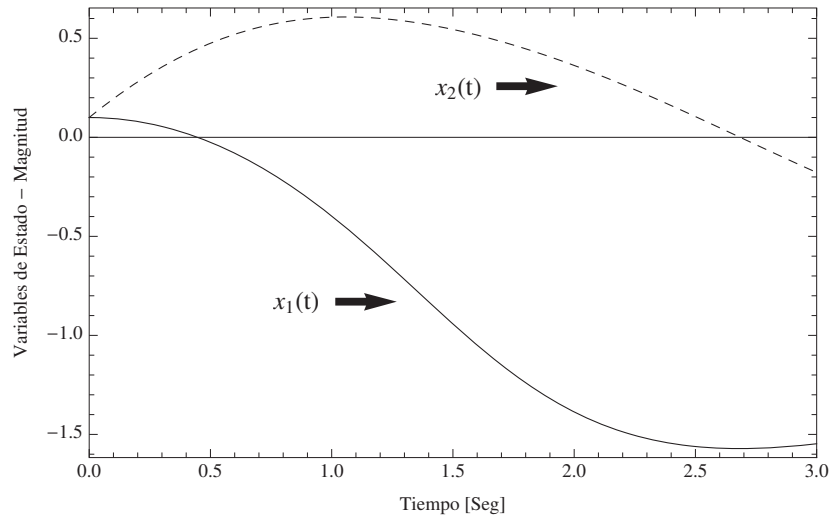


Figura 6.1: Respuesta de los estados del sistema, x_1 y x_2 , en lazo abierto ante una entrada de tipo escalón.

Es posible obtener una aproximación al sistema no lineal original mediante una linealización alrededor de un punto de operación del sistema. De esta manera se pueden estudiar los resultados que se obtienen mediante el proceso iterativo y la linealización. El sistema linealizado por serie de Taylor alrededor del origen se muestra a continuación

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (6.10)$$

Al aplicar el proceso iterativo al sistema original (6.9) y obtener la aproximación al utilizar 3 iteraciones, se obtiene la Figura 6.2 en la que se muestra el comportamiento de los estados x_1 y x_2 .

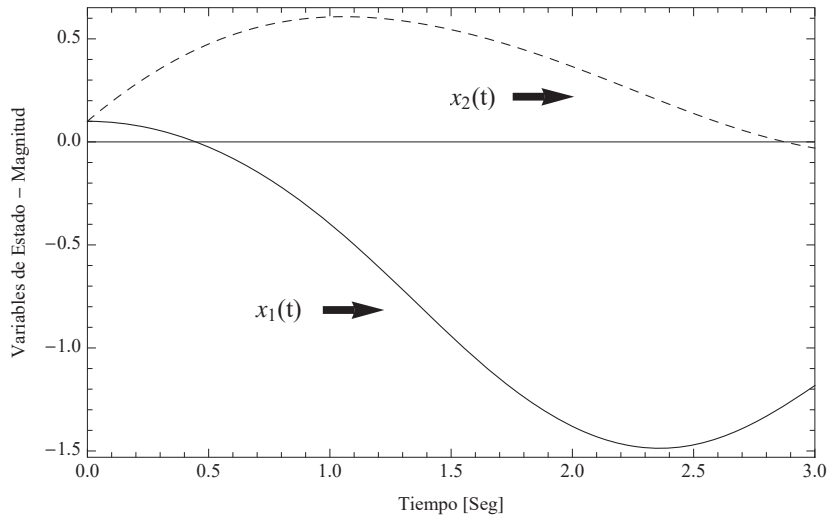


Figura 6.2: Respuesta de los estados del sistema, x_1 y x_2 , en lazo abierto ante una entrada de tipo escalón, obtenidos mediante el proceso iterativo.

Sobreponiendo las Figuras 6.1, 6.2 y la respuesta obtenida al resolver el sistema linealizado, se obtiene la Figura 6.3 en la que se muestra únicamente el comportamiento del estado x_1 . En la Figura 6.4 se observa la evolución del estado x_2 .

A partir de las Figuras 6.3 y 6.4, es posible ver como la aproximación iterativa del sistema no lineal original es más precisa para el intervalo de tiempo simulado y para ambos estados del sistema. Se observa como al final de la simulación, la solución iterativa muestra un ligero error debido a que se utilizaron únicamente tres iteraciones. Al incrementar las iteraciones, la solución converge completamente a la solución del sistema no lineal. Para este caso, una reproducción exacta se produce al usar ocho iteraciones.

El error que muestra el procedimiento por linealización resulta evidente y esto permite concluir es posible obtener resultados acertados utilizando la aproximación de sistemas no lineales mediante una serie de sistemas lineales variantes con el tiempo.

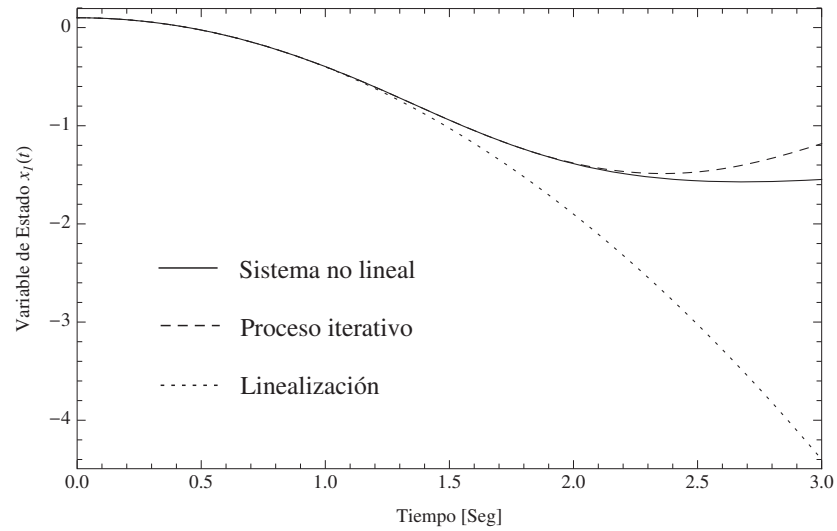


Figura 6.3: Comparación del estado x_1 en lazo abierto, mediante el proceso iterativo y la linealización del sistema original.

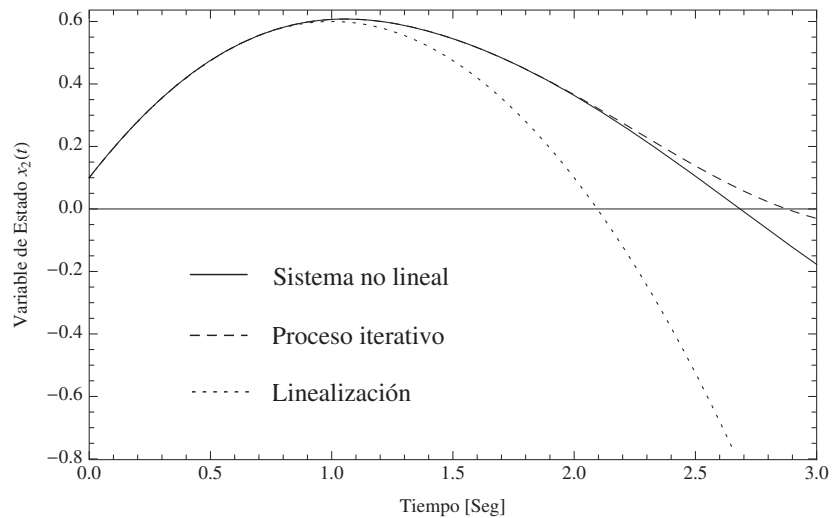


Figura 6.4: Comparación del estado x_2 en lazo abierto, mediante el proceso iterativo y la linealización del sistema original.

Por otro lado, en cada iteración es posible calcular las ganancias $K(t)$ variantes con el tiempo que estabilicen a los sistemas calculados en cada iteración, a través de la metodología de colocación de polos directamente sobre el sistema original.

La Figura 6.5 muestra el resultado de aplicar la ley de control calculada en la última iteración (octava) al ubicar los polos en las posiciones $(-10, -8)$, en esta figura se aprecia como el sistema en lazo cerrado se estabiliza. Para este caso, la matriz de ganancias variantes con el tiempo $K(t)$ queda definida por la siguiente expresión

$$K(t) = \begin{bmatrix} -79 - 18 \cos(x^{[8]}(t)) - \cos^2(x^{[8]}(t)) & 18 \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

de la cual se puede apreciar la dependencia de los estados calculados por las aproximaciones sucesivas hasta la octava iteración.

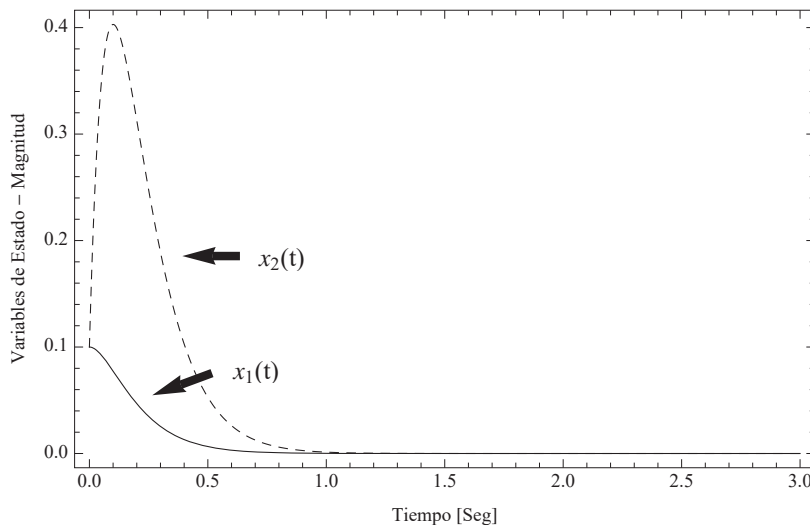


Figura 6.5: Respuesta en lazo cerrado al aplicar la ley de control, $u(t) = -K(t)x(t)$, obtenida en la octava iteración.

6.3.1.1. Estabilización Mediante la Teoría de Floquet

Hasta el momento se ha probado la colocación de polos sobre el sistema lineal variante en el tiempo directamente. En cada iteración se encuentra una matriz de ganancias $K(t)$ que estabiliza al sistema de dicha iteración. En este apartado se muestran los resultados de calcular la matriz $K(t)$, para cada iteración, mediante las herramientas de la teoría de Floquet expuestas anteriormente. La transformación de Floquet-Lyapunov permite transformar cada uno de los sistemas variantes con el tiempo de la aproximación, en su equivalente invariante con el tiempo, para así intentar la colocación de polos o el control óptimo sobre el sistema transformado.

Utilizando el mismo procedimiento descrito en el capítulo 4 para el control de sistemas periódicos, es posible estabilizar al sistema no lineal original. La Figura 6.6 muestra el resultado de aplicar la ley de control calculada en la última iteración mediante la transformación de Floquet-Lyapunov, con las mismas posiciones para los polos que en el caso anterior $(-10, -8)$ y con las mismas condiciones iniciales. En este caso es posible observar como existe un ligero sobreimpulso en ambos estados y que la estabilización ocurre alrededor de 1.3 segundos.

Por otro lado, también es posible la utilizar el procedimiento planteado en el capítulo 5 para calcular la ley de control que estabiliza al sistema mediante un regulador cuadrático lineal y optimizar la respuesta de acuerdo a algún criterio de desempeño. En este caso, el criterio utilizado esta dado por (5.2) y las matrices que lo conforman son las siguientes

$$Q = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.125 \\ 0.125 & 0.25 \end{bmatrix}, R = 0.0001, F = 0 \quad (6.12)$$

La Figura 6.7 muestra la respuesta en lazo cerrado al obtener la ley de control mediante el procedimiento de control óptimo. En ella podemos observar como el sobreimpulso es mucho menor aunque el tiempo de estabilización aumenta considerablemente.

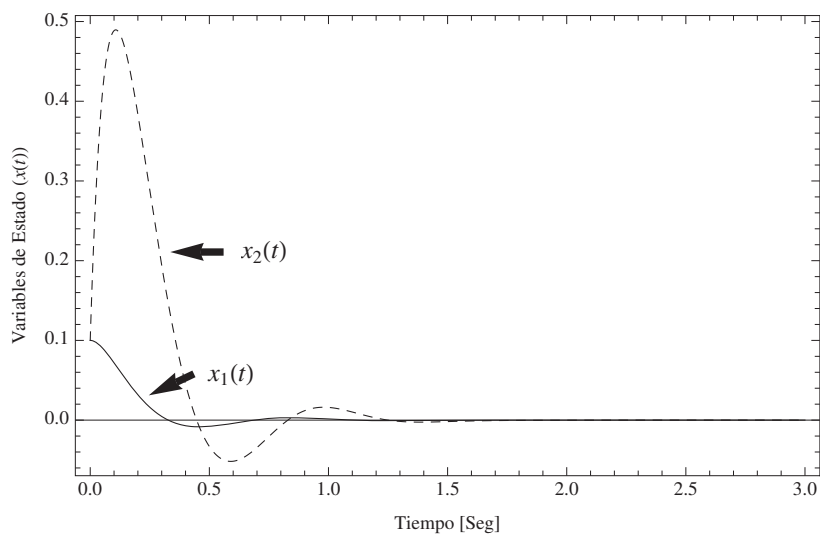


Figura 6.6: Respuesta en lazo cerrado al aplicar la ley de control, $u(t) = -K(t)x(t)$, obtenida en la octava iteración mediante la transformación de Floquet-Lyapunov.

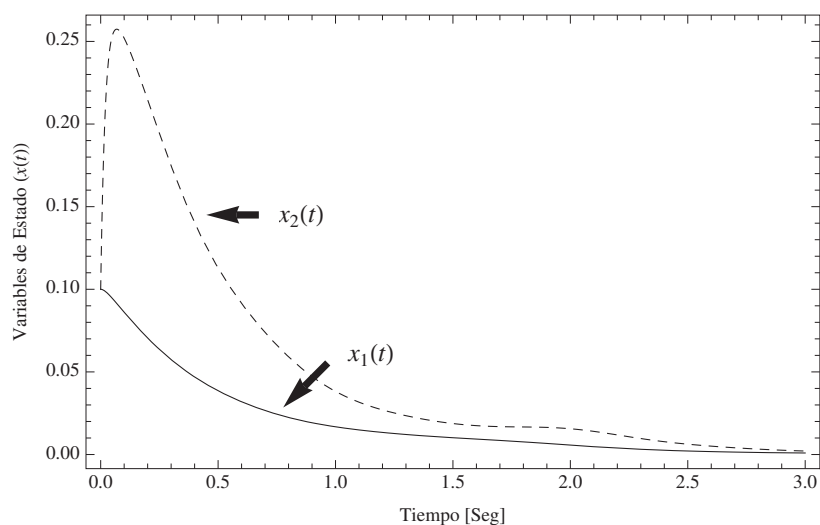


Figura 6.7: Respuesta en lazo cerrado al aplicar la ley de control, $u(t) = -K(t)x(t)$, obtenida en la octava iteración mediante la transformación de Floquet-Lyapunov y el control óptimo.

6.3.2. Modelo No Lineal de un Brazo Robótico de dos Articulaciones

Las siguientes ecuaciones representan la dinámica de un brazo robótico de dos articulaciones [Banks10]

$$\begin{aligned} I\ddot{q}_1 + MgL \sin q_1 + k(q_1 - q_2) &= 0 \\ J\ddot{q}_2 - k(q_1 - q_2) &= u \end{aligned} \quad (6.13)$$

en donde los parámetros del sistema son

$$\begin{aligned} M &= 5 \text{ kg}, \quad g = 9.81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}, \quad L = 0.5 \text{ m} \\ I &= 2.5 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2}, \quad J = 1.5 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2}, \quad k = 100 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} \end{aligned} \quad (6.14)$$

Si se utilizan las siguientes variables de estado

$$q_1 = x_1, \quad q_2 = x_2, \quad \dot{q}_1 = x_3, \quad \dot{q}_2 = x_4 \quad (6.15)$$

es posible escribir el sistema de segundo orden dado por (6.13) en forma de un sistema de primer orden de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_4 \\ \dot{x}_3 &= -\frac{k}{I}(x_1 - x_2) - \frac{MgL}{I} \sin(x_1) \\ \dot{x}_4 &= -\frac{u}{J} + \frac{k}{J}(x_1 - x_2) \end{aligned} \quad (6.16)$$

Lo anterior permite escribir en forma matricial el modelo representado por (6.16) como sigue

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{I} - \frac{MgL}{I} \frac{\sin(x_1)}{x_1} & \frac{k}{I} & 0 & 0 \\ \frac{k}{J} & -\frac{k}{J} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} u(t) \quad (6.17)$$

La ecuación (6.17) permite plantear el esquema de aproximaciones sucesivas obteniéndose una serie de sistemas lineales variantes con el tiempo

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{x}_1^{[1]}(t) \\ \dot{x}_2^{[1]}(t) \\ \dot{x}_3^{[1]}(t) \\ \dot{x}_4^{[1]}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{I} - \frac{MgL}{I} \frac{\sin(x_{01})}{x_{01}} & \frac{k}{I} & 0 & 0 \\ \frac{k}{J} & -\frac{k}{J} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{[1]}(t) \\ x_2^{[1]}(t) \\ x_3^{[1]}(t) \\ x_4^{[1]}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} u^{[1]}(t) \\
 &\vdots \\
 \end{aligned} \tag{6.18}$$

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{x}_1^{[i]}(t) \\ \dot{x}_2^{[i]}(t) \\ \dot{x}_3^{[i]}(t) \\ \dot{x}_4^{[i]}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{I} - \frac{MgL}{I} \frac{\sin(x_1^{[i-1]})}{x_1^{[i-1]}} & \frac{k}{I} & 0 & 0 \\ \frac{k}{J} & -\frac{k}{J} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{[i]}(t) \\ x_2^{[i]}(t) \\ x_3^{[i]}(t) \\ x_4^{[i]}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} u^{[i]}(t)
 \end{aligned}$$

La respuesta del sistema original en lazo abierto se muestra en la Figura 6.8, utilizando como condiciones iniciales $x(0) = [2.15 \ 2.15 \ 0 \ 0]^T$ y llevando a cabo la simulación en una ventana de tiempo de 4 segundos. Al utilizar el proceso iterativo, podemos obtener una serie de sistemas lineales variantes con el tiempo que aproximan al sistema no lineal original y en cada iteración calcular una ley de control que establezca al sistema lineal variante con el tiempo de dicha iteración. En este caso 7 iteraciones son suficientes para aproximar al sistema original de manera exacta en el intervalo de tiempo seleccionado. La Figura 6.9 muestra la respuesta del estado x_1 del sistema no lineal y de la aproximación obtenida al utilizar sólo 3 iteraciones, en donde se puede apreciar como la reproducción es buena en los primeros segundos y al final de la ventana de tiempo se separa del sistema no lineal. Al aumentar el número de iteraciones, el sistema aproximado converge al sistema no lineal completamente.

En cada iteración del proceso se calcula la ley de control dada por la ecuación (6.8), en

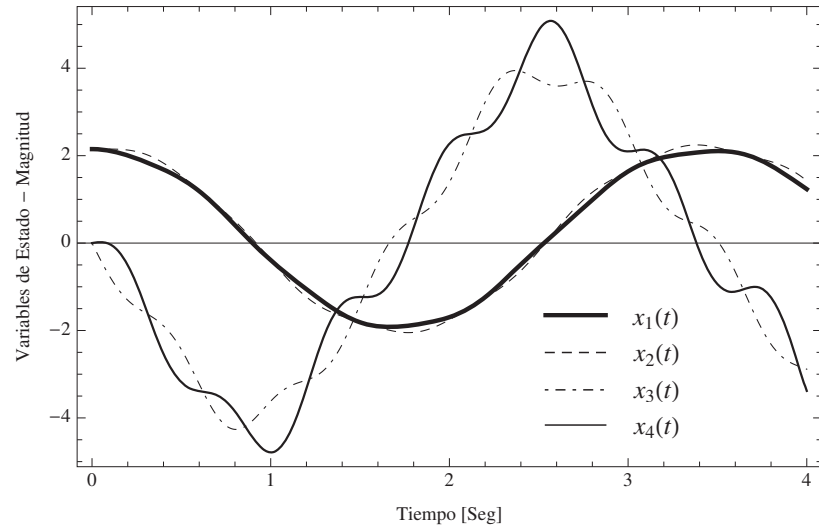


Figura 6.8: Respuesta de los estados del sistema x_1 , x_2 , x_3 y x_4 , en lazo abierto ante una entrada de tipo escalón.

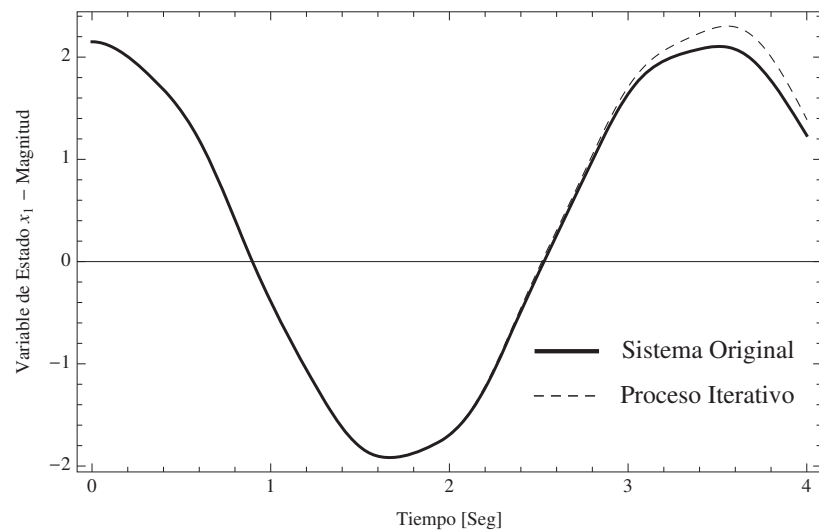


Figura 6.9: Comparación del estado x_1 en lazo abierto, mediante el proceso iterativo (tres iteraciones) y la respuesta del sistema original.

donde la matriz $K(t)$ se obtiene mediante la colocación de polos. Para este caso de estudio se utilizaron las posiciones $(-5, -5, -5, -5)$, lo cual implica tener el siguiente polinomio característico

$$(\lambda + 5)^4 = \lambda^4 + 20\lambda^3 + 150\lambda^2 + 500\lambda + 625 \quad (6.19)$$

Los elementos de la matriz de ganancias variantes con el tiempo $K(t)$ para este caso de estudio son los siguientes

$$\begin{aligned} K_{1,1}(t) &= 123.43 + 5.62 \left(-40 - \frac{9.81 \sin(x^{[7]}(t))}{x^{[7]}(t)} \right) + 0.0375 \left(-40 - \frac{9.81 \sin(x^{[7]}(t))}{x^{[7]}(t)} \right)^2 \\ K_{1,2}(t) &= 125 + 1.5 \left(-40 - \frac{9.81 \sin(x^{[7]}(t))}{x^{[7]}(t)} \right) \\ K_{1,3}(t) &= 18.75 + 0.75 \left(-40 - \frac{9.81 \sin(x^{[7]}(t))}{x^{[7]}(t)} \right) \\ K_{1,4}(t) &= 30 \end{aligned} \quad (6.20)$$

en donde se puede observar la dependencia de cada uno de sus elementos en la información de los estados obtenidos en la séptima iteración. Es precisamente esta característica la que hace que la matriz de ganancias $K(t)$ sea variante con el tiempo.

Utilizando la ley de control calculada en la iteración 7 y al aplicarla al sistema no lineal original de la siguiente manera

$$\dot{x}(t) = [A(t) - B(t)K^{[7]}(t)]x(t) \quad (6.21)$$

se puede obtener la respuesta del sistema en lazo cerrado.

En la Figura 6.10 se observa como los estados del sistema no lineal convergen a cero como resultado de la utilización de una ley de control obtenida a partir del proceso iterativo y la Figura 6.11 permite apreciar la evolución en el tiempo de la ley de control que estabiliza al sistema no lineal original. Por último, la Figura 6.12 muestra el comportamiento en el tiempo de los elementos de la matriz de ganancias $K(t)$.

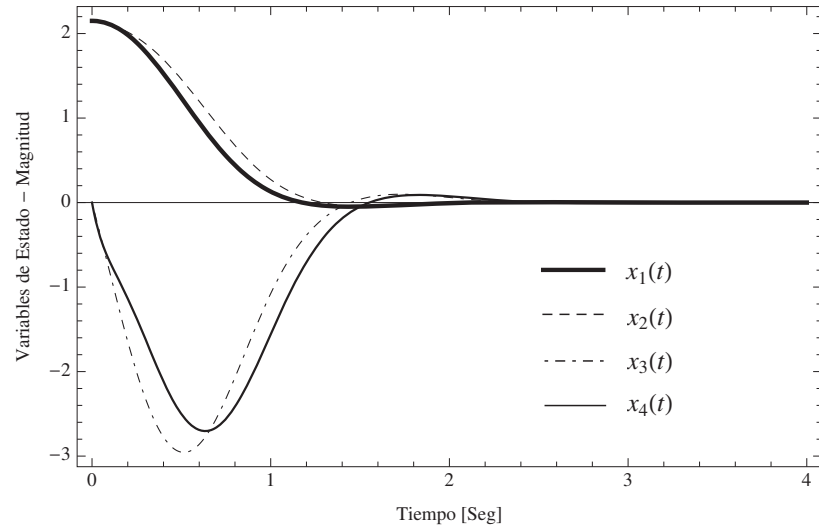


Figura 6.10: Respuesta en lazo cerrado al aplicar la ley de control, $u(t) = -K(t)x(t)$, obtenida en la séptima iteración.

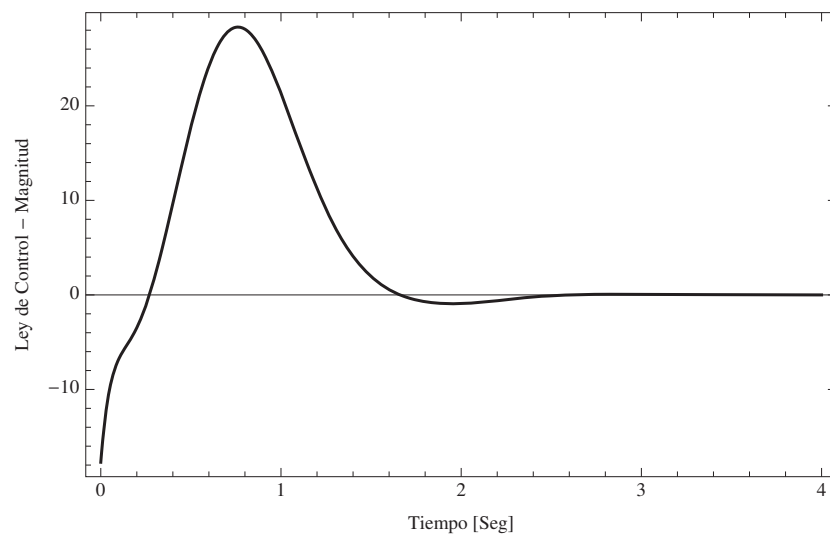
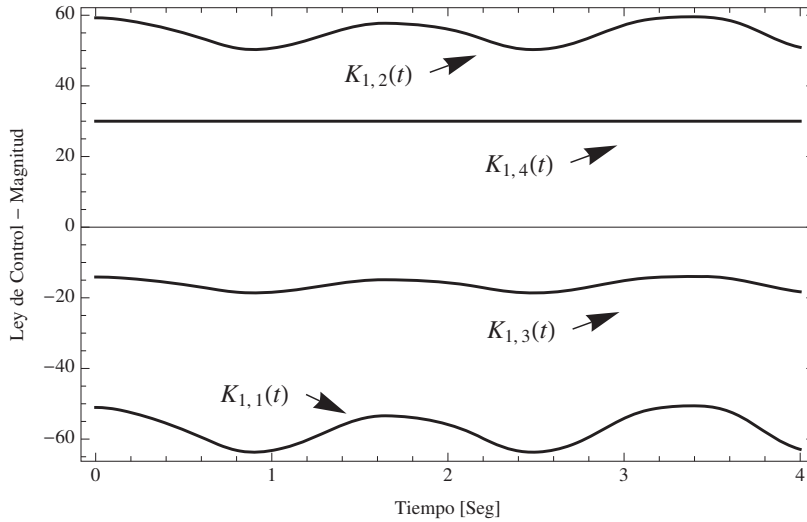


Figura 6.11: Evolución en el tiempo de la ley de control, $u(t) = -K(t)x(t)$, utilizada para estabilizar al sistema no lineal.

Figura 6.12: Comportamiento de la matriz de ganancias $K(t)$ en el tiempo.

La posibilidad de generar leyes de control lineales con la intención de lograr el objetivo de control en un sistema real no lineal resulta bastante atractivo. Este procedimiento es atacado mediante la colocación de polos para obtener la ganancia $K(t)$ pero la posibilidad de obtener la ley de control mediante otra técnica conocida está presente. También es importante mencionar que este enfoque presenta resultados alternativos al caso ya bien conocido de linealizar el sistema no lineal alrededor de un punto de operación y entonces intentar la colocación de polos.

Capítulo 7

Conclusiones

La constante aparición de los sistemas periódicos y lineales variantes con el tiempo en los diversos campos de la ingeniería ha impulsado el desarrollo de herramientas que permitan analizar a este tipo de sistemas de una manera confiable. Lo anterior ha sido motivado en gran medida debido a que las técnicas clásicas para sistemas invariantes con el tiempo no son directamente aplicables a los sistemas periódicos.

El conjunto de herramientas que se revisaron en este documento son precisamente una buena alternativa a las metodologías ya existentes de análisis y control de sistemas periódicos. La teoría de Floquet juega un papel importante dentro de este conjunto ya que es, sin lugar a dudas, la base para el planteamiento de las herramientas utilizadas en este trabajo de tesis, brindando un marco de referencia intuitivo y claro para el estudio de este tipo de sistemas.

7.1. Conclusiones Generales

Como ya se ha mencionado, el modelado matemático de problemas recientes en la ingeniería a hecho evidente la recurrente aparición de los sistemas periódicos y variantes con el tiempo en diversas disciplinas. El desarrollo en los campos de la electrónica de potencia y la aeronáutica ha contribuido a desentrañar sistemas variantes con el tiempo. La importancia que tienen estas dos áreas de la ingeniería en la industria y en la economía en general han motivado a los investigadores a plantear herramientas que permitan abordar de manera confiable e intuitiva este tipo de sistemas.

Por otro lado, son bien conocidos los resultados existentes dentro de la teoría de sistemas lineales que aplican directamente a los sistemas invariantes con el tiempo, la literatura que abarca estos temas es extensa. Contrastando a esta abundante cantidad de literatura para sistemas invariantes, encontramos que en lo referente a los sistemas variantes con el tiempo no existe una cantidad equiparable de resultados considerando que es un tema que se ha estudiado desde hace ya muchos años.

Lo anterior no implica que no se cuenten con las herramientas matemáticas adecuadas para el modelado y análisis de estos sistemas. Los resultados obtenidos por Gastón Floquet proporcionan a la teoría de sistemas lineales un sólido marco de referencia para el tratamiento de los sistemas periódicos. Dentro de este marco de referencia, los resultados conocidos como la Descomposición de Floquet y la Transformación de Floquet-Lyapunov son los dos pilares centrales alrededor de los cuales se plantean diversas metodologías de análisis y control de sistemas periódicos. En esta tesis se hace un uso importante de las dos herramientas mencionadas anteriormente, para encontrar controladores efectivos para los sistemas periódicos y para calcular su estado estable.

Entrando en el detalle de los resultados obtenidos, en la primera parte de esta tesis fue posible encontrar, mediante el uso de la Descomposición de Floquet, una expresión que permite calcular de manera precisa el estado estable de los sistemas periódicos. Los casos de

estudio seleccionados para ilustrar el procedimiento de cálculo fueron tomados del área de la electrónica de potencia. Los convertidores elevadores (tipo Boost) y resonantes (tipo Single Ended), son precisamente un caso especial de sistemas que muestran un comportamiento periódico en su estado estable. En ambos casos fue posible reproducir efectivamente las formas de onda que tienen estos convertidores en estado estable, utilizando como comparación la respuesta obtenida mediante un método de simulación por fuerza bruta. Dicho procedimiento resulta ser casi exacto; es decir, se encuentra una expresión analítica para el cálculo de estado estable con la única consideración de que la matriz de transición (necesaria en el procedimiento) se calcula mediante una aproximación numérica.

También se aborda el problema de diseño de controladores para los sistemas periódicos. En este caso se hace especial uso de la Transformación de Floquet-Lyapunov para convertir al sistema lineal variante con el tiempo en uno invariante y a partir de ese punto comenzar el proceso de diseño de controladores con técnicas ya conocidas como la colocación de polos y el control óptimo. La ecuación de Mathieu y el modelo en vuelo frontal de la dinámica de un rotor principal de helicóptero, sirvieron como casos de estudio y en ambos se pudo estabilizar el sistema adecuadamente llevando a cabo la transformación a un sistema invariante y utilizando la colocación de polos para encontrar las ganancias variantes con el tiempo que permiten la estabilización. Esta metodología se comparó con la colocación de polos aplicada directamente al sistema original, encontrándose resultados muy similares entre los dos procedimientos, pero con la ventaja de que la aplicación de la colocación de polos sobre un sistema invariante resulta ser un poco más sencilla que en uno variante.

Esta transformación también permitió explorar el cálculo de las ganancias variantes con el tiempo que estabilizan al sistema mediante el problema de un regulador cuadrático lineal, utilizar un índice de desempeño que permite optimizar el comportamiento de los estados de acuerdo a cierto criterio establecido, que en este caso fue la energía del sistema. A través de este procedimiento se encontraron resultados positivos al lograr la estabilización de los estados en el caso de estudio seleccionado.

Por último, se hace uso de la metodología de aproximaciones sucesivas para sistemas no lineales utilizando una serie de sistemas lineales variantes con el tiempo. Este procedimiento se utilizó para aproximar dos sistemas, el primero de ellos completamente teórico (sin representación física real) y el segundo describe la dinámica de un brazo robótico con dos articulaciones. En ambos casos fue posible encontrar, mediante un proceso iterativo, una serie de sistemas lineales que aproximan adecuadamente al sistema no lineal original.

Además, como parte de la metodología, en ambos casos se planteó una ley de control por retroalimentación de estados que estabiliza al sistema lineal de cada iteración, con la intención de que al terminar el proceso iterativo, se cuente con una ley de control variante con el tiempo que estabilice al sistema no lineal original. En ambos casos de estudio se comprueba que esta ley de control calculada en la última iteración del proceso estabiliza correctamente a los sistemas correspondientes. Es importante mencionar que esta ley de control es vigente únicamente para la ventana de tiempo escogida para la aproximación del sistema no lineal.

Los resultados obtenidos en este trabajo de tesis permiten argumentar que el conjunto de herramientas utilizadas es adecuado para el análisis y control de los sistemas periódicos y variantes con el tiempo, estando sustentado fuertemente por la teoría de sistemas lineales, en particular por la teoría de Floquet.

Si bien es cierto que los resultados de esta tesis son interesantes y que contribuyen a solidificar aún más los conceptos de la teoría de sistemas periódicos, es importante decir que se encontraron algunas dificultades durante la elaboración del trabajo. Uno de estos contratiempos fue la naturaleza poco suave de las funciones de conmutación en los convertidores de potencia, razón por la cual no se logró aplicar completamente las herramientas para el diseño de controladores mediante la transformación de Floquet-Lyapunov. También, al plantear las ecuaciones correspondientes al control y al incluirlas en el sistema, se obtuvieron sistemas diferencial-algebraicos e incluso bilineales, imposibilitando así la aplicación de las estrategias de control propuestas debido a que el sistema resultante ya no cumple con

la forma requerida para aplicar el procedimiento.

7.2. Trabajos Futuros

El desarrollo de este trabajo de tesis ha permitido vislumbrar una serie de proyectos que son candidatos a completarse en un futuro cercano. Hasta el momento se proponen los siguientes:

1. Llevar a cabo la extensión de la metodología de cálculo de estado estable en convertidores de potencia al caso de conducción discontinua. Esto implica el tratamiento de modelos DAE (Ecuación Diferencial-Algebraica).
2. Aplicación de la metodología de cálculo de estado estable a los demás dispositivos de electrónica de potencia, en especial a convertidores más complejos.
3. Extensión de la técnica de diseño de controladores de sistemas lineales variantes con el tiempo al caso de los sistemas bilineales con la intención de aplicarla a los convertidores electrónicos de potencia.
4. Aplicación de la técnica de diseño de controladores de sistemas lineales variantes con el tiempo a sistemas mecánicos más complejos presentes en los campos de la aeronáutica y robótica.
5. Incorporar el cálculo de la matriz de transición de forma simbólica a la metodología de control para sistemas variantes con el tiempo.
6. Implementar las técnicas de control expuestas en esta tesis sobre prototipos físicos de laboratorio.
7. Aplicación de la técnica de aproximaciones sucesivas al caso de convertidores electrónicos de potencia de interés.

8. Aplicación de la técnica de aproximaciones sucesivas a sistemas no lineales presentes en la aeronáutica, en especial a los modelos que describen la dinámica de vuelo de las aeronaves pensando en su eventual control, ya sea mediante las técnicas expuestas en este trabajo de tesis o a través de estrategias no convencionales como el control por modos deslizantes.

Referencias

- [Ang95] Ang, S. *Power-Switching Converters*. Marcel Dekker Inc., 1995.
- [Arrillaga08] Arrillaga, J. y Watson, N. The harmonic domain revisited. *En Harmonics and Quality of Power ICHQP 2008*. 2008.
- [Balas97] Balas, M. y Lee, Y. J. Controller design of linear periodic time-varying systems. *En Proceedings of the 1997 American Control Conference*, tomo 5, págs. 2667–2671. 1997.
- [Banks92] Banks, S. y Iddir, N. Nonlinear systems, the lie series and the left shift operator: Application to nonlinear optimal control. *IMA J. Math. Cont.*, 9:23–34, 1992.
- [Banks01] Banks, S. The lie algebra of a dynamical system and its application to control. *International Journal of System Science*, 32:220–238, 2001.
- [Banks10] Banks, S. y Tomás-Rodríguez, M. *Linear, time-varying approximations to nonlinear dynamical systems with applications in control and optimization*. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer, 2010.
- [Blanes08] Blanes, S., Casas, F., y Oteo, J. The magnus expansion and some of its applications. *Physics Reports, Elsevier*, 470:151–238, 2008.
- [Bohmann89] Bohmann, L. y Lasseter, R. Harmonic interactions in thristor controlled

- reactor circuits. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 4(3):1919–1926, 1989.
- [Bramilla10] Bramilla, A., Gruosso, M., Redaelli, G., y Gajani, G. Improved small signal analysis for circuits working in periodic steady state. *IEEE Transactions on Circuits and Systems Part 1: Regular Papers*, 57(2):427–437, 2010.
- [Butcher09] Butcher, E. A., Sari, M., y Bueler, E. Magnus’ expansion for time-periodic systems: Parameter-dependent approximations. *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, Elsevier*, 14:12: 4226–4245, 2009.
- [Carias11] Carias, H., Beratan, D., y Skourtis, S. Floquet analysis for vibronically modulated electron tunneling. *The Journal of Physical Chemistry B*, 115(18):5510–5518, 2011.
- [Coddington55] Coddington, E. y Levinson, N. *Theory of Ordinary Differential Equations*. International series in pure and applied mathematics. McGraw-Hill, 1955.
- [Colaneri05] Colaneri, P. Theoretical aspects of continuous-time periodic systems. *Annual Reviews in Control, Elsevier*, 29:205–215, 2005.
- [D’Angelo70] D’Angelo, H. *Linear Time Varying Systems*. The Allyn and Bacon series in Electrical Engineering. Allyn and Bacon, 1970.
- [De Keyser06] De Keyser, R., Bonilla, J., y Ionescu, C. A comparative study of several control techniques applied to a boost converter. *En IEEE 10th International Conference on Optimisation of Electrical and Electronic Equipment OPTIM*, págs. 71–78. 2006.
- [Desoer59] Desoer, C. Steady-state transmission through a network containing a single time-varying element. *IRE Transactions on Circuit Theory*, 6(3):244–252, 1959.
- [Faraday31] Faraday, M. *On a peculiar class of acoustical figures ; and on certain forms assumed by groups of particles upon vibrating elastic surfaces*. Philosophical Transactions, 1831.

- [Fettweis59] Fettweis, A. Steady-state analysis of circuits containing a periodically-operated switch. *IRE Transactions on Circuit Theory*, 6(3):252–260, 1959.
- [Floquet83] Floquet, G. Sur les équations différentielles linéaires a coefficients periodiques. *Annales Scientifiques de L' E. N. S.*, 12:47–88, 1883.
- [Fourier22] Fourier, J. *Théorie analytique de la chaleur*. Chez Firmin Didot, père et fils, 1822.
- [Heydt96] Heydt, G. y Jun, J. Rapid calculation of the periodic steady state for electronically switched, time varying power system loads. *IRE Transactions on Power Delivery*, 11(4):1860–1867, 1996.
- [Hill68] Hill, G. On the par of the moon's motion which is a function of the mean motions of the sun and the moon. *Acta Math.*, 8:1–36, 1868.
- [Jalali94] Jalali, S. y Lasseter, R. A study on nonlinear harmonic interaction between a single phase line-commutated converter and a power system. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 9(2):1616–1624, 1994.
- [Johnson80] Johnson, W. *Helicopter Theory*. Dover, 1980.
- [Kirk04] Kirk, D. E. *Optimal control theory: an introduction*. Dover books on engineering. Dover Publications, 2004.
- [Klausmeier08] Klausmeier, C. A. Floquet theory: a useful tool for understanding nonequilibrium dynamics. *Springer Theoretical Ecology*, 1:153–163, 2008.
- [Kronig31] Kronig, R. y Penney, G. Quantum mechanics of electrons in crystal lattices. *Proc. R. Soc (Ser. A)*., 130:499–513, 1931.
- [Lima03] Lima, L., Semlyen, A., y Iravani, M. Harmonic domain periodic steady state modeling of power electronics apparatus: Svc and tcsc. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 18(3):960–967, 2003.
- [Mathieu68] Mathieu, É. Mémoire sur le mouvement vibratoire d'une membrane de forme elliptique. *J. Math. Pure Appl.*, 13, 1868.

- [Meissner18] Meissner, W. Über schüttelerscheinungen im system mit periodisch veränderlicher elastizitat. *Schweiz, Bautzg.*, 72:95–98, 1918.
- [Melde60] Melde, F. *Ueber die Erregung stehender Wellen eines fadenförmigen Körpers*. Marburg, 1860.
- [Mohler91] Mohler, R. R. *Nonlinear systems (vol. 1): dynamics and control*. Prentice-Hall, Inc., 1991. ISBN 0-13-623489-5.
- [Moler03] Moler, C. y Van Loan, C. Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix, twenty-five years later. *SIAM Review*, 45:3–46, 2003.
- [Mollerstedt00] Mollerstedt, E. y Bernhardsson, B. Out of control because of harmonics—an analysis of the harmonic response of an inverter locomotive. *Control Systems, IEEE*, 20(4):70–81, 2000.
- [Mouche93] Mouche, P. y Heijman, W. *Floquet theory and economic dynamics*. Wageningen economic papers. Wageningen Agricultural University, Faculty of Economics, 1993.
- [Naidu03] Naidu, D. S. *Optimal control systems*. Electrical engineering textbook series. CRC Press, 2003.
- [Neves06] Neves, A. Approximating solutions of linear ordinary differential equations with periodic coefficients by exact picard iterates. *The Mathematica Journal*, 10:91–113, 2006.
- [Noda04] Noda, T., Semlyen, A., y Iravani, R. Entirely harmonic domain calculation of multiphase nonsinusoidal steady state. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 19(3):1368–1377, 2004.
- [Ogata98] Ogata, K. *Ingeniería de Control Moderna*. Pearson Education, 1998.
- [Perkins95] Perkins, J., Martí, J., y Dommel, H. Nonlinear elements in the emtp: steady-state initialization. *IEEE Transactions on Power Systems*, 10:593–601, 1995.

- [Rashid10] Rashid, H. *Power Electronics Handbook: Devices, Circuits, and Applications*. Academic Press. Elsevier, 2010.
- [Richards83] Richards, J. A. *Analysis of Periodically Time Varying Systems*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1983. ISBN 3540116893.
- [Rugh96] Rugh, W. J. *Linear System Theory*. Information and System Sciences Series. Prentice Hall, 1996.
- [Schulz07] Schulz, C. *Rotorcraft smoothing via linear time periodic methods*. Tesis Doctoral, Air Force Institute of Technology, United States of America, 2007.
- [Semlyen88] Semlyen, A., Acha, E., y Arrillaga, J. Newton-type algorithms for the harmonic phasor analysis of nonlinear power circuits in periodical steady state with special reference to magnetic nonlinearities. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 3:1090–1098, 1988.
- [Semlyen95] Semlyen, A. y Medina, A. Computation of the periodic steady state in systems with nonlinear components using a hybrid time and frequency domain methodology. *IEEE Transactions on Power Systems*, 10(3):1498–1504, 1995.
- [Sinha94] Sinha, S. y Joseph, P. Control of general dynamic systems with periodically varying parameters via liapunov-floquet transformation. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 116:650–658, 1994.
- [Sinha96] Sinha, S. y Pandiyan, R. Liapunov-floquet transformation: computation and applications to periodic systems. *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, 118:209–219, 1996.
- [Sinha99] Sinha, S. y Pandiyan, R. Periodic flap control of a helicopter blade in forward flight. *Journal of Vibration and Control*, 5:761–777, 1999.
- [Strutt83] Strutt, J. On the crispations of fluid resting upon a vibrating support. *Philos. Mag.*, 16:50–58, 1883.

-
- [Timoshenko61] Timoshenko, S. *Theory of elastic stability*. Engineering societies monographs. McGraw-Hill, 1961.
- [Varga08] Varga, A. On solving periodic riccati equations. *John Wiley and Sons Ltd*, 2008.
- [Visser91] Visser, H. y van den Bosch, P. Modelling of periodically switching networks. *En Power Electronics Specialists Conference, 1991. PESC '91 Record., 22nd Annual IEEE*, págs. 67–73. 1991.
- [Watson03] Watson, N. y Arrillaga, J. *Power Systems Electromagnetic Transients Simulation*. IEE Power and Energy Series. Institution of Engineering and Technology, 2003.
- [Wereley91] Wereley, N. M. *Analysis and Control of Linear Periodically Time Varying Systems*. Tesis Doctoral, Massachusetts Institute of Technology, United States of America, 1991.
- [Wooden07] Wooden, S. M. y Sinha, S. C. Analysis of periodic-quasiperiodic nonlinear systems via lyapunov-floquet transformation and normal forms. *Springer: Nonlinear Dynamics*, 47(1):263–273, 2007.

Publicaciones

Como parte de este trabajo de tesis se realizaron dos publicaciones en congresos interacionales:

1. **Exact Steady State Analysis in Power Converters Using Floquet Decomposition.** José Alberto Álvarez Martín, J. Jesús Rico Melgoza, José Juan Rincón Pasaye. Publicado en el North American Power Symposium (NAPS) en Boston, Massachusetts, Estados Unidos. Del 4 al 6 de Agosto de 2011. ISBN 978-1-4577-0419-2.
2. **Control de Sistemas Periódicos en el Marco de Referencia de Floquet.** José Alberto Álvarez Martín, J. Jesús Rico Melgoza, José Juan Rincón Pasaye. Publicado en la Reunión de Otoño de Potencia, Electrónica y Computación (ROPEC) en Morelia, Michoacán, México. Del 9 al 11 de Noviembre de 2011. ISBN: 978-607-95476-3-9.

A continuación se incluyen estos dos artículos en su versión original:

Exact Steady State Analysis in Power Converters Using Floquet Decomposition

José Alberto Álvarez Martín, Jesús Rico Melgoza and José Juan Rincón Pasaye

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Facultad de Ingeniería Eléctrica

Morelia, Michoacán, México.

Email: alberto.alvarez@ieee.org, jerico@umich.mx, jrincon@umich.mx

Abstract—In this paper, a methodology based on Floquet decomposition is presented as an alternative solution to obtain the steady state values of power converters. The entire procedure is based on the previous computation of the transition matrix or an approximate of it. Floquet theory is used to provide direct expressions for the steady state solution of systems forced by periodic functions. The application of this analytical expression to power converter circuits is presented through two simple but practical power electronic components.

I. INTRODUCTION

Dc to dc converters are widely used in regulated switch-mode dc power supplies and in dc-motor drive applications. Frequently, the input for these converters is an unregulated dc-voltage, which might have small fluctuations. Therefore, the main purpose of these devices is to convert the input into a controlled and regulated dc-output at a desired level.

The analysis of power converters is of great interest for both theory and applications. The inclusion of these circuits to the electrical network and the extended range of applications where they can be found nowadays, has created the need of designing not only better converters, but also to develop reliable tools and methodologies to understand its behavior in a better way. One of these tools is the computation of the steady state.

Over the past two decades, significant efforts and progress have been made in the area of power converter harmonic analysis [14] [15]. Well-accepted component models, simulation methods and analysis procedures have been established. Nevertheless, it is still an interesting area for many researchers [2], where additional contributions are possible since the complexity of the algorithms have delayed its complete adoption by the industry [1]. Neither specialized software such as ATP nor the well-known P-Spice, include built-in algorithms for this purpose.

This field of research was pioneered by Xia and Heydt [3], [4], using a decoupled positive-sequence circuit. Later, Densem et al. pointed out that the network must be modeled in phase coordinates since non-characteristic harmonics cannot

be properly evaluated by a positive-sequence circuit [5]. Subsequently proposed multiphase methods can be classified, in terms of their formulation methodologies, into three categories: harmonic domain methods [6], time domain methods [7], [8], and hybrid methods [9]. Regardless, the solution domains for all these approaches are numerical solutions.

In this paper a special treatment of the general solution equation to linear time variant systems is made to provide analytical solutions to the harmonic analysis problem. Based on Floquet Theory [10], [11], a natural decomposition of the transition matrix over a period is made as a part of the procedure, leading to an analytical close-form solution to the forced system. The prowess of the proposed methodology is illustrated by the study of two simple power converters and validated through time domain simulations.

II. POWER CONVERTERS AS PERIODIC SYSTEMS

Normally, power electronic devices are composed of linear circuits that switch periodically between different circuit configurations. This switching characteristic yields time dependent coefficients within the set of equations that describe system dynamics. In compact form, these equations have the following form

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + U(t) \quad (1)$$

where x is the $n \times 1$ state vector and A is an $n \times n$ time varying periodic coefficient matrix that complies with

$$A(t) = A(t+T) \text{ for } 0 \leq t \leq T \quad (2)$$

U is an $n \times 1$ input function vector that can exhibit a periodic behavior.

Matrix A and the input vector U can be written as

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$U(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) & \cdots & u_n(t) \end{bmatrix}^T \quad (4)$$

In this paper, only the periodic steady state case of model (1) is considered, that is, when this system has reached its steady state, the solution satisfies the following condition

$$x(t) = x(t+T) \text{ for } 0 \leq t \leq T \quad (5)$$

where T is the period.

Power converters are circuits that exhibit periodic behavior in their steady state and are considered as linear time variant systems. Two of these converters are used in this document as case studies.

A. The Simple Boost Converter

As an example of these periodic linear circuits, we consider the simple boost converter shown in Fig. 1. [13]

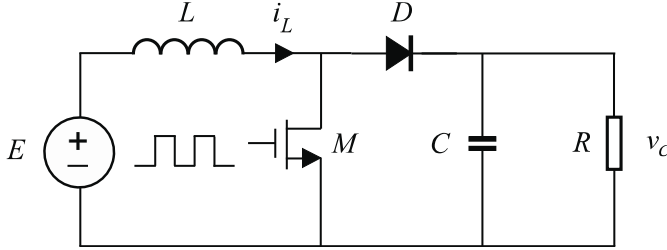


Figure 1. Simple boost converter equivalent circuit.

One special characteristic of these types of converters is the presence of switching devices. In this case, the transistor M can be described by the following switching function

$$s(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } 0 \leq t \leq T_D \\ 1 & \text{for } T_D \leq t \leq T \\ s(t-T) & \text{for all } t > T \end{cases} \quad (6)$$

where T is the switching period and T_D is the on-state of switch M . The set of system equations can be expressed in compact form as

$$A(t) = \begin{bmatrix} -\frac{R_s(1-s(t)) + R_D s(t)}{L} & -\frac{s(t)}{L} \\ \frac{s(t)}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$U(t) = \begin{bmatrix} \frac{E - s(t)V_f}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

The switching function $s(t)$ appears explicitly as a coefficient in matrices A and U , yielding a system of the form described by (1). Within matrix A , the term R_s represents the switch-on resistance, R_D is the diode-on resistance and V_f stands for the diode forward voltage drop. The state vector for the simple boost converter is given by

$$x(t) = \begin{bmatrix} i_L & v_C \end{bmatrix}^T \quad (9)$$

where i_L is the inductor current and v_C is the capacitor voltage.

B. Single Ended Resonant Converter

As another example of this type of circuits, the single ended resonant converter is presented. It is composed of a power MOSFET transistor with an external control input $c(t)$, that is a periodic function of period T . A diode and passive elements such as an inductor L , a capacitor C and a load resistor R , are part of the circuit. It is powered by an independent source E .

The equivalent circuit for a single ended resonant inverter with the characteristics mentioned above is shown in Fig. 2

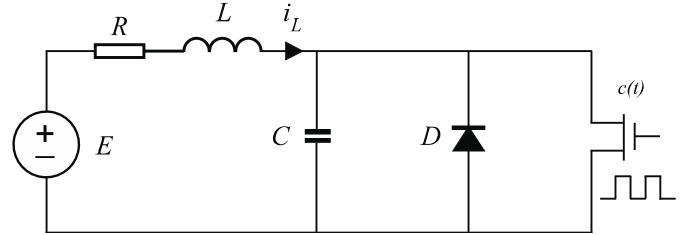


Figure 2. Single ended resonant converter equivalent circuit.

The control function $c(t)$ can be defined as in (6) as follows

$$c(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } 0 \leq t \leq T_D \\ 1 & \text{for } T_D \leq t \leq T \\ c(t-T) & \text{for all } t > T \end{cases} \quad (10)$$

where T is the switching period and T_D is the transistor on-state. The set of system equations can be described by the following matrices

$$A(t) = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1-c(t)}{L} \\ \frac{1-c(t)}{C} & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$U(t) = \begin{bmatrix} \frac{E}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Again, there is a switching function that depends on time inside the coefficient matrix $A(t)$. The state vector is the same as in the previous example and it is stated in (9)

These two power electronic component are good examples of converters as periodic systems. The fact of containing switching functions explicitly in the differential equations that

describe their dynamics, enables them to be considered as linear time variant and also periodic systems.

III. PERIODIC SYSTEMS RESPONSE TO FORCING FUNCTIONS

One of the principal tools within the procedure is described in this section. Floquet decomposition is an important subject in linear time variant systems (LTVS) due to the fact that it provides complete and exact description of those systems that exhibit a periodic behavior. Linear time periodic systems are a particular class of LTVS. One of the main results of the Floquet theory, named after its founder, is that every linear time periodic system can be described by a linear, time invariant equation, making possible that all theoretical instruments developed for linear time invariant systems can be readily used in periodic ones. Floquet theory also established that the transition matrix of a linear time periodic system can be expressed as the product of two matrices, one of them being periodic and the other one, an exponential matrix. This decomposition makes evident that the transient and the steady state responses of a periodic system can be separated. This fact is used in this paper to provide direct formulas for the steady state.

A. Floquet Decomposition

From Floquet theory, the transition matrix decomposition can be stated as follows:

If $\phi(t)$ is a fundamental matrix of the system described by (1), then $\phi(t)$ can be written as the product of two $n \times n$ matrices as described by the following equation

$$\phi(t) = P(t)e^{Rt} \quad (13)$$

where $P(t)$ is a non-singular and periodic matrix with period T , and R is a constant matrix.

As a part of the procedure, the inverse transition matrix needs to be obtained. One of the main advantages of Floquet decomposition is that the inverse transition matrix can be computed using the adjoint system, avoiding the use of traditional methods to achieve matrix inversion.

In this case, the transition matrix can be obtained as follows

$$\phi^{-1}(t) = e^{-Rt}P^{-1}(t) \quad (14)$$

Notice that in order to use (13) and (14), the transition matrix must be known. This can be done numerically by using the next property with an identity matrix as initial condition.

$$\frac{d}{dt}\phi(t) = A(t)\phi(t) \quad (15)$$

The calculation stated by (15) is the only numerical part of the procedure. This condition is the reason why the complete methodology is in fact considered as a semi-analytical one. However, there are means for computing this transition matrix symbolically as explained in [12].

B. Complete Periodic System Response

Consider the n-order periodic system described by

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (16)$$

For simplicity consider $B(t)u(t) = f(t)$ and $t_0 = 0$. The general solution for the system represented by (16) can be written as

$$x(t) = \phi(t, 0)x_0 + \int_0^t \phi(t, \tau)f(\tau) d\tau \quad (17)$$

and then it follows that

$$x(t) = \phi(t)x_0 + \phi(t) \int_0^t \phi^{-1}(\tau)f(\tau) d\tau \quad (18)$$

From the Floquet decomposition stated in (13), equation (18) can be re-written as

$$x(t) = P(t)e^{Rt}x_0 + P(t)e^{Rt} \int_0^t e^{-R\tau}P^{-1}(\tau)f(\tau) d\tau \quad (19)$$

It is important to notice that the first term $P(t)e^{Rt}x_0$ of (19), is the solution to the homogenous system when the initial condition is $x(0) = x_0$.

$$x_c(t) = P(t)e^{Rt}x_0 \quad (20)$$

From (20) we can say that the unforced solution is periodic if and only if $R = 0$. If the eigenvalues of R have negative real parts, then the system is asymptotically stable. On the right hand side of (19), the second term represents the forced part of the solution, also known as particular solution

$$x_p(t) = P(t)e^{Rt} \int_0^t e^{-R\tau}P^{-1}(\tau)f(\tau) d\tau \quad (21)$$

The matrices $P(t)$ and $P^{-1}(t)$ from (21) are periodic, therefore, can be replaced by expanding them into Fourier series

$$P(t) = \sum_{m=-h}^h \bar{P}_m e^{jm\omega_0 t} \quad (22)$$

$$P^{-1}(t) = \sum_{k=-h}^h \hat{P}_k e^{jk\omega_0 t} \quad (23)$$

where ω_0 is the fundamental frequency and h stands for the number of harmonics in the series. At the same time, by using Sylvester's theorem, e^{Rt} and e^{-Rt} can be expressed by

$$e^{Rt} = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} Z_{\lambda_i} \quad (24)$$

$$e^{-Rt} = \sum_{i=1}^n e^{-\lambda_i t} Z_{\lambda_i} \quad (25)$$

where λ_i are the eigenvalues of matrix R , the matrices Z_{λ_i} are the corresponding Frobenius covariants of R and n is the order of the system. Now, let us consider a more general scenario where the forcing function vector $f(t)$ is periodic but

with a different fundamental frequency ω_i compared to the system parameters. This forcing function vector can also be expanded into Fourier series

$$f(t) = \sum_{l=-h}^h F_l e^{jl\omega_i t} \quad (26)$$

Substituting (23), (25) and (26) into the particular solution described by (21), the following expression is obtained

$$x_p(t) = P(t) e^{Rt} \int_0^t \left(\sum_{i=1}^n e^{-\lambda_i \tau} Z_{\lambda_i} \right) \left(\sum_{k=-h}^h \hat{P}_k e^{jk\omega_0 \tau} \right) \left(\sum_{l=-h}^h F_l e^{jl\omega_i \tau} \right) d\tau \quad (27)$$

By moving the integral into the summation, the integration process can be done symbolically

$$x_p(t) = P(t) e^{Rt} \sum_{i=1}^n \sum_{k=-h}^h \sum_{l=-h}^h Z_{\lambda_i} \hat{P}_k F_l \int_0^t e^{(-\lambda_i + jk\omega_0 + jl\omega_i)\tau} d\tau \quad (28)$$

Symbolic integration yields

$$x_p(t) = P(t) e^{Rt} \sum_{i=1}^n \sum_{k=-h}^h \sum_{l=-h}^h Z_{\lambda_i} \hat{P}_k F_l \frac{e^{(-\lambda_i + jk\omega_0 + jl\omega_i)t} - 1}{(-\lambda_i + jk\omega_0 + jl\omega_i)} \quad (29)$$

Equation (29) can also be written as

$$x_p(t) = P(t) e^{Rt} \sum_{i=1}^n \sum_{k=-h}^h \sum_{l=-h}^h Z_{\lambda_i} \hat{P}_k F_l \frac{e^{(-\lambda_i + jk\omega_0 + jl\omega_i)t}}{(-\lambda_i + jk\omega_0 + jl\omega_i)} - P(t) e^{Rt} K \quad (30)$$

where K is defined as

$$K = \sum_{i=1}^n \sum_{k=-h}^h \sum_{l=-h}^h \frac{Z_{\lambda_i} \hat{P}_k F_l}{(-\lambda_i + jk\omega_0 + jl\omega_i)} \quad (31)$$

By expanding $P(t)$ in Fourier series based on (22) and using Sylvester's theorem in e^{Rt} according to (24), the solution is then

$$x_p(t) = \left(\sum_{m=-h}^h \bar{P}_m e^{jm\omega_0 t} \right) \left(\sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} Z_{\lambda_i} \right) \sum_{i=1}^n \sum_{k=-h}^h \sum_{l=-h}^h Z_{\lambda_i} \hat{P}_k F_l \frac{e^{(-\lambda_i + jk\omega_0 + jl\omega_i)t}}{(-\lambda_i + jk\omega_0 + jl\omega_i)} - P(t) e^{Rt} K \quad (32)$$

Notice that using the following Sylvester's theorem property, as presented in [10]

$$Z_{\lambda_i}^2 = Z_{\lambda_i} \quad (33)$$

The particular solution can be simplified as

$$x_p(t) = \sum_{m=-h}^h \sum_{i=1}^n \sum_{k=-h}^h \sum_{l=-h}^h \bar{P}_m Z_{\lambda_i} \hat{P}_k F_l \frac{e^{j(m\omega_0 + k\omega_0 + l\omega_i)t}}{(-\lambda_i + jk\omega_0 + jl\omega_i)} - P(t) e^{Rt} K \quad (34)$$

The following set of observations can be made for the particular solution stated in (34)

- If all the real parts of the eigenvalues of R are negative, then the second term in the right hand side of (34) goes to zero as $t \rightarrow \infty$.
- If the real part of any of the eigenvalues of R is positive, then the solution increases without bound as $t \rightarrow \infty$.
- The general steady state is aperiodic unless ω_0 and ω_i are commensurable.
- Whether the steady state response, or indeed the complete forced response, can be entirely evaluated in an analytical way, depends upon the availability of an analytical form of the transition matrix $\phi(t)$. In this paper, transition matrix approximations are achieved by numerical means. Therefore, the present approach is indeed semi-analytical.

By taking into account these observations, the particular solution (34) can be expressed in the following way in order to yield a symbolic expression for the steady state solution

$$x_{ss}(t) = \sum_{m=-h}^h \sum_{i=1}^n \sum_{k=-h}^h \sum_{l=-h}^h \bar{P}_m Z_{\lambda_i} \hat{P}_k F_l \frac{e^{j(m\omega_0 + k\omega_0 + l\omega_i)t}}{(-\lambda_i + jk\omega_0 + jl\omega_i)} \quad (35)$$

Expression (35) is a completely symbolic and algebraic equation that can be directly evaluated in a mathematical computational package such as Mathematica. Note also that (35) can be evaluated in specific order to compute harmonic coefficients independently. This is, evaluating the matrix multiplications so that $m + k + l$ equals the harmonic of interest.

IV. APPLICATIONS

A simple theoretical second order circuit will be used as an introductory example in order to illustrate the methodology described in section III. Then, the application of the procedure will be shown using the aforementioned power converters.

A. Second-Order Periodic System

Consider the following state model

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -f_1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (36)$$

where f_1 is a time varying parameter given by

$$f_1 = 1 + \text{Sin}(2\pi t) \quad (37)$$

and excited by a periodic input, $u(t) = \text{Sign}(\text{Sin}(2\pi t))$

Fig. 3. Shows the evolution in time of the periodic input $u(t)$

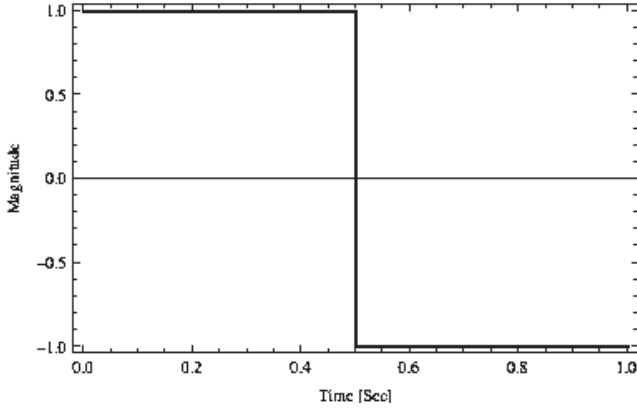


Figure 3. Periodic input $u(t)$

In order to compare the result of the proposed methodology, a step by step simulation (SBSS) was performed to obtain the steady state values of system (36). By SBSS we mean that the solution of the system are integrated numerically by methods such as Runge-Kutta or Euler.

Fig. 4 shows the evolution of the state variables over one period using the approach mentioned above compared to the solution obtained by evaluating (35)

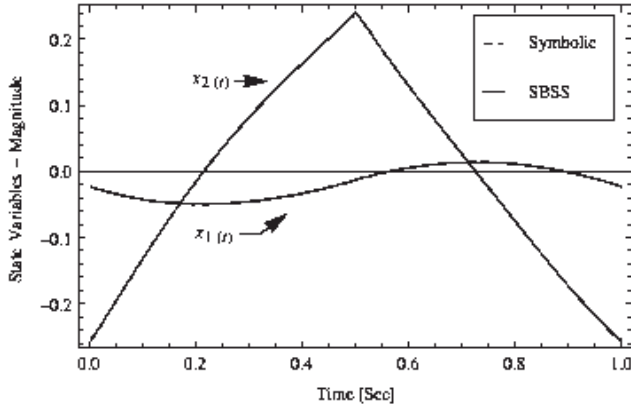


Figure 4. System variables solution in steady state over one period compared against the results obtained from the methodology proposed in section III.

As it can be observed from Fig. 4, almost no difference is present between the two procedures.

In this case, the number of harmonics used throughout the simulation was 15, and as it can be observed from the obtained results, it is enough to produce highly accurate results.

B. Simple Boost Converter

Consider now the system presented in section II, described by (7) and (8). The switching function $s(t)$ described in (6) is used for the simulation.

The simulation parameters used in this example are shown in Table 1.

TABLE I

Parameter Values	
Inductance (L)	0.2 mH
Capacitance (C)	0.2 mF
Load Resistance (R)	12.5 Ω
Input Voltage (E)	16 V
Diode forward drop (V_f)	0.8 V
Switching Period (T)	100 μ s
On-State (T_D)	50 μ s
Switch on-resistance (R_S)	0.001 Ω
Diode on-resistance (R_D)	0.001 Ω

Fig. 5 shows the comparison between step by step simulation and symbolic computation of the evolution over one period of the inductor current i_L

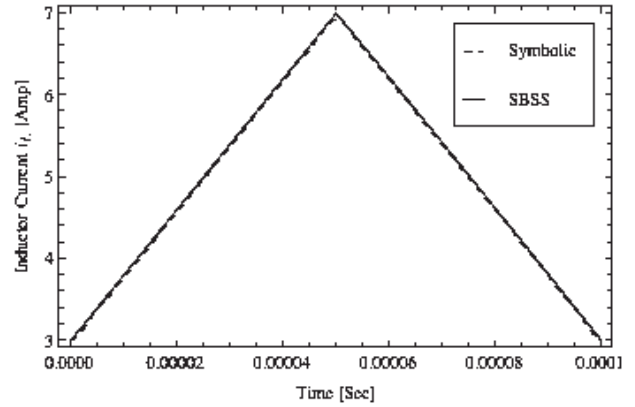


Figure 5. Inductor current comparison between SBSS and symbolic evaluation.

As a part of the symbolic procedure, the Floquet P Matrix is computed, here in Fig. 6, the evolution of its four components over one period is shown.

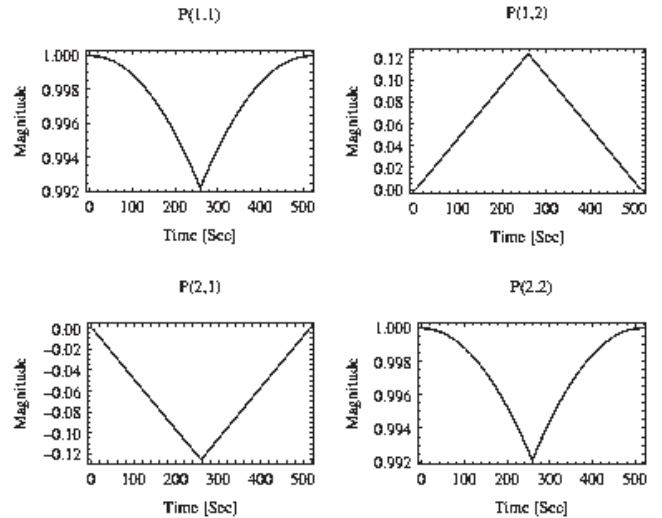


Figure 6. Elements (1,1), (1,2), (2,1) and (2,2) of the obtained P Matrix over one period.

According to the definition of the Floquet decomposition, matrix P is periodic. It can be seen from Fig. 5, that every element of the matrix P complies with this statement, as expected.

The number of harmonics used to simulate the simple boost converter was 15, same as in the previous example.

Now, a comparison is made between the SBSS and the symbolic computation of the state variables. Fig. 7 shows the results obtained by using these two methodologies for the inductor current i_L and de capacitor voltage v_C .

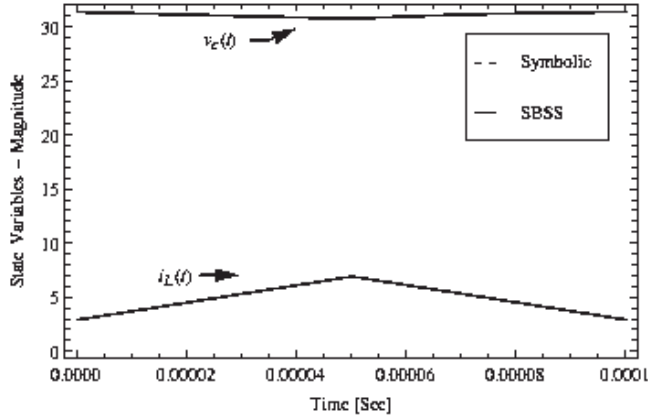


Figure 7. State variables comparison between SBSS and symbolic evaluation.

In Fig (7), solutions are overlapped, meaning an exact reproduction of the steady state values from the symbolic methodology.

C. Single Ended Resonant Converter

Consider the system described by (11) and (12).

The state vector used for this example is stated in (9) and the switching function $c(t)$ described in (10) is used in order to perform the simulation.

Table II shows the parameters used in the simulation.

TABLE II.

Parameter Values	
Voltage Source (E)	100 V
Capacitance (C)	16 nF
Load Resistance (R)	5 Ω
Switching Frequency (f_s)	63 kHz
Inductance (L)	50 μ H
Duty Cycle (d)	0.3

The evolution of the four elements of the Floquet P matrix over one fundamental period are shown in Fig. 8.

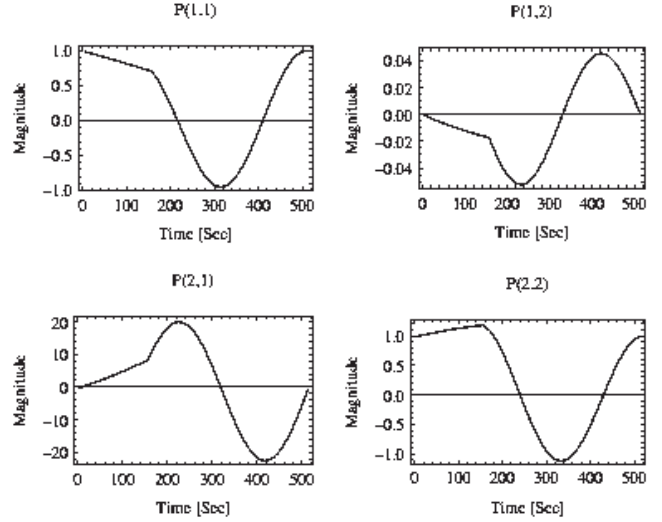


Figure 8. Elements (1,1), (1,2), (2,1) and (2,2) of the obtained P Matrix over one period.

Both inductor current i_L and capacitor voltage v_C are presented in Fig. 9.

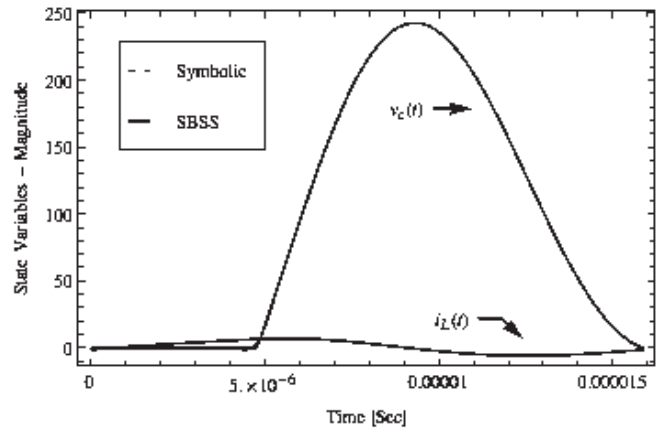


Figure 9. State variables comparison between SBSS and symbolic evaluation.

Highly accurate results are obtained by using 15 harmonics to evaluate the symbolic steady state expression.

It is important to notice that the solutions presented in Fig. 9 are overlapped as in the simple boost converter case. As expected, very good agreement exists between the results obtained with formula (35) and numerical integrations.

V. CONCLUSIONS

In this paper, the symbolic and exact computation of the steady state response in power converters has been considered. The Floquet Decomposition has been the main instrument to allow for the derivation of direct formulas to the steady state. The deep insight that the Floquet Theory provides, offers many avenues of improving the numerical computations that are common in steady state analysis. For instance, one may compute, separately, every harmonic coefficient and avoid computations for non-characteristics

harmonics. Also, parallel processing of harmonics becomes a very natural improvement in systems of large scale.

In harmonic analysis, the approximation of nonlinear systems by periodic ones is a very common approach. In that case the formulas described in this paper may be used to provide means for locally exact iterative harmonic analysis. This work is currently in progress.

REFERENCES

- [1] J. Arrillaga and N. R. Watson, "The harmonic domain revisited", Harmonics and Quality of Power ICHQP 2008, 13th International Conference, 2008.
- [2] A. Bramilla, G. Grusso, M.A. Redaelli, G.S. Gajani and D. D. Caviglia, "Improved small signal analysis for circuits working in periodic steady state", IEEE Transactions on Circuits and Systems, Part 1: Regular Papers, vol 57, no. 2, pp. 427-437, February 2010.
- [3] D. Xia and G. T. Heydt, "Harmonic power flow studies part I – formulation and solution", IEEE Trans. Power App. Syst., vol. PAS-101, pp. 1257-1265, June 1982.
- [4] D. Xia and G. T. Heydt, "Harmonic power flow studies part II – implementation and practical application", IEEE Trans. Power App. Syst., vol. PAS-101, pp. 1266-1270, June 1982.
- [5] T. J. Densem, P. S. Bodger, and J. Arrillaga, "Three phase transmission system modeling for harmonic penetration studies", IEEE Trans. Power App. Syst., vol. PAS-103, pp. 310-317, February 1984.
- [6] A. Semlyen, E. Acha, and J. Arrillaga, "Newton-type algorithms for the harmonic phasor analysis of nonlinear power circuits in periodical steady state with special reference to magnetic nonlinearities", IEEE Transactions on Power Delivery, vol. 3, pp. 1090-1098, July 1988.
- [7] B. K. Perkins, J. R. Martí, and H. W. Dommel, "Nonlinear elements in the EMTP: steady-state initialization", IEEE Trans. Power Syst., vol. 10, pp. 593-601, May 1995.
- [8] Q. Wang and J. R. Martí, "A waveform relaxation technique for steady state initialization of circuits with nonlinear elements and ideal diodes", IEEE Transactions on Power Delivery, vol. 11, pp. 1437-1443, July 1996.
- [9] Semlyen, A. Medina, "Computation of the periodic steady state in systems with nonlinear components using a hybrid time and frequency domain methodology", IEEE Transactions on Power Systems, vol. 10, no. 3, pp. 1498-1504, August 1995.
- [10] H. D'Angelo, "Linear time-varying systems: analysis and synthesis", Allyn and Bacon, 1970, pp. 193-215.
- [11] W.L. Rugh, "Linear system theory", 2nd ed., Prentice Hall, 1996, pp. 81-87.
- [12] E. A. Butcher, M. Sari, E. Bueler, T. Carlson, "Magnus expansion for time-periodic systems: parameter dependent approximations". Comm. nonlinear Science & Numerical Simulation, pp. 4226-4245, February 2009.
- [13] M. Liu, C. K. Tse, J. Wu, "A wavelet approach to fast approximation of steady-state waveforms of power electronics", International Journal of Circuit Theory and Applications, vol 31, pp. 591-610. October 2003.
- [14] L. J. Bohmann, R. H. Lasseter, "Harmonic interactions in thyristor controlled reactor circuits", IEEE Transactions on Power Delivery, vol. 4, no. 3, pp. 1919-1926, July 1989.
- [15] S. G. Jalali, R. H. Lasseter, "A study on nonlinear harmonic interaction between a single phase line-commutated converter and a power system", IEEE Transactions on Power Delivery, vol. 9, no. 2, pp. 1616-1624, July 1994.

Control de Sistemas Periódicos en el Marco de Referencia de Floquet

A. Álvarez, *Student Member, IEEE*, J. Jesús Rico, *Member, IEEE*, y José J. Rincón, *Member, IEEE*

Resumen—En este documento se presenta el uso de una técnica de diseño para el control de sistemas lineales con coeficientes periódicos. La técnica está basada en la transformación del modelo periódico a un modelo invariante en el tiempo mediante la transformación de Lyapunov-Floquet, lo cual permite la aplicación de técnicas control de sistemas invariantes en el tiempo. La metodología requiere el cálculo de la matriz de transición de estados del sistema, lo cual se realiza en el presente trabajo mediante una aproximación numérica. El procedimiento es ejemplificado a través de tres casos de estudio.

Temas claves— Control de Sistemas Periódicos, Transformación Lyapunov – Floquet.

I. INTRODUCCIÓN

Los sistemas periódicos son recurrentes en diversos campos de la ingeniería. Los sistemas mecánicos aportan varios ejemplos, sobretodo en dispositivos con componentes rotatorios como los rotores principales y de cola en helicópteros [4], [10]. Las máquinas eléctricas rotatorias son otro gran campo de donde surgen este tipo de modelos [12]. En forma similar, los convertidores electrónicos y su interacción con la red eléctrica también pueden ser representados mediante modelos periódicos [13], [14]. El control de estos sistemas se vuelve una cuestión de importancia por su presencia en tan diversas áreas de la ingeniería y es por esto que varias técnicas para el diseño de controladores adecuados para este tipo de sistemas se han propuesto en los últimos años [1], [2], [13].

En el presente trabajo, la técnica de diseño de controladores periódicos propuesta en [1] es descrita, adaptada y aplicada a tres casos de estudio. El procedimiento está basado en la teoría de Floquet [3], en donde un cambio de coordenadas variante en el tiempo denominado transformación de Lyapunov – Floquet, es el ingrediente principal para transformar al sistema en un sistema lineal invariante en el tiempo.

Como parte del procedimiento, es necesario conocer la

matriz de transición del sistema. A diferencia de [1], en donde se hace uso de una expansión en polinomios de Chebyshev para obtenerla en forma aproximada, en el presente trabajo se utiliza una aproximación numérica que arroja una expresión adecuada para su manipulación mediante la teoría de Floquet.

En los dos primeros casos de estudio se aplica la metodología a sistemas teóricos con la intención de ilustrar la aplicación del procedimiento, siendo estos el ejemplo de Vinograd [5] y la ecuación de Mathieu [6]. El tercero es dedicado al control del ángulo de las en las palas (hélices) del rotor principal en un helicóptero. En los tres casos es posible obtener una ley de control por retroalimentación de estados.

En la siguiente sección se plantean las bases de la teoría de Floquet necesarias para el entendimiento de la metodología, en la sección III se desarrolla el procedimiento de diseño de controladores periódicos y en la sección IV se presentan los resultados obtenidos para los tres casos de estudio mencionados. Para finalizar, en la sección V se exponen las conclusiones de este trabajo.

II. TEORÍA DE FLOQUET

Antes de aplicar el procedimiento de diseño, es necesario conocer los resultados principales de la teoría de Floquet.

Considere el siguiente sistema lineal periódico homogéneo:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \quad (1)$$

En donde la matriz $A(t)$ es $n \times n$ y cumple con la siguiente característica de periodicidad

$$A(t) = A(t + T) \quad (2)$$

Es posible obtener una expresión para la matriz de transición de estados $\Phi(t)$ del sistema dado por (1), como el producto de dos matrices $n \times n$, de la siguiente manera

$$\Phi(t) = P(t)e^{Ct} \quad (3)$$

En donde la matriz $P(t)$ tiene un período T y la matriz C es una matriz constante, comúnmente ambas matrices son complejas. Si se conoce $\Phi(t)$, la matriz C se puede calcular mediante la siguiente relación multivaluada

Alberto Álvarez cursa sus estudios de maestría en la facultad de Ingeniería Eléctrica de la UMSNH. Francisco J. Mújica S/N, Morelia, México. (e-mail: alberto.alvarez@ieee.org).

J. Jesús Rico es profesor - investigador de la facultad de Ingeniería Eléctrica de la UMSNH, Francisco J. Mújica S/N, Morelia, México. (e-mail: jerico@umich.mx).

J. Juan Rincón es profesor - investigador de la facultad de Ingeniería Eléctrica de la UMSNH, Francisco J. Mújica S/N, Morelia, México (e-mail: jrincon@umich.mx).

$$C = \frac{1}{T} \ln \Phi(T) \quad (4)$$

También es posible factorizar la matriz de transición $\Phi(t)$ como sigue

$$\Phi(t) = L(t)e^{Rt} \quad (5)$$

De donde

$$R = \frac{1}{2T} \ln \Phi(2T) \quad (6)$$

En donde $L(t)$ es una matriz real de período $2T$ y R es una matriz real y constante [15]. Las expresiones (3) y (4) son conocidas como la descomposición de Floquet y las expresiones (5) y (6) son conocidas como la descomposición real de Floquet.

Ahora, la herramienta que permite obtener un sistema invariante en el tiempo a partir del sistema dado por (1) es la transformación Lyapunov-Floquet, que está definida por el cambio a las nuevas coordenadas $z(t)$ dadas por

$$x(t) = P(t)z(t) \quad (7)$$

Al usar esta transformación se puede obtener una nueva representación del sistema original (1) como sigue

$$\dot{z}(t) = Cz(t) \quad (8)$$

En forma similar, si se utiliza la matriz $L(t)$ con período $2T$ para lograr la transformación se tiene

$$x(t) = L(t)z(t) \quad (9)$$

De donde se obtiene el siguiente sistema real e invariante con el tiempo

$$\dot{z}(t) = Rz(t) \quad (10)$$

La obtención de las matrices $P(t)$ y $L(t)$ no es un asunto trivial. Para calcular estas matrices es necesario conocer la matriz de transición $\Phi(t)$ para el sistema dado por (1). En este caso, se obtuvo una aproximación numérica de $\Phi(t)$ mediante la utilización de la siguiente propiedad de las matrices de transición

$$\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t), \quad \Phi(0) = I \quad (11)$$

Es decir, se obtiene $\Phi(t)$ resolviendo en forma numérica el sistema de ecuaciones dado por (11) con las condiciones iniciales indicadas. Una vez obtenida $\Phi(t)$ se obtiene la matriz R mediante (6) y luego se obtiene la matriz de transformación $L(t)$ despejando de (5)

III. OBTENCIÓN DE UN CONTROLADOR VARIANTE EN EL TIEMPO POR COLOCACIÓN DE POLOS

Se considera ahora el sistema lineal periódico con entrada de control $u(t)$ y salida $y(t)$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) \end{aligned} \quad (12)$$

En donde el par $A(t), B(t)$ es controlable y el par $A(t), C(t)$ es observable. Aplicándole a (12) la transformación de Lyapunov-Floquet dada por (9), se obtiene la siguiente expresión

$$\dot{z}(t) = Rz(t) + L^{-1}(t)B(t)u(t) \quad (13)$$

Donde R es la matriz obtenida por la descomposición de Floquet en (5). A continuación se plantea un sistema auxiliar de la forma

$$\dot{\bar{z}}(t) = R\bar{z}(t) + \bar{B}v(t) \quad (14)$$

En el cual la matriz \bar{B} es constante de tal forma que el par de matrices R, \bar{B} sea controlable. Para el sistema auxiliar (14), se puede plantear una ley de control como sigue

$$v(t) = -\bar{K}\bar{z}(t) \quad (15)$$

El error entre los sistemas (13) y (14) queda definido como $e(t) = z(t) - \bar{z}(t)$ y la dinámica del error queda descrita por

$$\dot{e}(t) = Re(t) + L^{-1}(t)B(t)u(t) - \bar{B}v(t) \quad (16)$$

$$\dot{e}(t) = (R - \bar{B}\bar{K})e(t) + L^{-1}(t)B(t)u(t) - \bar{B}v(t) + \bar{B}\bar{K}e(t) \quad (17)$$

Al sustituir $v(t)$ y $e(t) = z(t) - \bar{z}(t)$ en (17) se obtiene

$$\dot{e}(t) = (R - \bar{B}\bar{K})e(t) + L^{-1}(t)B(t)u(t) + \bar{B}\bar{K}z(t) \quad (18)$$

La matriz $R - \bar{B}\bar{K}$ se considera como la matriz de estabilidad y por esta razón los sistemas (13) y (14) se pueden considerar equivalentes en el sentido de mínimos cuadrados si se cumple lo siguiente

$$L^{-1}(t)B(t)u(t) = -\bar{B}\bar{K}z(t) \quad (19)$$

Ahora es posible encontrar una relación para la acción de control $u(t)$

$$u(t) = -B^*(t)L(t)\bar{B}\bar{K}z(t) \quad (20)$$

En donde la matriz $B^*(t)$ es la pseudoinversa de la matriz $B(t)$. Sustituyendo $z(t)$ en (20) obtenemos

$$u(t) = -B^*(t)L(t)\bar{B}\bar{K}L^{-1}(t)x(t) \quad (21)$$

$$u(t) = -K(t)x(t) \quad (22)$$

En donde

$$K(t) = B^*(t)L(t)\bar{B}\bar{K}L^{-1}(t) \quad (23)$$

La expresión (21) es la ley de control con ganancia variante en el tiempo para el sistema periódico original. Obsérvese que la matriz de ganancia $K(t)$ dada por (23) es una matriz de período $2T$. La matriz \bar{K} puede ser calculada por colocación de polos para sistemas invariantes en el tiempo.

IV. CASOS DE ESTUDIO

La utilización de la técnica descrita en la sección anterior, se ilustra mediante la aplicación a tres casos de estudio, uno es un ejemplo completamente teórico conocido como el sistema de Vinograd [5], el segundo caso es el sistema dado por la ecuación de Mathieu y el tercero es el control del ángulo de las palas en el rotor principal de un helicóptero.

A. Sistema de Vinograd

Este sistema tiene la forma descrita por (12), en donde $A(t)$ y $B(t)$ están definidas como sigue:

$$A(t) = \begin{bmatrix} -1 - 9\cos^2(6t) + 12\sin(6t)\cos(6t) & 12\cos^2(6t) + 9\sin(6t)\cos(6t) \\ -12\sin^2(6t) + 9\sin(6t)\cos(6t) & -1 - 9\sin^2(6t) - 12\sin(6t)\cos(6t) \end{bmatrix}$$

$$B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (24)$$

Este sistema presenta un comportamiento inestable en lazo abierto como puede observarse de su respuesta al escalón unitario en la figura 1

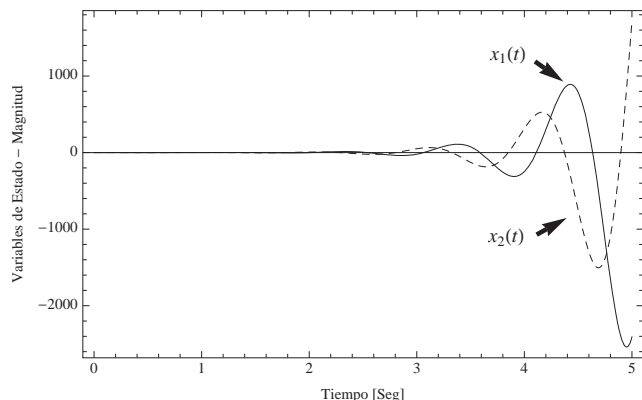


Fig. 1. Evolución de los estados en lazo abierto

Los cuatro elementos de la matriz periódica $L(t)$ para este sistema, graficados a lo largo de dos periodos, se muestran en la siguiente figura

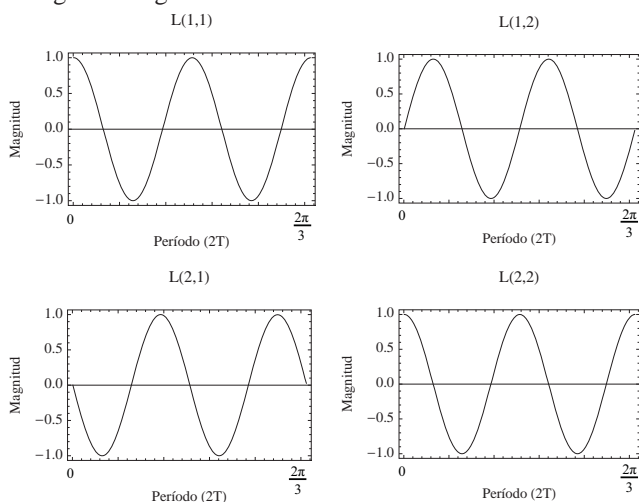


Fig. 2. Elementos de la matriz $L(t)$ a través de dos periodos T

La matriz R calculada a través del uso de (6) es la siguiente

$$R = \begin{bmatrix} -10 & 6 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} \quad (25)$$

Podemos observar cómo esta matriz es constante y real, como se estableció en (5) al usar la descomposición de Floquet sobre $2T$. Utilizando el método de colocación de polos mediante de la fórmula de Ackermann [8] y ubicándolos en las posiciones $(-10, -10)$, se puede obtener la ley de control con ganancia variante en el tiempo planteada en (22) y a través de esta encontrar la respuesta del sistema en lazo cerrado.

Las siguientes dos figuras muestran la ley de control $u(t)$ y la respuesta del sistema en lazo cerrado

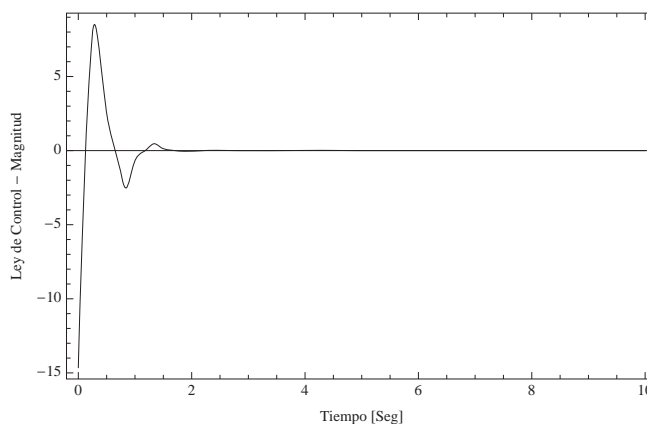


Fig. 3. Ley de control $u(t)$ variante en el tiempo

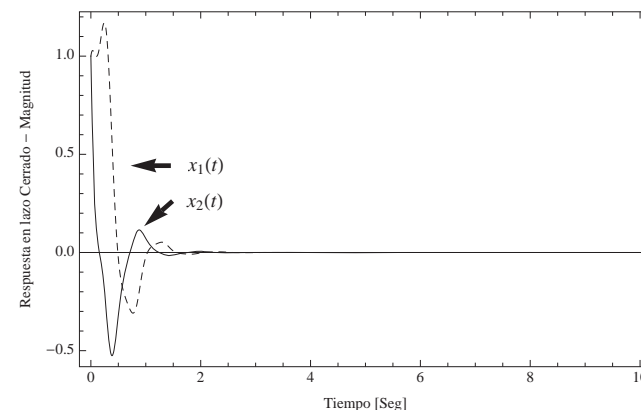


Fig. 4. Respuesta del sistema en lazo cerrado

En la figura 4 se puede apreciar que el sistema se estabiliza al aplicar la ley de control diseñada, los dos estados son llevados a cero partiendo de condiciones iniciales iguales a 1.

La figura 5 muestra la evolución en el tiempo de los elementos de la matriz de ganancias $K(t)$ obtenida mediante (23) para este ejemplo.

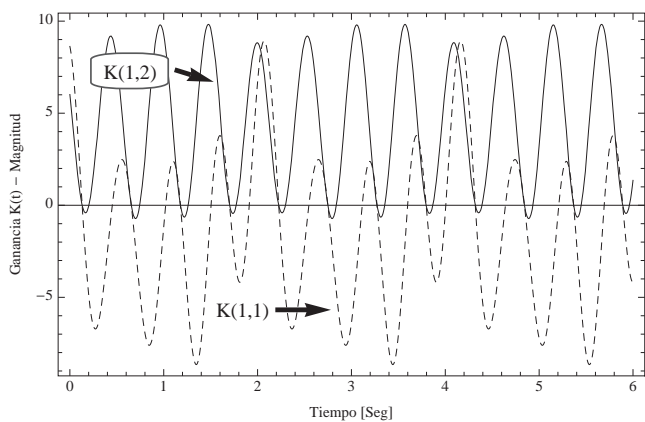


Fig. 5. Elementos de la matriz $K(t)$ periódica

Se puede apreciar en la figura 5 que los elementos de $K(t)$ son funciones periódicas de período $2T = \frac{2\pi}{3}$.

B. Ecuación de Mathieu

Esta ecuación aparece recurrentemente en diversos modelos matemáticos en la ingeniería y fue tratada originalmente por E. Mathieu [9] al estudiar los modos de vibración en membranas elípticas. También, esta ecuación se ha utilizado para describir el movimiento de un péndulo con pivote oscilatorio simple [6], entre otras aplicaciones. Por su importancia histórica se ha utilizado esta ecuación como un caso de estudio. La ecuación de Mathieu con control puede escribirse en espacio de estados de la siguiente manera

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a - 2b\cos(2\pi t) & -d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix} \quad (26)$$

Escogiendo $a = 1$, $b = 1$ y $d = 1$, podemos observar que el sistema es inestable en lazo abierto, como se muestra en la figura 6

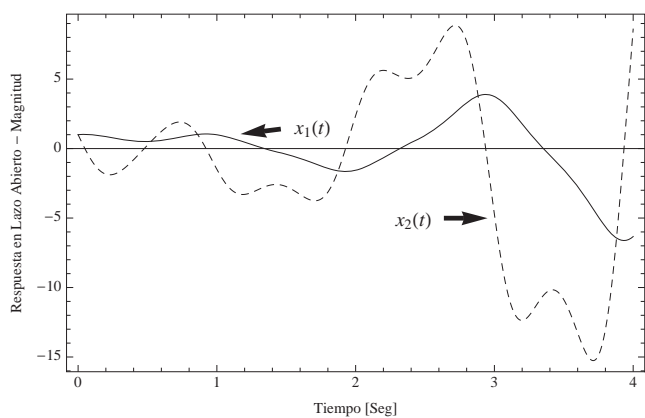


Fig. 6. Respuesta del sistema a una entrada escalón en lazo abierto

Los cuatro elementos de la matriz periódica $L(t)$ de esta ecuación, graficados a lo largo de dos períodos, se muestran en la figura 7

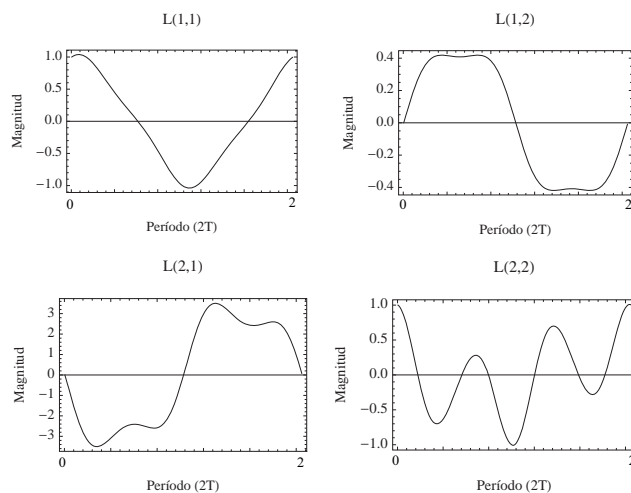


Fig. 7. Elementos de la matriz $L(t)$ a través de dos períodos T

Del mismo modo que en el ejemplo anterior, mediante la fórmula de Ackermann [8] se reubican los polos en las posiciones $(-5, -5)$. Se obtiene la ley de control dada por (22).

En la figura 8 se muestra el comportamiento de esta ley de control y en la figura 9 la respuesta del sistema en lazo cerrado al aplicar la ley de control calculada, observándose que se logra la estabilización.

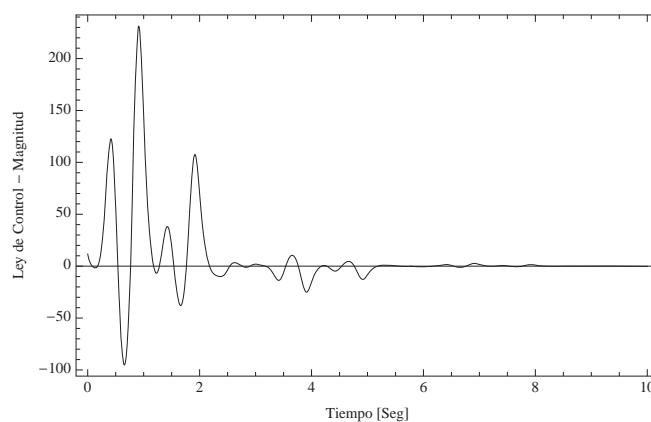


Fig. 8. Ley de control $u(t)$ calculada a través de (22)

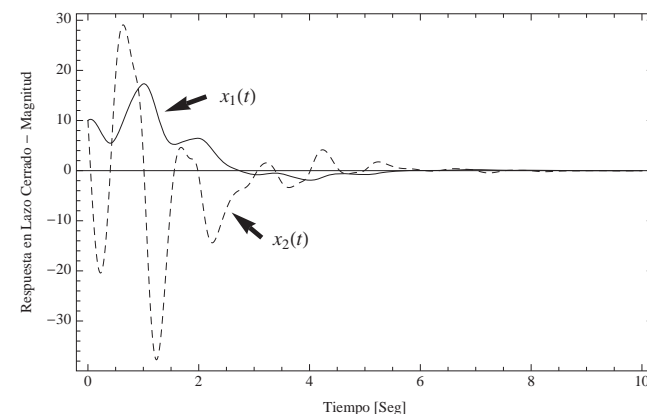


Fig. 9. Respuesta del sistema en lazo cerrado

C. Ángulo en las palas de un rotor de helicóptero

En aeronáutica, el control de vibraciones en los componentes de una aeronave juega un papel fundamental, particularmente en las aeronaves de ala rotatoria (Helicópteros) es un problema cotidiano que ocasiona fatiga en los componentes y reparaciones costosas.

Diversos métodos han sido planteados para atenuar estas vibraciones, la mayoría de estos están basados en el balanceo adecuado de las palas a través del uso de contrapesos y en el control de la trayectoria de la punta de la pala sobre un plano de referencia. Últimamente se han hecho modificaciones en algunos helicópteros para poder modificar el ángulo de las palas en pleno vuelo, asunto que hasta hace unos años sólo era posible hacerlo cuando el helicóptero estaba en tierra. Esto se logra colocando un actuador que va montado en el rotor principal y que tiene como objetivo modificar el ángulo. Al modificar el ángulo se puede disminuir el nivel de vibraciones en el rotor y en el fuselaje de la aeronave [11]. En este documento, sólo se atacará el problema del control del ángulo de las palas.

Es posible obtener un modelo matemático de la dinámica en vuelo frontal del rotor principal de un helicóptero en particular, tal como se presenta en [11] y [16]. Este modelo puede ser llevado a la forma de un sistema lineal periódico, obteniéndose así expresiones para cada una de las palas en el helicóptero. Esto permite la aplicación de la metodología de diseño de controladores periódicos para el control del ángulo en cada una de las palas. El modelo que describe la dinámica de este sistema es el siguiente

$$A(\psi) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\left\{1 + \frac{\gamma}{8} \left(\frac{4}{3} \mu \cos \psi + \mu^2 \sin 2\psi \right)\right\} & -\frac{\gamma}{8} \left(1 + \frac{4}{3} \mu \sin \psi \right) \end{bmatrix}$$

$$B(\psi) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\gamma}{8} \left(1 + \mu^2 + \frac{8}{3} \mu \sin \psi - \mu^2 \cos 2\psi \right) \end{bmatrix} \quad (27)$$

En donde $\mu = 0.3$ y representa a la “tasa de avance” en el helicóptero la cual es una constante adimensional. Del mismo modo, $\gamma = 8$ es el número de Lock [10] y representa la tasa de fuerzas aerodinámicas e inerciales en la pala. En este caso, $\psi = \omega t$ en donde ω es la velocidad angular. Estos fueron los valores utilizados para la simulación y fueron tomados de los resultados obtenidos por Schulz en [11], es en ese mismo trabajo es donde se explica a detalle la obtención del modelado matemático del rotor principal.

El vector de estados para el sistema dado por (27) es

$$x(t) = [\beta \quad \dot{\beta}]^T \quad (28)$$

El primer estado β es la variable a controlar y representa el ángulo de la pala con respecto a la posición horizontal, tal como se muestra en la siguiente figura

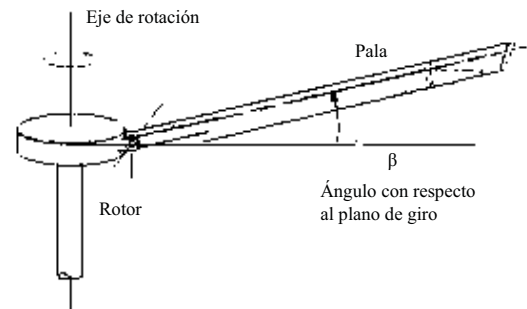


Fig. 10. Diagrama simplificado del rotor y el acoplamiento con la pala

El modelo dado por (27) se utilizó para la construcción de un controlador periódico. Los siguientes son los resultados obtenidos al aplicar el procedimiento de diseño y su eventual control.

La matriz R calculada para este sistema a través del uso de (4) y (5) es la siguiente

$$R = \begin{bmatrix} 0.0038 & 0.954 \\ -1.041 & -1.003 \end{bmatrix} \quad (29)$$

En las figuras 11 y 12 se muestra respectivamente la respuesta del sistema en lazo cerrado y la ley de control $u(t)$ que se obtuvieron al aplicar la metodología de diseño del controlador periódico para llevar el ángulo a la posición de cero grados.

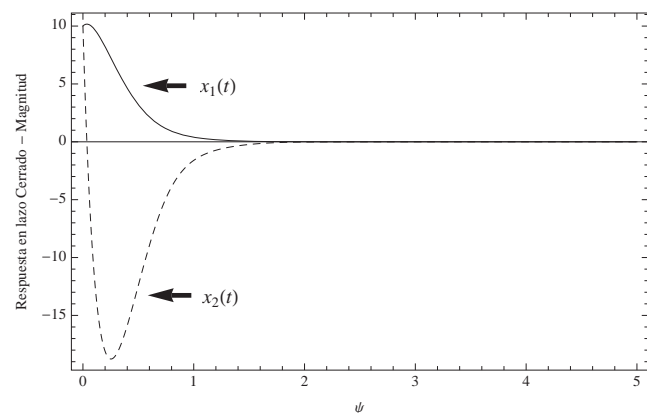


Fig.11. Respuesta del sistema en lazo cerrado

Es posible observar como la evolución de los estado del sistema tiende a cero al aplicar la ley de control obtenida mediante (22) para este caso de estudio.

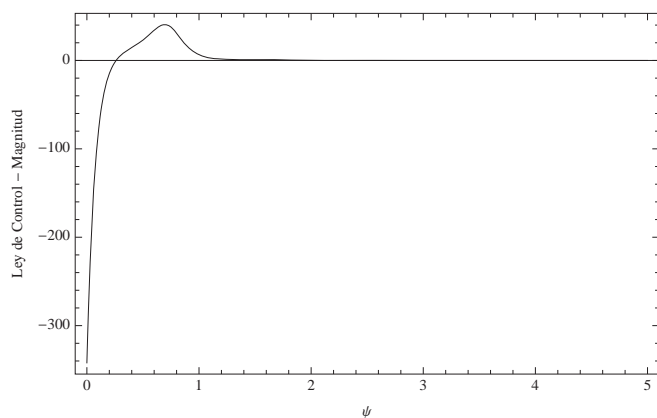


Fig.12. Ley de control $u(t)$ calculada a través de (22)

Partiendo de condiciones iniciales iguales a 10 en ambos estados, podemos ver como la ley de control logra una estabilización asintótica en lazo cerrado.

V. CONCLUSIONES

En este documento se ha adaptado la metodología de diseño de controladores para sistemas lineales periódicos basada en la transformación de Lyapunov- Floquet presentada en [1]. La adaptación realizada consiste en reemplazar el paso del cálculo de la matriz de transición del sistema usando un método numérico de solución de ecuaciones diferenciales en lugar de la expansión en polinomios de Chebyshev. Se han presentado tres casos de estudio en donde se ha corroborado en simulación la efectividad del procedimiento. Para todos los casos de estudio presentados es posible obtener ganancias variantes con el tiempo con el tiempo que hacen al sistema asintóticamente estable.

VI. REFERENCIAS

- [1] S. J. Sinha, P. Joseph, "Control of general dynamic systems with periodically varying parameters via Liapunov – Floquet transformation," *ASME Transactions*, vol. 116, pp. 650-658, Dec. 1994.
- [2] Mark J. Balas, Yung Jae Lee, "Controller design of linear periodic time varying systems", *Proceedings of the American Control Conference*, pp. 2667-2671, Jun. 1997.
- [3] H. D'Angelo. "Linear time-varying systems: analysis and synthesis". Allyn and Bacon, 1970, pp. 193-215.
- [4] R. Pandiyan, S.C. Sinha. "Periodic flap control of a helicopter blade in forward flight". *Journal of Vibration and Control*, vol. 5, pp. 761-777, 1999.
- [5] S. Bittanti, P. Colaneri, "Periodic systems: filtering and control". Springer, 2009, pp. 15-16.
- [6] A. G. Neves, "Approximating solutions of linear ordinary differential equations with periodic coefficients by exact picard iterates". *The Mathematica Journal*, pp. 100-101. 2006.
- [7] V. I. Kalenova, V. M. Morozov, P. M. Sobolevskii, "A study of linear time-varying systems". *Moscow University Mechanics Bulletin*, vol. 64, No. 1, pp. 14-24, 2009.
- [8] K. Ogata, "Ingeniería de control moderna". Pearson, pp. 794-795.
- [9] É. Mathieu, "Mémoire sur le mouvement vibratoire d'une membrane de forme elliptique". *Jour. De math pures et appliquées (Jour. De Liouville)*, 1869.
- [10] W. Johnson, "Helicopter theory". Dover, pp. 22-23. 1980.
- [11] C. Schulz, "Rotorcraft smoothing via linear time periodic methods", Ph.D. dissertation, Department of the air force air university, Air Force Institute of Technology, Ohio, 2007.
- [12] Antero Arkkio and Kai Zenger, "Origin of parasitic time-periodic torques and forces in electrical machines", IFAC International

Workshop on Periodic Control Systems (PSYCO 2010), Antalya, Turkey, 26-28 August 2010

- [13] Axel Schild, Jan Lunze, Jörg Krupar, and Wolfgang Schwarz "Design of generalized hysteresis controllers for DC-DC switching power converters", *IEEE Transactions on Power Electronics*, Vol. 24, No. 1, January, pp. 138-146, 2009.
- [14] Sandberg, Henrik and Möllerstedt, Erik, "Periodic modelling of power systems", *Proceedings of the 1st IFAC Workshop on Periodic Control Systems*, Cernobbio-Como, Italy, pp. 91-96, January, 2001
- [15] Coddington E. A. and Levinson N., "Theory of ordinary differential equations", Mc Graw Hill, New York, 1955.
- [16] N. Wereley, "Analysis and control of linear periodically time varying systems", Ph.D. dissertation, Department of aeronautics and astronautics, Massachusetts Institute of Technology, Massachusetts, 1991.

VII. BIOGRAFÍAS

Alberto Álvarez. Ingeniero en Mecatrónica por parte del Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Monterrey campus Toluca. Actualmente cursa sus estudios de maestría en la Facultad de Ingeniería Eléctrica de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.

J. Jesús Rico. Doctor en Ciencias de la Ingeniería Eléctrica por la Universidad de Glasgow en Escocia. Actualmente es profesor e investigador de tiempo completo en la Facultad de Ingeniería Eléctrica de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo y sus temas de interés son los sistemas eléctricos de potencia, los sistemas lineales periódicos y los sistemas no lineales. Ha publicado diversos artículos de investigación en revistas internacionales.

José J. Rincón. Ingeniero Electricista por la Facultad de Ingeniería Eléctrica de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Maestro en Ciencias por el Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional y Doctor en Ciencias en la Especialidad de Control Automático por la misma institución. Actualmente profesor e investigador de tiempo completo en la Facultad de Ingeniería Eléctrica de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.