

UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÀS DE HIDALGO

INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÀTICAS

**CICLOS LÌMITE DE SISTEMAS HAMILTONIANOS
PERTURBADOS Y CEROS DE INTEGRALES ABELIANAS**

TESIS QUE PRESENTA

SALOMÒN REBOLLO PERDOMO

PARA OBTENER EL GRADO DE

DOCTOR EN MATEMÀTICAS

ASESOR

DR. JESÙS R. MUCIÑO RAYMUNDO

AGOSTO DE 2007



UNIVERSIDAD MICHOACANA
DE
SAN NICOLÁS DE HIDALGO.

Instituto de Física y Matemáticas
Posgrado

**Q.F.B. JORGE AVILA RAMIREZ
DIRECTOR DE CONTROL ESCOLAR
DE LA UNIVERSIDAD MICHOACANA
DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO
P R E S E N T E**

Apreciable Q.F.B. Avila:

Atentamente me dirijo a Ud. para comunicarle que el trabajo de tesis titulado "**Ciclos límite de sistemas Hamiltonianos perturbados y ceros de integrales Abelianas**" desarrollado por el Mtro. Salomón Rebollo Perdomo, ha sido revisado por los Drs. Jesús R. Muciño Raymundo, Martha Álvarez Ramírez, Abdón Choque Rivero, Luis Abel Castorena Martínez, Osvaldo Osuna Castro, aprobando que sea Impreso y presentado en su examen recepcional.

Agradeciendo su atención, me despido de usted con un cordial saludo.

ATENTAMENTE

Morelia, Michoacán 06 de agosto de 2007

Dr. Ulises Nucamendi Gómez
Secretario Académico
Instituto de Física y Matemáticas

c.c.p. Dr. Jesús R. Muciño Raymundo.- IMATE-UNAM
c.c.p. Dra. Martha Álvarez Ramírez.- UAM
c.c.p. Dr. Abdón Choque Rivero - IFM-UMSNH
c.c.p. Dr. Luis Abel Castorena Martínez- IMATE-UNAM
c.c.p. Dr. Osvaldo Osuna Castro.- IFM-UMSNH



Contenido

Introducción.	v
1 Ciclos límite en el plano.	1
1.1 Descripción geométrica real y compleja.	1
1.2 Ciclos límite en el plano complejo.	5
1.3 La k -ésima función de Poincaré-Pontryagin.	11
1.4 Representación de las perturbaciones.	19
2 Integrales Abelianas.	23
2.1 Descripción de integrales Abelianas.	23
2.2 Integrales Abelianas para polinomios de tipo \mathbb{C}^*	29
2.3 Ciclos límite en polinomios de tipo \mathbb{C}^*	37
2.4 La curva de Ilyashenko.	38
3 Ciclos límite de sistemas de tipo Liénard.	41
3.1 Integrales Abelianas para polinomios de grado 2.	41
3.2 Sistemas de tipo Liénard.	45
3.3 La curva de Ilyashenko.	56
4 Integrales Abelianas univaluadas.	59
4.1 Polinomios con monodromía global trivial.	59
4.2 Topología de las fibras e integrales Abelianas.	61
4.3 Propiedades de las integrales Abelianas.	84
Problemas abiertos.	87
Bibliografía	89

Introducción.

En la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales, el estudio de ciclos límite es muy importante ya que estos proporcionan información relevante para la descripción del retrato fase de una ecuación diferencial. Sin embargo hallar los ciclos límite de una ecuación diferencial puede ser muy complicado. Prueba de esto es que por más de cien años la segunda parte del problema 16 de Hilbert [Hi](que enunciaremos en seguida) permanece sin solución.

Problema 1. Segunda parte del problema 16 de Hilbert.
Hallar la cota superior $\mathcal{H}(n)$ para el número de ciclos límite de la ecuación diferencial:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \quad (1)$$

donde $P, Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ son polinomios y n es el máximo de los grados de P y Q .

En relación a este problema los resultados más importantes conocidos hasta hoy son:

1. Cada ecuación diferencial (1) tiene un número finito de ciclos límite (ver [Ily91] y [Ec]).
2. La cota $\mathcal{H}(1)$ es cero (resultado elemental).
3. La cota $\mathcal{H}(2)$ es finita (ver [DRR]).

Sin embargo aún en el caso más sencillo no trivial ($n = 2$) la cota superior $\mathcal{H}(n)$ no se conoce.

Debido al poco éxito en esta dirección, gran parte del trabajo matemático relacionado con el Problema 1 está dedicado a encontrar cotas inferiores para $\mathcal{H}(n)$. Para valores pequeños de n se conoce que:

- i) $\mathcal{H}(2) \geq 4$ (ver [Shi]),
 - ii) $\mathcal{H}(3) \geq 12$ (ver [YH]),
 - iii) $\mathcal{H}(5) \geq 24$ (ver [LCC]) y
 - iv) $\mathcal{H}(7) \geq 57$ (ver [KZ]).
- (2)

Para el caso $n = 2$ la conjetura es que $\mathcal{H}(2) = 4$ (ver [Ga], pág. 141).

Ahora bien, aunque en un principio el Problema 1 fue planteado sobre el plano real \mathbb{R}^2 ; también es posible considerarlo sobre el plano complejo \mathbb{C}^2 , ya que un ciclo límite (en \mathbb{R}^2) de la ecuación diferencial real (1) induce un ciclo límite en \mathbb{C}^2 de la complejificación de la ecuación (1), es decir, considerando $P, Q : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ (ver [Ily02], pág. 340).

En este trabajo no estudiamos en general las ecuaciones del tipo (1), sino aquellas que están cerca de sistemas Hamiltonianos, esto es, dados:

- Un polinomio $H : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ de grado $m + 1$,
- un parámetro complejo pequeño $\epsilon \in (\mathbb{C}, 0)$ y
- una 1-forma diferencial polinomial

$$\omega = B(x, y)dx - A(x, y)dy$$

de grado $n = \max\{\text{grado}(A), \text{grado}(B)\}$ sobre \mathbb{C}^2 ;

se considera la familia de ecuaciones diferenciales holomorfas (parametrizada por ϵ):

$$dH - \epsilon\omega = 0. \tag{3}$$

Esta es una idea clásica (ver [Pon], [Mel]).

A la ecuación diferencial $dH = 0$ (la ecuación diferencial inicial) le llamamos sistema Hamiltoniano y decimos que $-\epsilon\omega$ es una perturbación del sistema Hamiltoniano $dH = 0$. La pregunta general respecto a la familia (3) es:

¿Cómo cambian las propiedades geométricas y dinámicas de las soluciones de $dH = 0$ bajo la perturbación $-\epsilon\omega$?

Una primer respuesta es la siguiente: Para $\epsilon = 0$ el retrato fase del sistema Hamiltoniano $dH = 0$ es bien entendido ya que sus soluciones están contenidas en las fibras (curvas algebraicas planas afines) del polinomio H . Esto implica que $dH = 0$ no posee ningún ciclo límite. Pero debido a la perturbación $-\epsilon\omega$, algunos ciclos de $dH = 0$ (clases de homotopía libre $[\gamma_c]$ de lazos γ_c contenidos en las fibras $H^{-1}(c)$ de H) pueden generar ciclos límite de la familia $dH - \epsilon\omega = 0$.

Este hecho establece una conexión entre la perturbación de sistemas Hamiltonianos y la segunda parte del problema 16 de Hilbert. Esta conexión es muy importante ya que las desigualdades *iii*) y *iv*) de (2) se obtuvieron siguiendo esta idea (en el plano real). De esto se obtiene la siguiente variación del Problema 1:

Problema 2. Versión infinitesimal fuerte [Ily02]. *Hallar la cota superior $\mathcal{H}(m, n) \in \mathbb{N}$, dependiendo sólo de $m+1 = \text{grado}(H)$ y $n = \text{grado}(\omega)$, del número de ciclos de $dH = 0$ que bajo la perturbación $-\epsilon\omega$, generan ciclos límite de la familia $dH - \epsilon\omega = 0$.*

La herramienta más utilizada para determinar si un ciclo $[\gamma_{c_0}]$ de $dH = 0$ genera un ciclo límite de la familia $dH - \epsilon\omega = 0$ es la función desplazamiento asociada al ciclo $[\gamma_{c_0}]$ y a la familia $dH - \epsilon\omega = 0$. Su construcción requiere de los siguientes ingredientes:

- Una parametrización γ del lazo $\gamma_{c_0} \subset H^{-1}(c_0) \subset \mathbb{C}^2$.
- Un disco $D \subset \mathbb{C}^2$ transversal a las fibras $H^{-1}(c)$ de H en un punto p_0 de γ_{c_0} y que intersecta a cada fibra $H^{-1}(c)$ en a lo más un punto. Así D se parametriza por $H^{-1} : H(D) \rightarrow D, c \mapsto H^{-1}(c) \cap D$.

Para $\epsilon_0 \in \mathbb{C}$ suficientemente pequeño el disco D es transversal a las imágenes de las soluciones de la ecuación diferencial $dH - \epsilon_0\omega = 0$. Por lo tanto podemos elegir un disco pequeño $D_1 \subset \mathbb{C}$ centrado en $0 \in \mathbb{C} = \{\epsilon\}$, de tal forma que el polidisco $D_1 \times D \subset D_1 \times \mathbb{C}^2$ sea trasversal en el punto $(0, p_0) \in D_1 \times \mathbb{C}^2$ a las soluciones de la familia $dH - \epsilon\omega = 0$.

Como D esta parametrizado por $c \mapsto H^{-1}(c) \cap D$, entonces podemos darle al polidisco $D_1 \times D$ el sistema de coordenadas $\{(\epsilon, c)\}$.

Sabemos que existe un subconjunto abierto $U \subset D$ tal que la aplicación de holonomía asociada a γ (*i.e.* la aplicación de primer retorno de Poincaré en el caso complejo), $f_\gamma : D_1 \times U \rightarrow D_1 \times D$ está bien definida y por la construcción es holomorfa (ver [CN], pág. 63). Además para cada punto (ϵ, c) en $D_1 \times U$ existe una única curva $\gamma(\epsilon, c)$ (que depende sólo de γ) que une el punto (ϵ, c) con el punto $f_\gamma(\epsilon, c)$ (ver [CN], pág. 66). Notemos que las curvas $\gamma(0, c)$ son cerradas, por lo que existe un único lazo $\gamma_c := \gamma(0, c) \subset H^{-1}(c)$ que pasa por el punto de intersección del disco D con la fibra $H^{-1}(c)$.

Nosotros definimos la función desplazamiento asociada al ciclo $[\gamma_{c_0}]$ y a la familia $dH - \epsilon\omega = 0$ como la función:

$$L_\gamma : D_1 \times U \rightarrow \mathbb{C}, \quad (\epsilon, c) \mapsto ((H \circ f_\gamma) - H)(\epsilon, c),$$

la cual se puede expresar como:

$$L_\gamma(\epsilon, c) = \epsilon^k L_k(c) + O(\epsilon^{k+1}), \quad \text{con } k \geq 1. \quad (4)$$

(Ver Sección 1.2 para una descripción más amplia).

El criterio de Poincaré-Pontryagin dice que el ciclo $[\gamma_{c_0}]$ genera un ciclo límite de la familia $dH - \epsilon\omega = 0$ si y sólo si c_0 es un cero aislado de la

función $L_k(c)$ (ver Teorema 1.1). Además, si $k = 1$ entonces la fórmula de Poincaré-Pontryagin nos dice que la función $L_1(c)$ esta dada por la integral Abeliiana:

$$\begin{aligned} L_1(c) : H(U) &\rightarrow \mathbb{C} \\ c &\mapsto \int_{[\gamma_c]} \omega \end{aligned}$$

donde $[\gamma_c]$ es la clase de homología del lazo $\gamma_c \subset H^{-1}(c)$ (ver Lema 1.1).

Por lo tanto, si logramos mostrar que la función $L_1(c)$ no es idénticamente nula y podemos acotar su número de ceros aislados entonces habremos acotado el número de ciclos de $dH = 0$ en U que generan ciclos límite de la familia.

En resumen, el criterio y fórmula de Poincaré-Pontryagin dan la conexión entre el problema de encontrar ciclos de $dH = 0$ que generan ciclos límite de la familia $dH - \epsilon\omega = 0$ y el problema de encontrar ceros aislados de la integral Abeliiana de ω sobre los ciclos de $dH = 0$. Así se obtiene otra variación del Problema 1:

Problema 3. Versión infinitesimal débil [Ar]. *Hallar la cota superior $Z(m, n) \in \mathbb{N}$, dependiendo sólo de $m + 1 = \text{grado}(H)$ y $n = \text{grado}(\omega)$, del número de ceros aislados no triviales de la integral Abeliiana:*

$$\begin{aligned} I(c) : \Delta &\rightarrow \mathbb{C} \\ c &\mapsto \int_{[\gamma_c]} \omega, \end{aligned}$$

donde $\Delta \subset \mathbb{C} = \text{imagen}(H)$ es un subconjunto simplemente conexo y $\{\gamma_c\}$ es una familia continua de lazos respecto al parámetro $c \in \Delta$, tal que la clase de homología $[\gamma_c]$ de cada lazo γ_c es no trivial en $H_1(H^{-1}(c), \mathbb{Z})$ el primer grupo de homología de la fibra $H^{-1}(c)$.

Decimos que $c \in \Delta$ es un cero trivial de $I(c)$ si la fibra $H^{-1}(c)$ es simplemente conexa.

Para el Problema 3 el resultado más importante conocido es:

- $Z(m, n) \leq an$, donde a es una constante que depende sólo del grado de H (ver Teorema 6.26, pág. 177 en [Zo]).

La solución del Problema 3 proporciona información local para hallar la solución al Problema 2, sin embargo para su solución completa es útil considerar la integral Abeliiana $I(c)$ de forma global, esto es, $I(c) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, pero existe un ingrediente que impone dificultades importantes para el estudio global de $I(c)$: la monodromía de H , pues esto implica que en general la integral Abeliiana $I(c)$ sea multivaluada (ver Sección 2.1).

Así que el caso no trivial más tratable, para el Problema 3, es cuando el primer grupo de homología de la fibra genérica de H tiene sólo un generador, es decir, cuando la fibra genérica de H es una curva algebraica irreducible y biholomorfa a $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} - \{0\}$. A los polinomios con esta propiedad se les llama primitivos de tipo \mathbb{C}^* y su clasificación algebraica (*i.e.* salvo automorfismos algebraicos de \mathbb{C}^2 y \mathbb{C}) según [MS] y [Sa] esta dada por la familia:

$$\mathcal{S} = \left\{ x^k (x^l y - P(x))^r \mid \begin{array}{l} k, r, l \in \mathbb{N}, (r, k) = 1, \deg(P(x)) < l \\ P(0) \neq 0 \text{ y si } l = 0 \text{ entonces } P(x) \equiv 0 \end{array} \right\}.$$

Nosotros usamos la familia \mathcal{S} y probamos el siguiente:

Teorema 2.2. *Sea H un polinomio de grado $m + 1 \geq 3$ en la familia \mathcal{S} . Si ω es una 1-forma polinomial de grado n entonces la integral Abeliana:*

$$\begin{aligned} I(c) : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ c &\mapsto \int_{[\gamma_c]} \omega, \end{aligned}$$

es una función polinomial. Además la cota superior para el número de ceros aislados no triviales de $I(c)$ es

$$Z(m, n) = \left\lfloor \frac{n+1}{m+1} \right\rfloor,$$

donde $[\cdot]$ denota la parte entera.

Para el caso $m + 1 = 2$ no sólo consideramos H de tipo \mathbb{C}^* sino cualquier polinomio H de grado $m + 1 = 2$ y probamos el siguiente resultado:

Teorema 3.1. *Sea $H : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ un polinomio de grado 2 y ω una 1-forma diferencial polinomial de grado n , entonces la integral Abeliana:*

$$\begin{aligned} I(c) : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ c &\mapsto \int_{[\gamma_c]} \omega \end{aligned}$$

es una función polinomial. Además la cota superior para el número de ceros aislados no triviales de $I(c)$ es:

$$Z(1, n) = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor.$$

El siguiente grado de dificultad en el Problema 3 es cuando el polinomio H tiene monodromía global trivial y el primer grupo de la homología de la

fibra genérica tiene al menos dos generadores. La clasificación algebraica de estos polinomios, según [NN1] y [NN2], esta dada en tres familias:

$$\mathcal{S}_1 := \left\{ y \prod_{l=1}^{r-1} (\beta_l - x)^{a_l} - h(x) \mid r \geq 3 \right\},$$

$$\mathcal{S}_2 := \left\{ x^{p_1} s^p \prod_{l=1}^{r-1} (\beta_l - x^{q_1} s^q)^{a_l} \mid r \geq 2 \right\},$$

$$\mathcal{S}_3 := \left\{ x^{q_1} s^q + x^{p_1} s^p \prod_{l=1}^{r-1} (\beta_l - x^{q_1} s^q)^{a_l} \mid r \geq 2 \right\},$$

donde $a_l \in \mathbb{N} - \{0\}$, $\beta_l \in \mathbb{C} - \{0\}$ con $\beta_l \neq \beta_{l'}$ si $l \neq l'$, $h(x)$ un polinomio de grado $< \sum_{l=1}^{r-1} a_l$, $0 \leq p_1 < p$, $0 \leq q_1 < q$ tal que $(pq_1 - qp_1) = \pm 1$ y $s := x^k y - P(x)$ con $k \geq 1$ y $P(x)$ es un polinomio de grado $< k$.

Nosotros usamos estas tres familias para obtener el siguiente:

Teorema 4.3. *Sea $H : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ un polinomio con monodromía global trivial y sea ω una 1-forma diferencial polinomial de grado n . Entonces:*

a) *La integral Abeliana:*

$$\begin{aligned} I_\tau(c) : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ c &\mapsto \int_{[\gamma_c^\tau]} \omega, \end{aligned}$$

donde γ_c^τ es un elemento no nulo de $H_1(\mathcal{L}_c, \mathbb{Z})$, es una función polinomial

b) *Si $H \in \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3$ entonces el grado $d(n)$ del polinomio $I(c)$ se comporta de la siguiente forma:*

1. *Si $H \in \mathcal{S}_1$, entonces $d(n) \leq n$.*
2. *Si $H \in \mathcal{S}_2$, entonces $d(n) = q(kn - 1) + q_1 n$.*
3. *Si $H \in \mathcal{S}_3$, entonces*

$$d(n) \leq (kn-1) \left(q \left(\sum_{l=1}^{r-1} a_l - 1 \right) + p \right) + n \left(q_1 \left(\sum_{l=1}^{r-1} a_l - 1 \right) + p_1 \right)$$

si $r \geq 3$ o $r = 2$ y $a_1 > 1$; y

$$d(n) \leq \max\{p(kn - 1) + np_1, q(kn - 1) + nq_1\},$$

si $r = 2$ y $a_1 = 1$.

El grado $d(n)$ es una cota superior para el número de ceros aislados de la integral Abelianas $I(c)$.

Ahora, si la función $L_1(c)$ es idénticamente cero, entonces de acuerdo a la ecuación (4), es necesario conocer la función $L_2(c)$ para calcular el número de ciclos de $dH = 0$ que generan ciclos límite de la familia $dH - \epsilon\omega = 0$; si $L_2(c)$ también es idénticamente cero entonces necesitamos conocer $L_3(c)$ y así sucesivamente hasta encontrar la primer función $L_k(c)$ no idénticamente nula o bien mostrar que todas las funciones $L_k(c)$ son nulas, lo que implica que $L_\gamma(\epsilon, c)$ es idénticamente cero y por lo tanto ningún ciclo de $dH = 0$ en U genera ciclo límite.

Sabemos que en general $L_k(c)$, con $k \geq 1$ no esta dada por una integral Abelianas, esto es, por la integral de una 1-forma racional sobre ciclos de $dH = 0$, ver [Ga05] pág. 664. Esto impone dificultades importantes para hallar la solución al Problema 2. Sin embargo existen ejemplos para los cuales las funciones $L_k(c)$ siempre estan dadas por integrales Abelianas (por ejemplo cualquier polinomio primitivo H de grado 2 de tipo \mathbb{C}^* , ver Sección 3.1, Corolario 3.4 y también [Ga05] pág. 681).

En particular el polinomio $H = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ tiene la propiedad de que $L_k(c)$ siempre es una integral Abelianas. Iliev usa esto para dar una cota superior del número de ceros aislados de la función $L_k(c)$ en términos de k y $n = \text{grado}(\omega)$, tal cota es $\left\lfloor \frac{k(n-1)}{2} \right\rfloor$ (ver [Ili]). Del artículo de Gavrilov [Ga01] se sigue que $\mathcal{H}(1, 2) = 2$, sin embargo para $n > 2$ la cota $\mathcal{H}(1, n)$ es aún desconocida.

Nosotros estudiamos el Problema 2 cuando $H = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ y ω es de la forma $\omega = g(x)dx - f(x)dy$, obteniendo el siguiente resultado:

Teorema 3.2. *Sea $H = (x^2 + y^2)/2 : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ y ω es una 1-forma diferencial polinomial de grado n de la forma: $\omega = g(x)dx - f(x)dy$ entonces*

$$\mathcal{H}(1, n) = 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1.$$

La demostración se basa en lo siguiente:

- Si $L_1(c)$ no es idénticamente cero entonces $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ es la cota para el número de ciclos de $dH = 0$ que generan ciclos límite de la familia $dH - \epsilon\omega = 0$. Además $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \leq 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1$.
- Si $L_1(c)$ es idénticamente cero entonces se calcula explícitamente la función $L_2(c)$ obteniendo que $2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1$ es la cota superior para el número de sus ceros aislados y por lo tanto es la cota superior para el número de ciclos de $dH = 0$ que generan ciclos límite.

- Si $L_1(c)$ y $L_2(c)$ son idénticamente cero entonces se demuestra que todas las funciones $L_k(c)$ son idénticamente cero, por lo que ningún ciclo de $dH = 0$ genera ciclo límite de la familia.

Notemos que $dH - \epsilon\omega = 0$ se puede escribir como el sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} &= y + \epsilon f(x) \\ \dot{y} &= -x + \epsilon g(x), \end{cases}$$

el cual es un sistema de tipo Liénard polinomial (en forma infinitesimal). El estudio de los ciclos límite de sistemas de tipo Liénard polinomiales fue propuesto por M. W. Hirsch y S. Smale (ver [HS] pag. 226 y [Sm] pag. 284). A. Lins, W. de Melo y C. C. Pugh en [LMP] construyeron ejemplos de sistemas Liénard polinomiales de grado $2k+1$ y $2k+2$ que tiene exactamente k ciclos límite. Nuestro resultado permite construir sistemas Liénard polinomiales de grado n con exactamente $2 \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$ ciclos límite.

Para finalizar, se bosqueja de forma breve el desarrollo del trabajo.

En el Capítulo 1 describimos:

- Los ciclos de un sistema Hamiltoniano (real o complejo) $dH = 0$ y los fenómenos que pueden aparecer bajo la perturbación $-\epsilon\omega$.
- La función desplazamiento asociada a la familia $dH - \epsilon\omega = 0$ y las herramientas necesarias para determinar cuando un ciclo de $dH = 0$ genera un ciclo límite de la familia.
- Las 1-formas diferenciales polinomiales ω que son significativas para el Problema 2.

En el Capítulo 2 realizamos:

- Una descripción del estudio de integrales Abelianas.
- El estudio de integrales Abelianas para polinomios H de tipo \mathbb{C}^* de grado ≥ 3 . La demostración del Teorema 2.1 y algunas observaciones sobre el número de ciclos de $dH = 0$ que generan ciclos límite.
- Una descripción de la curva de Ilyashenko asociada a la familia $dH - \epsilon\omega = 0$ y sus propiedades para polinomios H de tipo \mathbb{C}^* .

El Capítulo 3 contiene:

- El estudio de integrales Abelianas para polinomios H de grado 2 y la prueba del Teorema 3.1.

- Un estudio detallado de los sistemas de tipo Liénard (en su forma infinitesimal). Logrando con esto la prueba del Teorema 3.2.
- La forma de la curva de Ilyashenko asociada a la familia $dH - \epsilon\omega = 0$ para polinomios H de grado 2 y de tipo \mathbb{C}^* .

En el Capítulo 4 resolvemos el Problema 2 para polinomios con monodromía global trivial. La solución sigue el siguiente camino:

- Se da la clasificación algebraica de polinomios con monodromía global trivial en tres familias.
- Para cada una de las tres familias se resuelve el Problema 2, culminando con la demostración del Teorema 4.3.

Capítulo 1

Ciclos límite en el plano.

1.1 Descripción geométrica real y compleja.

Usaremos \mathbb{K} indistintamente para referirnos al campo de los números reales \mathbb{R} y al campo de los números complejos \mathbb{C} . Sean (x, y) las coordenadas de \mathbb{K}^2 .

Consideremos $H : \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}$ un polinomio, se define el *sistema Hamiltoniano asociado a H* como la ecuación diferencial:

$$dH = H_x dx + H_y dy = 0,$$

donde $H_x := \frac{\partial H}{\partial x}$ y $H_y := \frac{\partial H}{\partial y}$.

Las soluciones del sistema Hamiltoniano $dH = 0$ están contenidas en las fibras (curvas algebraicas planas afines) de H las cuales denotamos por:

$$\mathcal{L}_c := \{(x, y) \in \mathbb{K}^2 \mid H(x, y) - c = 0\} \subset \mathbb{K}^2.$$

Observación 1.1. Si $H : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ es un polinomio primitivo (*i.e.* con fibra genérica irreducible, ver Sección 2.1 para más detalles), de grado $m + 1 \geq 2$ entonces su fibra genérica \mathcal{L}_c es biholomorfa a una superficie de Riemann compacta de género $g \geq 0$, menos $k \geq 1$ puntos (los puntos al infinito de H) y se dice que H es de tipo (g, k) . Aún cuando se puede calcular k y g en términos de $m + 1$, usando el teorema de Bezout y la fórmula de Riemann-Hurwitz respectivamente (ver [Gr] págs. 87 y 92) por simplicidad no lo describimos.

Denotamos por $Sing(H)$ el conjunto de puntos singulares de H , es decir,

$$Sing(H) := \{(x, y) \in \mathbb{K}^2 \mid H_x(x, y) = H_y(x, y) = 0\}.$$

El conjunto de fibras de H define una foliación unidimensional \mathcal{F}_H (real o compleja según sea \mathbb{K}) sobre $\mathbb{K}^2 - Sing(H)$.

Por otra parte, si F es una hoja de una foliación unidimensional real ó compleja \mathcal{F} , decimos que:

- Un *ciclo* en el caso real, es una curva real $\gamma \subset F$ homeomorfa al círculo \mathbb{S}^1 (de hecho $\gamma = F$), y
- Un *ciclo* en el caso complejo, es la clase de homotopía libre de una curva real $\gamma \subset F$ homeomorfa al círculo \mathbb{S}^1 y no homotópica a un punto sobre la hoja F .

Para la foliación \mathcal{F}_H denotaremos a los ciclos por:

- $\gamma_c \subset \mathcal{L}_c - \text{Sing}(H)$ en el caso real ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$), ver Figura 1.1.
- $[\gamma_c]$ ($\gamma_c \subset \mathcal{L}_c - \text{Sing}(H)$) en el caso complejo ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$), ver Figura 1.2.

Diremos que estos ciclos son ciclos del sistema Hamiltoniano $dH = 0$.

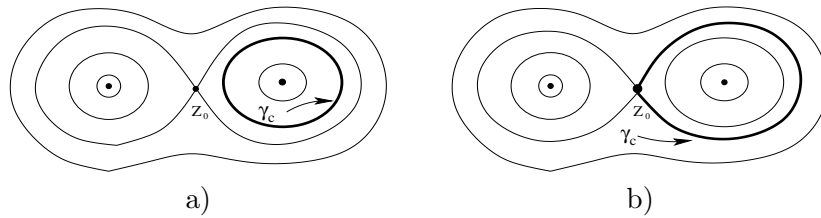


Figura 1.1: Caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. En a) γ_c es un ciclo. En b) γ_c no es un ciclo ya que Z_0 es punto singular de H .

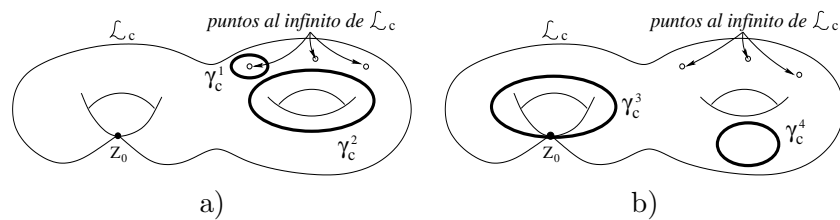


Figura 1.2: Caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. En a) $[\gamma_c^1]$ y $[\gamma_c^2]$ son ciclos. En b) $[\gamma_c^3]$ y $[\gamma_c^4]$ no son ciclos, ya que γ_c^3 contiene a Z_0 que es punto singular de H y γ_c^4 es homotópica a un punto.

Observación 1.2. Es fácil mostrar que un ciclo real da lugar a un ciclo complejo (ver [Ily02], pág. 340).

Ahora consideramos el conjunto

$$\Omega_n := \{\omega = Bdx - Ady\}$$

de las 1-formas diferenciales polinomiales sobre \mathbb{K}^2 de grado a lo más n , es decir, el grado de los polinomios A y B es a lo más n . Este conjunto es un espacio vectorial sobre \mathbb{K} de dimensión $(n+1)(n+2)$.

Sea ϵ un parámetro en \mathbb{K} .

El conjunto V_n de todas las ecuaciones diferenciales polinomiales sobre \mathbb{K}^2 de grado a lo más n es un espacio vectorial sobre \mathbb{K} de dimensión finita. De hecho

$$V_n = \{\omega = 0 \mid \omega \in \Omega_n\}.$$

En este sentido la familia $dH - \epsilon\omega = 0$ es una recta (parametrizada por ϵ) de ecuaciones diferenciales polinomiales:

$$\mathbb{L}(\epsilon) = \{dH - \epsilon\omega = 0\},$$

en el espacio vectorial $V_{\max\{n,m\}}$, donde $m+1 = \text{grado}(H)$ (ver figura 1.3).

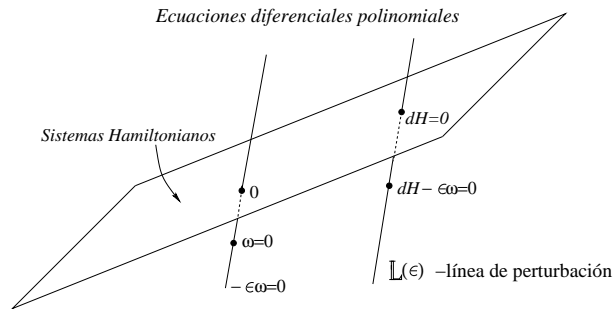


Figura 1.3: El espacio de ecuaciones diferenciales polinomiales.

Así, al mover el parámetro ϵ , el sistema inicial $dH = 0$, sufre el efecto de la perturbación $-\epsilon\omega$, por ello para cada $\epsilon \neq 0$ nos referimos a:

- $dH - \epsilon\omega = 0$ como el sistema perturbado, y a
- ω como la dirección de la perturbación.

Consideramos dos direcciones cualitativamente distintas para ω :

a) Dirección Hamiltoniana: cuando $\omega = dQ$, con Q un polinomio. Bajo esta condición el retrato fase del sistema perturbado $dH - \epsilon\omega = 0$, es bien entendido, ya que sus soluciones son las fibras del polinomio $H - \epsilon Q$.

b) Dirección no Hamiltoniana: cuando $\omega \neq dQ$. Si esto se tiene, la perturbación $-\epsilon\omega$ puede actuar sobre los ciclos de $dH = 0$ de dos maneras posibles:

1. No rompe ningún ciclo, ver Ejemplo 1.1.
2. Rompe algunos ciclos (quizá todos), ver Ejemplos 1.2 y 1.3.

Ejemplo 1.1. Si $\omega = qdH$, donde q es un polinomio no constante, entonces para todo valor de ϵ , el sistema perturbado $dH - \epsilon\omega = (1 - \epsilon q)dH = 0$ tiene sus soluciones contenidas en las fibras del polinomio H .

Ejemplo 1.2. Sea $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $H(x, y) = (x^2 + y^2)/2$ y $\omega = ydx - xdy$. Todos los ciclos de $dH = 0$ (círculos concéntricos en el origen) se rompen bajo la perturbación $-\epsilon\omega$, ver Figura 1.4 a).

Ejemplo 1.3. Ahora consideramos $H(x, y)$ y ω_1 como en el Ejemplo 1.2. Si $\omega_2 = (1 - (x^2 + y^2))\omega_1$, entonces todos los ciclos de $dH = 0$ se rompen bajo la perturbación $-\epsilon\omega_2$ excepto el ciclo γ_1 , ver Figura 1.4 b). También describimos en la Figura 1.5 la situación en el caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

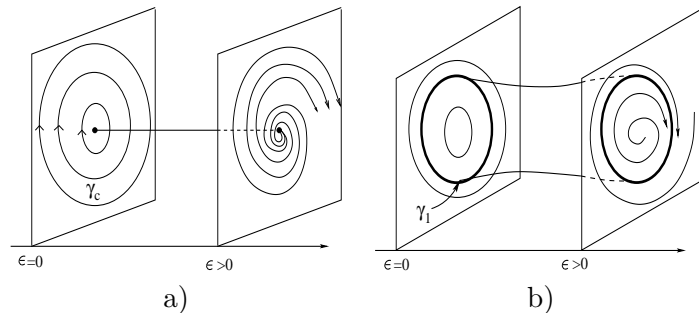


Figura 1.4: a) Todos los ciclos se rompen bajo la perturbación. b) A excepción de γ_1 todos los ciclos se rompen.

Obviamente, el caso interesante es cuando $\omega \neq dQ$ y $\omega \neq qdH$, ya que cada ciclo de $dH = 0$ que no se rompe, como en *ii*), genera un ciclo límite de la familia $dH - \epsilon\omega = 0$ (en la sección 1.2 daremos la definición precisa).

La pregunta básica es:

¿Cómo hallar los ciclos de $dH = 0$ que bajo la perturbación $-\epsilon\omega$ generan un ciclo límite de la familia $dH - \epsilon\omega = 0$?

La respuesta es: estudiando la función desplazamiento asociada a la familia $dH - \epsilon\omega = 0$, la cual estudiaremos en la siguiente sección.

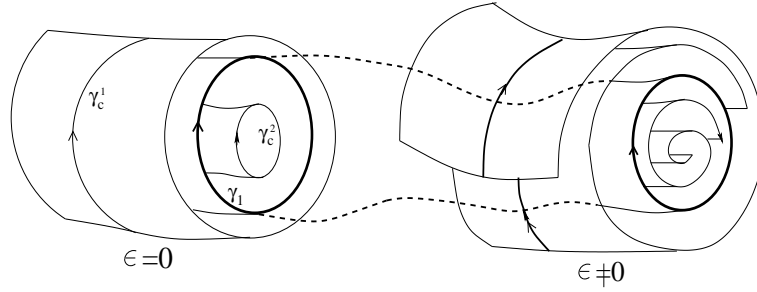


Figura 1.5: Caso complejo: los ciclos $[\gamma_c^1]$ $[\gamma_c^3]$ se rompen bajo la perturbación y el ciclo $[\gamma_c^2]$ no se rompe.

1.2 Ciclos límite en el plano complejo.

En adelante consideraremos $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ a menos que se indique lo contrario.

La familia $dH - \epsilon\omega = 0$ es equivalente al sistema de tres ecuaciones diferenciales holomorfas acopladas en $\mathbb{C}^3 = \{(\epsilon, x, y)\}$:

$$\begin{cases} \frac{d\epsilon}{dt} = 0, \\ \frac{dx}{dt} = H_y + \epsilon A \\ \frac{dy}{dt} = -H_x + \epsilon B \end{cases} \quad t \in \mathbb{C}. \quad (1.1)$$

Definimos el conjunto de singularidades del sistema (1.1) como:

$$\text{Sing}(H, \omega) := \{P \in \mathbb{C}^3 \mid (H_y + \epsilon A)(P) = (-H_x + \epsilon B)(P) = 0\}.$$

Las imágenes de las soluciones de sistema (1.1) definen una foliación unidimensional compleja $\mathcal{F}_{H, \omega}$ sobre $\mathbb{C}^3 - \text{Sing}(H, \omega)$. Denotamos por $F_{(\epsilon, p)}$ la hoja de $\mathcal{F}_{H, \omega}$ que pasa por el punto $(\epsilon, p) \in (\{\epsilon\} \times \mathbb{C}^2) - \text{Sing}(H, \omega)$, además de la forma del sistema (1.1) se sigue que $F_{(\epsilon, p)} \subset \{\epsilon\} \times \mathbb{C}^2$.

Sea $F_{(\epsilon_0, p_0)}$ una hoja de la foliación $\mathcal{F}_{H, \omega}$. Sea $[\gamma_{(\epsilon_0, p_0)}]$ un ciclo en $F_{(\epsilon_0, p_0)}$ y consideramos $\gamma : [0, 1] \rightarrow F_{(\epsilon_0, p_0)}$ la parametrización de $\gamma_{(\epsilon_0, p_0)}$. Sea $D_1 \times D$ un polidisco 2-dimensional (D_1 y D son discos complejos) transversal a la foliación $\mathcal{F}_{H, \omega}$ en $p_0 = \gamma(0) = \gamma(1)$ (ver Figura 1.6).

Es bien conocido (ver [CN] pág. 63) que existe un subconjunto abierto $U \subset D$ tal que la aplicación de holonomía f_γ asociada a γ esta bien definida

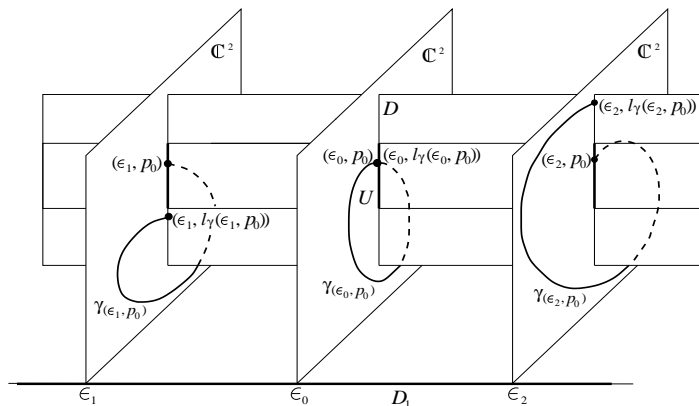


Figura 1.6: Aplicación de holonomía.

y de la forma del sistema (1.1) f_γ es holomorfa y se escribe como:

$$\begin{aligned} f_\gamma : D_1 \times U &\longrightarrow D_1 \times D \\ (\epsilon, p) &\longmapsto (\epsilon, l_\gamma(\epsilon, p)). \end{aligned}$$

Observación 1.3. Es posible demostrar que existe una única curva $\gamma_{(\epsilon, p)}$ (dependiendo de γ) contenida en la hoja $F_{(\epsilon, p)}$ tal que une el punto (ϵ, p) con el punto $(\epsilon, l_\gamma(\epsilon, p))$ (ver [CN] pág. 66). Además, de la continuidad de las soluciones de sistema (1.1) respecto a las condiciones iniciales, se sigue que $\lim_{\epsilon \rightarrow \epsilon_0} \gamma_{(\epsilon, p)} = \gamma_{(\epsilon_0, p)}$, ver Figura 1.6.

La conexión entre los ciclos límite del sistema perturbado $dH - \epsilon\omega = 0$ y la aplicación de holonomía f_γ es la siguiente: si (ϵ_0, p_0) es un punto fijo aislado de $f_\gamma(\epsilon, p)$, entonces el ciclo $[\gamma_{(\epsilon_0, p_0)}]$ será un ciclo límite (complejo) del sistema perturbado $dH - \epsilon_0\omega = 0$. De donde obtenemos que los ciclos límite del sistema perturbado $dH - \epsilon_0\omega = 0$, que intersectan a la transversal $D_1 \times U$, están en correspondencia con los puntos fijos aislados de la aplicación de holonomía f_γ . Por lo tanto, estamos interesados en el siguiente problema:

Problema A: Hallar los puntos fijos aislados de $f_\gamma(\epsilon, p)$, para ϵ fijo.

Observación 1.4. Supongamos que γ' es una parametrización de otro representante del ciclo $[\gamma_{(\epsilon_0, p_0)}]$ y que $D'_1 \times D'$ es un polidisco transversal a la foliación $\mathcal{F}_{H, \omega}$ en $p_0 = \gamma'(0) = \gamma'(1)$. Si $f_{\gamma'}$ es la aplicación de holonomía asociada a γ' , y $\gamma'_{(\epsilon, p)}$ son las curvas como en la Observación 1.3 respecto a γ' , entonces f_γ y $f_{\gamma'}$ son holomorfamente conjugadas en vecindades de $D_1 \times D$ y $D'_1 \times D'$, además las curvas $\gamma_{(\epsilon, p)}$ y $\gamma'_{(\epsilon, p)}$ son homotópicas, por lo cual, las conclusiones para nuestro Problema A no dependen del representante de $[\gamma_{(\epsilon_0, p_0)}]$ ni del polidisco transversal usado.

Podemos suponer que el disco D está parametrizado por una función holomorfa $G^{-1} : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow D$. Entonces definimos la *función desplazamiento* asociada al ciclo $[\gamma_{(\epsilon_0, p_0)}]$ y a la familia $dH - \epsilon\omega = 0$ como la función holomorfa:

$$\begin{aligned} L_\gamma : D_1 \times U &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (\epsilon, p) &\longmapsto G(\ell_\gamma(\epsilon, p)) - G(p). \end{aligned}$$

De esta manera, nuestro problema A es equivalente a

Problema A': Hallar los ceros aislados de $L_\gamma(\epsilon, p)$, para ϵ fijo.

En base a todo lo anterior podemos dar la siguiente:

Definición 1.1. El ciclo $[\gamma_{(\epsilon_0, p_0)}]$ es un *ciclo límite* de la ecuación diferencial $dH - \epsilon_0\omega = 0$ si p_0 es un cero aislado de $L_\gamma(\epsilon_0, p)$.

En el caso en que $[\gamma_{(\epsilon_0, p_0)}]$ es un ciclo de $dH = 0$, esto es $\epsilon_0 = 0$, entonces podemos suponer que $D \cap \mathcal{L}_c$ es a lo más un punto, con lo cual, $H|_D : D \rightarrow H(D)$ es biholomorfismo, así el disco D está parametrizado por $H^{-1} : H(D) \rightarrow D$. Por lo tanto podemos identificar el punto $(\epsilon, p) \in D_1 \times D$ con el punto $(\epsilon, c) = (\epsilon, H(p))$, y el punto $(\epsilon, \ell_\gamma(\epsilon, p))$ con $(\epsilon, \ell_\gamma(\epsilon, c))$ (ver Figura 1.7), donde ahora $\ell_\gamma : D_1 \times U \rightarrow \mathbb{C}$ y γ es una parametrización del ciclo $\gamma_{c_0} := \gamma_{(0, c_0)} = \gamma_{(\epsilon_0, p_0)}$ con $c_0 = H(p_0)$. Por lo tanto podemos escribir a la función desplazamiento asociada al ciclo $[\gamma_{c_0}]$ como la función:

$$\begin{aligned} L_\gamma : D_1 \times U &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (\epsilon, c) &\longmapsto H(\epsilon, \ell_\gamma(\epsilon, c)) - H(\epsilon, c). \end{aligned}$$

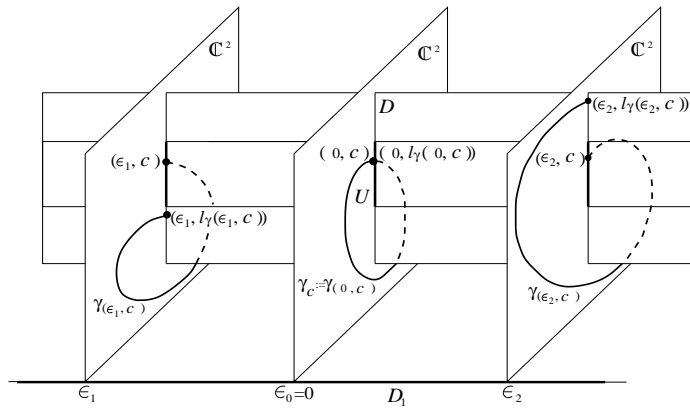


Figura 1.7: Aplicación de holonomía para $\epsilon_0 = 0$.

Definición 1.2. El ciclo $[\gamma_{c_0}]$ genera un ciclo límite, bajo la perturbación $-\epsilon\omega$, para la familia $dH - \epsilon\omega = 0$, si existen un cilindro $(-\delta, \delta) \times \mathbb{S}^1$, con $\delta > 0$, y una función continua $\Gamma(\Gamma_1, \Gamma_2) : (-\delta, \delta) \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}^2$ tal que:

i) La función Γ_1 tiene la forma:

$$\Gamma_1(\epsilon, \mathbb{S}^1) = \epsilon \text{ y } \Gamma(0, \mathbb{S}^1) = (0, \gamma_{c_0}).$$

ii) Cada curva $\Gamma_1(\epsilon, \mathbb{S}^1)$ define un ciclo de la foliación $\mathcal{F}_{H,\omega}$.

iii) Para cada $\epsilon \in (-\delta, \delta) - \{0\}$ fijo, el punto $(\epsilon, c(\epsilon)) := \Gamma(s, \mathbb{S}^1) \cap D_1 \times D$ es un cero aislado de $L_\gamma(\epsilon, c)$ (ver Figura 1.8).

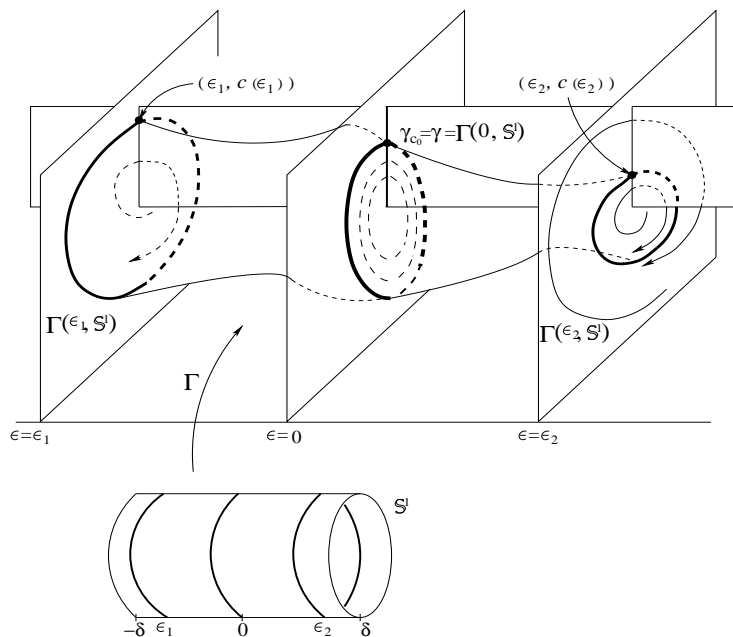


Figura 1.8: El ciclo $[\gamma_{c_0}]$ genera un ciclo límite.

Observación 1.5. Cada ciclo $\Gamma(\mathbb{S}^1, s)$, con $s \neq 0$, como en la Definición 1.2 es un ciclo límite de $dH - \epsilon(s)\omega = 0$, por esta razón decimos que γ_{c_0} genera un ciclo límite.

Por otra parte, sabemos que las funciones $l_\gamma(\epsilon, c)$ y $L_\gamma(\epsilon, c)$ son analíticas, además son tales que $l_\gamma(0, c) = c$ y $L_\gamma(0, c) \equiv 0$. Por lo tanto las podemos escribir como las series de potencias:

$$l_\gamma(\epsilon, c) = c + \epsilon l_1(c) + \epsilon^2 l_2(c) + \cdots + \epsilon^k l_k(c) + O(\epsilon^{k+1}) \quad (1.2)$$

y

$$L_\gamma(\epsilon, c) = \epsilon L_1(c) + \epsilon^2 L_2(c) + \cdots + \epsilon^k L_k(c) + O(\epsilon^{k+1}). \quad (1.3)$$

El término $L_k(c)$ es llamado la k -ésima función de Poincaré-Pontryagin (ver [Ga05]).

Observación 1.6. Es claro que

$$L_\gamma(\epsilon, c) = \epsilon^k L_k(c) + O(\epsilon^{k+1}) \iff \ell_\gamma(\epsilon, c) = c + \epsilon^k \ell_k(c) + O(\epsilon^{k+1}).$$

Las condiciones necesarias y suficientes para que un ciclo de $dH = 0$ genere un ciclo límite de la familia $dH - \epsilon\omega = 0$ son dadas por el siguiente:

Teorema 1.1. Criterio de Poincaré-Pontryagin, [Ily69]. *Supongamos que*

$$L_\gamma(\epsilon, c) = \epsilon^k L_k(c) + O(\epsilon^{k+1}), \quad \text{con } L_k(c) \not\equiv 0 \text{ y } k \geq 1.$$

Un ciclo $[\gamma_{c_0}]$ de $dH = 0$ genera un ciclo límite bajo la perturbación $-\epsilon\omega$ si y sólo si $L_k(c_0) = 0$.

Demostración: \implies) Supongamos que $L_k(c_0) \neq 0$ entonces la función

$$\tilde{L}_\gamma(\epsilon, c) := L_k(c) + \epsilon L_{k+1}(c) + \cdots$$

es no cero en una vecindad $V' := D' \times U' \subset D_1 \times U$ del punto $(0, c_0)$. Así, $L_\gamma(\epsilon, c) = \epsilon^k \tilde{L}_\gamma(\epsilon, c)$ es no cero en $V' - \{(0, c) \in V'\}$. De ahí que $[\gamma_{c_0}]$ no genere ningún ciclo límite, lo cual es una contradicción.

\impliedby) Supongamos que $L_k(c_0) = 0$. Como $L_k(c) \not\equiv 0$ entonces aplicando el teorema de preparación Weierstrass (ver [Sha] p. 123) tenemos que

$$\tilde{L}_\gamma(\epsilon, c) = P(\epsilon, c)\phi(\epsilon, c),$$

donde $P(\epsilon, c) = ((c - c_0)^\nu + u_\nu(\epsilon)(c - c_0)^{\nu-1} + \cdots + u_1(\epsilon))$, $\nu \geq 1$ es el orden del cero de $L_k(c)$ en c_0 , las funciones $u_i(\epsilon)$ son holomorfas, $u_i(0) = 0$ y ϕ es una función holomorfa en $V' := D' \times U' \subset D_1 \times U$ una vecindad de $(0, c_0)$ que no se anula allí. Entonces $L_\gamma(\epsilon, c) = \epsilon^k P(\epsilon, c)\phi(\epsilon, c)$ en V' . Por lo tanto para cada $\epsilon_0 \in D' - \{0\}$, la función $L_\gamma(\epsilon_0, c) = \epsilon_0^k P(\epsilon_0, c)\phi(\epsilon_0, c)$ tiene $\nu \geq 1$ ceros aislados, cuya variación en ϵ es continua, de ahí que $[\gamma_{c_0}]$ genere $\nu \geq 1$ ciclos límite. \square

De acuerdo al Teorema 1.1, para determinar el número de ciclos de $dH = 0$ que generan ciclos límite de la familia $dH - \epsilon\omega = 0$, basta determinar el número de ceros aislados de la primer función de Poincaré-Pontryagin

que no se anula idénticamente. Sin embargo, a priori estas funciones son desconocidas.

Un resultado clásico que permite el estudio de la primera función de Poincaré-Pontryagin, $L_1(c)$, es el siguiente:

Lema 1.1. Fórmula de Poincaré-Pontryagin.

$$\boxed{L_1(c) = \int_{[\gamma_c]} \omega.} \quad (1.4)$$

Demostración: Siguiendo la idea de Françoise [Fr], integramos $dH - \epsilon\omega$ sobre la curva $\gamma(\epsilon, c)$ que une el punto (ϵ, c) con el punto $(\epsilon, \ell_\gamma(\epsilon, c))$ (ver figura 1.7). Entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\gamma(\epsilon, c)} dH - \epsilon\omega = H(\epsilon, \ell_\gamma(\epsilon, c)) - H(\epsilon, c) - \epsilon \int_{\gamma(\epsilon, c)} \omega \\ &= L(\epsilon, c) - \epsilon \int_{\gamma(\epsilon, c)} \omega = \epsilon \left(L_1(c) - \int_{\gamma(\epsilon, c)} \omega \right) + \epsilon^2 \tilde{L}_2(\epsilon, c), \end{aligned}$$

ahora, multiplicando por $(1/\epsilon)$ y tomando $\lim_{\epsilon \rightarrow 0}$ se tiene que

$$L_1(c) = \int_{\gamma(0, c)} \omega = \int_{\gamma_c} \omega = \int_{[\gamma_c]} \omega.$$

□

Notemos que la fórmula 1.4, i.e. la integral Abeliana:

$$\begin{aligned} L_1(c) : H(U) &\rightarrow \mathbb{C} \\ c &\mapsto \int_{[\gamma_c]} \omega, \end{aligned}$$

está bien definida, ya que de la Observación 1.3 se tiene que para cada punto $(0, c) \in D_1 \times U$ existe un único lazo $\gamma_c := \gamma(0, c)$ que está contenido en la fibra \mathcal{L}_c de H y que pasa por $(0, c)$ y además $H|_U : U \rightarrow H_U$ es biholomorfismo.

Observación 1.7. Aún cuando la función $L_1(c)$ está bien definida en el subconjunto abierto $H(U)$ de \mathbb{C} , su continuación analítica puede no definir una función univaluada (ver Sección 2.1).

Observación 1.8. Si $L_1(c) \equiv 0$ sobre la transversal $D_1 \times U$ entonces el Teorema 1.1 no se puede aplicar con $k = 1$. Sin embargo esta dificultad se puede resolver, ya que bajo algunas condiciones sobre el polinomio H y la función $L_1(c)$ se puede obtener una fórmula para la segunda, y más general, para la k -ésima función de Poincaré-Pontryagin.

1.3 La k -ésima función de Poincaré-Pontryagin.

El siguiente teorema afirma que si $L_1(c) \equiv 0$ globalmente, es decir, si para cualquier punto $(0, p) \in \mathbb{C}^3 - \text{Sing}(H)$ y cualquier transversal a la foliación \mathcal{F}_H en $(0, p)$ se tiene que $L_1(c) \equiv 0$, entonces la dirección ω es muy particular.

Teorema 1.2. Gavrilov-Ilyashenko, [Ga98], [Ily69]. *Sean un polinomio $H : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ y $\omega = Bdx - Ady$ una 1-forma polinomial compleja. Si $\text{Sing}(H)$ el conjunto de puntos singulares de H es finito y \mathcal{L}_c es conexa para toda $c \in \mathbb{C}$ entonces*

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega = dQ_1 + q_1 dH, \\ \text{con } Q_1 \text{ y } q_1 \text{ polinomios} \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{para cada } c \in \mathbb{C} \text{ y cada} \\ \gamma \subset \mathcal{L}_c \text{ curva real cerrada} \\ \text{se cumple que } \int_{\gamma} \omega = 0 \end{array} \right\}.$$

Demostración: (\implies) Sea $\gamma = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) : [0, 1] \rightarrow \mathcal{L}_c$ curva cerrada. Entonces

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} dQ_1 + \int_{\gamma} q_1 dH = \int_0^1 q_1(\gamma(t)) (H_x(\gamma(t))\gamma_1'(t) + H_y(\gamma(t))\gamma_2'(t)) dt.$$

Pero como

$$H_x(\gamma(t))\gamma_1'(t) + H_y(\gamma(t))\gamma_2'(t) = \text{Det} \begin{pmatrix} H_y(\gamma(t)) & \gamma_1'(t) \\ -H_x(\gamma(t)) & \gamma_2'(t) \end{pmatrix},$$

y los vectores $(H_y(\gamma(t)), -H_x(\gamma(t)))$ y $(\gamma_1'(t), \gamma_2'(t))$ son linealmente dependientes sobre \mathbb{C} , ya que son tangentes a las fibras de H , se concluye que $H_x(\gamma(t))\gamma_1'(t) + H_y(\gamma(t))\gamma_2'(t) \equiv 0$. Por lo que

$$\int_{\gamma} \omega = 0.$$

(\impliedby) Sin pérdida de generalidad supongamos que

$$H(x, y) = a_0(x) + a_1(x)y + \cdots + a_{\nu}(x)y^{\nu},$$

con $\nu \geq \max\{\text{grado}(a_i) \mid i = 0, 2, \dots, \nu\} \geq 1$.

Existe una recta compleja $\sigma := \{x - \lambda = 0\} \subset \mathbb{C}^2$ que es transversal a todas las fibras de H excepto un número finito, digamos $\mathcal{L}_{c_1}, \dots, \mathcal{L}_{c_{\mu}}$, a las cuales es tangente.

Definimos los conjuntos:

$$G_1 := \mathbb{C}^2 - \text{Sing}(H) \quad \text{y} \quad G_2 := G_1 - \{\mathcal{L}_{c_1} \cup \dots \cup \mathcal{L}_{c_\mu}\}.$$

Para cada punto $Z = (x, y) \in G_1$ se tiene que la intersección $\sigma \cap \mathcal{L}_{H(Z)}$ es exactamente el conjunto de ceros del polinomio $H(\lambda, y) - H(Z)$. Sean $\{q_1, q_2, \dots, q_l\}$ tales ceros (l depende de Z) y para cada $j \in \{1, \dots, l\}$ sea m_j la multiplicidad del cero q_j con respecto al polinomio $H(\lambda, y) - H(Z)$, así $m_1 + \dots + m_{l_r} = \nu$.

Definimos la función

$$Q : G_1 \longrightarrow \mathbb{C}, \quad Z \longmapsto \frac{1}{\nu} \sum_{j=1}^{l_r} m_j \int_{q_j}^Z \omega,$$

donde la integración la haremos sobre cualquier curva real $\beta_j \subset \mathcal{L}_{H(Z)} \subset \mathbb{C}^2$ que una el punto $q_j \in \mathcal{L}_{H(Z)}$ con el punto $Z \in \mathcal{L}_{H(Z)}$ (ver figura 1.9).

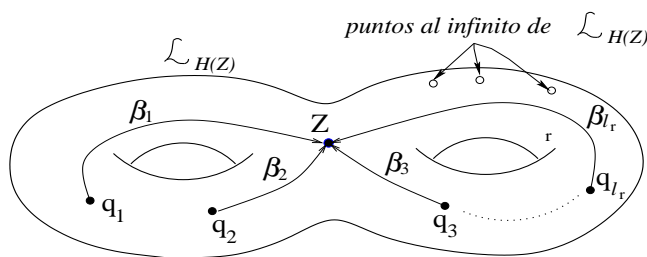


Figura 1.9: Topología real de $\mathcal{L}_{H(Z)}$ y $\sigma \cap \mathcal{L}_{H(Z)}$.

Para realizar la demostración seguiremos los siguientes tres pasos.

Paso 1.- Mostraremos que Q es holomorfa en todo \mathbb{C}^2 .

Paso 2.- Mostraremos que Q es un polinomio.

Paso 3.- Se probará que $\omega = dQ + qdH$ para algún polinomio q .

Comencemos la prueba.

Paso 1. De la hipótesis ($\int_\gamma \omega = 0$, para toda γ cerrada) se sigue que la función Q está bien definida. Para probar que Q es holomorfa consideramos dos casos.

Caso 1. Sea $Z_0 \in G_2$, así $\sigma \cap \mathcal{L}_{H(Z_0)} = \{q_1, q_2, \dots, q_\nu\}$. Tomemos un disco complejo Δ de radio suficientemente pequeño transversal a la foliación \mathcal{F}_H

en Z_0 . Es claro que Δ puede ser parametrizado por una función lineal $\ell(\xi) : B \rightarrow \Delta$, donde $B \subset \mathbb{C}$ es un disco abierto. Definimos la función

$$\begin{aligned} \psi : (\mathbb{C}, 0) \times B &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ (t, \xi) &\longmapsto \phi_t(\ell(\xi)), \end{aligned}$$

donde $\{\phi_t = (\phi_{1t}, \phi_{2t})\}$ es el flujo holomorfo asociado al sistema Hamiltoniano de H . Como Z_0 es punto regular, por el teorema de la caja de flujo (ver [CN], pág. 31) existen abiertos V y U de $(0, 0)$ y Z_0 respectivamente, tal que $\psi : V \rightarrow U$ es biholomorfismo. Sea $\beta_j : [0, 1] \rightarrow \mathcal{L}_{H(Z)}$ tal que $\beta_j(0) = q_j$ y $\beta_j(1) = Z_0$. Siguiendo el procedimiento anterior y debido a que $\beta_j([0, 1])$ es compacto podemos tener un biholomorfismo $\psi_j : V_j \rightarrow U_j$ tal que $\psi_j(t, 0) \in \mathcal{L}_{H(Z_0)}$ y donde V_j y U_j son vecindades abiertas de $(0, 0)$ y $\beta_j([0, 1])$ respectivamente (ver Figura 1.10).

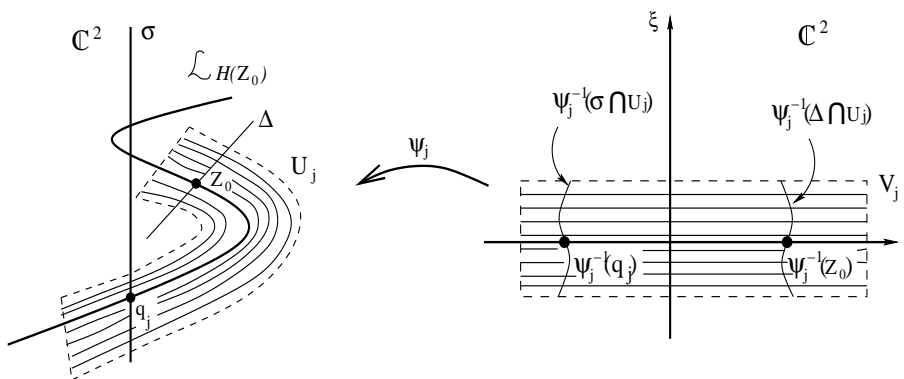


Figura 1.10: Caja de flujo.

Sea $\tilde{\beta}_j = \Psi \circ \beta_j$, entonces

$$\frac{1}{\nu} \sum_{j=1}^{\nu} \int_{q_j}^{Z_0} \omega = \frac{1}{\nu} \sum_{j=1}^{\nu} \int_{\beta_j} \omega = \frac{1}{\nu} \sum_{j=1}^{\nu} \int_{\tilde{\beta}_j} (\Psi_j^*(\omega))$$

pero como $\int_{\tilde{\beta}_j} (\Psi_j^*(\omega))$ es una integral sobre \mathbb{C} , pues es una integral sobre $\{\xi \equiv 0\}$, entonces es holomorfa al variar $\Psi_j^{-1}(Z_0) = \tilde{\beta}_j(1)$, es decir, es holomorfa respecto a t . Además $(\Psi_j^*(\omega))$ es holomorfa y como los límites de integración en $\int_{\tilde{\beta}_j} (\Psi_j^*(\omega))$ no varían respecto a ξ entonces se tiene la holomorfía respecto a ξ , luego recordando que una función que es holomorfa respecto de cada variable es holomorfa (ver [Sha], pág. 28) se tiene que $Q(Z)$ es holomorfa en $Z_0 \in G_2$.

Caso 2. Sea $Z_0 \in \{\mathcal{L}_{c_1} \cup \dots \cup \mathcal{L}_{c_\mu}\} - \text{Sing}(H)$ y consideremos un disco complejo Δ de radio suficientemente pequeño transversal $\mathcal{L}_{H(Z_0)}$. Por la

definición de Q , ésta es continua en Z_0 , además Q es holomorfa en una vecindad de Z_0 sobre la fibra $\mathcal{L}_{H(Z_0)}$ y es también holomorfa en $\Delta - \{Z_0\}$, entonces por el teorema de singularidad removible de Riemann se sigue que Q es holomorfa en Z_0 .

De los dos casos anteriores concluimos que Q es holomorfa en G_1 , pero como $Sing(H)$ es un conjunto de puntos aislados, aplicando el teorema de singularidad removible de Hartogs (ver [Sha], pág. 173), se tiene que $Q(Z)$ es holomorfa en todo \mathbb{C}^2 .

Paso 2. La idea de la prueba es: demostrar que $\|Q(Z)\| \leq M\|Z\|^k$ cuando $\|Z\| \rightarrow \infty$, para algún $k \in \mathbb{N}$, ya que es fácil mostrar que si una función holomorfa f en \mathbb{C}^2 satisface que $\|f(Z)\| \leq M\|Z\|^k$ cuando $\|Z\| \rightarrow \infty$ ($Z = (x, y)$) entonces es un polinomio (ver [FG], pág. 22).

Para esto, trabajamos en \mathbb{CP}^2 . Recordemos que \mathbb{CP}^2 tiene, como variedad compleja, tres cartas canónicas (V_i, φ_i) , $i = 1, 2, 3$

Consideremos H y ω en el plano $\{(x, y)\}$ y bajo el cambio de coordenadas: $(\varphi_3 \circ \varphi_1^{-1})(x, y) = (1/y, x/y) = (y_1, y_2)$ los llevamos al plano $\{(y_1, y_2)\}$. De esta manera obtenemos que $x = \frac{y_2}{y_1}$ y $y = \frac{1}{y_1}$ y por lo tanto la 1-forma ω se escribe en $\{(y_1, y_2)\}$ como:

$$\tilde{\omega} = \frac{1}{y_1^{n+2}} \left(\tilde{A}_1(y_1, y_2) dy_1 + \tilde{B}_1(y_1, y_2) dy_2 \right).$$

Estudiar el comportamiento de la integral $\int_{q_j}^Z \omega$ cuando $\|Z\| \rightarrow \infty$ es equivalente a entender el comportamiento de la integral $\int_{q'_j}^{\tilde{Z}} \tilde{\omega}$ cuando $\tilde{Z} \rightarrow (0, y_2)$, donde $q'_j = (\varphi_3 \circ \varphi_1^{-1})(q_j)$ y $\tilde{Z} = (\varphi_3 \circ \varphi_1^{-1})(Z)$. Notemos que $(0, y_2)$ es un punto en la línea $\{y_1 = 0\}$ que es la línea al infinito en la carta (V_3, φ_3) . Podemos suponer que la curva que une q'_j con \tilde{Z} es compacta, entonces $\left\| \tilde{A}_1(y_1, y_2) + \tilde{B}_1(y_1, y_2) \right\| \leq M$, además sobre la curva de integración a $\tilde{\omega}$ le aparece un polo de orden finito, por ello existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\| \int_{q'_j}^{\tilde{Z}} \tilde{\omega} \right\| \leq \frac{M}{y_1^k}, \quad \text{cuando } \tilde{Z} \rightarrow (0, y_2).$$

Algo análogo pasa en la carta (V_2, φ_2) . Por lo tanto

$$\|Q(Z)\| \leq \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{l_r} m_j \left\| \int_{q_j}^Z \omega \right\| \leq M\|Z\|^k, \quad \text{cuando } \|Z\| \rightarrow \infty.$$

(ver [Ya94] para otra prueba).

Paso 3. Derivando Q a lo largo del campo $(H_y, -H_x)$ tenemos que

$$Q_x H_y - Q_y H_x = B H_y + A H_x \iff (B - Q_x) H_y = -(A + Q_y) H_x.$$

Pero como H_x y H_y no tiene factores en común por hipótesis, entonces existe $q \in \mathbb{C}[x, y]$ tal que $(B - Q_x) = q H_x$ y $-(A + Q_y) = q H_y$, luego entonces

$$\begin{aligned} dQ + qdH &= (Q_x + qH_x)dx + (Q_y + qH_y)dy \\ &= Bdx - Ady \\ &= \omega. \end{aligned}$$

Así, tomando $Q_1 = Q$ y $q_1 = q$ se concluye la demostración. \square

Observación 1.9. Si se calcula el polinomio Q sobre \mathbb{R}^2 , entonces se produce automáticamente un polinomio Q sobre \mathbb{C}^2 , ya que lo que determina al polinomio son los coeficientes.

Ejemplo 1.4. Sea $H(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$. El origen $(0, 0)$ de \mathbb{C}^2 es el único punto crítico de H , la fibra \mathcal{L}_0 es la unión (no ajena) de las rectas complejas $\{x - \sqrt{-1}y = 0\}$ y $\{x + \sqrt{-1}y = 0\}$, además para cada valor $c \in \mathbb{C}$ distinto de cero, la aplicación:

$$\begin{aligned} \varphi_c : \mathbb{C} - \{0\} &\rightarrow \mathcal{L}_c \\ z &\mapsto \left(\frac{z^2 + c}{\sqrt{2z}}, \frac{\sqrt{-1}(c - z^2)}{\sqrt{2z}} \right). \end{aligned} \quad (1.5)$$

es una parametrización de \mathcal{L}_c (es decir, es un biholomorfismo). Por lo cual, el polinomio H satisface las hipótesis del Teorema 1.2. Si consideramos la 1-forma diferencial polinomial compleja $\omega = xydx$, entonces

$$\begin{aligned} \varphi_c^*(\omega) &= \left(\frac{z^2 + c}{\sqrt{2z}} \right) \left(\frac{\sqrt{-1}(c - z^2)}{\sqrt{2z}} \right) \left(\frac{\sqrt{2}(z^2 - c)}{2z^2} \right) dz \\ &= \frac{-\sqrt{2}(6 - cz^4 - c^2 z^2 + c^3)}{4z^4}. \end{aligned}$$

De esto y usando el teorema del residuo es claro que:

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\varphi^{-1}(\gamma)} \varphi_c^*(\omega) = 0$$

para cualquier curva $\gamma \subset \mathcal{L}_c$ y para cualquier valor $c \in \mathbb{C}$. Entonces, por el Teorema 1.2 existen polinomios Q y q tales que $\omega = dQ + qdH$.

Para determinar Q y q nos restringimos al caso real, es decir, consideramos $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y ω real.

Según nuestra demostración del Teorema 1.2, el polinomio Q está dado por la fórmula:

$$Q(x, y) = \frac{1}{2} \left(\int_{q_1}^{(x,y)} \omega + \int_{q_2}^{(x,y)} \omega \right),$$

donde $q_1 := (\sqrt{2c}, 0)$ y $q_2 := (-\sqrt{2c}, 0)$ son los puntos de intersección de la línea $\sigma = \{y = 0\}$ con el círculo de radio $\sqrt{2c}$ que pasa a través del punto $(x, y) \neq (0, 0)$. Para $j \in \{1, 2\}$ consideramos la función:

$$\begin{aligned} \beta_j : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\rightarrow \sqrt{2c} [\cos((1-t)(j-1)\pi + t\theta), \sin((1-t)(j-1)\pi + t\theta)], \end{aligned}$$

que es una parametrización de la curva β_j que une el punto q_j con el punto (x, y) ; θ es el ángulo entre el vector definido por (x, y) y el semieje positivo de x : $\{y = 0, x > 0\}$, ver Figura 1.11.

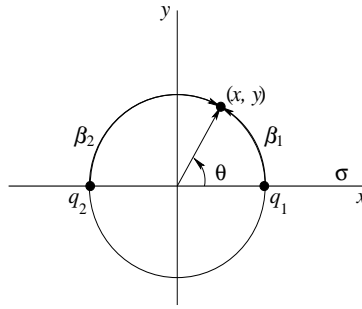


Figura 1.11: La fibra \mathcal{L}_c con las curvas β_j sobre la fibra.

Es fácil ver que

$$\int_{\beta_1} xy dx = -\frac{y^3}{3}$$

y

$$\int_{\beta_2} xy dx = -\frac{y^3}{3}.$$

Por lo tanto

$$Q(x, y) = \frac{1}{2} \left[\int_{\beta_1} \omega + \int_{\beta_2} \omega \right] = \frac{1}{2} \left[2 \left(-\frac{y^3}{3} \right) \right] = -\frac{y^3}{3}$$

y si usamos $q = y$ entonces

$$dQ + qdH = (-y^2)dy + (xy)dx + (y^2)dy = xydx = \omega.$$

Observación 1.10. La representación de ω como $\omega = dQ + qdH$ no necesariamente es única.

Ejemplo 1.5. Sean $H = (x^2 + y^2)/2$ y

$$\omega = (x^2 + x^2y + x + y)dx - (1 + x + xy^2 - x^2y)dy.$$

Usando:

$$Q_1 = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + xy + y, \quad q_1 = xy - x^2$$

y

$$Q'_1 = \frac{x^3}{3} - \frac{y^4}{4} - \frac{x^2y^2}{2} - \frac{y^2}{2} + xy + y, \quad q'_1 = y^2 + xy + 1$$

se tiene que

$$\omega = dQ_1 + q_1dH = dQ'_1 + q'_1dH.$$

En base al Teorema 1.2 se puede dar un algoritmo que nos permite calcular la primer función de Poincaré-Pontryagin que no es idénticamente nula.

Teorema 1.3. Françoise-Yakovenko [Ya95], [Fr]. *Consideremos la familia $dH - \epsilon\omega = 0$. Si H tiene sólo singularidades aisladas, \mathcal{L}_c es conexa para toda $c \in \mathbb{C}$ y $L_1(c) = L_2(c) = \dots = L_{k-1}(c) \equiv 0$ para toda $c \in \mathbb{C}$, entonces existen polinomios q_1, q_2, \dots, q_{k-1} y Q_1, Q_2, \dots, Q_{k-1} tales que*

$$\begin{aligned} \omega &= dQ_1 + q_1dH \\ q_1\omega &= dQ_2 + q_2dH \\ &\vdots \\ q_{k-2}\omega &= dQ_{k-1} + q_{k-1}dH \end{aligned}$$

y

$$\boxed{L_k(c) = \int_{[\gamma_c]} q_{k-1}\omega.}$$

Demostración: Por la fórmula (1.4) se cumple el teorema para el caso $k = 1$ con $q_0 \equiv 1$. Siguiendo [Fr], supongamos que el teorema es válido para $k = n$ y probemos que es válido para $k = n + 1$.

Partimos de que $L_1(c) = L_2(c) = \dots = L_n(c) \equiv 0$, entonces por el Teorema 1.2 existen polinomios q_1, q_2, \dots, q_n y Q_1, Q_2, \dots, Q_n tales que $\omega =$

$dQ_1 + q_1 dH, \dots, q_{n-1} \omega = dQ_n + q_n dH$. Multiplicando la familia $dH - \epsilon \omega = 0$ por $1 + \epsilon q_1 + \dots + \epsilon^n q_n$ tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= (1 + \epsilon q_1 + \dots + \epsilon^n q_n)(dH - \epsilon \omega) \\ &= dH - \epsilon(\omega - q_1 dH) - \dots - \epsilon^n(q_{n-1} \omega - q_n dH) - \epsilon^{n+1} q_n \omega \\ &= dH - \epsilon dQ_1 - \dots - \epsilon^n dQ_n - \epsilon^{n+1} q_n \omega. \end{aligned}$$

Entonces integrando a lo largo de la curva $\gamma(\epsilon, c)$ (como en el Lema 1.1) llegamos a:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\gamma(\epsilon, c)} dH - \epsilon^{n+1} \int_{\gamma(\epsilon, c)} q_n \omega - \int_{\gamma(\epsilon, c)} (\epsilon dQ_1 + \dots + \epsilon^n dQ_n) \\ &= L(\epsilon, c) - \epsilon^{n+1} \int_{\gamma(\epsilon, c)} q_n \omega - \int_{\gamma(\epsilon, c)} (\epsilon dQ_1 + \dots + \epsilon^n dQ_n). \end{aligned}$$

Ahora, por la Observación 1.6 y la ecuación 1.2, cada una de las integrales $\int_{\gamma(\epsilon, c)} \epsilon^i dQ_i$ se puede escribir como $\epsilon^{n+i+1} \tilde{Q}_i(\epsilon, c)$. Así la ecuación anterior se escribe como

$$\begin{aligned} 0 &= L(\epsilon, c) - \epsilon^{n+1} \int_{\gamma(\epsilon, c)} q_n \omega - \left[\epsilon^{n+2} (\tilde{Q}_1(\epsilon, c)) + \dots + \epsilon^{2n+1} (\tilde{Q}_n(\epsilon, c)) \right] \\ &= \epsilon^{n+1} \left(L_{n+1}(c) - \int_{\gamma(\epsilon, c)} q_n \omega \right) - \epsilon^{n+2} \left[\tilde{L}_{n+2}(\epsilon, c) + \tilde{Q}_1(\epsilon, c) + \dots + \epsilon^{n-1} \tilde{Q}_n(\epsilon, c) \right]. \end{aligned}$$

Luego, multiplicando por $1/\epsilon^{n+1}$ y tomando $\lim_{\epsilon \rightarrow 0}$, se obtiene:

$$L_{n+1}(c) = \int_{\gamma_c} q_n \omega = \int_{[\gamma_c]} q_n \omega. \quad \square$$

Aunque la representación de ω no es única se tiene la siguiente:

Proposición 1.1. *La k -ésima función de Poincaré–Pontryagin es independiente del polinomio q_{k-1} que se use para calcularla.*

Demostración: Sean $dQ_1 + q_1 dH$ y $dQ'_1 + q'_1 dH$ dos representaciones de una 1-forma diferencial polinomial ω , es decir, $\omega = dQ_1 + q_1 dH = dQ'_1 + q'_1 dH$. Entonces agrupando se tiene que $d(Q'_1 - Q_1) = (q_1 - q'_1) dH$. Por lo tanto, usando la Proposición 1.2 que aparece en la siguiente sección, se sigue que $q_1 - q'_1 = \tilde{q}(H)$, así

$$\int_{[\gamma_c]} q'_1 \omega = \int_{[\gamma_c]} (q_1 - \tilde{q}(H)) \omega = \int_{[\gamma_c]} q_1 \omega - \int_{[\gamma_c]} \tilde{q}(H) \omega = \int_{[\gamma_c]} q_1 \omega. \quad \square$$

Ejemplo 1.6. Consideremos $H = (x^2 + y^2)/2 : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ y $\omega = xydx$ en \mathbb{C}^2 . Es claro que cualquier valor $c \in \mathbb{C} - \{0\}$ la fibra \mathcal{L}_c de H es una cuadrática irreducible que intersecta a la línea $l := \{(0, y) \in \mathbb{C}^2\}$ en dos puntos diferentes p_c y q_c , además de la simetría de \mathcal{L}_c (simetría de H) p_c y q_c son antipodas. Además usando la parametrización (1.5), es fácil construir una curva real $\gamma_c \subset \mathcal{L}_c$ que pase a través de p_c y q_c y que defina un ciclo de $dH = 0$.

Consideremos $c_0 \in \mathbb{C} - \{0\}$ y $\Delta \subset l$ un disco pequeño transversal a \mathcal{F}_H en p_{c_0} . Así existe un disco pequeño D tal que $D \times \Delta$ es transversal a la foliación $\mathcal{F}_{H,\omega}$ en p_{c_0} . Por lo cual la función desplazamiento

$$L_\gamma(\epsilon, c) = \epsilon L_1(c) + \epsilon^2 L_2(c) + \cdots + \epsilon^k L_k(c) + O(\epsilon^{k+1})$$

asociada a γ (la parametrización de γ_{c_0}) y a la familia $dH - \epsilon\omega = 0$ está bien definida en una vecindad $D \times U \subset D \times \Delta$ de p_{c_0} .

Del Ejemplo 1.4 sabemos que $\omega = dQ_1 + q_1 dH$, con $Q_1 = -\frac{y^3}{3}$ y $q_1 = y$ por lo cual $L_1(c) \equiv 0$. Entonces de acuerdo al algoritmo de Françoise-Yakovenko, se sigue que:

$$L_2(c) = \int_{[\gamma_c]} q_1 \omega.$$

Ahora, usando la parametrización φ_c dada en el Ejemplo 1.4 se obtiene:

$$\varphi_c^*(q_1 \omega) = \frac{-z^8 + 2cz^6 + z^4 c^2 (c-1) - 2c^3 z^2 + c^4}{4z^5}.$$

Entonces, por el teorema del residuo sabemos que:

$$L_2(c) = \int_{[\gamma_c]} q_1 \omega = \int_{[\varphi_c^{-1}(\gamma_c)]} \varphi_c^*(q_1 \omega) = \left(\frac{1}{4}\right) c^2 (c-1).$$

De esto concluimos que $[\gamma_1]$ es el único ciclo que genera un ciclo límite de la familia $dH - \epsilon\omega = 0$.

1.4 Representación de las perturbaciones.

De los resultados de la sección anterior se sigue que basta estudiar las 1-formas polinomiales ω cuya integral $\int_{[\gamma_c]} \omega$ no es idénticamente cero. Por ello, siguiendo las ideas de Gavrilov [Ga98] e Ilyashenko [Ily69], [Ily02] definimos el espacio de perturbaciones de grado a lo más n , para el sistema Hamiltoniano $dH = 0$, como el cociente

$$PER(n) := \left\{ \frac{\Omega_n}{E_n + \{qdH\}} \right\},$$

donde Ω_n es el espacio de las 1-formas polinomiales complejas de grado a lo más n , E_n denota el subespacio de las 1-formas polinomiales exactas de grado a lo más n , y $\{qdH\} = \{qdH \in \Omega_n \mid q \in \mathbb{C}[x, y]\}$ denota el subespacio generado por el Hamiltoniano dH en Ω_n .

Cabe mencionar que este espacio depende de H y n , pero por simplicidad en la notación sólo depende de n (ya que H está fijo). Una primera pregunta es: ¿cuál es la dimensión del espacio $PER(n)$? Para determinar tal dimensión, primero calcularemos la dimensión de los espacios Ω_n , E_n y $\{qdH\}$. Para ello tenemos las siguientes observaciones:

- El conjunto

$$\{x^i y^j dx, x^i y^j dy \mid i + j = 0, 1, \dots, n\}$$

es una base del espacio Ω_n .

- El espacio E_n es isomorfo al espacio

$$\{F \in \mathbb{C}[x, y] \mid 1 \leq \text{grado}(F) \leq n + 1\},$$

y finalmente

- el subespacio $\{qdH\}$ es isomorfo al espacio

$$\{q \in \mathbb{C}[x, y] \mid 0 \leq \text{grado}(q) \leq n - m\}.$$

Por lo tanto se tiene que

- $\dim(\Omega_n) = (n + 1)(n + 2)$,
- $\dim(E_n) = \frac{1}{2}(n + 2)(n + 3) - 1$,
- $\dim(\{qdH\}) = \frac{1}{2}(n - m + 1)(n - m + 2)$.

Caso 1. Si $n < m + 1$ entonces $q = cte$ y así $PER(n) = \left\{ \frac{\Omega_n}{E_n} \right\}$, por lo tanto $\dim(PER(n)) = \dim(\Omega_n) - \dim(E_n) = \frac{1}{2}n(n + 1)$.

Caso 2. Si $n \geq m + 1$, entonces la dimensión del espacio $E_n + \{qdH\}$, es la dimensión de E_n más la dimensión de $\{qdH\}$, menos la dimensión de la intersección de E_n y $\{qdH\}$ y para calcular la dimensión de esta intersección recurriremos a la siguiente:

Proposición 1.2. Sean $H, q \in \mathbb{C}[x, y]$ entonces $qdH = dF$ para algún polinomio F si y sólo si $q = \tilde{q} \circ H$.

Demostración: (\Leftarrow) Si $q = \tilde{q} \circ H$ se tiene que

$$((\tilde{q} \circ H)H_x)_y = ((\tilde{q} \circ H)H_y)_x.$$

y usando el hecho de que $qdH = dF \iff (qH_x)_y = (qH_y)_x$ (condición de exactitud de 1-formas diferenciales en \mathbb{C}^2) se tiene la implicación.

(\implies) Si $qdH = dF$, entonces tenemos que $dq \wedge dH = 0$, es decir,

$$(q_x dx + q_y dy) \wedge (H_x dx + H_y dy) = (q_x H_y - q_y H_x) dx \wedge dy = 0$$

pero esta última igualdad se cumple si y sólo si $q_x H_y - q_y H_x = 0$ para todo punto $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ y como

$$q_x H_y - q_y H_x = \text{Det} \begin{pmatrix} q_y & H_y \\ -q_x & -H_x \end{pmatrix}$$

entonces $(q_y, -q_x)$ y $(H_y, -H_x)$ son colineales lo que implica que q y H tienen las mismas fibras en \mathbb{C}^2 y por lo tanto $q = \tilde{q} \circ H$. \square

Entonces por la Proposición 1.2 la intersección de E_n y $\{qdH\}$ tiene dimensión $\left\lfloor \frac{n-m}{m+1} \right\rfloor - 1$. Por lo tanto

$$\dim(\text{PER}(n)) = \begin{cases} \frac{n(n+1)}{2} & \text{si } n < m+1 \\ \frac{(m-1)(2n-m+2)}{2} + \left\lfloor \frac{n-m}{m+1} \right\rfloor + 1 & \text{si } n \geq m+1. \end{cases} \quad (1.6)$$

Observación 1.11. Observemos que si $\omega = dQ + qdH + R$ entonces la clase de equivalencia $\bar{\omega} \in \text{Per}(n)$ de ω en $\text{Per}(n)$ es la clase de equivalencia $\bar{R} \in \text{Per}(n)$. Además, la 1-forma polinomial R siempre puede ser escrita como $A(x, y)dx$, con $A(x, y)$ un polinomio, ya que si $s \geq 1$ y $s + r = \nu$ entonces

$$(x^s y^r) dy = d \left(\frac{x^s y^{r+1}}{r+1} \right) - \left(\frac{s(x^{s-1} y^{r+1})}{r+1} \right) dx.$$

Capítulo 2

Integrales Abelianas.

2.1 Descripción de integrales Abelianas.

Sea $H : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ un polinomio. Es bien conocido [Bro] que existe un conjunto finito $B \subset \mathbb{C}$ tal que

$$H : (\mathbb{C}^2 - H^{-1}(B)) \rightarrow (\mathbb{C} - B)$$

es una fibración C^∞ localmente trivial.

Al conjunto B le llamamos el conjunto de *valores singulares* de H (también se le conoce como el conjunto de valores críticos o atípicos).

A los valores c en $\mathbb{C} - B$ se les llama valores regulares de H .

Una fibra \mathcal{L}_c de H se llama genérica si c es un valor regular.

El polinomio H se llama primitivo si su fibra genérica es conexa (irreducible).

Un polinomio primitivo H es llamado de tipo (g, k) si su fibra genérica \mathcal{L}_c es biholomorfa a una superficie de Riemann compacta de género $g \geq 0$ menos $k \geq 1$ puntos y en tal caso decimos que \mathcal{L}_c es de género g . Si H es de tipo $(0, 1)$ entonces diremos que H es de tipo \mathbb{C} y si H es de tipo $(0, 2)$ diremos que es de tipo \mathbb{C}^* .

La descripción del conjunto B de valores singulares de un polinomio primitivo H es la siguiente: un punto $c_i \in \mathbb{C}$ es valor singular de H si se cumple al menos una de las siguientes condiciones:

- La fibra \mathcal{L}_{c_i} contiene puntos singulares de H .
- La fibra \mathcal{L}_{c_i} es disconexa.

- La fibra \mathcal{L}_{c_i} tiene género menor que \mathcal{L}_c , para todo valor c suficientemente cercano a c_i .

Sea c_i un valor singular de H , si \mathcal{L}_{c_i} contiene puntos singulares de H entonces se dice que c_i es un *valor singular finito*, en caso contrario se dice que c_i es un *valor singular al infinito*. El conjunto de valores singulares finitos de H corresponde a la imagen de $Sing(H)$ el conjunto de puntos singulares de H en \mathbb{C}^2 , el cual puede ser vacío, por ejemplo el polinomio $H = x(xy - 1)$ no tiene puntos singulares en \mathbb{C}^2 . Sin embargo el valor $0 \in \mathbb{C}$ es un valor singular al infinito de H ya que \mathcal{L}_0 es disconexa. En general no es fácil hallar el conjunto de valores singulares al infinito de H (ver [Du] para una discusión sobre puntos singulares al infinito).

El estudio de integrales Abelianas lo planteamos de la forma siguiente:

Sean:

- $H : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ un polinomio primitivo de tipo (g, k) .
- B el conjunto de valores singulares de H .
- $c_0 \in \mathbb{C} - B$ y $(\Delta, c_0) \subset \mathbb{C} - B$ un disco centrado en c_0 .
- $\{\gamma_{c_0}^\tau \mid \tau = 1, \dots, (2g + k - 1)\}$ una base de $H_1(\mathcal{L}_{c_0}, \mathbb{Z})$.
- γ_c^τ el transporte de $\gamma_{c_0}^\tau$ a la fibra \mathcal{L}_c inducido por la fibrición de H , con $c \in (\Delta, c_0)$.
- ω una 1-forma diferencial racional en \mathbb{C}^2 .

Una *integral Abeliana* es la función:

$$I_\tau(c) : (\Delta, c_0) \rightarrow \mathbb{C}$$

$$c \mapsto \int_{[\gamma_c^\tau]} \omega,$$

donde $[\gamma_c^\tau]$ es la clase de homología en \mathcal{L}_c .

Algunas preguntas generales son:

- ¿Cuándo $I_\tau(c)$ tiene polos o singularidad esencial?
- ¿Cuándo $I_\tau(c)$ es entera?
- ¿Cuándo $I_\tau(c)$ es polinomial?
- ¿Cuándo $I_\tau(c)$ es algebraica?

En este trabajo nuestro objetivo es entender la integral Abeliana $I_\tau(c)$ cuando la 1-forma ω es polinomial. Nosotros sólo damos respuesta a la pregunta del inciso c), ver Teorema 2.2 y Teorema 4.3. El Ejemplo 2.1, que se describe más adelante, le da sentido a la pregunta del inciso d).

Si ω es una 1-forma polinomial y como H induce una fibración localmente trivial, entonces es claro que $I_\tau(c)$ está bien definida (es decir es univaluada) y es holomorfa.

Tener respuesta a las preguntas anteriores es útil para hallar la solución a la versión infinitesimal débil del problema 16 de Hilbert:

Problema 3. Versión infinitesimal débil [Ar]. Hallar la cota superior $Z(m, n) \in \mathbb{N}$, dependiendo sólo de $m + 1 = \text{grado}(H)$ y $n = \text{grado}(\omega)$, del número de ceros aislados de la integral Abeliana $I_\tau(c)$ en (Δ, c_0) .

Como mencionamos en la introducción del trabajo, para hallar la solución a la versión infinitesimal fuerte del problema 16 de Hilbert (ver Problema 2 en la introducción) es útil extender la integral Abeliana $I_\tau(c)$ a todo el dominio \mathbb{C} , sin embargo esto no es sencillo, pues aún cuando $I_\tau(c)$ está bien definida en el subconjunto abierto (Δ, c_0) de $\mathbb{C} - B$, su continuación analítica en $\mathbb{C} - B$ puede no definir una función univaluada.

En general la idea del porque de esta situación es la siguiente: consideremos un polinomio $H : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ y B su conjunto de valores singulares. Sea $c_0 \in \mathbb{C} - B$ un valor regular de H y elijamos un lazo no trivial $\gamma_{c_0}^1$ en \mathcal{L}_{c_0} (ver Figura 2.1). Sea $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} - B$ un lazo basado en c_0 y tal que $b \in B$ está en el interior de α (ver Figura 2.1).

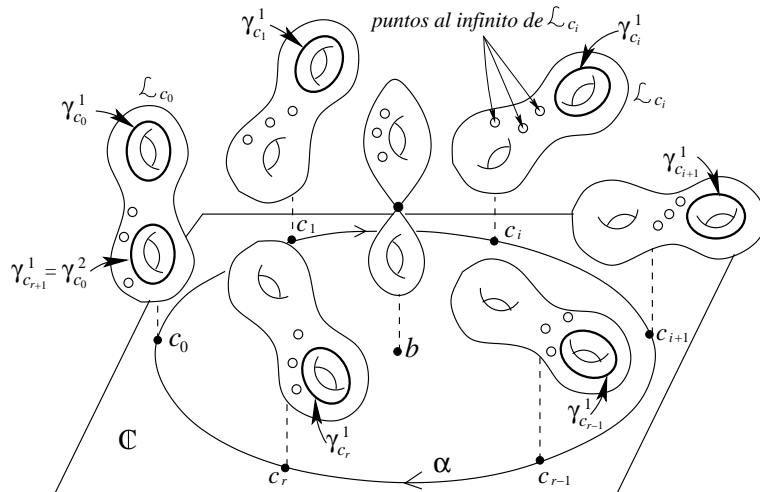
Sabemos que existe una partición $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_r < t_{r+1} = 1$ del intervalo $[0, 1]$, vecindades V_{c_0}, \dots, V_{c_r} de $c_0 = \alpha(t_0), \dots, c_r = \alpha(t_r)$ respectivamente, tal que $\alpha([0, 1]) \subset \cup_{i=0}^r V_{c_i}$ y difeomorfismos $\Gamma_i : \mathcal{L}_{c_i} \rightarrow \mathcal{L}_{c_{i+1}}$. Sea $\gamma_{c_{i+1}}^1$ el transporte de $\gamma_{c_0}^1$ a la fibra $\mathcal{L}_{c_{i+1}}$ (es decir, la imagen de $\gamma_{c_0}^1$ bajo $\Gamma_i \circ \dots \circ \Gamma_0$), entonces en cada vecindad V_{c_i} la integral Abeliana $I_1(c)$ está bien definida y es holomorfa.

Ahora, como $\alpha(t_0) = \alpha(t_{r+1}) = c_0$ entonces la función $h_\alpha := (\Gamma_r \circ \dots \circ \Gamma_0)$ es un difeomorfismo de la fibra \mathcal{L}_{c_0} en sí misma. Al difeomorfismo

$$h_\alpha : \mathcal{L}_{c_0} \rightarrow \mathcal{L}_{c_0}$$

se le llama *monodromía* del lazo α (ver [AGV] pág 10).

La imagen de $\gamma_{c_0}^1$ bajo h_α en un lazo $\gamma_{c_0}^2 = h_\alpha(\gamma_{c_0}^1)$ el cual en general puede ser distinto del lazo $\gamma_{c_0}^1$. Así en el caso genérico las integrales $\int_{[\gamma_{c_0}^1]} \omega$ y $\int_{[\gamma_{c_0}^2]} \omega$ son distintas.

Figura 2.1: Monodromía del polinomio H .

De lo anterior es claro que cualquier lazo $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} - B$ basado en c_0 induce el difeomorfismo $h_\alpha : \mathcal{L}_{c_0} \rightarrow \mathcal{L}_{c_0}$ definido como antes. Además la acción $h_{\alpha*}$ del difeomorfismo h_α sobre la homología de \mathcal{L}_{c_0} es un automorfismo de grupos:

$$h_{\alpha*} : H_1(\mathcal{L}_{c_0}, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(\mathcal{L}_{c_0}, \mathbb{Z}),$$

llamado el *operador de monodromía* del lazo α . Es posible mostrar que si α y α' son lazos basados en c_0 homotópicos entonces $h_{\alpha*} = h_{\alpha'*}$. Por lo cual existe un homomorfismo de grupos:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} : \pi_1(\mathbb{C} - B, c_0) &\rightarrow \text{Aut}(H_1(\mathcal{L}_{c_0}, \mathbb{Z})) \\ [\alpha] &\mapsto h_{\alpha*}. \end{aligned}$$

A la imagen de \mathcal{M} se le llama el *grupo de monodromía* del polinomio H (ver [AGV] pág 13).

Decimos que el polinomio H tiene *monodromía global trivial* si \mathcal{M} es el homomorfismo trivial, es decir, si la imagen bajo \mathcal{M} de cualquier clase $[\alpha]$ en $\pi_1(\mathbb{C} - B, c_0)$ es el automorfismo identidad de $H_1(\mathcal{L}_{c_0}, \mathbb{Z})$ y H tiene *monodromía global no trivial* en otro caso.

En resumen, si el polinomio H tiene monodromía global no trivial entonces en general la continuación analítica de la integral Abeliana no define una función univaluada.

Aunque es posible conocer el lazo $\gamma_{c_0}^2$ en términos de α , b y $\gamma_{c_0}^1$ usando la fórmula de Picard-Lefschetz (ver [AGV] p. 26) no lo discutimos aquí.

Ejemplo 2.1. Consideremos el polinomio $H = x(xy^2 + 1) : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$. Si $c \in \mathbb{C} - \{0\}$ y $\{-\sqrt{c}, \sqrt{c}\}$ son las dos soluciones de $c - z^2 = 0$ entonces:

$$\begin{aligned} \varphi_c : \mathbb{C} - \{-\sqrt{c}, \sqrt{c}\} &\rightarrow \mathcal{L}_c \\ z &\mapsto \left(c - z^2, \frac{z}{c - z^2} \right), \end{aligned}$$

es un biholomorfismo, cuya inversa es $\varphi_c^{-1} : \mathcal{L}_c \rightarrow \mathbb{C} - \{-\sqrt{c}, \sqrt{c}\}$, $(x, y) \mapsto xy$. Así el polinomio H es de tipo $(0, 3)$, además no tiene puntos singulares en \mathbb{C}^2 y la fibra \mathcal{L}_0 es la única reducible, por lo tanto $B = \{0\}$ es el conjunto de valores singulares de H .

Sean

$$\alpha_{1c} = \left\{ \sqrt{c} + \frac{|\sqrt{c}|}{2} e^{2\pi\sqrt{-1}s} \mid s \in [0, 1] \right\}$$

y

$$\alpha_{2c} = \left\{ -\sqrt{c} - \frac{|-\sqrt{c}|}{2} e^{2\pi\sqrt{-1}s} \mid s \in [0, 1] \right\}$$

dos lazos en $\mathbb{C} - \{0\}$ con orientación positiva alrededor de \sqrt{c} y $-\sqrt{c}$ respectivamente. Así los lazos $\gamma_c^1 = \varphi_c(\alpha_{1c})$ y $\gamma_c^2 = \varphi_c(\alpha_{2c})$ son los generadores de $H_1(\mathcal{L}_c, \mathbb{Z})$.

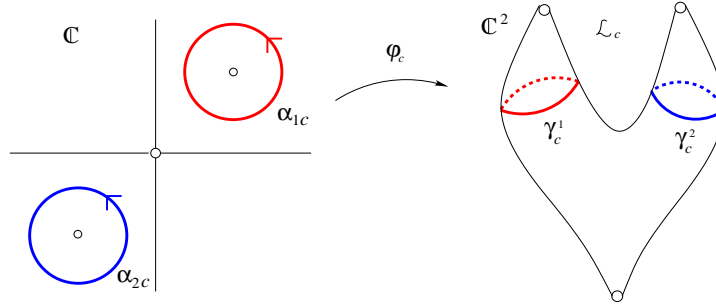


Figura 2.2: Generadores de la homología de \mathcal{L}_c .

Consideremos el valor regular $1 \in \mathbb{C}$ de H , y la parametrización $\varphi_1 : \mathbb{C} - \{-1, 1\} \rightarrow \mathcal{L}_1$ de la fibra \mathcal{L}_1 . Consideremos el lazo α basado en el punto 1 definido como

$$\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} - B = \mathbb{C} - \{0\}, t \mapsto e^{2\pi\sqrt{-1}t}.$$

Sea $c_t = \alpha(t)$ entonces la fibra \mathcal{L}_{c_t} esta parametrizada por

$$\varphi_{c_t} : \mathbb{C} - \{-e^{\pi\sqrt{-1}t}, e^{\pi\sqrt{-1}t}\} \rightarrow \mathcal{L}_{c_t},$$

además la función

$$f_t(z) : \mathbb{C} - \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{C} - \{-e^{\pi\sqrt{-1}t}, e^{\pi\sqrt{-1}t}\}$$

$$z \mapsto e^{\pi\sqrt{-1}t}z$$

es un biholomorfismo. Por lo tanto la función

$$\Gamma_t := \varphi_{c_t} \circ f_t \circ \varphi_1^{-1} : \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_{c_t}$$

es un biholomorfismo.

Notemos que para $t = 1$ se tiene

$$f_1(z) : \mathbb{C} - \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{C} - \{-1, 1\}$$

$$z \mapsto -z$$

Así que la monodromía del lazo α es el biholomorfismo:

$$h_\alpha : \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_1$$

$$(x, y) \mapsto (x, -y).$$

También es claro que $(\varphi_1^{-1} \circ h_\alpha \circ \varphi_1)(z) = -z$, por lo cual se cumple $(\varphi_1^{-1} \circ h_\alpha \circ \varphi_1)(\alpha_{11}) = \alpha_{21}$, de donde obtenemos que $h_\alpha(\gamma_1^1) = \gamma_1^2$. Entonces h_{α^*} no es el automorfismo identidad de $H_1(\mathcal{L}_1, \mathbb{Z})$. Por lo tanto H tiene monodromía global no trivial.

A continuación mostraremos que esta propiedad implica que la integral Abeliana de una 1-forma polinomial ω no define una función global univaluada en todo $\mathbb{C} - B$.

Consideremos la 1-forma polinomial $\omega = ydx$, γ_c^1 y γ_c^2 los transportes de los lazos γ_1^1 y γ_1^2 respectivamente a la fibra \mathcal{L}_c cercana al valor regular 1. Entonces

$$\int_{\gamma_c^1} ydx = \int_{\alpha_{11}} \frac{2z^2 dz}{c - z^2} = 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{2z^2}{c - z^2}, \sqrt{c} \right) = -2\pi i \sqrt{c}.$$

y

$$\int_{\gamma_c^2} z_2 dz_1 = \int_{\alpha_2} \frac{2z^2 dz}{c - z^2} = 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{2z^2}{c - z^2}, -\sqrt{c} \right) = 2\pi i \sqrt{c}.$$

Por lo tanto, si consideramos un disco pequeño $(\Delta, 1)$ centrado en el punto $1 \in \mathbb{C}$ y contenido en $\mathbb{C} - B = \mathbb{C} - \{0\}$, entonces la continuación analítica de la integral Abeliana

$$I_1(c) : (\Delta, 1) \rightarrow \mathbb{C}$$

$$c \mapsto \int_{[\gamma_c^1]} \omega,$$

sobre el lazo α no define una función univaluada sino define la función algebraica bivaluada:

$$I_1(c) = -2\pi\sqrt{-1}\sqrt{c}.$$

La pregunta que nos interesa reponder es:

¿Cuándo $I_\tau(c)$ se extiende de forma univaluada a $\mathbb{C} - B$?

En la siguiente sección mostraremos que si H es de tipo \mathbb{C}^* entonces $I_\tau(c)$ se extiende de forma univaluada a $\mathbb{C} - B$.

2.2 Integrales Abelianas para polinomios de tipo \mathbb{C}^* .

En ésta y las siguientes secciones estudiamos los ceros de integrales Abelianas asociadas a polinomios complejos H de tipo \mathbb{C}^* y los ciclos límite que se obtienen de perturbaciones polinomiales del sistema Hamiltoniano asociado a tal H .

Como en este caso sólo hay un generador para el primer grupo de homología de las fibras de H omitiremos el subíndice τ en la notación de la integral Abeliana $I_\tau(c)$.

Recordemos que los automorfismos polinomiales de \mathbb{C}^k son llamados automorfismos algebraicos. Dos polinomios $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ son algebraicamente dependientes si existen dos automorfismos algebraicos ψ y σ de \mathbb{C} y \mathbb{C}^2 respectivamente tales que el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \xleftarrow{\sigma} & \mathbb{C}^2 \\ P \downarrow & & \downarrow Q \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{C} \end{array}$$

conmuta (i.e. $\psi \circ P \circ \sigma = Q$), y P y Q son algebraicamente independientes en otro caso.

Teorema 2.1. ([Sa], [MS].) *Cualquier polinomio primitivo f de tipo \mathbb{C}^* puede ser transformado, usando automorfismos algebraicos apropiados de \mathbb{C}^2 y \mathbb{C} , en un polinomio H de la familia:*

$$\mathcal{S} = \left\{ x^k \left(x^l y - P(x) \right)^r \mid \begin{array}{l} k, r, l \in \mathbb{N}, (r, k) = 1, \deg(P(x)) < l \\ P(0) \neq 0 \text{ y si } l = 0 \text{ entonces } P(x) \equiv 0 \end{array} \right\}.$$

En este capítulo sólo estudiamos los polinomios H en la familia \mathcal{S} de grado $m + 1 > 2$. El caso $m + 1 = 2$ será considerado en el Capítulo 3.

Usando la familia \mathcal{S} se obtiene el siguiente:

Teorema 2.2. *Si H es un polinomio de grado $m + 1 \geq 3$ en \mathcal{S} y ω es una 1-forma polinomial de grado n , entonces la integral Abeliana:*

$$\begin{aligned} I(c) : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ c &\mapsto \int_{[\gamma_c]} \omega, \end{aligned}$$

está bien definida y es una función polinomial. Además la cota superior para el número de ceros aislados de $I(c)$ es

$$Z(m, n) = \left\lfloor \frac{n + 1}{m + 1} \right\rfloor.$$

Demostración: Sea $H = x^k (x^l y - P(x))^r$ un polinomio en la familia \mathcal{S} de grado $m + 1 = r(l + 1) + k$, con $m + 1 \geq 3$. Para realizar la prueba seguiremos los siguientes pasos:

1. Obtendremos una parametrización φ_c de la fibra genérica \mathcal{L}_c de H .
2. Usando la parametrización φ_c estudiaremos las integrales Abelianas:

$$\int_{[\gamma_c]} \eta_{ij},$$

donde $\eta_{ij} = x^i y^{j-i} dx$ es una 1-forma polinomial de grado j , con $1 \leq j \leq n$ y $i \in \{0, 1, \dots, j - 1\}$. Este estudio es suficiente para la prueba del teorema de acuerdo con la Observación 1.11. Además, probaremos que esta integral es una función polinomial $P_{ij}(c)$.

3. Mostraremos que si

$$0 \leq i \leq \left\lfloor \frac{j - 2}{2} \right\rfloor$$

o

$$j - \left\lfloor \frac{rj}{r(l + 1) + k} \right\rfloor \leq i \leq j - 1,$$

entonces la integral Abeliana $\int_{[\gamma_c]} \eta_{ij}$ se anula idénticamente, esto es, $P_{ij}(c) \equiv 0$.

4. Estudiaremos el resto de las 1-formas η_{ij} consideradas en el Paso 2, esto es

$$\left\lfloor \frac{j - 2}{2} \right\rfloor \leq i \leq j - \left\lfloor \frac{rj}{r(l + 1) + k} \right\rfloor$$

y se calculará la cota superior explícita para el grado del polinomio $P_{ij}(c)$. De donde obtendremos una cota superior explícita para el número de ceros aislados de la integral Abeliana $\int_{[\gamma_c]} \omega$.

5. Finalmente mostraremos que la cota hallada en el Paso 4 es la cota exacta.

Comencemos la prueba.

Paso 1. Sea $c \neq 0$ un elemento de \mathbb{C} . Supongamos que

$$x^k (x^l y - P(x))^r = c.$$

Como $\{x = 0\}$ es parte de la fibra no genérica, podemos suponer que estamos en $\mathbb{C}^2 - \{x \neq 0\}$, así

$$(x^l y - P(x))^r = \frac{c}{x^k}. \quad (2.1)$$

Ahora, como $(r, k) = 1$ existen dos enteros $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}$ tales que

$$rs_1 + ks_2 = 1. \quad (2.2)$$

Sea $x = z^r c^{s_2}$. Entonces usando (2.2) tenemos que:

$$\frac{c}{x^k} = \frac{1}{z^{kr} c^{ks_2-1}} = \frac{1}{z^{kr} c^{-rs_1}} = \left(\frac{c^{s_1}}{z^k} \right)^r,$$

y por lo tanto de (2.1) obtenemos:

$$y = \frac{\zeta c^{s_1} + z^k P(z^r c^{s_2})}{c^{ls_2} z^{rl+k}}, \quad \text{con } \zeta \text{ una } r\text{-ésima raíz de la unidad.}$$

Así la fibra genérica \mathcal{L}_c de H es biholomorfa a $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ bajo la parametrización:

$$\begin{aligned} \varphi_c : \mathbb{C}^* &\rightarrow \mathcal{L}_c \\ z &\mapsto \left(z^r c^{s_2}, \frac{\zeta c^{s_1} + z^k P(z^r c^{s_2})}{c^{ls_2} z^{rl+k}} \right), \end{aligned} \quad (2.3)$$

cuya función inversa es la restricción $\Psi|_{\mathcal{L}_c}$ de la función holomorfa:

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbb{C}^2 - \{\mathcal{L}_0\} &\rightarrow \mathbb{C} - \{0\} \\ (x, y) &\mapsto \frac{\zeta^{s_2} x^{s_1}}{(x^l y - P(x))^{s_2}} \end{aligned}$$

a la fibra \mathcal{L}_c y s_1 y s_2 como en (2.2).

Sea $\alpha := \{e^{2\pi\sqrt{-1}t} \mid t \in [0, 1]\} \subset \mathbb{C}$ el círculo unitario alrededor del origen de \mathbb{C}^* . El ciclo $[\gamma_c] := [\varphi_c(\alpha)]$ es un generador del primer grupo de homología $H_1(\mathcal{L}_c, \mathbb{Z})$.

Paso 2. Sea ω una 1-forma polinomial sobre \mathbb{C}^2 . Usando la parametrización φ_c definida en (2.3) obtenemos que

$$\int_{[\gamma_c]} \omega = \int_{\alpha} \varphi_c^*(\omega).$$

Para cada pareja (i, j) , con $1 \leq j \leq n$ y $i \in \{0, 1, \dots, j-1\}$, consideramos la 1-forma polinomial $\eta_{ij} = x^i y^{j-i} dx$ y usando la parametrización φ_c definida en (2.3) obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{[\gamma_c]} \eta_{ij} &= \int_{\alpha} (z^r c^{s_2})^i \frac{(\zeta c^{s_1} + z^k P(z^r c^{s_2}))^{j-i}}{c^{ls_2(j-i)} z^{(j-i)(r+l+k)}} (r z^{r-1} c^{s_2}) dz \\ &= r \sum_{\mu=0}^{j-i} \binom{j-i}{\mu} \zeta^{\mu} \left(\int_{\alpha} \frac{(P(z^r c^{s_2}))^{j-i-\mu}}{z^{(j-i)rl-r(i+1)-k\mu+1}} dz \right) c^{-s_2((j-i)l-i-1)+\mu s_1}. \end{aligned}$$

Ahora, supongamos que $P(x) = p_0 + p_1 x + \dots + p_s x^s$ con $s \leq l-1$. Entonces

$$(P(z^r c^{s_2}))^{j-i-\mu} = \sum_{n_0+\dots+n_s=j-i-\mu} \frac{(j-i-\mu)!}{n_0! \dots n_s!} p_0^{n_0} \dots p_s^{n_s} z^{rN_s} c^{s_2 N_s},$$

donde $N_s := n_1 + \dots + sn_s$. Por lo tanto

$$\int_{[\gamma_c]} \eta_{ij} = \sum_{\mu=0}^{j-i} \left(\sum_{n_0+\dots+n_s=j-i-\mu} (A_{n_0 \dots n_s}^{\mu} I_{n_0 \dots n_s}^{\mu}) c^{s_2 \tilde{N}_s + \mu s_1} \right) \quad (2.4)$$

donde

$$A_{n_0 \dots n_s}^{\mu} := r \left(\frac{(j-i)!}{n_0! \dots n_s! \mu!} \right) p_0^{n_0} \dots p_s^{n_s} \zeta^{\mu},$$

$$I_{n_0 \dots n_s}^{\mu} := \int_{\alpha} z^{r\tilde{N}_s - k\mu - 1} dz$$

y

$$\tilde{N}_s := N_s - ((j-i)l - i - 1).$$

Observemos que $I_{n_0 \dots n_s}^{\mu} \neq 0$ si y sólo si $r\tilde{N}_s = k\mu$. De esta forma, si suponemos que $I_{n_0 \dots n_s}^{\mu} \neq 0$ entonces $\tilde{N}_s = \frac{k\mu}{r}$; como $(r, k) = 1$ obtenemos que $\frac{\mu}{r} \in \mathbb{N}$ y el exponente de c en (2.4) es

$$s_2 \left(\frac{k\mu}{r} \right) + \mu s_1 = \frac{\mu}{r} (r s_1 + k s_2) = \frac{\mu}{r} \in \mathbb{N}.$$

Por lo que la integral $\int_{[\gamma_c]} \eta_{ij}$ es una función polinomial $P_{ij}(c)$.

Paso 3.

1) Si

$$0 \leq i \leq \left\lfloor \frac{j-2}{2} \right\rfloor,$$

entonces

$$\begin{aligned} r\tilde{N}_s - k\mu - 1 &\leq r((l-1)(j-i-\mu) - ((j-i)l - i - 1)) - 1 \\ &\leq r(-j + 2i + 1) - 1 \\ &\leq r(-j + 2 \left\lfloor \frac{j-2}{2} \right\rfloor + 1) - 1 \\ &\leq r(-j + (j-2) + 1) - 1 \\ &= -r - 1 \leq -2. \end{aligned}$$

Así tenemos que $I_{n_0 \dots n_s}^\mu = 0$ para toda μ y para todas las $(s+1)$ -adas (n_0, \dots, n_s) . Por lo tanto

$$\int_{[\gamma_c]} \eta_{ij} = P_{ij}(c) \equiv 0.$$

2) Supongamos que

$$j - \left\lfloor \frac{rj}{r(l+1)+k} \right\rfloor \leq i \leq j - 1.$$

Entonces

$$\begin{aligned} r\tilde{N}_s - k\mu - 1 &\geq r\tilde{N}_s - k(j-i) - 1 \\ &\geq -r((j-i)l - i - 1) - kj + ki - 1 \\ &\geq -j(rl+k) + i(r(l+1)+k) \\ &\geq -j(rl+k) + (r(l+1)+k) \left(j - \left\lfloor \frac{rj}{r(l+1)+k} \right\rfloor \right) \\ &= rj - (r(l+1)+k) \left\lfloor \frac{rj}{r(l+1)+k} \right\rfloor \\ &\geq rj - rj = 0, \end{aligned}$$

lo cual implica que $I_{n_0 \dots n_s}^\mu = 0$ para toda μ y para todas las $(s+1)$ -adas (n_0, \dots, n_s) . Por lo tanto

$$\int_{[\gamma_c]} \eta = P_{ij}(c) \equiv 0.$$

Paso 4. De acuerdo al Paso 3 sólo resta analizar las integrales de η_{ij} , con

$$i = \left\lfloor \frac{j-2}{2} \right\rfloor + \nu,$$

donde $\nu = 1, 2, \dots, j - \left\lfloor \frac{rj}{r(l+1)+k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{j-2}{2} \right\rfloor - 1$.

Recordemos del Paso 2 que si $I_{n_0 \dots n_s}^\mu \neq 0$ entonces $I_{n_0 \dots n_s}^\mu$ multiplica a la variable c cuyo exponente es $\frac{\mu}{r}$. Nosotros encontraremos una cota superior para $\frac{\mu}{r}$.

Supongamos que $I_{n_0 \dots n_s}^\mu \neq 0$ entonces

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{r} = \frac{\tilde{N}_s}{k} &\leq \frac{(l-1)(j-i-\mu) - ((j-i)l - i - 1)}{k} \\ &= \frac{-j + 2i - (l-1)\mu + 1}{k}, \end{aligned}$$

esto implica que

$$\frac{\mu}{r} \left(1 + \frac{r(l-1)}{k} \right) \leq \frac{-j + 2i + 1}{k}. \quad (2.5)$$

De (2.5) se sigue que

$$\frac{\mu}{r} \leq \frac{-j + 2i + 1}{k + r(l-1)} = \frac{-j + 2 \left\lfloor \frac{j-2}{2} \right\rfloor + 2\nu + 1}{k + r(l-1)}. \quad (2.6)$$

Además, como de (2.4) tenemos que $\mu \leq j - i = j - \left\lfloor \frac{j-2}{2} \right\rfloor - \nu$, entonces necesitamos considerar los valores de ν tal que

$$\frac{-j + 2 \left\lfloor \frac{j-2}{2} \right\rfloor + 2\nu + 1}{k + r(l-1)} \leq \frac{j - \left\lfloor \frac{j-2}{2} \right\rfloor - \nu}{r}. \quad (2.7)$$

De (2.7) obtenemos:

$$\nu \leq j \left(\frac{k + rl}{k + r(l+1)} \right) - \left\lfloor \frac{j-2}{2} \right\rfloor - \frac{r}{k + r(l+1)}. \quad (2.8)$$

Finalmente combinando las ecuaciones (2.6) y (2.8) se obtiene que $\frac{\mu}{r}$ es menor o igual a:

$$\leq \left\lfloor \frac{-j + 2 \left\lfloor \frac{j-2}{2} \right\rfloor + 2 \left(j \left(\frac{k + rl}{k + r(l+1)} \right) - \left\lfloor \frac{j-2}{2} \right\rfloor - \frac{r}{k + r(l+1)} \right) + 1}{k + r(l-1)} \right\rfloor.$$

Simplificando la expresión anterior obtenemos que

$$\frac{\mu}{r} \leq \left[\frac{j+1}{k+r(l+1)} \right] = \left[\frac{j+1}{m+1} \right].$$

De esta manera la integral $\int_{[\gamma_c]} \eta_{ij}$ es una función polinomial de c , que extiende a todo \mathbb{C} , de grado $\leq \left[\frac{j+1}{m} \right] \leq \left[\frac{n+1}{m} \right]$. Por lo tanto, si ω es una 1-forma polinomial de grado n , entonces la integral Abeliana $I(c) : c \mapsto \int_{[\gamma_c]} \omega$ es una función polinomial definida en todo \mathbb{C} y una cota superior para el número de ceros de $I(c)$ es:

$$\left[\frac{n+1}{m+1} \right].$$

Paso 5. Ahora mostraremos que la cota:

$$Z(m, n) = \left[\frac{n+1}{m+1} \right]$$

es exacta.

Consideremos el polinomio $H(x, y) = x(x^{l-2}y - 1)$ de grado $l \geq 3$. La fibra genérica \mathcal{L}_c de H es biholomorfa a \mathbb{C}^* bajo la parametrización:

$$\begin{aligned} \varphi_c : \mathbb{C} - \{0\} &\rightarrow \mathcal{L}_c \\ z &\mapsto \left(z, \frac{c+z}{z^{l-1}} \right). \end{aligned}$$

Sea $\alpha := \left\{ e^{2\pi\sqrt{-1}t} \mid t \in [0, 1] \right\} \subset \mathbb{C}$ el círculo unitario alrededor del origen de \mathbb{C}^* . El ciclo $[\gamma_c] := [\varphi_c(\alpha)]$ es un generador de $H_1(\mathcal{L}_c, \mathbb{Z})$ el primer grupo de homología de la fibra genérica \mathcal{L}_c de H .

Para cada $\nu \in \mathbb{N}$ y $j = 1, 2, \dots, l$ consideremos la 1-forma polinomial:

$$\Omega_j^\nu = \left(y^{\nu l + j} + a(\nu, j) \left(x^{a(\nu, j)(l-1)-1} y^{a(\nu, j)} - x^{l-3} y \right) \right) dx$$

de grado $\nu l + j$, donde $a(\nu, j) = \left[\frac{\nu l + j + 1}{l} \right]$.

Sea $n \in \mathbb{N}$ un entero positivo, entonces existe $\nu \in \mathbb{N}$ y $j \in \{1, 2, \dots, l\}$ tal que $n = \nu l + j$. Consideremos entonces la 1-forma polinomial Ω_j^ν de grado $n = \nu l + j$.

i) Si $n = 1$ entonces $\nu = 0$ y $j = 1$, así obtenemos la 1-forma polinomial

$$\Omega_1^0 = y dx.$$

Por lo tanto

$$\int_{[\gamma_c]} y dx = \int_{\alpha} \frac{c+z}{z^{l-1}} dz = \begin{cases} 2\pi\sqrt{-1} & \text{si } l = 3, \\ 0 & \text{si } l > 3. \end{cases}$$

ii) Si $l - 2 \geq n \geq 2$ entonces

$$\Omega_j^\nu = y^{\nu l + j} dx$$

y usando el Paso 3 obtenemos

$$\int_{[\gamma_c]} y^{\nu l + j} dx = 0.$$

iii) Si $n > l - 2$ entonces

$$\Omega_j^\nu = \left(y^{\nu l + j} + a(\nu, j) \left(x^{a(\nu, j)(l-1)-1} y^{a(\nu, j)} - x^{l-3} y \right) \right) dx.$$

Se sigue de 2) en la prueba del Teorema 1 que

$$\int_{[\gamma_c]} y^{\nu l + j} dx = 0.$$

Además como \mathcal{L}_c esta parametrizada por φ_c tenemos que

$$\int_{[\gamma_c]} \Omega_j^\nu = a(\nu, j) \left(\sum_{\mu=0}^{a(\nu, j)} \binom{a(\nu, j)}{\mu} \left(\int_{\alpha} z^{a(\nu, j) - \mu - 1} dz \right) c^\mu - \int_{\alpha} \frac{c+z}{z^2} dz \right).$$

Mas aún, si $\mu \leq a(\nu, j) - 1$ entonces $a(\nu, j) - \mu - 1 \geq 0$, de donde

$$\int_{\alpha} z^{a(\nu, j) - \mu - 1} dz = 0.$$

Por lo tanto hemos obtenido que

$$\int_{[\gamma_c]} \Omega_j^\nu = (2\pi\sqrt{-1}) a(\nu, j) (c^{a(\nu, j)} - 1)$$

es un polinomio con $a(\nu, j) = \left[\frac{n+1}{l} \right]$ raíces diferentes.

Así, tomando $m + 1 = l$ se concluye la demostración. □

Observación 2.1. Sea f un polinomio arbitrario sobre \mathbb{C}^2 de grado m' de tipo \mathbb{C}^* . Sea ω una 1-forma polinomial arbitraria sobre \mathbb{C}^2 de grado n' . Del Teorema 2.1 sabemos que hay automorfismos algebraicos ψ y σ de \mathbb{C} y \mathbb{C}^2 respectivamente, tal que

$$\psi \circ f \circ \sigma = x^k \left(x^l y - P_l(x) \right)^r = H,$$

donde k, l, r y $P_l(x)$ son como en el Teorema 2.1. Sea $m+1 := k + r(l+1)$ el grado de H y sea n el grado de $\sigma^*(\omega)$. Entonces la cota superior que estamos buscando para los ceros de la integral Abeliana $c \mapsto \int_{[\gamma_c]} \omega$, con $[\gamma_c] \in H_1(f^{-1}(c), \mathbb{Z})$, es $\left\lfloor \frac{n+1}{m+1} \right\rfloor$, ya que el grado de esta función es invariante bajo automorfismos de \mathbb{C}^2 . La relación entre m y m' , y n y n' depende de σ .

2.3 Ciclos límite en polinomios de tipo \mathbb{C}^* .

La prueba del Teorema 2.2 da una cota superior para el número de ciclos de $dH = 0$ que generan ciclos límite de la familia $dH - \epsilon\omega = 0$.

Corolario 2.1. *Sea $H \in \mathcal{S}$ de grado $m+1 \geq 3$, sea ω una 1-forma polinomial de grado $n \geq m+1$. Si la primera función de Poincaré-Pontryagin, $L_1(c)$ de la función desplazamiento asociada a la familia $dH - \epsilon\omega = 0$ no es idénticamente cero, entonces*

1. *Para $\epsilon \neq 0$ pequeño y fijo, la ecuación diferencial $dH - \epsilon\omega = 0$ tiene a lo más $\left\lfloor \frac{n+1}{m+1} \right\rfloor$ ciclos límite que nacen de ciclos de $dH = 0$,*
2. *Si $L_1(c)$ tiene $\left\lfloor \frac{n+1}{m+1} \right\rfloor$ raíces diferentes, digamos c_1, \dots, c_k , entonces para $\epsilon \neq 0$ pequeño y fijo, la ecuación diferencial $dH - \epsilon\omega = 0$ tiene exactamente k ciclos límite que nacen de los ciclos $[\gamma_{c_i}]$ de $dH = 0$.*

La demostración de este resultado es muy sencilla. Por hipótesis $L_1(c)$ no es idénticamente cero y por la fórmula de Poincaré-Pontryagin y el Teorema 2.1 es un polinomio de grado a lo más $\left\lfloor \frac{n+1}{m+1} \right\rfloor$, entonces aplicando el criterio de Poincaré-Pontryagin se concluye la demostración.

Ejemplo 2.2. Consideremos el polinomio $H(x, y) = x(xy - 1)$. Su fibra genérica \mathcal{L}_c de H es biholomorfa a \mathbb{C}^* bajo la parametrización:

$$\begin{aligned} \varphi_c : \mathbb{C} - \{0\} &\rightarrow \mathcal{L}_c \\ z &\mapsto \left(z, \frac{c+z}{z^2} \right). \end{aligned}$$

Sea $q(c) = \prod_{i=1}^k (c - i) = a_0 c^k + a_1 c^{k-1} + \dots + a_k$ un polinomio con $a_0 = 1$ y $k \geq 1$. Definamos $a_{01} = a_k$ y para $r = 1, 2, \dots, k$, $a_{(2r-1)(r)} = a_{k-r}$. También definamos la 1-forma polinomial:

$$\omega = (a_{01}y + \sum_{r=1}^k a_{(2r-1)(r)} x^{2r-1} y^r) dx.$$

Entonces

$$\int_{[\gamma_c]} \omega = a_{01} \int_{[\gamma_c]} y dx + \sum_{r=1}^k a_{(2r-1)(r)} \int_{[\gamma_c]} (x^{2r-1} y^r) dx.$$

Usando la parametrización φ_c es fácil ver que

$$\int_{[\gamma_c]} y dx = 2\pi\sqrt{-1}, \text{ y } \int_{[\gamma_c]} (x^{2r-1} y^r) dx = 2\pi\sqrt{-1}c^r.$$

De donde

$$L_1(c) = \int_{[\gamma_c]} \omega = 2\pi\sqrt{-1}(a_k + a_{k-1}c + \dots + a_1 c^{k-1} + c^k) = 2\pi\sqrt{-1}q(c).$$

Por lo tanto $L_1(c)$ tiene k raíces diferentes y cada ciclo $[\gamma_i]$, con $i = 1, 2, \dots, k$, genera un ciclo límite de la familia $dH - \epsilon\omega = 0$. Además notemos que H es de grado 3, ω es de grado $3k - 1$ y la integral Abeliana $\int_{[\gamma_c]} \omega$ tiene exactamente $k = \left\lfloor \frac{(3k-1)+1}{3} \right\rfloor$ ceros, comprobando así el Teorema 2.1 para $m = 2$ y $n = 3k - 1$.

2.4 La curva de Ilyashenko.

Recordemos que el espacio de las perturbaciones $Per(n)$ es un espacio vectorial complejo de dimensión finita, digamos $N + 1$. Así, sea $\{\omega_1, \dots, \omega_{N+1}\}$ una base para $Per(n)$. Entonces siguiendo las ideas de Ilyashenko (ver [Ily02] pág. 363), realizamos la construcción siguiente

$$\begin{aligned} \mathbb{I} : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C}^{N+1} \\ c &\mapsto \left(\int_{[\gamma_c]} \omega_1, \int_{[\gamma_c]} \omega_2, \dots, \int_{[\gamma_c]} \omega_{N+1} \right), \end{aligned}$$

lo cual tiene sentido siempre que cada integral $\int_{[\gamma_c]} \omega_i$ sea univaluada, como función de c , en todo el conjunto \mathbb{C} .

La imagen de \mathbb{I} es una curva $\mathbf{I} \subset \mathbb{C}^{N+1}$ parametrizada por $c \in \mathbb{C}$. La curva \mathbf{I} es llamada la curva del Ilyashenko (ver [GM] p. 156) asociada al sistema Hamiltoniano $dH = 0$.

Para $H \in \mathcal{S}$ se tiene el siguiente.

Lema 2.1. *La curva de Ilyashenko asociada a un polinomio $H \in \mathcal{S}$ de grado $m + 1$ es una curva algebraica no singular afín de grado a lo más $\lfloor \frac{n+1}{m+1} \rfloor$.*

Demostración: Sea $H(x, y) = x^k(x^l y - P_l(x))^r$ un polinomio en \mathcal{S} y sea $m + 1 = k + r(l + 1)$ el grado de H . Sea \mathcal{B}_n una base para $Per(n)$. De la prueba del Teorema 2.2 tenemos que el resultado de la integral

$$\int_{[\gamma c]} x^i y^j dx$$

es un polinomio en la variable c de grado $\leq \lfloor \frac{n+1}{m+1} \rfloor$ y que dicha integral está definida sobre todo \mathbb{C} . Además, siguiendo la prueba de Teorema 2.2, es fácil ver que

$$\int_{[\gamma c]} x^{r l + k - 1} y^r dx = ac,$$

donde $a \in \mathbb{C} - \{0\}$. Se ordenan los elementos de \mathcal{B}_n como ω_ν con $\nu = 1, \dots, N + 1$ de acuerdo a algún orden (por ejemplo, el orden lexicográfico). Entonces usando una transformación lineal afín de \mathbb{C}^{N+1} la función $\mathbb{I}(c)$ puede ser escrita como

$$\mathbb{I}(c) = (c, p_1(c), \dots, p_N(c)).$$

Además, usando el automorfismo algebraico de \mathbb{C}^{N+1} :

$$f : (x_1, x_2, \dots, x_{N+1}) \mapsto (x_1, x_2 - p_1(x_1), \dots, x_{N+1} - p_N(x_1),)$$

transformamos $\mathbb{I}(c)$ en la función

$$f(\mathbb{I}(c)) = (c, 0, \dots, 0).$$

Así, la imagen de $f(\mathbb{I}(c))$ es un conjunto algebraico afín y no singular, ya que $\frac{d}{dc} f(\mathbb{I}(c)) = (1, 0, \dots, 0) \neq 0$. Por lo tanto el conjunto $\mathbf{I} \subset \mathbb{C}^{N+1}$, que es la imagen de la función $\mathbb{I}(c)$, es una curva algebraica no singular afín.

Ahora, recordemos que el grado de la curva $\mathbf{I} \subset \mathbb{C}^{N+1}$ es la cardinalidad de la intersección $\mathbf{I} \cap \mathbb{H}$, donde \mathbb{H} es un hiperplano genérico en \mathbb{C}^{N+1} (ver [Gr] p. 145). Consideremos $\mathbb{H} = \{\alpha_1 z_1 + \dots + \alpha_{N+1} z_{N+1} = 0\}$ un hiperplano genérico en \mathbb{C}^{N+1} . Entonces el conjunto $\mathbf{I} \cap \mathbb{H}$ es el conjunto de raíces del polinomio

$$\alpha_1 c + \alpha_2 p_1(c) + \dots + \alpha_{N+1} p_N(c)$$

de grado a lo más $\lfloor \frac{n+1}{m+1} \rfloor$. De donde obtenemos la curva de Ilyashenko \mathbf{I} es de grado lo más $\lfloor \frac{n+1}{m+1} \rfloor$. \square

Capítulo 3

Ciclos límite de sistemas de tipo Liénard.

3.1 Integrales Abelianas para polinomios de grado 2.

Sea $H : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ un polinomio de grado 2. El conjunto de puntos singulares de H :

$$\text{Sing}(H) = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid H_x(x, y) = H_y(x, y) = 0\}$$

esta dado por la intersección de las dos curvas algebraicas de grado uno $\{H_x = 0\}$ y $\{H_y = 0\}$, es decir, son dos líneas complejas en \mathbb{C}^2 . Por lo que es claro que existen tres posibilidades para $\text{Sing}(H)$:

- i*) Es el conjunto vacío (las dos líneas no se intersectan).
- ii*) Es una línea (las dos líneas son iguales).
- iii*) Es un sólo punto (las dos líneas se intersectan y son distintas).

Siempre podemos usar un automomorfismo lineal ψ de \mathbb{C} tal que $(\psi \circ H)(0, 0) = 0$. Por lo tanto podemos suponer que $H(0, 0) = 0$, así

$$H = a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{10}x + a_{01}y,$$

$$H_x = 2a_{20}x + a_{11}y + a_{10}$$

y

$$H_y = a_{11}x + 2a_{02}y + a_{01}.$$

El caso *i*) se tiene si $H_y = kH_x + a$ con $k, a \in \mathbb{C}$ y a distinta de cero. Entonces si restamos H_y y kH_x obtenemos que se cumple la igualdad:

$$(a_{11} - k2a_{20})x + (2a_{02} - ka_{11})y + (a_{01} - ka_{10}) = a.$$

Si $k = 0$ entonces $a_{11} = 0$, $a_{02} = 0$ y $a_{01} = a$, de donde

$$H = a_{20}x^2 + a_{10}x + ay.$$

Si usamos el automorfismo algebraico:

$$\sigma_1 : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2, (s, t) \mapsto \left(s, \frac{1}{a} (t - a_{20}s^2 - a_{10}s) \right)$$

entonces podemos transformar el polinomio H en el polinomio:

$$(H \circ \sigma_1)(s, t) = t.$$

cuya fibra genérica es la línea $\{t = c\} \subset \mathbb{C}^2$ que es simplemente conexa. Así que la fibra genérica \mathcal{L}_c de H también es simplemente conexa.

Si $k \neq 0$ entonces $a_{20} = \frac{a_{11}}{2k}$, $2a_{02} = \frac{ka_{11}}{2}$ y $a_{01} = ka_{10} + a$. Por lo tanto H es de la forma:

$$H = \frac{a_{11}}{2k}(x + ky)^2 + a_{10}(x + ky) + ay.$$

Ahora, consideremos los automorfismos algebraicos de \mathbb{C}^2 :

$$\sigma_1 : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2, (s, t) \mapsto \left(s, \frac{1}{a} \left(t - \frac{a_{11}}{2k}s^2 - a_{10}s \right) \right)$$

y

$$\sigma_2 : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2, (u, v) \mapsto (u - kv, v).$$

Entonces el polinomio H es transformado en el polinomio

$$(H \circ \sigma_2 \circ \sigma_1)(s, t) = t.$$

Por lo tanto la fibra genérica \mathcal{L}_c de H es simplemente conexa.

Si se tiene el caso *ii*) entonces

$$H = \frac{a_{11}}{2k}(x + ky)^2 + a_{10}(x + ky),$$

por lo que H es no primitivo ya que $H = p \circ G$, con $p(z) = \frac{a_{11}}{2k}z^2 + a_{10}z$ y $G(x, y) = x + ky$. Entonces la fibra genérica \mathcal{L}_c de H consiste de dos curvas irreducibles simplemente conexas. Por lo tanto para los casos *i*) y *ii*) se obtiene que:

$$\int_{\gamma_c} \omega = 0, \quad \text{para toda curva } \gamma_c \subset \mathcal{L}_c \text{ y para toda } c \in \mathbb{C}.$$

Para el caso *iii*) es fácil mostrar que existe un automorfismo lineal σ de \mathbb{C}^2 y un automorfismo lineal ψ de \mathbb{C} tal que $(\psi \circ H \circ \sigma)(x, y) = xy$. Por la propiedad de σ se tiene que $\sigma^*(\omega)$ es también una 1-forma polinomial de grado n . Por lo tanto, para concluir el análisis de la versión infinitesimal débil del problema 16 de Hilbert en el caso cuadrático, basta resolverlo para $H = xy$ y ω una 1-forma polinomial de grado n .

El polinomio $H = xy$ tiene en el origen $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$ su único punto crítico, la fibra \mathcal{L}_0 es la unión de las dos líneas complejas: $\{x = 0\} \subset \mathbb{C}^2$ y $\{y = 0\} \subset \mathbb{C}^2$, y para cada $c \in \mathbb{C} - \{0\}$ la fibra $\mathcal{L}_c \subset \mathbb{C}^2$ es irreducible y biholomorfa a \mathbb{C}^* ya que la aplicación:

$$\begin{aligned} \varphi_c : \mathbb{C} - \{0\} &\rightarrow \mathcal{L}_c \\ z &\mapsto (z, \frac{c}{z}) \end{aligned} \quad (3.1)$$

es un biholomorfismo. Además, si α es el círculo unitario alrededor del origen $0 \in \mathbb{C}$ entonces el ciclo $[\gamma_c] := [\varphi_c(\alpha)]$ es un generador del primer grupo de homología $H_1(\mathcal{L}_c, \mathbb{Z})$ de la fibra \mathcal{L}_c .

Proposición 3.1. *Si $H = xy$ entonces el conjunto:*

$$\mathcal{B}_n := \left\{ (H)^s y dx \mid s = 0, 1, \dots, \left[\frac{n-1}{2} \right] \right\}$$

es una base para el espacio de perturbaciones $Per(n)$ de $dH = 0$.

Demostración: Ya que H es constante en $[\gamma_c]$ entonces:

$$\int_{[\gamma_c]} (H)^s (y dx) = c^s \left(\int_{[\gamma_c]} y dx \right).$$

Ahora, la integral $\int_{[\gamma_c]} y dx$ no depende del representante del ciclo $[\gamma_c]$, así que, $\int_{[\gamma_c]} y dx = \int_{\gamma_c} y dx$. Además la integral $\int_{\gamma_c} y dx$, sobre la superficie \mathcal{L}_c , puede ser transformada, usando la parametrización $\varphi_c(z)$ dada por (3.1), en una integral sobre \mathbb{C} . Tal transformación es:

$$\int_{\gamma_c} y dx = \int_{\alpha} \varphi_c^*(y dx) = \int_{\alpha} \frac{c}{z} dz = (2\pi\sqrt{-1}) c,$$

entonces

$$\int_{[\gamma_c]} (H)^s (y dx) = (2\pi\sqrt{-1}) c^{s+1}.$$

Por lo tanto las 1-formas $(H)^s y dx$ con $s = 0, 1, \dots, \left[\frac{n-1}{2} \right]$ son elementos no nulos y linealmente independientes en $Per(n)$. Por otro lado, usando la fórmula (1.6) tenemos que $\left[\frac{n-1}{2} \right] + 1 = \dim(Per(n))$ y como la cardinalidad de \mathcal{B}_n es $\left[\frac{n-1}{2} \right] + 1$ entonces \mathcal{B}_n es una base de $Per(n)$. \square

Corolario 3.1. *Sea ω una 1-forma polinomial arbitraria de grado n entonces $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ es la cota superior para el número de ceros no triviales de la integral*

$$\int_{[\gamma_c]} \omega.$$

Demostración: De la Proposición 3.1 se tiene que

$$\int_{[\gamma_c]} \omega = (2\pi\sqrt{-1}) cP(c),$$

donde $P(c)$ es un polinomio de grado $\leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$. Como la fibra \mathcal{L}_0 de $H = xy$ es la unión de dos líneas entonces

$$\int_{\gamma_0} \omega = 0,$$

donde γ_0 es cualquier lazo en \mathcal{L}_0 . De esta forma el valor $c = 0$ es un cero trivial de la integral $\int_{[\gamma_c]} \omega$. Por lo tanto

$$\int_{[\gamma_c]} \omega$$

tiene a lo más $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ ceros no triviales. □

De lo anterior se deduce el siguiente teorema anunciado en la Introducción:

Teorema 3.1. *Sea $H : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ de grado 2 y ω una 1-forma polinomial de grado n , entonces la integral Abeliana:*

$$\begin{aligned} I(c) : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ c &\mapsto \int_{[\gamma_c]} \omega \end{aligned}$$

es una función polinomial. Además la cota superior para el número de ceros aislados no triviales de $I(c)$ es:

$$Z(1, n) = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor.$$

De la Proposición 3.1 se sigue el siguiente:

Corolario 3.2. *Sea $H = xy$ entonces cualquier 1-forma polinomial ω de grado n admite una representación de la forma*

$$\omega = dQ + qdH + \tilde{q}(H)ydx,$$

donde Q y q son polinomios de grado a lo más $n+1$ y $n-1$ respectivamente y \tilde{q} es un polinomio de grado a lo más $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$.

Corolario 3.3. Sea $H = xy$. Si ω es una 1-forma polinomial de grado n y $L_k(c)$ es la primera función de Poincaré-Pontryagin que no se anula idénticamente, entonces $L_k(c)$ tiene a lo más $\lceil \frac{1}{2}k(n-1) \rceil$ ceros no triviales.

Demostración: Del Teorema 1.2 sabemos que existen polinomios Q_1, Q_2, \dots, Q_{k-1} y q_0, q_1, \dots, q_{k-1} , con $q_0 = 1$ tal que $q_{l-1}\omega = dQ_l + q_l dH$ para cada $l = 1, \dots, k-1$ y

$$L_k(c) = \int_{[\gamma_c]} q_{k-1}\omega.$$

Aplicando el Corolario 3.2 es fácil mostrar que $\deg(q_l) \leq l(n-1)$, de donde $\deg(q_{k-1}\omega) \leq (k-1)(n-1) + n$. Así aplicando el Corolario 3.5 obtenemos que la función:

$$L_k(c) = \int_{[\gamma_c]} q_{k-1}\omega.$$

tiene a lo más $\lceil \frac{(k-1)(n-1)+n-1}{2} \rceil = \lceil \frac{k(n-1)}{2} \rceil$ ceros no triviales. \square

Aquí cabe mencionar que I. D. Iliev probó el Teorema 3.1. y los Corolarios 3.2 y 3.3 para el polinomio $H = (x^2 + y^2)/2$ (ver [Ili]) el cual fácilmente puede ser transformado en el polinomio $H = xy$ bajo un automorfismo algebraico lineal. Sin embargo, nuestra prueba es diferente, ya que para demostrar el Corolario 3.2 Iliev calcula los polinomios Q , q y \tilde{q} que satisfacen la igualdad

$$\omega = dQ + qdH + \tilde{q}(H)ydx,$$

para una 1-forma polinomial ω dada, y hallar estos polinomios Q , q y \tilde{q} no es sencillo. Sin embargo para calcular la integral Abelianas $I(c)$ no es importante conocer los polinomios Q , q y \tilde{q} sino sólo sus grados. Así al considerar el espacio de perturbaciones $Per(n)$ para $H = xy$ resulta sencillo la deducción del Teorema y los Corolarios mencionados.

3.2 Sistemas de tipo Liénard.

El estudio detallado de los ciclos límite de sistemas de tipo Liénard polinomiales fue propuesto por M. W. Hirsch y S. Smale (ver [HS] pag. 226 y [Sm] pag. 284). Varios resultados sobre existencia, inexistencia y unicidad de ciclos límite de sistemas de tipo Liénard han sido obtenidos, por ejemplo ver [Sug], [SH], [ZW], [ZWB] y las referencias allí mencionadas. A. Lins, W. de Melo y C. C. Pugh en [LMP] construyeron ejemplos de sistemas tipo Liénard polinomiales de grado $2k+1$ y $2k+2$ que tiene exactamente k ciclos límite. Sin embargo la cota superior para el número de los ciclos límite de un sistema de tipo Liénard polinomial de grado fijo es desconocida.

En esta sección estudiamos la ecuación diferencial:

$$dH - \epsilon\omega = 0, \quad (3.2)$$

donde ϵ es un parámetro complejo, $H = (x^2 + y^2)/2$ y $\omega = g(x)dx - f(x)dy$, con f y g polinomios.

La ecuación diferencial (3.2) puede ser escrita como el sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} &= y + \epsilon f(x) \\ \dot{y} &= -x + \epsilon g(x), \end{cases}$$

el cual es un sistema de tipo Liénard polinomial. Por esta razón nos referiremos a la ecuación (3.2) como el sistema de Liénard.

Lema 3.1. *Existe un conjunto genérico (abierto y denso) \mathcal{O} en el espacio de 1-formas polinomiales:*

$$\Omega_{n_1, n_2} := \{\omega = g(x)dx - f(x)dy \mid \deg(f) \leq n_1 \text{ y } \deg(g) \leq n_2\},$$

tal que la primera función de Poincaré-Pontryagin:

$$L_1(c) = \int_{[\gamma_c]} \omega,$$

del sistema de Liénard (3.2) es una función polinomial no constante en la variable c de grado $\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor + 1$.

Demostración: Supongamos que

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n_1}x^{n_1}$$

y

$$g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_{n_2}x^{n_2}.$$

Primero descomponemos la 1-forma polinomial $\omega = g(x)dx - f(x)dy$ como la suma de dQ , una 1-forma exacta, una 1-forma polinomial de tipo qdH y una 1-forma polinomial R (R no es exacta y no es del tipo qdH). Por ejemplo

$$\omega = dQ + (a_1y + \cdots + n_1a_{n_1}x^{n_1-1}y)dx,$$

donde $Q = b_0x + \cdots + \frac{b_{n_2}}{n_2+1}x^{n_2+1} - (a_0y + \cdots + a_{n_1}x^{n_1}y)$.

Por lo tanto obtenemos que

$$L_1(c) = \int_{[\gamma_c]} \omega = \sum_{i=0}^{n_1-1} (i+1)a_{i+1} \int_{[\gamma_c]} x^i y dx.$$

Ahora, usando que la integral $\int_{[\gamma_c]} x^i y dx$ no depende del representante del ciclo $[\gamma_c]$ y que la superficie \mathcal{L}_c tiene la parametrización $\varphi_c(z) = (\varphi_c^1(z), \varphi_c^2(z))$ dada por (1.5), obtenemos:

$$\int_{\gamma_c} x^i y dx = \int_{\alpha} \varphi_c^*(x^i y dx) := \int_{\alpha} (\varphi_c^1(z))^i (\varphi_c^2(z)) d(\varphi_c^1(z)),$$

donde $\alpha = \varphi_c^{-1}(\gamma_c) \subset \mathbb{C}$ es el círculo unitario alrededor del origen $0 \in \mathbb{C}$, y z es la variable de \mathbb{C} .

De (1.5) obtenemos

$$\int_{\alpha} \varphi_c^*(x^i y dx) = -\frac{\sqrt{-1}}{2(\sqrt{2})^i} \left(\sum_{\mu=0}^i \binom{i}{\mu} c^{\mu} \int_{\alpha} z^{i-2\mu-3} (z^4 - 2cz^2 + c^2) dz \right).$$

De esta manera, para calcular le integral $\int_{\gamma_c} x^i y dx$ necesitamos calcular sobre \mathbb{C} las siguientes tres integrales:

$$\int_{\alpha} z^{i-2\mu+1} dz, \quad \int_{\alpha} z^{i-2\mu-1} dz \quad \text{y} \quad \int_{\alpha} z^{i-2\mu-3} dz.$$

Por otro lado, del teorema del residuo sabemos que:

$$\int_{\alpha} z^k dz = \begin{cases} 2\pi\sqrt{-1} & \text{si } k = -1, \text{ y} \\ 0 & \text{si } k \neq -1. \end{cases}$$

Así, es claro que si i es un número impar entonces $i - 2\mu + 1$, $i - 2\mu - 1$ y $i - 2\mu - 3$ son números pares, de donde nuestras tres integrales: $\int_{\alpha} z^{i-2\mu+1} dz$, $\int_{\alpha} z^{i-2\mu-1} dz$ y $\int_{\alpha} z^{i-2\mu-3} dz$ se anulan idénticamente. Por lo tanto estas tres integrales son no nulas y por lo tanto igual a $2\pi\sqrt{-1}$ si y sólo si i es un número par, esto es $i = 2l$, y $\mu = l + 1$, $\mu = l$ y $\mu = l - 1$ respectivamente.

Por lo anterior tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_{[\gamma_c]} x^{2l} y dx &= \frac{\pi}{(\sqrt{2})^{2l}} \left[\binom{2l}{l+1} c^{l+1} - 2c \binom{2l}{l} c^l + c^2 \binom{2l}{l-1} c^{l-1} \right] \\ &= \frac{\pi}{2^l} \left(\binom{2l}{l+1} - 2 \binom{2l}{l} + \binom{2l}{l-1} \right) c^{l+1} \\ &= -\frac{\pi}{l+1} \binom{2l}{l} \frac{c^{l+1}}{2^{l-1}}. \end{aligned}$$

De donde obtenemos que la primer función de Poincaré-Pontryagin está dada por:

$$L_1(c) = \int_{[\gamma c]} \omega = -\pi c \left(\sum_{l=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} \frac{2l+1}{l+1} \binom{2l}{l} \frac{a_{2l+1}}{2^{l-1}} c^l \right). \quad (3.3)$$

Ahora, el espacio de uno formas Ω_{n_1, n_2} es isomorfo al espacio complejo $\mathbb{C}^{n_1+n_2+2}$ bajo la aplicación $\psi : \Omega_{n_1, n_2} \rightarrow \mathbb{C}^{n_1+n_2+2}$, definida como: si $\omega = (b_0 + b_1x + \dots + b_{n_2}x^{n_2})dx - (a_0 + a_1x + \dots + a_{n_1}x^{n_1})dy$ es un elemento de Ω_{n_1, n_2} entonces $\psi(\omega) = (b_0, b_1, \dots, b_{n_2}, a_0, a_1, \dots, a_{n_1})$. Sea \mathcal{O}_1 el complemento, en $\mathbb{C}^{n_1+n_2+2}$, del conjunto algebraico:

$$\{a_{2\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor + 1} = 0\},$$

así, \mathcal{O}_1 es un conjunto abierto y denso en $\mathbb{C}^{n_1+n_2+2}$. De (3.3) se sigue que $\mathcal{O} = \psi^{-1}(\mathcal{O}_1) \subset \Omega_{n_1, n_2}$ es el conjunto genérico buscado. \square

Corolario 3.4.

- Si $n_1 = \deg(f)$ es impar entonces $L_1(c) \not\equiv 0$ y tiene $\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor$ ceros no triviales (contados con multiplicidad).
- Si $n_1 = \deg(f)$ es par y $L_1(c) \not\equiv 0$ entonces $L_1(c)$ tiene a lo más $\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor$ ceros no triviales.

Lema 3.2. *Supongamos que $n_1 \geq 2$ es un número par, entonces existe un conjunto genérico \mathcal{O}' en el espacio de 1-formas polinomiales:*

$$\Omega'_{n_1, n_2} := \{\omega \in \Omega_{n_1, n_2} \mid f(x) = f(-x)\},$$

tal que la primera y segunda funciones de Poincaré-Pontryagin ($L_1(c)$ y $L_2(c)$ respectivamente), asociadas al sistema de Liénard (3.2) tienen el siguiente comportamiento:

- $L_1(c)$ es idénticamente nula.
- $L_2(c)$ es una función polinomial no constante en la variable c de grado $\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor$.

Demostración: Si $\omega = g(x)dx - f(x)dy \in \Omega'_{n_1, n_2}$ y $f(x) = \sum_{i=0}^{n_1} a_i x^i$, entonces $a_{2l+1} = 0$ para $l = 0, \dots, \lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor$. Por lo tanto, de la ecuación (3.3) es claro que $L_1(c) \equiv 0$. Entonces, el Teorema 1.2 implica que la 1-forma $\omega = g(x)dx - f(x)dy$ puede ser escrita como la suma de dQ_1 una 1-forma

exacta y una 1-forma del tipo $q_1 dH$. Para determinar Q_1 y q_1 observemos que de la hipótesis se sigue que

$$\omega = g(x)dx + (a_0\omega_0 + \cdots + a_{2s}\omega_s),$$

con $\omega_k = x^{2k}dy$ y $0 \leq k \leq s = \lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor$. Además usando la parametrización φ_c dada en (1.5) y el teorema del residuo, es fácil mostrar que $\int_{[\gamma_c]} \omega_k \equiv 0$ para cualquier k . Entonces el Teorema 1.2 implica que para cada valor de k existen dos polinomios \tilde{Q}_k y \tilde{q}_k tal que $\omega_k = d\tilde{Q}_k + \tilde{q}_k dH$.

Para calcular \tilde{Q}_k usamos el algoritmo dado en el Teorema 1.2 y seguimos el Ejemplo 1.4. Así se obtiene que:

$$\tilde{Q}_k(x, y) := \sum_{i=0}^k \beta_k^i (2H)^i y^{2(k-i)+1}, \quad \beta_k^i := \binom{k}{i} \left(\frac{(-1)^{k-i}}{2(k-i)+1} \right), \quad (3.4)$$

y

$$\tilde{q}_k(x, y) := -2k\tilde{Q}_{k-1}. \quad (3.5)$$

Esta representación de \tilde{Q}_k permitirá simplificar los cálculos que realizaremos a lo largo de la prueba.

Con todo lo anterior se ha obtenido que

$$\omega = dQ_1 + q_1 dH,$$

donde $Q_1 = \sum_{i=0}^{n_2} \frac{b_i}{i+1} x^{i+1} - \sum_{k=0}^s a_{2k} \tilde{Q}_k$ y $q_1 = -\sum_{k=1}^s a_{2k} \tilde{q}_k$.

Entonces, usando el Teorema 1.3, la segunda función de Poincaré-Pontryagin esta dada por

$$L_2(c) = \int_{[\gamma_c]} q_1 \omega = - \int_{[\gamma_c]} g(x) q_1 dx + \sum_{r=1}^s \sum_{u=0}^s a_{2r} a_{2u} \int_{[\gamma_c]} \tilde{q}_r d\tilde{Q}_u. \quad (3.6)$$

Ahora, de las fórmulas (3.4) y (3.5) se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{q}_r d\tilde{Q}_u}{-2r} &= \sum_{\nu=0}^{r-1} \sum_{\mu=0}^u \beta_{r-1}^\nu \beta_u^\mu (2H)^{\nu+\mu-1} y^{2((r-\nu)+(u-\mu))-1} (\mu xy dx + \\ &\quad + [(2H)(2(u-\mu)+1) + 2\mu y^2] dy), \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} \int_{[\gamma_c]} \frac{\tilde{q}_r d\tilde{Q}_u}{-2r} &= \sum_{\nu=0}^{r-1} \sum_{\mu=0}^u \beta_{r-1}^\nu \beta_u^\mu (2c)^{\nu+\mu-1} \left(\mu \int_{[\gamma_c]} xy^{2((r-\nu)+(u-\mu))} dx \right. \\ &\quad + 2c(2(u-\mu)+1) \int_{[\gamma_c]} y^{2((r-\nu)+(u-\mu))-1} dy + \\ &\quad \left. + 2\mu \int_{[\gamma_c]} y^{2((r-\nu)+(u-\mu))+1} dy \right). \end{aligned}$$

Notemos que $y^{2((r-\nu)+(u-\mu))-1}dy$ y $y^{2((r-\nu)+(u-\mu))+1}dy$ son 1-formas polinomiales exactas y que $xy^{2((r-\nu)+(u-\mu))}dx$ puede ser escrita como $dQ + qdH$, de hecho

$$xy^{2((r-\nu)+(u-\mu))}dx = d\left(\frac{-y^{2((r-\nu)+(u-\mu))+2}}{2((r-\nu)+(u-\mu))+2}\right) + y^{2((r-\nu)+(u-\mu))}(dH).$$

Así aplicando el Teorema 1.2 y haciendo $p = (r - \nu) + (u - \mu)$ obtenemos que

$$\int_{[\gamma_c]} xy^{2(p)}dx = 0, \quad \int_{[\gamma_c]} y^{2(p)-1}dy = 0, \quad \text{y} \quad \int_{[\gamma_c]} y^{2(p)+1}dy = 0.$$

Por lo tanto, hemos probado que para cualquier $1 \leq r \leq s$ y cualquier $0 \leq u \leq s$

$$\int_{[\gamma_c]} \tilde{q}_r d\tilde{Q}_u \equiv 0.$$

lo cual implica que la ecuación (3.6) toma la forma

$$L_2(c) = - \int_{[\gamma_c]} g(x) \left(\sum_{r=1}^s a_{2r} \tilde{q}_r \right) dx = - \sum_{j=0}^{n_2} \sum_{r=1}^s b_j a_{2r} \int_{[\gamma_c]} x^j q_r dx. \quad (3.7)$$

Siguiendo con el análisis; de la fórmula (3.5) obtenemos que

$$\int_{[\gamma_c]} x^j q_r dx = -2r \left(\sum_{\nu=0}^{r-1} \beta_{r-1}^\nu (2c)^\nu \int_{[\gamma_c]} x^j y^{2(r-\nu)-1} dx \right).$$

Ahora, transformamos la integral $\int_{[\gamma_c]} x^j y^{2(p)-1} dx$, con $p = r - \nu$, en integrales sobre \mathbb{C} , usando la parametrización φ_c , esto es

$$\int_{[\gamma_c]} x^j y^{2p-1} dx = D_j^p \sum_{\mu=0}^j \sum_{\tau=0}^{2p} \binom{j}{\mu} \binom{2p}{\tau} (-1)^\tau c^{\mu+\tau} \int_{\alpha} z^{j+2p-2\mu-2\tau-1} dz,$$

donde $D_j^p := -\frac{(\sqrt{-1})^{2p-1}}{(\sqrt{2})^{j+2p}}$. Además la integral $\int_{\alpha} z^{j+2p-2\mu-2\tau-1} dz$ es no nula e igual a $2\pi\sqrt{-1}$ si y sólo si $j = 2h$ y $\tau = p + h - \mu$.

Esto implica que para cualquier $h \in \{0, 1, \dots\}$ la integral $\int_{[\gamma_c]} x^{2h+1} y^{2p-1} dx$ se anula idénticamente y que

$$\int_{[\gamma_c]} x^{2h} y^{2p-1} dx = D_{2h}^p (2\pi\sqrt{-1}) \left(\sum_{\mu=0}^{2h} \binom{2h}{\mu} \binom{2p}{p+(h-\mu)} (-1)^{p+(h-\mu)} \right) c^{h+p}.$$

Por lo tanto

$$\int_{[\gamma_c]} x^{2h+1} \tilde{q}_r dx \equiv 0$$

y

$$\int_{[\gamma_c]} x^{2h} \tilde{q}_r dx = \frac{\pi r c^{h+r}}{2^{h+r-2}} \left(\sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{2^{2\nu} (-1)^{r-\nu-1} \binom{r-1}{\nu} A_h^{r-\nu}}{2(r-\nu)-1} \right), \quad (3.8)$$

donde

$$A_h^{r-\nu} := \sum_{\mu=0}^{2h} \binom{2h}{\mu} \binom{2(r-\nu)}{(r-\nu)+(h-\mu)} (-1)^{(h-\mu)} = 2^{r-\nu} \prod_{\mu=1}^{r-\nu} \frac{(2\mu-1)}{(h+\mu)} \binom{2h}{h}.$$

Finalmente, sustituyendo $A_h^{r-\nu}$ en la ecuación (3.8) obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{[\gamma_c]} x^{2h} \tilde{q}_r dx &= \frac{\pi r c^{h+r}}{2^{h+r-2}} \left(\sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{2^{r+\nu} (-1)^{r-\nu-1} \binom{r-1}{\nu} \prod_{\mu=1}^{r-\nu} \frac{(2\mu-1)}{(h+\mu)} \binom{2h}{h} \right) \\ &= \frac{\pi r c^{h+r}}{2^{h-2}(2h+1)} \prod_{\mu=1}^r \frac{(2h+2\mu-1)}{(h+\mu)} \binom{2h}{h}. \end{aligned}$$

Por lo tanto la segunda función de Poincaré-Pontryagin tiene la forma

$$L_2(c) = - \sum_{h=0}^{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor} b_{2h} \left(\sum_{r=1}^s \frac{\pi r a_{2r}}{2^{h-2}(2h+1)} \prod_{\mu=1}^r \frac{(2h+2\mu-1)}{(h+\mu)} \binom{2h}{h} c^{h+r} \right). \quad (3.9)$$

De donde concluimos que $L_2(c)$ es un polinomio de grado $s + \lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor = \lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor$.

Por otra parte, el espacio de 1-formas Ω'_{n_1, n_2} es isomorfo al espacio \mathbb{C}^{s+n_2+2} , con $s = \lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor$ bajo la aplicación $\psi_1 : \Omega'_{n_1, n_2} \rightarrow \mathbb{C}^{s+n_2+2}$, definida como sigue: si $\omega = (b_0 + b_1 x + \dots + b_{n_2} x^{n_2}) dx - (a_0 + a_2 x^2 + \dots + a_{2s} x^{2s}) dy$ es un elemento de Ω'_{n_1, n_2} entonces $\psi_1(\omega) = (b_0, b_1, \dots, b_{n_2}, a_0, a_2, \dots, a_{2s})$.

Sea \mathcal{O}_2 el complemento, en \mathbb{C}^{s+n_2+2} , del conjunto algebraico

$$\{a_{2s} = 0\} \cup \{b_{2\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor} = 0\},$$

de esta manera, \mathcal{O}_2 es un conjunto abierto y denso en \mathbb{C}^{s+n_2+2} . De (3.9) se sigue que $\mathcal{O}' = \psi_1^{-1}(\mathcal{O}_2)$ es el conjunto genérico buscado. \square

Corolario 3.5. *Si $n_1 = \deg(f) \geq 2$ es par y $L_1(c) \equiv 0$, entonces $L_2(c)$ tiene a lo más $\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor - 1$ ceros diferentes no triviales.*

Lema 3.3. *Si la primera y segunda funciones de Poincaré-Pontryagin $L_1(c)$ y $L_2(c)$, para el sistema de Liénard (3.2) se anulan idénticamente, entonces ningún ciclo de $dH = 0$ genera ciclo límite del sistema bajo la perturbación $-\epsilon\omega$.*

Demostración: Si $L_1(c) \equiv 0$ entonces $n_1 = \deg(f)$ es par y $f(x) = a_0 + \sum_{i=1}^s a_{2i}x^{2i}$, con $s = \lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor$. Si $L_2(c) \equiv 0$ entonces de la ecuación (3.9) es fácil ver que tenemos los siguientes casos:

Caso 1. $a_{2r} = 0$ para $1 \leq r \leq s$, entonces $\omega = dQ$, con

$$Q = (b_0x + \cdots + \frac{b_{n_2}}{n_2 + 1}x^{n_2+1}) - (a_0x).$$

Por lo tanto, para cualquier ϵ el sistema perturbado $dH - \epsilon\omega = 0$ no posee ningún ciclo límite.

Caso 2. $b_{2h} = 0$ para $0 \leq h \leq \lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor$, entonces el sistema de Liénard (3.2) es tal que $g(x) = \sum_{i=0}^r b_{2i+1}x^{2i+1}$ (i.e. $g(-x) = -g(x)$) y $f(x) = a_0 + \sum_{i=1}^s a_{2i}x^{2i}$ (i.e. $f(-x) = f(x)$). Bajo estas dos condiciones se tiene la siguiente observación:

Observación 3.1. La foliación $\mathcal{F}_{H,\omega}$ definida por la familia $dH - \epsilon\omega = 0$ es invariante bajo la transformación:

$$\begin{aligned} \mathcal{R} : \mathbb{C} \times \mathbb{C}^2 &\rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}^2 \\ (\epsilon, x, y) &\mapsto (\epsilon, -x, y). \end{aligned}$$

Más aún, las hojas $F_{(\epsilon,x,y)}$ de $\mathcal{F}_{H,\omega}$ pasando a través del plano $\{x = 0\}$ son invariantes bajo \mathcal{R} .

Demostración: Debido a que las hojas $F_{(\epsilon,x,y)}$ de $\mathcal{F}_{H,\omega}$ están contenidas en el plano $\{\epsilon\} \times \mathbb{C}^2$ basta demostrar que la foliación en $\{\epsilon\} \times \mathbb{C}^2$ es invariante bajo

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\epsilon : \mathbb{C}^2 &\rightarrow \mathbb{C}^2 \\ (x, y) &\mapsto (-x, y). \end{aligned}$$

Para esto mostraremos que para todo punto $Z_0 := (x_0, y_0)$ en \mathbb{C}^2 se cumple:

$$d\mathcal{R}_\epsilon(Z_0)(\text{Núcleo}((dH - \epsilon\omega)(Z_0))) = \text{Núcleo}((dH - \epsilon\omega)(\mathcal{R}_\epsilon(Z_0))).$$

Si $V := (v_1, v_2) \in T_{Z_0}\mathbb{C}^2$ es tal que

$$(dH - \epsilon\omega)(Z_0)(V) = (x_0 - \epsilon g(x_0))v_1 + (y_0 + \epsilon f(x_0))v_2 = 0,$$

entonces

$$(dH - \epsilon\omega)(\mathcal{R}_\epsilon(Z_0))(d\mathcal{R}_\epsilon(Z_0)(V)) = -(x_0 - \epsilon g(x_0))(-v_1) + (y_0 + \epsilon f(x_0))v_2 = 0.$$

Así $d\mathcal{R}_\epsilon(Z_0)(\text{Núcleo}((dH - \epsilon\omega)(Z_0))) \subset \text{Núcleo}((dH - \epsilon\omega)(\mathcal{R}_\epsilon(Z_0)))$.

En el otro sentido, si $W := (w_1, w_2) \in T_{\mathcal{R}_\epsilon(Z_0)}\mathbb{C}^2$ es tal que

$$W \in \text{Núcleo}((dH - \epsilon\omega)(\mathcal{R}(Z_0))),$$

entonces $(d\mathcal{R}_\epsilon(Z_0))^{-1}(W) \in \text{Núcleo}((dH - \epsilon\omega)(Z_0))$. Por lo tanto

$$d\mathcal{R}_\epsilon(Z_0)(\text{Núcleo}((dH - \epsilon\omega)(Z_0))) = \text{Núcleo}((dH - \epsilon\omega)(\mathcal{R}_\epsilon(Z_0))).$$

También es claro que el plano $\{x = 0\} \subset \mathbb{C}^3$ es invariante bajo \mathcal{R} . Por lo tanto si una hoja $F_{(\epsilon, x, y)}$ de $\mathcal{F}_{H, \omega}$ pasa a través del plano $\{x = 0\}$ es invariante bajo \mathcal{R} . \square

Por otro lado, para cualquier valor $c \in \mathbb{C} - \{0\}$ la fibra \mathcal{L}_c es una cuádrica irreducible, por lo que \mathcal{L}_c intersecta a la línea $l := \{(0, y) \in \mathbb{C}^2\}$ en dos puntos diferentes p_c y q_c , y de la simetría de \mathcal{L}_c (simetría de H) p_c y q_c son antipodas, esto es, $q_c = -p_c$. Además, usando la parametrización φ_c de \mathcal{L}_c , definida por (1.5), es fácil construir una curva real $\gamma_c \subset \mathcal{L}_c$ que pase a través de p_c y $-p_c$ y que defina un ciclo de $dH = 0$

Sea $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{L}_c$ una parametrización de γ_c , tal que $\gamma(0) = \gamma(1) = p_c$ y sea

$$X_{H, \omega} := 0 \frac{\partial}{\partial \epsilon} + \left(y + \epsilon \left(a_0 + \sum_{i=1}^s a_{2i} x^{2i} \right) \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(-x + \epsilon \left(\sum_{i=0}^r b_{2i+1} x^{2i+1} \right) \right) \frac{\partial}{\partial y},$$

el campo vectorial asociado con el sistema de Liénard (3.2). Si consideramos el plano $\mathbb{C} \times l := \{(\epsilon, 0, y) \in \mathbb{C}^3\}$ entonces

$$X_{H, \omega}|_{\mathbb{C} \times l} = 0 \frac{\partial}{\partial \epsilon} + (y + \epsilon a_0) \frac{\partial}{\partial x} + 0 \frac{\partial}{\partial y}.$$

Por lo cual es claro que el conjunto

$$(\mathbb{C} \times l)^\circ := (\mathbb{C} \times l) - \{y + \epsilon a_0 = 0\} \subset \mathbb{C}^3$$

es una sección transversal a la foliación $\mathcal{F}_{H, \omega}$ definida por (3.2). Así, existe una vecindad $D \times U \subset (\mathbb{C} \times \Delta)^\circ$ de p_c tal que la aplicación de holonomía asociada a γ :

$$\begin{aligned} f_\gamma : D \times U &\longrightarrow (\mathbb{C} \times \Delta)^\circ \\ (\epsilon, c) &\longmapsto (\epsilon, \ell_\gamma(\epsilon, c)) \end{aligned}$$

esta bien definida (ver [CN] pág. 63).

Recordando que $\gamma_c \cap (\mathbb{C} \times \Delta)^o$ son dos puntos distintos, entonces de la continuidad de las soluciones de (3.2) con respecto a condiciones iniciales obtenemos que cada curva $\gamma_{(\epsilon, c)}$ que una el punto (ϵ, c) con $(\epsilon, l_\gamma(\epsilon, c))$ interseca a la transversal $(\mathbb{C} \times \Delta)^o$ en al menos dos puntos diferentes. La Observación 14 implica que $\gamma_{(\epsilon, c)}$ es una curva cerrada, esto es, es imposible tener la situación mostrada en la Figura 3.1. De ahí que $l_\gamma(\epsilon, c)$ sea la función identidad. Por lo tanto la función de desplazamiento L_γ asociada con γ se anula idénticamente, así que γ_c no genera ningún ciclo límite. \square

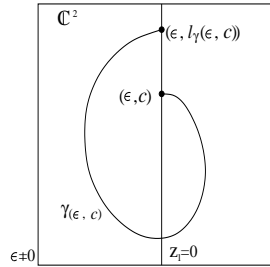


Figura 3.1: Situación imposible.

Proposición 3.2. *Consideremos el sistema de Liénard (3.2). Supongamos que f y g son polinomios de grados n_1 y n_2 respectivamente y tales que $\max\{n_1, n_2\} \geq 2$ entonces el número $N(n_1, n_2)$ de ciclos de $dH = 0$ que generan ciclos límite del sistema de Liénard (3.2) bajo la perturbación $-\epsilon\omega$ tiene el siguiente comportamiento:*

$$N(n_1, n_2) \leq \begin{cases} \lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor & \text{si } n_1 \text{ es impar, y} \\ \lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor - 1 & \text{si } n_1 \text{ es par.} \end{cases}$$

Demostración:

- Si n_1 es impar entonces aplicando el Corolario 3.4 a) y el criterio de Poincaré-Pontryagin (Teorema 1.1) se obtiene el resultado.
- Si n_1 es par entonces puede pasar que:
 1. Si $L_1(c) \neq 0$, entonces el resultado se sigue aplicando el Corolario 3.4 b) y el criterio de Poincaré-Pontryagin.

2. Si $L_1(c) \equiv 0$ y $L_2(c) \not\equiv 0$, entonces aplicando el Corolario 3.5 y el criterio de Poincaré-Pontryagin se obtiene el resultado.
3. Si $L_1(c) \equiv 0$ y $L_2(c) \equiv 0$, entonces el Lema 3.3 completa la prueba.

□

Como consecuencia de lo anterior se tiene el siguiente teorema anunciado en la Introducción:

Teorema 3.2. Si $H = (x^2 + y^2)/2$ y ω es una 1-forma polinomial de grado n de la forma: $\omega = g(x)dx - f(x)dy$ entonces

$$\mathcal{H}(1, n) = 2 \left[\frac{n}{2} \right] - 1.$$

Ejemplo 3.1. Consideremos la ecuación de van der Pol en \mathbb{C}^2 :

$$d \left(\frac{1}{2}(x^2 + y^2) \right) - \epsilon(0dx - (x^3 - x)dy) = 0.$$

De la fórmula (3.3) tenemos que

$$L_1(c) = \int_{[\gamma_c]} \omega = -2\pi c \left(\frac{3}{2}c - 1 \right).$$

Entonces la ecuación tiene un ciclo límite que proviene del ciclo $[\gamma_c]$, con $c = \frac{2}{3}$.

Ejemplo 3.2. Consideremos el oscilador armónico en el caso real, esto es, $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definido por $(x, y) \mapsto (x^2 + y^2)/2$. Consideremos la 1-forma: $\omega = ((9/2) - (13/2)x^2 + x^4)dx - (x^2)dy$. Para el sistema $dH - \epsilon\omega = 0$, se tiene que

1. De la fórmula (3.3)

$$L_1(c) \equiv 0.$$

2. De la fórmula (3.9)

$$L_2(c) = 2\pi c(9 - (13/2)c + c^2) = 2\pi c(c - 2)(c - 9/2).$$

Así que, para ϵ pequeño, el sistema perturbado $dH - \epsilon\omega = 0$ tiene dos ciclos límite que provienen de los ciclos γ_2 y $\gamma_{9/2}$ que son los círculos alrededor del origen de radio 2 y 3 respectivamente (ver Figura 3.2).

Un ejemplo aún más interesante es el siguiente:

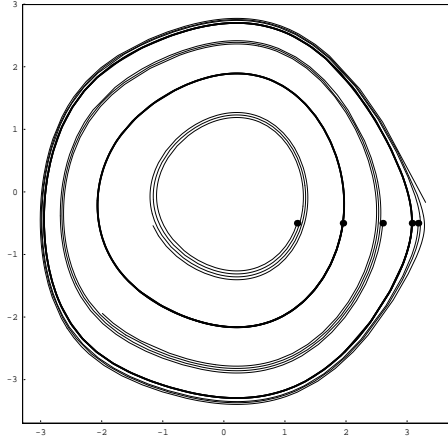


Figura 3.2: Retrato fase de $dH - \epsilon\omega = 0$, con $\epsilon = 0.5$.

Ejemplo 3.3. Sea $H = (x^2 + y^2)/2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Consideremos la 1-forma polinomial de grado 4:

$$\omega = ((26) - (79/10)x^2 + (1/3)x^4)dx - ((22/10)x^2 + (1/7)x^4)dy.$$

Para el sistema de Liénard $dH - \epsilon\omega = 0$, se tiene que

1. De la fórmula (3.3)

$$L_1(c) \equiv 0.$$

2. De la fórmula (3.9)

$$L_2(c) = -\frac{c\pi}{3} \left(\frac{-3432}{5} + \frac{41649}{175}c - \frac{944}{35}c^2 + c^3 \right).$$

De la gráfica de $L_2(c)$ mostrada en la Figura 3.3 a) es claro que $L_2(c)$ tiene 3 ceros no triviales. Por lo tanto, para ϵ pequeño, el sistema perturbado $dH - \epsilon\omega = 0$ tiene tres ciclos límite que provienen de tres ciclos distintos de $dH = 0$ (ver Figura 3.3 b)).

3.3 La curva de Ilyashenko.

Para el caso en que $H = xy$ la curva de Ilyashenko asociada a $dH = 0$ es la curva algebraica:

$$\begin{aligned} \mathbb{I} : \mathbb{C} - \{(0,0)\} &\rightarrow \mathbb{C}^{N+1} \\ c &\mapsto -2\pi(c, c^2, \dots, c^{N+1}). \end{aligned}$$

La prueba se sigue de la Proposición 3.1.

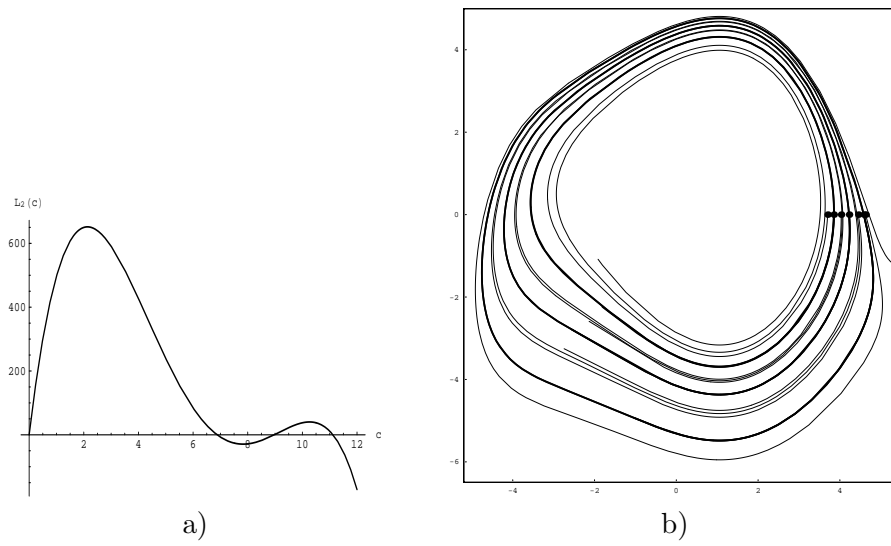


Figura 3.3: a) Gráfica de $L_2(c)$. En b) Retrato fase de $dH - \epsilon\omega = 0$, con $\epsilon = 0.66$.

Capítulo 4

Integrales Abelianas univaluadas.

Recordemos que, después de considerar polinomios de tipo \mathbb{C}^* , el siguiente grado de dificultad para el problema de integrales Abelianas, es considerar polinomios H con monodromía global trivial (ver Sección 2.1) y de tipo (g, k) con $k > 2$, es decir, $\dim(H_1(\mathcal{L}_c, \mathbb{Z})) = 2g + k - 1 > 1$.

Una consecuencia inmediata, al considerar este tipo de polinomios, es la siguiente: si ω es una 1-forma y b_1, \dots, b_q son los valores singulares de H entonces la aplicación:

$$\begin{aligned} \mathbb{C} - \{b_1, \dots, b_q\} &\rightarrow \mathbb{C}^r \\ c &\mapsto \left(\int_{[\gamma_1^0]} \omega, \dots, \int_{[\gamma_r^0]} \omega \right) \end{aligned}$$

es univaluada, donde $\gamma_c^0, \dots, \gamma_c^r$, con $r = 2g + k - 1$, son los generadores de $H_1(\mathcal{L}_c, \mathbb{Z})$.

4.1 Polinomios con monodromía global trivial.

La clasificación algebraica de polinomios con monodromía global trivial se basa en los siguientes resultados:

Teorema 4.1. [NN1] *Un polinomio primitivo $P : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ tiene monodromía global trivial si y sólo si P es racional (i.e. de tipo $(0, k)$) y de tipo simple.*

Teorema 4.2. [NN2] *Usando automorfismos algebraicos adecuados de \mathbb{C}^2 y de \mathbb{C} , cualquier polinomio de tipo simple puede ser transformado en alguna de las siguientes formas:*

$$f_1 = y \left(\prod_{l=1}^{r-1} (\beta_l - x)^{a_l} \right) - h(x), \quad (r \geq 1),$$

$$f_2 = x^{p_1} s^p \left(\prod_{l=1}^{r-1} (\beta_l - x^{q_1} s^q)^{a_l} \right), \quad (r \geq 1),$$

$$f_3 = x^{q_1} s^q + x^{p_1} s^p \left(\prod_{l=1}^{r-1} (\beta_l - x^{q_1} s^q)^{a_l} \right), \quad (r \geq 2),$$

donde

- a_1, \dots, a_{r-1} son enteros positivos,
- $\beta_1, \dots, \beta_{r-1}$ son números complejos distintos y no nulos,
- $h(x)$ es un polinomio de grado $< \sum_{l=1}^{r-1} a_l$,
- $0 \leq q_1 < q$, $0 \leq p_1 < p$ y $(pq_1 - qp_1) = \pm 1$ y
- $s := x^k y - P(x)$, $k \geq 1$ y $P(x)$ es un polinomio de grado $\leq k - 1$.

Ahora, notemos que:

i) Si consideramos $r = 1$ para f_1 , entonces f_1 es de tipo \mathbb{C} , de donde $\dim(H_1(\mathcal{L}_c, \mathbb{Z})) = 0$ por lo que carece de sentido para las versiones infinitesimal débil y fuerte de la segunda parte del problema 16 de Hilbert. Además, si consideramos $r = 2$ para f_1 entonces f_1 es de tipo \mathbb{C}^* , caso ya estudiado en el Capítulo 2.

ii) Si consideramos $r = 1$ para f_2 , entonces f_2 también es de tipo \mathbb{C}^* .

De lo anterior se sigue el siguiente:

Lema 4.1. *Cualquier polinomio f con monodromía global trivial y tal que $\dim(H_1(\mathcal{L}_c, \mathbb{Z})) > 1$ puede ser transformado, usando automorfismos algebraicos adecuados de \mathbb{C}^2 y \mathbb{C} , en un polinomio H , el cual pertenece a sólo una de las siguientes familias:*

$$\mathcal{S}_1 := \left\{ y \prod_{l=1}^{r-1} (\beta_l - x)^{a_l} - h(x) \mid r \geq 3 \right\},$$

$$\mathcal{S}_2 := \left\{ x^{p_1} s^p \prod_{l=1}^{r-1} (\beta_l - x^{q_1} s^q)^{a_l} \mid r \geq 2 \right\},$$

$$\mathcal{S}_3 := \left\{ x^{q_1} s^q + x^{p_1} s^p \prod_{l=1}^{r-1} (\beta_l - x^{q_1} s^q)^{a_l} \mid r \geq 2 \right\},$$

con a_1, \dots, a_{r-1} , $\beta_1, \dots, \beta_{r-1}$, $h(x)$, p_1, q_1, p, q y s como en el Teorema 4.2.

En la siguiente sección estudiaremos la forma topológica de la fibra genérica \mathcal{L}_c de los polinomios $H \in \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3$, con el fin de entender el primer grupo de homología $H_1(\mathcal{L}_c, \mathbb{Z})$ de \mathcal{L}_c y con esto realizar el estudio de las integrales Abelianas respectivas.

4.2 Topología de las fibras e integrales Abelianas.

La forma topológica de la fibra genérica de los polinomios $H \in \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3$, la describimos en los siguientes tres casos.

Caso 1. $H \in \mathcal{S}_1$.

Por hipótesis

$$H = y \prod_{l=1}^{r-1} (\beta_l - x)^{a_l} - h(x), \quad (4.1)$$

con $r \geq 3$ y el grado de $h(x)$ menor que $\sum_{l=1}^{r-1} a_l$.

Sean c_1, \dots, c_t los diferentes valores de $-h(\beta_l)$ con $l = 1, \dots, r$ ($1 \leq t \leq r$). Para cada $i \in \{1, \dots, t\}$ definimos B_i como el conjunto:

$$B_i := \{\beta_l \mid l \in \{1, \dots, r\} \text{ y } h(\beta_l) = c_i\}.$$

Proposición 4.1. *Para cualquier $c \in \mathbb{C} - \{c_1, \dots, c_t\}$ la fibra \mathcal{L}_c de H es una curva irreducible.*

Demostración: Para cada $c \in \mathbb{C}$ el polinomio $H - c$ es lineal en y , entonces puede ser factorizado solamente en la forma:

$$H - c = y \prod_{l=1}^{r-1} (\beta_l - x)^{a_l} - (h(x) + c) = p(x) (yg(x) - h_c(x)), \quad (4.2)$$

donde $p(x)$, $g(x)$ y $h_c(x)$ son polinomios.

La ecuación (4.2) es posible si y sólo si $h(x) + c$ y $\prod_{l=1}^r (\beta_l - x)^{a_l}$ tienen al menos una raíz en común.

Las raíces de $\prod_{l=1}^r (\beta_l - x)^{a_l}$ son β_1, \dots, β_r y si β_i fuera raíz de $h(x) + c_a$ y $h(x) + c_b$ entonces

$$0 = h(\beta_i) + c_a = h(\beta_i) + c_b + (c_a - c_b) = (c_a - c_b).$$

De donde se obtiene que para cada β_l con $l \in \{1, \dots, r\}$ existe una y sólo una $c_l \in \mathbb{C}$ tal que β_l es raíz de $h(x) + c_l$.

Como β_l es raíz del polinomio $h(x) - h(\beta_l)$ entonces para cada valor $c \in \mathbb{C} - \{-h(\beta_1), \dots, -h(\beta_r)\} = \mathbb{C} - \{c_1, \dots, c_t\}$ el polinomio $H - c$ es irreducible, por lo tanto \mathcal{L}_c es irreducible. \square

Proposición 4.2. *Para cualquier $c \in \mathbb{C} - \{c_1, \dots, c_t\}$ la fibra \mathcal{L}_c de H es biholomorfa a $\mathbb{C} - \{\beta_1, \dots, \beta_r\}$.*

Demostración: De la Proposición 4.1 sabemos que para cualquier $c \in \mathbb{C} - \{c_1, \dots, c_t\}$ la fibra \mathcal{L}_c es irreducible. Además es muy fácil ver que la aplicación

$$\begin{aligned} \varphi_c : \mathbb{C} - \{\beta_1, \dots, \beta_r\} &\rightarrow \mathcal{L}_c \\ z &\mapsto \left(z, \frac{c+h(z)}{\prod_{l=1}^r (\beta_l - z)^{a_l}} \right) \end{aligned} \quad (4.3)$$

es un biholomorfismo. \square

Sea

$$d := \frac{\min\{\|\beta_i - \beta_j\| \mid i, j \in \{1, \dots, r-1\}, i \neq j\}}{2},$$

y para cada $l \in \{1, \dots, r-1\}$ definimos

$$\alpha_l := \{de^{2\pi\sqrt{-1}\theta} + \beta_l \mid \theta \in [0, 1]\} \subset \mathbb{C}.$$

De esta forma, α_l es un círculo de radio d y centro en β_l y tal que β_l es el único punto de $\{\beta_1, \dots, \beta_{r-1}\}$ que está contenido en el interior de α_l . Consideramos para cada $l \in \{1, \dots, r-1\}$ el lazo $\gamma_c^l = \varphi_c(\alpha_l) \subset \mathcal{L}_c$, donde φ_c está dada por (4.3). Así el conjunto de ciclos $\{\gamma_c^l \mid l = 1, \dots, r-1\}$ generan el primer grupo de homología $H_1(\mathcal{L}_c, \mathbb{Z})$ de la fibra \mathcal{L}_c de H .

Lema 4.2. *Sea ω una 1-forma polinomial de grado n y $H \in \mathcal{S}_1$. Entonces para cada $\tau \in \{1, \dots, r-1\}$ la integral Abelianas:*

$$\begin{aligned} I(c) : \mathbb{C} - \{c_1, \dots, c_t\} &\rightarrow \mathbb{C} \\ c &\mapsto \int_{[\gamma_c^\tau]} \omega \end{aligned}$$

es un polinomio de grado $\leq n$.

Demostración: De la Observación 1.11 es suficiente calcular las integrales:

$$\int_{[\gamma_c^i]} \eta,$$

donde $\eta = x^i y^{j-i} dx$, con $i \in \{0, 1, \dots, j-1\}$ y $1 \leq j \leq n$.

Usando la parametrización (4.3) se obtiene

$$\int_{[\gamma_c^i]} \eta = \int_{\alpha_\tau} \varphi_c^*(\eta). \quad (4.4)$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_{[\gamma_c^i]} \eta &= \int_{\alpha_\tau} z^i \left(\frac{(c+h(z))}{\prod_{l=1}^{r-1} (\beta_l - z)^{a_l}} \right)^{j-i} dz \\ &= \sum_{\mu=0}^{j-i} \binom{j-i}{\mu} \left(\int_{\alpha_\tau} \frac{z^i (h(z))^{j-i-\mu}}{\prod_{l=1}^{r-1} (\beta_l - z)^{(j-i)a_l}} dz \right) c^\mu. \end{aligned}$$

De donde obtenemos que la integral Abeliana $\int_{[\gamma_c^i]} \eta$ es un polinomio de grado $\leq j-i \leq j \leq n$, la cual extiende a todo \mathbb{C} . \square

Ejemplo 4.1. Sea $H = y(1+x)(1-x)^{m-1} \in \mathcal{S}_1$ un polinomio de grado $m+1$. Para cada $c \in \mathbb{C} - \{0\}$ la fibra \mathcal{L}_c de H esta parametrizada por:

$$\begin{aligned} \varphi_c : \mathbb{C} - \{-1, 1\} &\rightarrow \mathcal{L}_c \\ z &\mapsto \left(z, \frac{c}{(1+z)(1-z)^{m-1}} \right). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Además si consideramos los lazos $\alpha_1 = \{1 + e^{2\pi\sqrt{-1}\theta} \mid \theta \in [0, 1]\}$ y $\alpha_2 = \{-1 + e^{2\pi\sqrt{-1}\theta} \mid \theta \in [0, 1]\}$, entonces $\gamma_c^1 := \varphi_c(\alpha_1)$ y $\gamma_c^2 := \varphi_c(\alpha_2)$ son los generadores de la homología de la fibra \mathcal{L}_c .

Sea ω la 1-forma polinomial $\omega = (y+y^2+\dots+y^n)dx$ de grado n . Entonces usando la parametrización (4.5) obtenemos que:

$$\int_{[\gamma_c^1]} \omega = \sum_{l=1}^n c^l \int_{\alpha_1} \frac{dz}{(1+z)^l (1-z)^{l(m-1)}} = \sum_{l=1}^n a_l c^l$$

y

$$\int_{[\gamma_c^2]} \omega = \sum_{l=1}^n c^l \int_{\alpha_2} \frac{dz}{(1+z)^l (1-z)^{l(m-1)}} = \sum_{l=1}^n b_l c^l,$$

donde

$$\frac{a_l}{2\pi\sqrt{-1}} = \text{Res} \left(\frac{1}{(1+z)^l(1-z)^{l(m-1)}}, 1 \right) = \frac{-2\pi\sqrt{-1}}{2^{l+l(m-1)-1}} \binom{l+l(m-1)-2}{l(m-1)-1} \neq 0.$$

y

$$\frac{b_l}{2\pi\sqrt{-1}} = \text{Res} \left(\frac{1}{(1+z)^l(1-z)^{l(m-1)}}, -1 \right) = \frac{2\pi\sqrt{-1}}{2^{l+l(m-1)-1}} \binom{l+l(m-1)-2}{l-1} \neq 0.$$

Por lo tanto para $\tau = 1, 2$ la integral Abeliana

$$I_\tau(c) : \mathbb{C} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \\ c \mapsto \int_{[\gamma_c^\tau]} \omega$$

es una función polinomial de grado exactamente n .

Caso 2. $H \in \mathcal{S}_2$.

Recordemos que

$$\mathcal{S}_2 := \left\{ x^{p_1} s^p \prod_{l=1}^{r-1} (\beta_l - x^{q_1} s^q)^{a_l} \mid r \geq 2 \right\}.$$

Para encontrar una parametrización de la fibra generica de H , recordamos la forma de encontrar una parametrización de la curva:

$$\mathbb{S}^1 := \{x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0\} \subset \mathbb{R}^2.$$

La idea es muy sencilla, Sea $P := (0, 1) \in \mathbb{S}^1$ y para cada $r \in \mathbb{R}$ consideremos la línea recta l_r que pasa por los puntos P y $(r, 0)$ y le llamamos la curva auxiliar l_r .

La curva auxiliar l_r interseca a la curva \mathbb{S}^1 en un sólo punto distinto de P , esto induce la función:

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1 \\ r \mapsto l_r \cap \mathbb{S}^1.$$

Mas aún, es fácil ver que;

$$\varphi(r) = \left(\frac{2}{r + \frac{1}{r}}, 1 - \frac{2}{r^2 + 1} \right),$$

la cual extiende a $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Con esta construcción se ha obtenido una parametrización racional de \mathbb{S}^1 .

En nuestro caso las curvas auxiliares a considerar serán:

$$l_z := \{x^{q_1} s^q = z\} \subset \mathbb{C}^2.$$

Proposición 4.3. *Sea H un polinomio en la familia \mathcal{S}_2 . La fibra genérica de H es biholomorfa a $\mathbb{C} - \{0, \beta_1, \dots, \beta_{r-1}\}$.*

Demostración: Observemos que la fibra \mathcal{L}_0 es disconexa, ya que es la unión disjunta de las curvas:

$$\left\{ \prod_{l=1}^{r-1} (\beta_l - x^{q_1} s^q)^{a_l} = 0 \right\}$$

y

$$\{x^{p_1} s^p = 0\}.$$

Consideramos el polinomio:

$$\begin{aligned} G: \mathbb{C}^2 - \{\mathcal{L}_0\} &\rightarrow \mathbb{C} - \{0, \beta_1, \dots, \beta_{r-1}\} \\ (x, y) &\mapsto x^{q_1} s^q. \end{aligned}$$

Así, cada fibra de G es una curva auxiliar. Ahora, sea $c \in \mathbb{C}$ distinto de cero, entonces un punto $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ satisface que $H(x, y) = c$ y

$$G(x, y) = x^{q_1} s^q = z, \quad (4.6)$$

con $z \in \mathbb{C} - \{0, \beta_1, \dots, \beta_{r-1}\}$ si y sólo si

$$x^{p_1} s^p = \frac{c}{\prod_{l=1}^{r-1} (\beta_l - z)^{a_l}}. \quad (4.7)$$

Elevando a las potencias p y p_1 la ecuación (4.6) obtenemos:

$$x^{pq_1} s^{pq} = z^p, \quad \text{y} \quad x^{p_1 q_1} s^{q p_1} = z^{p_1}. \quad (4.8)$$

También elevamos a las potencias q y q_1 la ecuación (4.7) para obtener:

$$x^{qp_1} s^{pq} = \frac{c^q}{\prod_{l=1}^{r-1} (\beta_l - z)^{q a_l}}, \quad \text{y} \quad x^{p_1 q_1} s^{p q_1} = \frac{c^{q_1}}{\prod_{l=1}^{r-1} (\beta_l - z)^{q_1 a_l}}. \quad (4.9)$$

De (4.7) es claro que x y s deben ser no nulos, así que tomando el cociente de (4.8) y (4.9) se obtiene

$$x^{pq_1 - qp_1} = \frac{z^p \prod_{l=1}^{r-1} (\beta_l - z)^{q a_l}}{c^q} \quad \text{y} \quad s^{p q_1 - q p_1} = \frac{c^{q_1}}{z^{p_1} \prod_{l=1}^{r-1} (\beta_l - z)^{q_1 a_l}}. \quad (4.10)$$

Recordemos que $p q_1 - q p_1 = \pm 1$. Por lo cual analizaremos dos casos:

Primer caso. Supongamos que $p q_1 - q p_1 = 1$ entonces de (4.10) se obtiene

$$x = \psi_1(z) := \frac{z^p \prod_{l=1}^{r-1} (\beta_l - z)^{q a_l}}{c^q} \quad (4.11)$$

y

$$S = \frac{c^{q_1}}{z^{p_1} \prod_{l=1}^{r-1} (\beta_l - z)^{q_1 a_l}}.$$

Usando que $S := x^k y - P(x)$ entonces podemos despejar y , así:

$$y = \psi_2(z) := \frac{c^{q_1 k} \left(c^{q_1} + z^{p_1} \prod_{l=1}^{r-1} (\beta_l - z)^{q_1 a_l} P(\psi_1(z)) \right)}{z^{pk+p_1} \prod_{l=1}^{r-1} (\beta_l - z)^{(q_1 k + q_1) a_l}}. \quad (4.12)$$

De (4.11) y (4.12) se tiene que la aplicación $\varphi_c : \mathbb{C} - \{0, \beta_1, \dots, \beta_{r-1}\} \rightarrow \mathcal{L}_c$ definida como:

$$\varphi_c(z) := (\psi_1(z), \psi_2(z)), \quad (4.13)$$

es una función holomorfa con inversa holomorfa $G_c := G|_{\mathcal{L}_c}$. Por lo tanto para cada $c \neq 0$ la fibra \mathcal{L}_c de $H \in \mathcal{S}_2$ es biholomorfa a $\mathbb{C} - \{0, \beta_1, \dots, \beta_{r-1}\}$.

Segundo Caso. Supongamos que $p q_1 - q p_1 = -1$ entonces de (4.10) se sigue que

$$x = \psi_1(z) := \frac{c^q}{z^p \prod_{l=1}^{r-1} (\beta_l - z)^{q a_l}} \quad (4.14)$$

y

$$S = \frac{z^{p_1} \prod_{l=1}^{r-1} (\beta_l - z)^{q_1 a_l}}{c^{q_1}}.$$

Como $S := x^k y - P(x)$ obtenemos

$$y = \psi_2(z) := \frac{z^{p_1} \prod_{l=1}^{r-1} (\beta_l - z)^{q_1 a_l} + c^{q_1} P(\psi_1(z))}{c^{q_1 k + q_1} z^{-pk} \prod_{l=1}^{r-1} (\beta_l - z)^{-q_1 k a_l}}. \quad (4.15)$$

De (4.14) y (4.15) la aplicación $\varphi_c : \mathbb{C} - \{0, \beta_1, \dots, \beta_{r-1}\} \rightarrow \mathcal{L}_c$ definida como

$$\varphi_c(z) := (\psi_1(z), \psi_2(z)), \quad (4.16)$$

es una función holomorfa con inversa $G_c := G|_{\mathcal{L}_c}$. Por lo tanto para cada $c \neq 0$ la fibra \mathcal{L}_c de $H \in \mathcal{S}_2$ es biholomorfa a $\mathbb{C} - \{0, \beta_1, \dots, \beta_{r-1}\}$. \square

Definamos $\beta_0 = 0$ y sea

$$d := \frac{\min\{\|\beta_i - \beta_j\| \mid i, j \in \{0, 1, \dots, r-1\}, i \neq j\}}{2}.$$

Para cada $l \in \{0, 1, \dots, r-1\}$ definimos

$$\alpha_l := \{d e^{2\pi\sqrt{-1}\theta} + \beta_l \mid \theta \in [0, 1]\} \subset \mathbb{C}.$$

Por lo tanto:

- Sea $H \in \mathcal{S}_2$ y $pq_1 - qp_1 = 1$. Consideramos para cada $l \in \{0, 1, \dots, r-1\}$ el lazo $\gamma_c^l = \varphi_c(\alpha_l) \subset \mathcal{L}_c$, donde φ_c esta dada por (4.13). Así el conjunto de ciclos $\{[\gamma_c^l] \mid l = 1, \dots, r-1\}$ generan el primer grupo de homología $H_1(\mathcal{L}_c, \mathbb{Z})$ de la fibra \mathcal{L}_c de H .
- Sea $H \in \mathcal{S}_2$ y $pq_1 - qp_1 = -1$. Para cada $l \in \{0, 1, \dots, r-1\}$ consideramos el lazo $\gamma_c^l = \varphi_c(\alpha_l) \subset \mathcal{L}_c$, donde φ_c esta dada por (4.16). Así el conjunto de ciclos $\{[\gamma_c^l] \mid l = 1, \dots, r-1\}$ generan el primer grupo de homología $H_1(\mathcal{L}_c, \mathbb{Z})$ de la fibra \mathcal{L}_c de H .

Lema 4.3. *Sea ω una 1-forma polinomial de grado n y $H \in \mathcal{S}_2$. Entonces para cada $\tau \in \{1, \dots, r-1\}$ la integral Abeliana:*

$$I(c) : \mathbb{C} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$c \mapsto \int_{[\gamma_c^\tau]} \omega$$

es un polinomio de grado $\leq q(kn - 1) + q_1n$.

Demostración: De la Observación 1.11 es suficiente calcular las integrales:

$$\int_{[\gamma_c^\tau]} \eta,$$

donde $\eta = x^i y^{j-i} dx$, con $i \in \{0, 1, \dots, j-1\}$ y $1 \leq j \leq n$.

La demostración la realizaremos en dos pasos.

Paso 1. ($H \in \mathcal{S}_2$ y $pq_1 - qp_1 = 1$)

Usando la parametrización φ_c , de la fibra genérica \mathcal{L}_c , dada por (4.13) es fácil ver que

$$\varphi_c^*(\eta) = \frac{z^{p_1(j-i)} R(z, c) c^{q(kj - (k+1)i - 1)} \left(\frac{p}{z} - q \sum_{\sigma=0}^{r-1} \frac{1}{(\beta_\sigma - z)} \right)}{z^{-p(kj - (k+1)i - 1)} \prod_{l=1}^{r-1} (\beta_l - z)^{(q(jk - (k+1)i - 1) + q_1(j-i))a_l}} dz \quad (4.17)$$

donde

$$R(z, c) := \left(c^{q_1} + P(\psi_1(z)) z^{p_1} \prod_{l=1}^{r-1} (\beta_l - z)^{a_l q_1} \right)^{j-i}$$

$$= \sum_{\mu=0}^{j-i} \binom{j-i}{\mu} \left(z^{p_1(j-i-\mu)} \prod_{l=1}^{r-1} (\beta_l - z)^{a_l q_1(j-i-\mu)} \right) (P(\psi_1(z)))^{j-i-\mu} c^{q_1 \mu},$$

y $\psi_1(z)$ esta dada por (4.11).

Supongamos que $P(x) := p_0 + \dots + p_s x^s$, con $s \leq k-1$ y $p_s \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned} (P(\psi_1(z)))^{j-i-\mu} &= \left(\sum_{\nu=0}^s p_\nu z^{p\nu} \prod_{l=1}^{r-1} (\beta_l - z)^{a_l q \nu} c^{-q\nu} \right)^{j-i-\mu} \\ &= \sum \frac{(j-i-\mu)!}{n_0! \dots n_s!} p_0^{n_0} \dots p_s^{n_s} z^{pN_s} \prod_{l=1}^{r-1} (\beta_l - z)^{a_l q N_s} c^{-qN_s}, \end{aligned}$$

donde la suma es tomada sobre todas las $(s+1)$ -adas de enteros no negativos (n_0, \dots, n_s) tal que $n_0 + \dots + n_s = j - i - \mu$ y

$$N_s := n_1 + \dots + s n_s. \quad (4.18)$$

Por lo tanto

$$R(z, c) = \sum_{\mu=0}^{j-i} \sum A_{n_0 \dots n_s}^\mu \frac{z^{pN_s + p_1(j-i-\mu)} c^{-qN_s + q_1\mu}}{\prod_{l=1}^{r-1} (\beta_l - z)^{(qN_s + q_1(j-i-\mu))a_l}}, \quad (4.19)$$

donde

$$A_{n_0 \dots n_s}^\mu := \frac{(j-i)!}{n_0! \dots n_s! \mu!} p_0^{n_0} \dots p_s^{n_s}. \quad (4.20)$$

Sustituyendo (4.19) en (4.17) obtenemos

$$\varphi_c^*(\eta) = \sum_{\mu=0}^{j-i} \sum A_{n_0 \dots n_s}^\mu \frac{z^{p\tilde{N}_s - p_1\mu} c^{-q\tilde{N}_s + q_1\mu}}{\prod_{l=1}^{r-1} (\beta_l - z)^{(-q\tilde{N}_s + q_1\mu)a_l}} \left(\frac{p}{z} - q \sum_{\sigma=0}^{r-1} \frac{1}{(\beta_\sigma - z)} \right) dz.$$

Finalmente, usando que $\int_{[\gamma_c^*]} \eta = \int_{\alpha_\tau} \varphi_c^*(\eta)$ se tiene

$$\int_{[\gamma_c^*]} \eta = \sum_{\mu=0}^{j-i} \sum A_{n_0 \dots n_s}^\mu \left(I_{n_0 \dots n_s}^{\mu, \tau, 1} + I_{n_0 \dots n_s}^{\mu, \tau, 2} \right) c^{-q\tilde{N}_s + q_1\mu}$$

donde

$$\tilde{N}_s := N_s - (kj - (k+1)i - 1), \quad (4.21)$$

$$I_{n_0 \dots n_s}^{\mu, \tau, 1} := p \int_{\alpha_\tau} q(z) dz,$$

$$I_{n_0 \dots n_s}^{\mu, \tau, 2} := -q \sum_{\sigma=0}^{r-1} a_\sigma \int_{\alpha_\tau} q_\sigma(z) dz,$$

$$q(z) := z^{p\tilde{N}_s - p_1\mu - 1} \prod_{l=1}^{r-1} (\beta_l - z)^{(q\tilde{N}_s - q_1\mu)a_l}$$

y

$$q_\sigma(z) := \frac{zq(z)}{\beta_\sigma - z}.$$

Para conocer la forma de la integral Abeliana $\int_{[\gamma_c^\tau]} \eta$ consideramos dos situaciones:

i) Supongamos $-q\tilde{N}_s + q_1\mu < 0$.

Entonces

$$q\tilde{N}_s - q_1\mu > 0, \quad (4.22)$$

además como $p > 0$ también

$$pq\tilde{N}_s - pq_1\mu > 0. \quad (4.23)$$

Ahora, supongamos que $p\tilde{N}_s - p_1\mu \leq 0$, entonces usando que $q > 0$ se obtiene

$$-pq\tilde{N}_s + qp_1\mu \geq 0. \quad (4.24)$$

Sumando (4.23) y (4.24) obtenemos que $-(pq_1 - qp_1)\mu \geq 0$ lo cual es una contradicción ya que $\mu \geq 0$ y por hipótesis $(pq_1 - qp_1) = 1$. Por lo tanto

$$p\tilde{N}_s - p_1\mu - 1 \geq 0. \quad (4.25)$$

Así, de (4.22) y (4.25) es claro que $q(z)$ y $q_\sigma(z)$ son funciones polinomiales, de esta forma, para cada $\tau \in \{0, 1, \dots, r-1\}$ se obtiene que

$$I_{n_0 \dots n_s}^{\mu, \tau, 1} = I_{n_0 \dots n_s}^{\mu, \tau, 2} = 0.$$

ii) Supongamos $-q\tilde{N}_s + q_1\mu \geq 0$.

Entonces para cada $\tau \in \{0, 1, \dots, r-1\}$

$$I_{n_0 \dots n_s}^{\mu, \tau, 1} \quad \text{y} \quad I_{n_0 \dots n_s}^{\mu, \tau, 2}$$

son números complejos quizás no nulos.

De *i)* y *ii)* obtenemos que la integral $\int_{[\gamma_c^\tau]} \eta$ es un polinomio $P_{ij}^\tau(c)$ en la variable c .

Para conocer el grado de $P_{ij}^\tau(c)$ observamos que:

$$-q\tilde{N}_s + q_1\mu = -q(N_s - (kj - (k+1)i - 1)) + q_1\mu = q(kj - (k+1)i - 1) - qN_s + q_1\mu.$$

Como $i \geq 0$, $N_s \geq 0$ y $0 \leq \mu \leq j - i$, entonces el valor máximo de $q(kj - (k+1)i - 1) - qN_s + q_1\mu$ es cuando $i = 0$, $N_s = 0$ y $\mu = j$, así que $P_{ij}^\tau(c)$ tiene grado $\leq q(kj - 1) + q_1j \leq q(kn - 1) + q_1n$.

Paso 2. ($H \in \mathcal{S}_2$ y $qp_1 - qp_1 = -1$).

Usando la parametrización φ_c , de la fibra genérica \mathcal{L}_c , dada en (4.16) se obtiene

$$\varphi_c^*(\eta) = -\frac{R(z, c)c^{-q_1(j-i)-q(kj-(k+1)i-1)}z^{p(kj-(k+1)i-1)}}{\prod_{l=1}^{r-1}(\beta_l - z)^{-q(jk-(k+1)i-1)a_l}} \left(\frac{p}{z} - q \sum_{\sigma=0}^{r-1} \frac{1}{(\beta_\sigma - z)} \right) dz$$

donde

$$R(z, c) := \left(z^{p_1} \prod_{l=1}^{r-1} (\beta_l - z)^{a_l q_1} + P(\psi_1(z)) c^{q_1} \right)^{j-i},$$

y $\psi_1(z)$ esta dada por (4.14).

Supongamos que $P(x) := p_0 + \dots + p_s x^s$, con $s \leq k-1$ y $p_s \neq 0$, entonces

$$(P(\psi_1(z)))^{j-i-\mu} = \sum \frac{(j-i-\mu)!}{n_0! \dots n_s!} p_0^{n_0} \dots p_s^{n_s} z^{-pN_s} \prod_{l=1}^{r-1} (\beta_l - z)^{-(qN_s)a_l} c^{qN_s},$$

donde la suma es tomada sobre todas las $(s+1)$ -adas de enteros no negativos (n_0, \dots, n_s) tal que $n_0 + \dots + n_s = j-i-\mu$ y N_s es como en (4.18). Así

$$R(z, c) = \sum_{\mu=0}^{j-i} \sum A_{n_0 \dots n_s}^\mu \frac{z^{p_1 \mu - p N_s} c^{q N_s + q_1(j-i-\mu)}}{\prod_{l=1}^{r-1} (\beta_l - z)^{(q N_s - q_1 \mu) a_l}},$$

donde $A_{n_0 \dots n_s}^\mu$ es como en (4.20). Por lo cual se obtiene

$$\varphi_c^*(\eta) = -\sum_{\mu=0}^{j-i} \sum A_{n_0 \dots n_s}^\mu \frac{z^{p_1 \mu - p \tilde{N}_s} c^{q \tilde{N}_s - q_1 \mu}}{\prod_{l=1}^{r-1} (\beta_l - z)^{(q \tilde{N}_s - q_1 \mu) a_l}} \left(\frac{p}{z} - q \sum_{\sigma=0}^{r-1} \frac{1}{(\beta_\sigma - z)} \right) dz,$$

donde \tilde{N}_s es como en (4.21). Finalmente obtenemos

$$\int_{[\gamma_{\tilde{c}}]} \eta = -\sum_{\mu=0}^{j-i} \sum A_{n_0 \dots n_s}^\mu \left(I_{n_0 \dots n_s}^{\mu, \tau, 1} + I_{n_0 \dots n_s}^{\mu, \tau, 2} \right) c^{q \tilde{N}_s - q_1 \mu}$$

donde

$$I_{n_0 \dots n_s}^{\mu, \tau, 1} := p \int_{\alpha_\tau} q(z) dz,$$

$$I_{n_0 \dots n_s}^{\mu, \tau, 2} := -q \sum_{\sigma=0}^{r-1} a_\sigma \int_{\alpha_\tau} q_\sigma(z) dz,$$

$$q(z) := z^{p_1\mu - p\tilde{N}_s - 1} \prod_{l=1}^{r-1} (\beta_l - z)^{(q_1\mu - q\tilde{N}_s)a_l}$$

y

$$q_\sigma(z) := \frac{zq(z)}{\beta_\sigma - z}.$$

Al igual que en el paso anterior, consideramos dos casos.

i) Supongamos $q\tilde{N}_s - q_1\mu < 0$.

Entonces

$$q_1\mu - q\tilde{N}_s > 0 \tag{4.26}$$

y

$$pq_1\mu - pq\tilde{N}_s > 0, \tag{4.27}$$

ya que $p > 0$.

Ahora, supongamos que $p_1\mu - p\tilde{N}_s \leq 0$, entonces usando $q > 0$ obtenemos

$$-qp_1\mu + pq\tilde{N}_s \geq 0. \tag{4.28}$$

Sumando (4.27) y (4.28) obtenemos que $(pq_1 - qp_1)\mu \geq 0$, lo cual es una contradicción ya que $\mu \geq 0$ por hipótesis $(pq_1 - qp_1) = -1$. Por lo tanto

$$p_1\mu - p\tilde{N}_s - 1 \geq 0. \tag{4.29}$$

De (4.26) y (4.29) se sigue que $q(z)$ y $q_\sigma(z)$ son funciones polinomiales, esto implica que para cada $\tau \in \{0, 1, \dots, r-1\}$

$$I_{n_0 \dots n_s}^{\mu, \tau, 1} = I_{n_0 \dots n_s}^{\mu, \tau, 2} = 0.$$

ii) Supongamos $q\tilde{N}_s - q_1\mu \geq 0$.

Entonces para cada $\tau \in \{0, 1, \dots, r-1\}$

$$I_{n_0 \dots n_s}^{\mu, \tau, 1} \quad \text{y} \quad I_{n_0 \dots n_s}^{\mu, \tau, 2}$$

son números complejos quizás no nulos.

Así de *i)* y *ii)* se obtiene que $\int_{[\gamma_\tau]} \eta$ es un polinomio en la variable c de grado $\leq q(j-1) \leq q(n-1)$ que extiende a todo \mathbb{C} .

Además es claro que $\leq q(n-1) \leq q(kn-1) + q_1n$.

□

Ejemplo 4.2. Sea $H = x^k y(1 - x^{qk+1} y^q) \in \mathcal{S}_2$ (usamos $p_1 = 0$, $p = 1$, $q_1 = 1$, $s = x^k y$, $r = 2$ y $\beta_1 = 1$). Para cada $c \in \mathbb{C} - \{0\}$ la fibra \mathcal{L}_c de H esta parametrizada por:

$$\begin{aligned} \varphi_c : \mathbb{C} - \{0, 1\} &\rightarrow \mathcal{L}_c \\ z &\mapsto \left(\frac{z(1-z)^q}{c^q}, \frac{c^{qk+1}}{z^k(1-z)^{qk+1}} \right). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Además si consideramos los lazos $\alpha_1 = \{\frac{1}{2}e^{2\pi\sqrt{-1}\theta} \mid \theta \in [0, 1]\}$ y $\alpha_2 = \{1 + \frac{1}{2}e^{2\pi\sqrt{-1}\theta} \mid \theta \in [0, 1]\}$, entonces $\gamma_c^1 := \varphi_c(\alpha_1)$ y $\gamma_c^2 := \varphi_c(\alpha_2)$ son los generadores de la homología de la fibra \mathcal{L}_c .

Sea ω la 1-forma polinomial $\omega = (y + y^2 + \dots + y^n)dx$ de grado n . Entonces usando la parametrización (4.30) obtenemos que:

$$\begin{aligned} \int_{[\gamma_c^1]} \omega &= \sum_{l=1}^n \int_{\alpha_1} \frac{c^{l(qk-1)}}{(z)^{ln}(1-z)^{l(qk+1)}} \frac{(1-z)^q - qz(1-z)^{q-1}}{c^q} dz \\ &= \sum_{l=1}^n c^{q(lk-1)+l} \left(\int_{\alpha_1} \frac{dz}{z^{kl}(1-z)^{q(lk-1)+l}} - q \int_{\alpha_1} \frac{dz}{z^{kl-1}(1-z)^{q(lk-1)+l+1}} \right) \\ &= 2\pi\sqrt{-1} \sum_{l=1}^n c^{q(lk-1)+l} \left(\text{Res} \left(\frac{1}{z^{kl}(1-z)^{q(lk-1)+l}}, 0 \right) - q \text{Res} \left(\frac{1}{z^{kl-1}(1-z)^{q(lk-1)+l+1}}, 0 \right) \right) \\ &= 2\pi\sqrt{-1} \sum_{l=1}^n a_l c^{q(lk-1)+l} \end{aligned}$$

y

$$\int_{[\gamma_c^2]} \omega = - \int_{[\gamma_c^1]} \omega.$$

donde

$$a_l = \binom{q(kl-1) + l + kl - 2}{q(kl-1) + l - 1} - q \binom{q(kl-1) + l + kl - 1}{q(kl-1) + l} \neq 0.$$

Por lo tanto para $\tau = 1, 2$ la integral Abeliana

$$\begin{aligned} I_\tau(c) : \mathbb{C} - \{0\} &\rightarrow \mathbb{C} \\ c &\mapsto \int_{[\gamma_c^\tau]} \omega \end{aligned}$$

es una función polinomial de grado exactamente $q(kn-1) + n$.

Caso 3. $H \in \mathcal{S}_3$.

La familia \mathcal{S}_3 esta dada por:

$$\mathcal{S}_3 := \left\{ x^{q_1} s^q + x^{p_1} s^p \prod_{l=1}^{r-1} (\beta_l - x^{q_1} s^q)^{a_l} \mid r \geq 2 \right\}.$$

Proposición 4.4. *Sea H un elemento de \mathcal{S}_3 . La fibra genérica \mathcal{L}_c de H es biholomorfa a $\mathbb{C} - \{0, \beta_1, \dots, \beta_{r-1}, c\}$.*

Demostración: La fibra \mathcal{L}_0 es disconexa, ya que las curvas

$$\left\{ \prod_{l=1}^{r-1} (\beta_l - xS^q)^{a_l} = 0 \right\}$$

y

$$\{x = 0\}.$$

son componentes disjuntas de \mathcal{L}_0 . Además es claro que las fibras $\mathcal{L}_{\beta_1}, \dots, \mathcal{L}_{\beta_{r-1}}$ son reducibles.

Siguiendo la misma idea que en la Proposición 4.3, consideramos la función:

$$\begin{aligned} G : \mathbb{C}^2 - \{\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_{\beta_1}, \dots, \mathcal{L}_{\beta_{r-1}}\} &\rightarrow \mathbb{C} - \{0, \beta_1, \dots, \beta_{r-1}\} \\ (x, y) &\mapsto x^{q_1} S^q. \end{aligned}$$

Entonces, un punto $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ satisface que $H(x, y) = c$ y

$$G(x, y) = x^{q_1} S^q = z, \quad \text{con } z \in \mathbb{C} - \{0, \beta_1, \dots, \beta_{r-1}, c\} \quad (4.31)$$

si y sólo si

$$x^{p_1} S^p = \frac{c - z}{\prod_{l=1}^{r-1} (\beta_l - z)^{a_l}}. \quad (4.32)$$

De (4.31) obtenemos que

$$x^{pq_1} S^{pq} = z^p, \quad \text{y} \quad x^{p_1 q_1} S^{q p_1} = z^{p_1}. \quad (4.33)$$

De (4.32) se obtiene

$$x^{q p_1} S^{p q} = \frac{(c - z)^q}{\prod_{l=1}^{r-1} (\beta_l - z)^{q a_l}}, \quad \text{y} \quad x^{p_1 q_1} S^{p q_1} = \frac{(c - z)^{q_1}}{\prod_{l=1}^{r-1} (\beta_l - z)^{q_1 a_l}}. \quad (4.34)$$

De (4.33) y (4.34) obtenemos

$$x^{p q_1 - q p_1} = \frac{z^p \prod_{l=1}^{r-1} (\beta_l - z)^{q a_l}}{(c - z)^q} \quad \text{and} \quad S^{p q_1 - q p_1} = \frac{(c - z)^{q_1}}{z^{p_1} \prod_{l=1}^{r-1} (\beta_l - z)^{q_1 a_l}} \quad (4.35)$$

ya que x y S son no cero.

Tenemos dos casos:

i) Supongamos que $pq_1 - qp_1 = 1$ entonces de (4.35) se sigue que

$$x = \psi_1(z) := \frac{z^p \prod_{l=1}^{r-1} (\beta_l - z)^{qa_l}}{(c - z)^q}, \quad (4.36)$$

$$s = \frac{(c - z)^{q_1}}{z^{p_1} \prod_{l=1}^{r-1} (\beta_l - z)^{q_1 a_l}}$$

y usando $s := x^k y - P(x)$ se obtiene

$$y = \psi_2(z) := \frac{(c - z)^{qk} \left((c - z)^{q_1} + z^{p_1} \prod_{l=1}^{r-1} (\beta_l - z)^{q_1 a_l} P(\psi_1(z)) \right)}{z^{pk+p_1} \prod_{l=1}^{r-1} (\beta_l - z)^{(qk+q_1)a_l}} \quad (4.37)$$

De (4.36) y (4.37) se tiene que la aplicación $\varphi_c : \mathbb{C} - \{0, \beta_1, \dots, \beta_{r-1}, c\} \rightarrow \mathcal{L}_c$ definida como

$$\varphi_c(z) := (\psi_1(z), \psi_2(z)), \quad (4.38)$$

es una función holomorfa con inversa holomorfa $G_c := G|_{\mathcal{L}_c}$.

Por lo tanto para $c \in \mathbb{C} - \{0, \beta_1, \dots, \beta_{r-1}\}$ la fibra \mathcal{L}_c de $H \in \mathcal{S}_3$ es biholomorfa a $\mathbb{C} - \{0, \beta_1, \dots, \beta_{r-1}, c\}$.

ii) Supongamos $pq_1 - qp_1 = -1$, entonces de (4.35) se sigue que

$$x = \psi_1(z) := \frac{(c - z)^q}{z^p \prod_{l=1}^{r-1} (\beta_l - z)^{qa_l}} \quad (4.39)$$

y

$$s = \frac{z^{p_1} \prod_{l=1}^{r-1} (\beta_l - z)^{q_1 a_l}}{c^{q_1}}.$$

Como $s := x^k y - P(x)$, despejamos y :

$$y = \psi_2(z) := \frac{z^{p_1} \prod_{l=1}^{r-1} (\beta_l - z)^{q_1 a_l} + (c - z)^{q_1} P(\psi_1(z))}{(c - z)^{qk+q_1} z^{-p} \prod_{l=1}^{r-1} (\beta_l - z)^{-qka_l}} \quad (4.40)$$

De (4.39) y (4.40) obtenemos que la aplicación $\varphi_c : \mathbb{C} - \{0, \beta_1, \dots, \beta_{r-1}\} \rightarrow \mathcal{L}_c$ definida como

$$\varphi_c(z) := (\psi_1(z), \psi_2(z)), \quad (4.41)$$

es una función holomorfa con inversa $G_c := G|_{\mathcal{L}_c}$.

Por lo tanto para $c \in \mathbb{C} - \{0, \beta_1, \dots, \beta_{r-1}\}$ la fibra \mathcal{L}_c de $H \in \mathcal{S}_2$ es biholomorfa a $\mathbb{C} - \{0, \beta_1, \dots, \beta_{r-1}, c\}$. \square

Para describir el primer grupo de homología de la fibra generica \mathcal{L}_c de $H \in \mathcal{S}_3$ definimos $\beta_0 = 0$ y consideramos

$$d := \frac{\min\{\|\beta_i - \beta_j\| \mid i, j \in \{0, 1, \dots, r-1\}, i \neq j\}}{2}.$$

Para cada $l \in \{0, 1, \dots, r-1\}$ definimos el círculo α_l de radio d y centro en β_l , así β_l es el único punto de $\{\beta_0, \dots, \beta_{r-1}\}$ que esta contenido en el interior de α_l .

Sea Δ_l el disco cerrado acotado por α_l . Consideramos $c \in \mathbb{C} - \cup_{l=0}^{r-1} \Delta_l$ y definimos $\beta_r := c$, entonces el círculo

$$\alpha_r := \{de^{2\pi\sqrt{-1}\theta} + \beta_r \mid \theta \in [0, 1]\} \subset \mathbb{C},$$

no contiene en su interior ningún punto de $\{\beta_0, \dots, \beta_{r-1}\}$.

- Sea $H \in \mathcal{S}_3$ y $pq_1 - qp_1 = 1$. Para cada $l \in \{0, 1, \dots, r\}$ consideramos el lazo $\gamma_c^l = \varphi_c(\alpha_l) \subset \mathcal{L}_c$, donde φ_c esta dada por (4.38). Así el conjunto de ciclos $\{[\gamma_c^l] \mid l = 0, \dots, r\}$ generan el primer grupo de homología $H_1(\mathcal{L}_c, \mathbb{Z})$ de la fibra \mathcal{L}_c de H .
- Sea $H \in \mathcal{S}_3$ y $pq_1 - qp_1 = -1$. Para cada $l \in \{0, 1, \dots, r\}$ consideramos el lazo $\gamma_c^l = \varphi_c(\alpha_l) \subset \mathcal{L}_c$, donde φ_c esta dada por (4.41). Así el conjunto de ciclos $\{[\gamma_c^l] \mid l = 0, \dots, r\}$ generan el primer grupo de homología $H_1(\mathcal{L}_c, \mathbb{Z})$ de la fibra \mathcal{L}_c de H .

Lema 4.4. *Sea ω una 1-forma polinomial de grado n y $H \in \mathcal{S}_3$. Entonces para cada $\tau \in \{0, \dots, r\}$ la integral Abelianas:*

$$\begin{aligned} I(c) : \mathbb{C} - \cup_{l=0}^{r-1} \Delta_l &\rightarrow \mathbb{C} \\ c &\mapsto \int_{[\gamma_c^\tau]} \omega \end{aligned}$$

es una función polinomial en la variable c cuyo grado es menor o igual a

$$(kn - 1) \left(q \left(\sum_{l=1}^{r-1} a_l - 1 \right) + p \right) + n \left(q_1 \left(\sum_{l=1}^{r-1} a_l - 1 \right) + p_1 \right)$$

o

$$\max\{p(kn - 1) + np_1, q(kn - 1) + nq_1\}.$$

Demostración: De la Observación 1.11 basta considerar las integrales:

$$\int_{[\gamma_c^\tau]} \eta,$$

donde $\eta = x^i y^{j-i} dx$, con $i \in \{0, 1, \dots, j-1\}$ y $1 \leq j \leq n$.

La demostración la partimos en dos pasos.

Paso 1. ($H \in \mathcal{S}_3$ y $pq_1 - qp_1 = 1$).

De la parametrización φ_c dada por (4.38), es fácil ver que

$$\varphi_c^*(\eta) = -\frac{R(z, c)(c-z)^{q(kj-(k+1)i-1)-1} \left(q + (c-z) \left(\frac{p}{z} - \sum_{\sigma=0}^{r-1} \frac{a_\sigma}{(\beta_\sigma - z)} \right) \right)}{z^{p(kj-(k+1)i-1)-p_1(j-i)} \prod_{l=1}^{r-1} (\beta_l - z)^{(q(kj-(k+1)i-1)+q_1(j-i))a_l}} dz$$

donde

$$R(z, c) := \left((c-z)^{q_1} + P(\psi_1(z)) z^{p_1} \prod_{l=1}^{r-1} (\beta_l - z)^{a_l q_1} \right)^{j-i}$$

y $\psi_1(z)$ esta dada por (4.36).

Siguiendo las ideas de la demostración de Lema 3, Paso 1, es fácil mostrar que

$$\varphi_c^*(\eta) = \sum_{\mu=0}^{j-i} \sum_{n_0 \dots n_s} A_{n_0 \dots n_s}^\mu \frac{c^{-(q\tilde{N}_s - q_1\mu)-1} \left(q + (c-z) \left(\frac{p}{z} - q \sum_{\sigma=0}^{r-1} \frac{1}{(\beta_\sigma - z)} \right) \right)}{z^{-(p\tilde{N}_s - p_1\mu)} \prod_{l=1}^{r-1} (\beta_l - z)^{-(q\tilde{N}_s - q_1\mu)a_l}} dz,$$

donde $A_{n_0 \dots n_s}^\mu$ es como en (4.20) y \tilde{N}_s como en (4.21). Por lo tanto

$$\int_{[\gamma_c^*]} \eta = \sum_{\mu=0}^{j-i} \sum_{n_0 \dots n_s} A_{n_0 \dots n_s}^\mu \left(I_{n_0 \dots n_s}^{\mu, \tau, 1} + I_{n_0 \dots n_s}^{\mu, \tau, 2} + I_{n_0 \dots n_s}^{\mu, \tau, 3} \right),$$

donde

$$I_{n_0 \dots n_s}^{\mu, \tau, 1} := q \int_{\alpha_\tau} q(z)(c-z)^{-(q\tilde{N}_s - q_1\mu)-1} dz,$$

$$I_{n_0 \dots n_s}^{\mu, \tau, 2} := p \int_{\alpha_\tau} \frac{q(z)(c-z)^{-(q\tilde{N}_s - q_1\mu)}}{z} dz,$$

$$I_{n_0 \dots n_s}^{\mu, \tau, 3} := -q \sum_{\sigma=1}^{r-1} a_\sigma \int_{\alpha_\tau} q_\sigma(z)(c-z)^{-(q\tilde{N}_s - q_1\mu)} dz,$$

$$q(z) := \frac{z^{p\tilde{N}_s - p_1\mu}}{\prod_{l=1}^{r-1} (\beta_l - z)^{-(q\tilde{N}_s - q_1\mu)a_l}},$$

y

$$q_\sigma(z) := \frac{z^{p\tilde{N}_s - p_1\mu}}{\prod_{l=1}^{r-1} (\beta_l - z)^{-(q\tilde{N}_s - q_1\mu)a_l} (\beta_\sigma - z)}.$$

Vamos a considerar tres posibilidades:

- a) Supongamos $-(q\tilde{N}_s - q_1\mu) < 0$ entonces del inciso *i*) del Paso 1 del Lema 4.3 se obtiene que $p\tilde{N}_s - p_1\mu - 1 \geq 0$, de donde $q(z)$, $q(z)/z$ y $q_\sigma(z)$ son polinomios de grado

$$\tilde{N}_s \left(q \sum_{l=1}^{r-1} a_l + p \right) - \mu \left(q_1 \sum_{l=1}^{r-1} a_l + p_1 \right),$$

$$\tilde{N}_s \left(q \sum_{l=1}^{r-1} a_l + p \right) - \mu \left(q_1 \sum_{l=1}^{r-1} a_l + p_1 \right) - 1$$

y

$$\tilde{N}_s \left(q \sum_{l=1}^{r-1} a_l + p \right) - \mu \left(q_1 \sum_{l=1}^{r-1} a_l + p_1 \right) - 1$$

respectivamente. Así que para cada $\tau \in \{0, 1, \dots, r-1\}$ se cumple:

$$I_{n_0 \dots n_s}^{\mu, \tau, 1} = I_{n_0 \dots n_s}^{\mu, \tau, 2} = I_{n_0 \dots n_s}^{\mu, \tau, 3} = 0,$$

y para $\tau = r$ se tiene:

$$I_{n_0 \dots n_s}^{\mu, r, 1} = \frac{p(2\pi\sqrt{-1})}{(q\tilde{N}_s - q_1\mu)!} \left(\frac{d^{(q\tilde{N}_s - q_1\mu)}}{dz^{(q\tilde{N}_s - q_1\mu)}} (q(z)) \right) \Big|_{z=c},$$

$$I_{n_0 \dots n_s}^{\mu, r, 2} = \frac{p(2\pi\sqrt{-1})}{(q\tilde{N}_s - q_1\mu - 1)!} \left(\frac{d^{(q\tilde{N}_s - q_1\mu - 1)}}{dz^{(q\tilde{N}_s - q_1\mu - 1)}} \left(\frac{q(z)}{z} \right) \right) \Big|_{z=c},$$

y

$$I_{n_0 \dots n_s}^{\mu, r, 3} = \frac{p(2\pi\sqrt{-1})}{(q\tilde{N}_s - q_1\mu - 1)!} \left(\frac{d^{(q\tilde{N}_s - q_1\mu - 1)}}{dz^{(q\tilde{N}_s - q_1\mu - 1)}} (q_\sigma(z)) \right) \Big|_{z=c},$$

de donde es claro que $I_{n_0 \dots n_s}^{\mu, r, 1}$, $I_{n_0 \dots n_s}^{\mu, r, 2}$ y $I_{n_0 \dots n_s}^{\mu, r, 3}$ son polinomios en c del mismo grado:

$$\tilde{N}_s \left(q \left(\sum_{l=1}^{r-1} a_l - 1 \right) + p \right) - \mu \left(q_1 \left(\sum_{l=1}^{r-1} a_l - 1 \right) + p_1 \right).$$

- b) Supongamos $-(q\tilde{N}_s - q_1\mu) = 0$ entonces también $p\tilde{N}_s - p_1\mu - 1 \geq 0$ y las integrales $I_{n_0\dots n_s}^{\mu,\tau,1}$, $I_{n_0\dots n_s}^{\mu,\tau,2}$ y $I_{n_0\dots n_s}^{\mu,\tau,3}$ se reducen a:

$$I_{n_0\dots n_s}^{\mu,\tau,1} := q \int_{\alpha_\tau} \frac{z^{p\tilde{N}_s - p_1\mu}}{c - z} dz,$$

$$I_{n_0\dots n_s}^{\mu,\tau,2} := p \int_{\alpha_\tau} z^{p\tilde{N}_s - p_1\mu - 1} dz,$$

y

$$I_{n_0\dots n_s}^{\mu,\tau,3} := -q \sum_{\sigma=1}^{r-1} a_\sigma \int_{\alpha_\tau} \frac{z^{p\tilde{N}_s - p_1\mu}}{\beta_\sigma - z} dz.$$

Por lo tanto para $\tau \in \{0, 1, \dots, r-1\}$:

$$I_{n_0\dots n_s}^{\mu,\tau,1} = I_{n_0\dots n_s}^{\mu,\tau,2} = 0 \quad \text{y} \quad I_{n_0\dots n_s}^{\mu,\tau,3} = cte.$$

Para $\tau = r$ se tiene que $I_{n_0\dots n_s}^{\mu,r,1}$ es un polinomio de grado $p\tilde{N}_s - p_1\mu$, y $I_{n_0\dots n_s}^{\mu,r,2} = I_{n_0\dots n_s}^{\mu,r,3} = 0$.

- c) Supongamos $-(q\tilde{N}_s - q_1\mu) > 0$ entonces

$$I_{n_0\dots n_s}^{\mu,r,1} = I_{n_0\dots n_s}^{\mu,r,2} = I_{n_0\dots n_s}^{\mu,r,3} = 0,$$

y para cada $\tau \in \{0, 1, \dots, r-1\}$ las integrales:

$$I_{n_0\dots n_s}^{\mu,\tau,1}, I_{n_0\dots n_s}^{\mu,\tau,2} \quad \text{y} \quad I_{n_0\dots n_s}^{\mu,\tau,3}$$

son polinomios en la variable c de grado $-(q\tilde{N}_s - q_1\mu) - 1$, $-(q\tilde{N}_s - q_1\mu)$ y $-(q\tilde{N}_s - q_1\mu)$ respectivamente.

Por lo tanto, de a), b) y c) se sigue que:

- Para cualquier $\tau \in \{0, 1, \dots, r-1\}$

$$I_{n_0\dots n_s}^{\mu,\tau,1}, I_{n_0\dots n_s}^{\mu,\tau,2} \quad \text{y} \quad I_{n_0\dots n_s}^{\mu,\tau,3}$$

son polinomios en la variable c de grado menor o igual a $q(kj - 1) + q_1j - 1$, $q(kj - 1) + q_1j$, y $q(kj - 1) + q_1j$ respectivamente.

- Para $\tau = r$ las integrales

$$I_{n_0 \dots n_s}^{\mu, r, 1}, I_{n_0 \dots n_s}^{\mu, r, 2}, \text{ y } I_{n_0 \dots n_s}^{\mu, r, 3}$$

son polinomios en la variable c de grado $\leq (j-1)(q(\sum_{l=1}^{r-1} a_l - 1) + p)$.

Paso 2. ($H \in \mathcal{S}_3$ y $pq_1 - qp_1 = -1$).

Usando la parametrización φ_c de la fibra genérica de H definida en (4.41) y siguiendo las mismas ideas del Paso 1, es fácil mostrar que

$$\varphi_c^*(\eta) = - \sum_{\mu=0}^{j-i} \sum A_{n_0 \dots n_s}^{\mu} \frac{(c-z)^{q\tilde{N}_s - q_1\mu - 1} \left(q + (c-z) \left(\frac{p}{z} - q \sum_{\sigma=0}^{r-1} \frac{1}{(\beta_{\sigma} - z)} \right) \right)}{z^{p\tilde{N}_s - p_1\mu} \prod_{l=1}^{r-1} (\beta_l - z)^{(q\tilde{N}_s - q_1\mu)a_l}} dz,$$

donde $A_{n_0 \dots n_s}^{\mu}$ es como en (4.20) y \tilde{N}_s es como en (4.21). Por lo tanto

$$\int_{[\gamma_{\tau}(c)]} \eta = \sum_{\mu=0}^{j-i} \sum A_{n_0 \dots n_s}^{\mu} \left(I_{n_0 \dots n_s}^{\mu, \tau, 1} + I_{n_0 \dots n_s}^{\mu, \tau, 2} + I_{n_0 \dots n_s}^{\mu, \tau, 3} \right),$$

donde

$$I_{n_0 \dots n_s}^{\mu, \tau, 1} := q \int_{\gamma_{\tau}} q(z)(c-z)^{q\tilde{N}_s - q_1\mu - 1} dz,$$

$$I_{n_0 \dots n_s}^{\mu, \tau, 2} := p \int_{\gamma_{\tau}} \frac{q(z)}{z} (c-z)^{q\tilde{N}_s - q_1\mu} dz,$$

$$I_{n_0 \dots n_s}^{\mu, \tau, 3} := -q \sum_{\sigma=1}^{r-1} a_{\sigma} \int_{\gamma_{\tau}} q_{\sigma}(z)(c-z)^{q\tilde{N}_s - q_1\mu} dz,$$

$$q(z) := \frac{z^{-p\tilde{N}_s + p_1\mu}}{\prod_{l=1}^{r-1} (\beta_l - z)^{-(q\tilde{N}_s - q_1\mu)a_l}},$$

y

$$q_{\sigma}(z) := \frac{z^{-p\tilde{N}_s + p_1\mu}}{\prod_{l=1}^{r-1} (\beta_l - z)^{(q\tilde{N}_s - q_1\mu)a_l} (\beta_{\sigma} - z)}.$$

En este paso también consideraremos dos posibilidades:

- a) Supongamos que $q\tilde{N}_s - q_1\mu < 0$ entonces $-p\tilde{N}_s + p_1\mu > 0$. Por lo cual $q(z)$, $\frac{q(z)}{z}$ y $q_\sigma(z)$ son polinomios de grado

$$-\tilde{N}_s \left(q \sum_{l=1}^{r-1} a_l + p \right) + \mu \left(q_1 \sum_{l=1}^{r-1} a_l + p_1 \right),$$

$$-\tilde{N}_s \left(q \sum_{l=1}^{r-1} a_l + p \right) + \mu \left(q_1 \sum_{l=1}^{r-1} a_l + p_1 \right) - 1$$

y

$$-\tilde{N}_s \left(q \sum_{l=1}^{r-1} a_l + p \right) + \mu \left(q_1 \sum_{l=1}^{r-1} a_l + p_1 \right) - 1$$

respectivamente.

De esto, obtenemos que para cualquier $\tau \in \{0, 1, \dots, r-1\}$ se cumple que

$$I_{n_0 \dots n_s}^{\mu, \tau, 1} = I_{n_0 \dots n_s}^{\mu, \tau, 2} = I_{n_0 \dots n_s}^{\mu, \tau, 3} = 0.$$

Para $\tau = r$ se tiene que

$$I_{n_0 \dots n_s}^{\mu, r, 1} = \frac{p(2\pi\sqrt{-1})}{(q_1\mu - q\tilde{N}_s)!} \left(\frac{d^{(q_1\mu - q\tilde{N}_s)}}{dz^{(q_1\mu - q\tilde{N}_s)}} (q(z)) \right) \Big|_{z=c}$$

$$I_{n_0 \dots n_s}^{\mu, r, 2} = \frac{p(2\pi\sqrt{-1})}{(q_1\mu - q\tilde{N}_s - 1)!} \left(\frac{d^{(q_1\mu - q\tilde{N}_s - 1)}}{dz^{(q_1\mu - q\tilde{N}_s - 1)}} \left(\frac{q(z)}{z} \right) \right) \Big|_{z=c}$$

$$I_{n_0 \dots n_s}^{\mu, r, 3} = \frac{p(2\pi\sqrt{-1})}{(q_1\mu - q\tilde{N}_s - 1)!} \left(\frac{d^{(q_1\mu - q\tilde{N}_s - 1)}}{dz^{(q_1\mu - q\tilde{N}_s - 1)}} (q_\sigma(z)) \right) \Big|_{z=c}$$

de donde es claro que $I_{n_0 \dots n_s}^{\mu, r, 1}$, $I_{n_0 \dots n_s}^{\mu, r, 2}$ y $I_{n_0 \dots n_s}^{\mu, r, 3}$ son polinomios del mismo grado, a saber

$$-\tilde{N}_s \left(q \left(\sum_{l=1}^{r-1} a_l - 1 \right) + p \right) + \mu \left(q_1 \left(\sum_{l=1}^{r-1} a_l - 1 \right) + p_1 \right).$$

- b) Supongamos que $q\tilde{N}_s - q_1\mu = 0$ entonces también se cumple que $-p\tilde{N}_s + p_1\mu > 0$. Por lo cual es fácil ver que para $\tau \in \{0, 1, \dots, r-1\}$ se cumple:

$$I_{n_0\dots n_s}^{\mu,\tau,1} = I_{n_0\dots n_s}^{\mu,\tau,2} = 0 \quad \text{y} \quad I_{n_0\dots n_s}^{\mu,r,1} = cte.$$

Para $\tau = r$ se verifica claramente que $I_{n_0\dots n_s}^{\mu,r,1}$ es un polinomio de grado $-p\tilde{N}_s + p_1\mu$, y las integrales $I_{n_0\dots n_s}^{\mu,r,2}$ y $I_{n_0\dots n_s}^{\mu,r,3}$ son nulas.

- c) Supongamos que $q\tilde{N}_s - q_1\mu > 0$ entonces

$$I_{n_0\dots n_s}^{\mu,r,1} = I_{n_0\dots n_s}^{\mu,r,2} = I_{n_0\dots n_s}^{\mu,r,3} = 0$$

y para cada $\tau \in \{0, 1, \dots, r-1\}$ las integrales:

$$I_{n_0\dots n_s}^{\mu,\tau,1}, I_{n_0\dots n_s}^{\mu,\tau,2} \quad \text{y} \quad I_{n_0\dots n_s}^{\mu,\tau,3}$$

son polinomios en la variable c de grado $q\tilde{N}_s - q_1\mu - 1$, $q\tilde{N}_s - q_1\mu$ y $q\tilde{N}_s - q_1\mu$ respectivamente.

De a), b) y c) se sigue que:

- Para cualquier $\tau \in \{0, 1, \dots, r-1\}$,

$$I_{n_0\dots n_s}^{\mu,\tau,1}, I_{n_0\dots n_s}^{\mu,\tau,2} \quad \text{y} \quad I_{n_0\dots n_s}^{\mu,\tau,3}$$

son polinomios en la variable c de grado menor o igual a $q(j-1) - 1$, $q(j-1)$, y $q(j-1)$ respectivamente.

- Para $\tau = r$ las integrales

$$I_{n_0\dots n_s}^{\mu,r,1}, I_{n_0\dots n_s}^{\mu,r,2} \quad \text{y} \quad I_{n_0\dots n_s}^{\mu,r,3}$$

son polinomios en la variable c de grado menor o igual a

$$(kj-1) \left(q \left(\sum_{l=1}^{r-1} a_l - 1 \right) + p \right) + j \left(q_1 \left(\sum_{l=1}^{r-1} a_l - 1 \right) + p_1 \right).$$

Por lo tanto, de los Pasos 1 y 2, hemos probado que:

1. Para cada $\tau \in \{0, 1, \dots, r-1\}$ la integral

$$\int_{[\gamma_c^\tau]} \eta$$

es un polinomio en la variable c de grado $\leq q(kj-1) + q_1j$ y que por tanto extiende a todo \mathbb{C} .

2. Para $\tau = r$, la integral

$$\int_{[\gamma_c^r]} \eta$$

es un polinomio en la variable c y por lo tanto extiende a todo \mathbb{C} . Su grado es menor o igual a

$$(kj-1) \left(q \left(\sum_{l=1}^{r-1} a_l - 1 \right) + p \right) + j \left(q_1 \left(\sum_{l=1}^{r-1} a_l - 1 \right) + p_1 \right).$$

Además si $r \geq 3$ o $r = 2$ y $a_1 > 1$, entonces $q(kj-1) + q_1j$ es menor que

$$(kj-1) \left(q \left(\sum_{l=1}^{r-1} a_l - 1 \right) + p \right) + j \left(q_1 \left(\sum_{l=1}^{r-1} a_l - 1 \right) + p_1 \right).$$

Si $r = 2$ y $a_1 = 1$ entonces la integral $\int_{[\gamma_c^r]} \eta$ es un polinomio de grado $p(kj-1) + jp_1$.

Finalmente usando que $j \leq n$ se concluye la prueba. \square

Ejemplo 4.3. Sea $H = x(x^k y)^3 - x(x^k y)^2(1 - x(x^k y)^3)(1 + x(x^k y)^3) \in \mathcal{S}_3$ (usamos $p = 2$, $q = 3$, $p_1 = 1$, $q_1 = 1$, $s = x^k y$, $r = 3$, $a_1 = a_2 = 1$, $\beta_1 = 1$ y $\beta_2 = -1$).

Para cada $c \in \mathbb{C} - \{-1, 0, 1\}$ la fibra \mathcal{L}_c de H esta parametrizada por:

$$\begin{aligned} \varphi_c : \mathbb{C} - \{0, 1\} &\rightarrow \mathcal{L}_c \\ z &\mapsto \left(\frac{(c-z)^3}{z^2(1-z^2)^3}, \frac{z^{2k+1}(1-z^2)^{3k+1}}{(c-z)^{3k+1}} \right). \end{aligned} \quad (4.42)$$

Además sean $\alpha_1 = \{\frac{1}{2}e^{2\pi\sqrt{-1}\theta} \mid \theta \in [0, 1]\}$, $\alpha_2 = \{1 + \frac{1}{2}e^{2\pi\sqrt{-1}\theta} \mid \theta \in [0, 1]\}$ y $\alpha_3 = \{-1 + \frac{1}{2}e^{2\pi\sqrt{-1}\theta} \mid \theta \in [0, 1]\}$, los círculos de radio $\frac{1}{2}$ y centro en 0, 1 y -1 respectivamente. Sean D_i el disco cerrado acotado por α_i . Para cada $c \in \mathbb{C} - \{D_1, D_2, D_3\}$ definimos $\alpha_4 = c + \frac{1}{2}e^{2\pi\sqrt{-1}\theta}$, con $\theta \in [0, 1]$, el círculo de radio $\frac{1}{2}$ con centro en el punto c . entonces $\gamma_c^1 := \varphi_c(\alpha_1)$, $\gamma_c^2 := \varphi_c(\alpha_2)$,

$\gamma_c^3 := \varphi_c(\alpha_3)$, $\gamma_c^4 := \varphi_c(\alpha_4)$ son los generadores de la homología de la fibra \mathcal{L}_c .

Consideremos la 1-forma polinomial $\omega = (y^n)dx$ de grado n . Entonces usando la parametrización (4.42) obtenemos que:

$$\begin{aligned} \int_{[\gamma_c^4]} \omega &= \int_{\alpha_4} \frac{z^{n(2k+1)-3}(1-z^2)^{n(3k+1)-4}}{(c-z)^{n(3k+1)-2}} (-3z(1-z^2) + 2(c-z)(1-4z^2)) dz \\ &= -3 \int_{\alpha_4} \frac{f_1(z)}{(c-z)^{n(3k+1)-2}} dz + 2 \int_{\alpha_4} \frac{f_2(z)}{(c-z)^{n(3k+1)-3}} dz \\ &= 2\pi\sqrt{-1} \left(-3Res \left(\frac{f_1(z)}{(c-z)^{n(3k+1)-2}}, c \right) + 2Res \left(\frac{f_2(z)}{(c-z)^{n(3k+1)-3}}, c \right) \right), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} f_1(z) &:= z^{n(2k+1)-2}(1-z^2)^{n(3k+1)-3} \\ &= \sum_{\mu=0}^{n(3k+1)-3} \binom{n(3k+1)-3}{\mu} (-1)^{n(3k+1)-3-\mu} z^{8nk+3n-8-2\mu} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} f_2(z) &:= (1-4z^2)z^{n(2k+1)-3}(1-z^2)^{n(3k+1)-4} \\ &= \sum_{\mu=0}^{n(3k+1)-4} \binom{n(3k+1)-4}{\mu} (-1)^{n(3k+1)-4-\mu} z^{8nk+3n-11-2\mu} (1-4z^2) \\ &= \sum_{\mu=0}^{n(3k+1)-4} \binom{n(3k+1)-4}{\mu} (-1)^{n(3k+1)-4-\mu} (z^{8nk+3n-11-2\mu} - 4z^{8nk+3n-9-2\mu}). \end{aligned}$$

Ahora, como

$$\begin{aligned} Res \left(\frac{f_1(z)}{(c-z)^{n(3k+1)-2}}, c \right) &= \frac{1}{(n(3k+1)-3)!} \left(\frac{d^{n(3k+1)-3}}{dz^{n(3k+1)-3}} (f_1(z)) \right) \Big|_{z=c} = \\ &= \sum_{\mu=0}^{n(3k+1)-3} \binom{n(3k+1)-3}{\mu} (-1)^{n(3k+1)-3-\mu} \prod_{s=0}^{n(3k+1)-4} (8nk+3n-8-2\mu-s) c^{5nk+2n-5-2\mu} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} Res \left(\frac{f_2(z)}{(c-z)^{n(3k+1)-2}}, c \right) &= \frac{1}{(n(3k+1)-4)!} \left(\frac{d^{n(3k+1)-4}}{dz^{n(3k+1)-4}} (f_2(z)) \right) \Big|_{z=c} = \\ &= \sum_{\mu=0}^{n(3k+1)-4} \binom{n(3k+1)-4}{\mu} (-1)^{n(3k+1)-4-\mu} (A_\mu^1 c^{5nk+2n-7-2\mu} - 4A_\mu^2 c^{5nk+2n-5-2\mu}), \end{aligned}$$

donde

$$A_\mu^1 := \prod_{s=0}^{n(3k+1)-5} (8nk+3n-11-2\mu-s)$$

y donde

$$A_\mu^2 := \prod_{s=0}^{n(3k+1)-5} (8nk + 3n - 9 - 2\mu - s).$$

Entonces es claro que la integral Abeliana

$$I_4(c) : \mathbb{C} - \{D_1, D_2, D_3\} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$c \mapsto \int_{[\gamma_c^4]} \omega$$

es una función polinomial de grado exactamente

$$5nk + 2n - 5 = (kn - 1)(5) + n(2),$$

que corresponde a la cota dada en el Lema 4.4 para el caso $q = 3$, $p = 2$, $q_1 = 1$, $p_1 = 1$, $r = 3$ y $a_1 = a_2 = 1$.

4.3 Propiedades de las integrales Abelianas.

Como ya hemos dicho, salvo automorfismos algebraicos de \mathbb{C}^2 y \mathbb{C} , las tres familias de polinomios con monodromía global trivial y tal que $\dim(H_1(\mathcal{L}_c, \mathbb{Z})) > 1$ son:

$$\mathcal{S}_1 := \left\{ y \prod_{l=1}^{r-1} (\beta_l - x)^{a_l} - h(x) \mid r \geq 3 \right\},$$

$$\mathcal{S}_2 := \left\{ x^{p_1} s^p \prod_{l=1}^{r-1} (\beta_l - x^{q_1} s^q)^{a_l} \mid r \geq 2 \right\},$$

$$\mathcal{S}_3 := \left\{ x^{q_1} s^q + x^{p_1} s^p \prod_{l=1}^{r-1} (\beta_l - x^{q_1} s^q)^{a_l} \mid r \geq 2 \right\},$$

con a_1, \dots, a_{r-1} , $\beta_1, \dots, \beta_{r-1}$, $h(x)$, p_1, q_1, p, q y s como en el Teorema 4.2.

El Teorema principal de este Capítulo es:

Teorema 4.3. *Sea $H : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ un polinomio con monodromía global trivial y sea ω una 1-forma diferencial polinomial de grado n . Entonces:*

a) *La integral Abeliana:*

$$I_\tau(c) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$c \mapsto \int_{[\gamma_c^\tau]} \omega,$$

donde γ_c^τ es un elemento no nulo de $H_1(\mathcal{L}_c, \mathbb{Z})$, es una función polinomial en la variable c .

b) Si $H \in \mathfrak{S}_1 \cup \mathfrak{S}_2 \cup \mathfrak{S}_3$ entonces el grado $d(n)$ del polinomio $I(c)$ se comporta de la siguiente manera:

1. Si $H \in \mathfrak{S}_1$, entonces $d(n) \leq n$.
2. Si $H \in \mathfrak{S}_2$, entonces $d(n) = q(kn - 1) + q_1n$.
3. Si $H \in \mathfrak{S}_3$, entonces

$$d(n) \leq (kn-1) \left(q \left(\sum_{l=1}^{r-1} a_l - 1 \right) + p \right) + n \left(q_1 \left(\sum_{l=1}^{r-1} a_l - 1 \right) + p_1 \right)$$

si $r \geq 3$ o $r = 2$ y $a_1 > 1$ y

$$d(n) \leq \max\{p(kn - 1) + np_1, q(kn - 1) + nq_1\},$$

si $r = 2$ y $a_1 = 1$.

El grado $d(n)$ es una cota superior para el número de ceros aislados de la integral Abeliana $I_\tau(c)$.

La prueba del Teorema 4.3 se sigue de forma inmediata de los Lemas 4.2, 4.3 y 4.4.

Problemas abiertos.

Las preguntas inmediatas después del trabajo realizado y para considerar en un trabajo futuro son:

1. ¿La integral Abelianas

$$\begin{aligned} I_\tau(c) : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ c &\mapsto \int_{[\gamma_c^\tau]} \omega, \end{aligned}$$

donde γ_c^τ es un elemento no nulo de $H_1(\mathcal{L}_c, \mathbb{Z})$, es polinomial si y sólo si H tiene monodromía global trivial?

2. ¿Bajo que condiciones en H la integral Abelianas

$$\begin{aligned} I_\tau(c) : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ c &\mapsto \int_{[\gamma_c^\tau]} \omega, \end{aligned}$$

es una función algebraica?

Bibliografía

- [Ar] V. I. Arnold, *Geometric Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*. Springer, New York, (1982).
- [AGV] V. I. Arnold, S.M. Gusein-Zade, A.N. Varchenko, *Singularities of differentiable maps*. Vol II. Monographs in mathematics, Birkhäuser, Boston (1988).
- [Bro] S. A. Broughton, *On the topology of polynomial hypersurfaces*. Singularities, Part 1 (Arcata, Calif., 1981), 167–178, Proc. Sympos. Pure Math., 40, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1983).
- [CN] C. Camacho, A. Lins Neto, *Geometric theory of foliations*. Birkhäuser, Boston (1985).
- [DRR] F. Dumortier, R. Roussarie, C. Rousseau, *Hilbert's 16th problem for quadratic vector fields*. J. Differential Equations **110** (1994), núm. 1, 86–133.
- [Du] A. H. Durfee, *Five definitions of critical point at infinity*. Singularities (Oberwolfach, 1996), 345–360, Progr. Math., 162, Birkhuser, Basel, 1998.
- [Ec] J. Écalle, *Introduction aux fonctions analysables et preuve constructive de la conjecture de Dulac*. Hermann Publ., Paris (1992).
- [Fr] J. P. Françoise, *Successive derivatives of a first return map, application to the study of quadratic vector fields*. Ergod. theory Dynam. Syst. **16** (1996), núm. 1, 87-96.
- [FG] K. Fritzsche, H. Grauert, *From holomorphic functions to complex Manifolds*. Graduate Text in Mathematics, **213**. Springer-Verlag, New York, (2002).
- [Ga] V. A. Gaiko, *Hilbert's Sixteenth problem and global bifurcations of limit cycles*. Nonlin. Anal. **47** (2001), 4455-4466.

- [Ga98] L. Gavrilov, *Petrov modules and zeros of Abelian integrals*. Bull. Sci. Math. **122** (1998), núm. 8, 571-584.
- [Ga01] L. Gavrilov, *The infinitesimal 16th Hilbert problem in the quadratic case*. Invent. Math. **143** (2001), núm. 3, 449-497.
- [Ga05] L. Gavrilov, *Higher order Poincaré-Pontryagin functions and iterated path integrals*. Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) **14** (2005), núm. 4, 663-682.
- [GM] X. Gómez-Mont, J. Muciño, *Persistent cycles for holomorphic foliations having a meromorphic first integral*. In X. Gómez-Mont, A. Verjovsky and J. Seade (eds.), Holomorphic dynamics, Lecture Notes in Math. **1345**, Springer, Berlin-Heidelberg-New York (1988), 129-162.
- [Gr] Phillip A. Griffiths, *Introduction to Algebraic Curves*. Transl. Math. Monographs. Amer. Math. Soc. **76** (1989).
- [Hi] D. Hilbert, *Mathematical problems*. Reprinted from Bull. Amer. Math. Soc. **8** (1902), 437-479, in Bull. Amer. Math. Soc. **37** (2000), 407-436.
- [HS] M. W. Hirsch, S. Smale, *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*. Academic Press, New York (1974).
- [Ili] I. D. Iliev, *The number of limit cycles due to polynomial perturbations of the harmonic oscillator*. Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **127** (1999), 317-322.
- [Ily69] Yu. Ilyashenko, *The origin of limit cycles under perturbations of the equations $\frac{dw}{dz} = -\frac{R_z}{R_w}$ where $R(z, w)$ is a polynomial*. USSR Math. Sbornik **78** (**120**) (1969), núm. 3, 353-364.
- [Ily91] Yu. Ilyashenko, *Finiteness for Limit Cycles*. Transl. Math. Monographs, **94**. Amer. Math. Soc., Providence, RI (1991).
- [Ily02] Yu. Ilyashenko, *Centennial history of Hilbert's 16th problem*. Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society **39** (2002), núm. 3, 301-354.
- [KZ] R. E. Kooij, A. Zegeling, *Coexistence of centers and limit cycles in polynomial systems*. Rocky Mountain J. Math. **30** (2000), núm. 2, 621-640.
- [Kho] A. G. Khovanskiĭ, *Real analytic manifolds with the property of finiteness, and complex abelian integrals*. Funktsional. Anal. i Prilozhen. **18** (1984), núm. 2, 40-50. (En Ruso.)

- [LCC] J. Li, H. S. Y. Chan, K. W. Chung, *Bifurcations of limit cycles in a Z_6 -equivariant planar vector field of degree 5*. *Sci. China (Series A)* **45** (2002), núm. 7, 817–826.
- [LMP] A. Lins, W. de Melo, C. C. Pugh, *On Liénard's equation*. *Lecture Notes in Math.*, Vol. **597**, Springer, Berlin, (1977) 335-357.
- [Mel] V. K. Mel'nikov, *On the stability of a center for time-periodic perturbations*. *Trudy Moskov. Mat. Obšč.* **12** (1963), 3–52.
- [MS] M. Miyanishi, T. Sugie, *Generically rational polynomials*. *Osaka J. Math.* **17** (1980), núm. 2, 339–362.
- [NN1] W. D. Neumann, P. Norbury, *Monodromy and vanishing cycles of complex polynomials*. *Duke Math. J.* **101** (2000), 487-497.
- [NN2] W. D. Neumann, P. Norbury, *Rational polynomials of simple type*. *Pacific J. Math.* **204** (2002), núm. 1, 177-207.
- [Pe] L. Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems*. Third edition. *Texts in Applied Mathematics* **7**. Springer (2001).
- [Pon] L. S. Pontryagin, *On dynamic systems close to Hamiltonian systems*. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **4** (1934), 234–238. (en Ruso.)
- [Sa] H. Saitô, *Fonctions entières qui se réduisent à certains polynômes (I)*. *Osaka J. Math.* **9** (1972), 293-332.
- [Sha] B. V. Shabat, *Introduction to Complex Analysis, part II, Functions of Several Variables*. *Translations of Mathematical Monographs* **110**. Amer. Math. Soc., Providence, RI (1992).
- [Shi] S. Shi, *A concrete example of the existence of four limit cycles for plane quadratic systems*. *Sci. Sinica A* **23** (1980) 153-158.
- [Sm] S. Smale, *Mathematical problems for the next century*. *Mathematics: frontiers and perspectives*, V.I. Arnold, et al. eds. Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2000) 271-294.
- [Sug] J. Sugie, *Some criteria of the existence of limit cycles for a planar system of Liénard type*. *Nonlinear Anal.* **21**, núm. 11, (1993) 803-814.
- [SH] J. Sugie, T. Hara, *Nonexistence of periodic solutions of the Liénard system*. *J. Math. Anal. Appl.* **159**, núm. 1, (1991) 224-236.

- [Var] A. N. Varchenko, *Estimation of the number of zeros of an abelian integral depending on a parameter, and limit cycles*. Funktsional. Anal. i Prilozhen. **18** (1984), núm. 2, 14–25. (En Ruso.)
- [Ya94] S. Yakovenko, *Complete abelian integrals as rational envelopes*. Nonlinearity **7**, (1994) 1237-1250.
- [Ya95] S. Yakovenko, *A geometric proof of the Bautin theorem*. In Concerning the Hilbert 16th problem, Yu. Ilyashenko and S. Yakovenko editors. Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1995) 203-219.
- [Ya00] S. Yakovenko, *Quantitative theory of ordinary differential equations and tangential Hilbert 16th problem*. On finiteness in differential equations and Diophantine geometry, 41–109, CRM Monogr. Ser., 24, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2005).
- [YH] P. Yu, M. Han, *Twelve limit cycles in a cubic case of the 16th Hilbert problem*. Int. J. Bifurcation and Chaos **15**, núm. 7 (2005) 2191–2205.
- [ZL] M. Zaïdenberg, V. Ya. Lin, *An irreducible, simply connected algebraic curve in \mathbb{C}^2 is equivalent to a quasihomogeneous curve*. Sov. Math. Dokl. **28** (1983) 200-204.
- [ZW] Y. R. Zhou, X. R. Wang, *On the conditions of a center of the Liénard equation*. J. Math. Anal. Appl. **180**, núm. 1, (1993) 43-59.
- [ZWB] Y. R. Zhou, C. Wang, D. Blackmore, *The uniqueness of limit cycles for Liénard system*. J. Math. Anal. Appl. **304**, núm. 2, (2005) 473-489.
- [Zo] H. Żołądek, *The monodromy group*. Mathematics Institute of the Polish Academy of Sciences. Mathematical Monographs (New Series), **67**. Birkhäuser Verlag, Basel, (2006).