



*Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo*  
*Instituto de Física y Matemáticas*

## **Implementación numérica de la Magnetohidrodinámica ideal relativista**

**Tesis            por:**  
**Alejandro Cruz Osorio**

**para obtener el grado de Doctor en  
Ciencias en el área de la física:**

Director de tesis:

**Francisco S. Guzmán Murillo**  
Doctor en Ciencias en el área de Física

Instituto de Física y Matemáticas,  
UMSNH.

Morelia, Michoacán, a julio de 2014

## Resumen

En este trabajo se presenta el desarrollo numérico de un nuevo código construido con el objetivo de estudiar escenarios en donde este involucrada la magnetohidrodinámica ideal relativista (RMHD ideal), el código está construido en tres dimensiones cartesianas. <sup>1</sup>*CAFE* es un código independiente a los existentes actualmente, enfocado al estudio de fenómenos de altas energías relacionados con la propagación e interacción de jets relativistas en presencia de campos magnéticos. Las ecuaciones de la RMHD ideal se resuelven numéricamente, dichas ecuaciones describen la evolución de un fluido mediante las ecuaciones de Euler relativistas y la evolución de los campos magnéticos mediante las ecuaciones de Maxwell, ambas en un espacio-tiempo de Minkowski. De tal manera que el sistema físico está compuesto por un fluido, campos magnéticos y un espacio-tiempo fijo, acoplados. Es por ello que la aplicabilidad del código se enfoca en el estudio de jets extragalácticos en regiones lejanas de donde fueron emitidos y los efectos del campo gravitacionales son despreciables. De igual forma se considera que el espacio-tiempo no es modificado por presencia del fluido y los campos magnéticos.

En el desarrollo del trabajo se han estudiado las ecuaciones de la MHD ideal y se han escrito en forma conservativa, también se hace una descripción de la estructura característica del sistema de ecuaciones. Los métodos numéricos usados están basados en el esquema HRSC (*High Resolution Shock Capturing*) los cuales incluyen reconstructores de variables en las interceldas numéricas y aproximadores de Riemann para calcular los flujos. Se implementan y se comparan va-

---

<sup>1</sup>Code for study Astrophysical Fluids and Energetic events.

rios reconstructores como *Godunov*, *minmod*, <sup>1</sup>*MC*, <sup>2</sup>*PPM* y <sup>3</sup>*WENO* los cuales se describen en el texto de la tesis, los aproximadores de Riemann que se implementaron son <sup>4</sup>*HLL*E y <sup>5</sup>*HLL*C. Por otro lado las ecuaciones de evolución de la RMHD ideal se resuelven mediante el método *MoL* en conjunto con el método Runge-Kutta. En el manuscrito también se describen y discuten dos métodos utilizados en el código para controlar la constricción de no monopolos magnéticos  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , uno de ellos es el método *Flux-constrained Transport*, y el segundo es el método *Cleaning*. Se llega a la conclusión de que la mejor combinación es *WENO* y *HLLC*.

La fase de pruebas numéricas del código *CAFE* es importante debido a que se muestra la capacidad del código de resolver y lidiar con diferentes configuraciones y escenarios físicos en donde existen choques fuertes y discontinuidades en las variables, es por eso que en este trabajo se presentan diversas pruebas numéricas. En orden, se enlistan las pruebas numéricas 1D en cada una de las tres dimensiones espaciales resolviendo diferentes casos que incluyen choques fuertes, velocidades altas y transversales, las cuales fueron comparadas con las soluciones exactas de cada uno de los casos. En 2D se reproducen las pruebas en donde aparecen inestabilidades y varias combinaciones de los casos 1D. Y finalmente se presenta un problema más general, que contienen todas las configuraciones anteriores, el jet relativista. En este trabajo se estudian jets hidrodinámicos y magnetohidrodinámicos propagándose con diferentes velocidades y con configuraciones del campo magnético diferentes. En todas las pruebas numéricas, los errores numéricos tanto en 1D como en 2D, son similares a los obtenidos en otros códigos del mismo tipo.

*Palabras clave: Magnetohidrodinámica relativista, astrofísica numérica, métodos numéricos.*

---

<sup>1</sup>Monotonized Central.

<sup>2</sup>Piecewise Parabolic Method.

<sup>3</sup>Weighted Essentially Non-Oscillatory.

<sup>4</sup>Harten, Lax and van Leer and Einfeldt

<sup>5</sup>Harten, Lax and van Leer Contact wave

# Abstract

In this thesis the development of a new numerical code constructed with the aim of studying involved scenarios where this ideal relativistic magnetohydrodynamics (RMHD ideal), built in three cartesian dimensions is presented. *CAFE* is an independent code focused on the study of high energy phenomena associated with the propagation and interaction of relativistic jets in the presence of magnetic fields. The ideal RMHD equations are solved numerically, these equations describe the evolution of a fluid by relativistic Euler equations and the evolution of magnetic fields using Maxwell's equations, both in Minkowski spacetime. Such that the physical system is composed of a fluid, magnetic fields and a fixed space-time coupled. Therefore the applicability of the code is focused on the study of extragalactic jets in far regions where they were issued and the effects of gravitational field are negligible. Similarly it is considered that space-time is not modified by the presence of the fluid and the magnetic fields.

In developing the work we have studied the equations of ideal MHD and are written in conservative form, a description of the characteristic structure of the system of equations is also done. The numerical methods used are based on the HRSC scheme which include reconstructors of the variables in the numerical intercells and Riemann approximators to estimate the flows. We describe and compare some reconstructors like *Godunov*, *MINMOD*, *MC*, *PPM*, *WENO* in the text of the thesis, Riemann approximators that are implemented *HLLC* and *HLLC* are also described. On the other hand the evolution equations of ideal RMHD are solved by the *MoL* method together with the Runge-Kutta method. The manuscript also describes and discusses two methods used in the code to control the constriction of not magnetic monopoles  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , one of them is the *Constrained Flux-Transport* method and the second is the *Cleaning* method. We conclude that the best combination is *weno* and *HLLC*.

The numerical testing of the *CAFE* code is important, in order to show

the ability of the code to solve and deal with different configurations and physical scenarios where exist strong shocks and discontinuities in the variables, thih is why in this thesis several numerical tests are presented. In order we present, the 1D numerical tests in each of the three spatial dimension solving different cases involving strong shocks, and transversales high speeds, which were compared with the exact solutions of each of the cases. In the 2D case, the instabilities tests and various combinations of the 1D cases appear is reproduce. And finally, a more general problem, which contain all the above configurations, the relativistic jet is presented. In this work, hydrodynamic and magnetohydrodynamic jets propagate with different speeds and with different magnetic field configurations are studied. In all numerical tests, the numerical errors in both 1D and 2D, are similar to those obtained in other codes of the same type.

*Keywords: Relativistic magnetohydrodynamics, numerical astrophysics, numerical methods.*

# Índice general

Índice general	v
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Magnetohidrodinámica ideal relativista</b>	<b>4</b>
2.1. Descomposición 3 + 1 de relatividad general . . . . .	5
2.2. MHD ideal relativista . . . . .	8
2.3. Estructura característica de la MHD . . . . .	18
<b>3. Métodos Numéricos</b>	<b>27</b>
3.1. Discretización en volumen finito . . . . .	28
3.2. Reconstrucción de variables . . . . .	30
3.2.1. Constante por pedazos: Método de Godunov . . . . .	31
3.2.2. Lineal por pedazos . . . . .	32
3.2.3. PPM: Piecewise Parabolic Method . . . . .	35
3.2.4. WENO: Weighted Essentially Non-Oscillatory . . . . .	38
3.3. Construcción de flujos numéricos . . . . .	40
3.3.1. HLLE: Harten, Lax and van Leer and Einfeldt . . . . .	41
3.4. Constricción $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ . . . . .	43
3.4.1. Transporte de flujo restringido: Flux-CT . . . . .	43
3.4.2. Método Cleaning . . . . .	54
3.5. Recuperación de variables primitivas . . . . .	55
3.6. Evolución temporal . . . . .	58
3.6.1. Propiedad TVD . . . . .	59
3.7. Condiciones de Frontera . . . . .	60

<b>4. Pruebas del código numérico</b>	<b>63</b>
4.1. Pruebas numéricas de hidrodinámica relativista . . . . .	64
4.2. Pruebas numéricas de Magnetohidrodinámica relativista . . . . .	77
<b>5. Jets relativistas</b>	<b>97</b>
5.1. Resultados numéricos: Morfología de Jets . . . . .	103
5.1.1. Jets Hidrodinámicos . . . . .	103
<b>6. Conclusiones</b>	<b>115</b>
<b>Referencias</b>	<b>116</b>

# Capítulo 1

## Introducción

Los campos magnéticos así como los campos gravitacionales desempeñan un papel importante en muchos escenarios astrofísicos, y nos permiten determinar la dinámica de la materia. En algunos escenarios están involucrados objetos compactos, así como la dinámica de la materia asociada a ellos en presencia de campos magnéticos, como discos de acreción, emisión de radiación, etc. El estudio analítico de dichos escenarios es complicado. Por ello, la solución de las ecuaciones de la magnetohidrodinámica relativista (RMHD por sus siglas en inglés *Relativistic Magnetohydrodynamics*) se hace usando métodos numéricos.

La presencia de campos magnéticos acoplados con objetos compactos es común, como ejemplo están las estrellas de neutrones con campos del orden de  $10^{12} - 10^{13}$  Gauss [C. Kouveliotou \[1998\]](#), los magnetares [M. Bocquet \[1995\]](#), los jets relativistas [Curtis \[1918\]](#) en donde los campos son del orden  $\sim 10^{-6} - 10^{-3}$  Gauss [Ferrari \[1998\]](#), por mencionar algunos.

Existe un gran número de estudios numéricos dedicados a estudiar escenarios astrofísicos. Dichos estudios requieren de la implementación numérica de la hidrodinámica y magnetohidrodinámica relativistas acopladas a un espacio-tiempo. Algunos códigos importantes en hidrodinámica relativista han sido desarrollados por varios autores: GENESIS [M A Aloy \[1999\]](#), RAM [W. Zhang \[2006\]](#) y TESS [P. C. Duffell \[2011\]](#) que son códigos en relatividad especial que están especializados en el estudio de jets en simetría axial. Otros códigos se especializan en espacio-tiempos fijos como los desarrollados por [Wilson \[1972\]](#), [J. Ma. Martí](#)

---

[1991], Donmez [2004]; O. Donmez [2011] y F. D. Lora-Clavijo [2013]. Códigos más generales estudian espacio-tiempos dinámicos, como la evolución de estrellas rotantes J. A. Font [2000a], estrella de neutrones J. A. Font [2000b], sistemas binarios con mallas refinadas B. C. [2012], espacio-tiempo dinámico en 3D como el código Whisky L. Baiotti [2003], en una dimensión GR1D estudia el colapso de estrella de neutrones y hoyos negros E. O'Connor [2010], SACRA estudia estrellas de neutrones y hoyo negro en 3D T. Yamamoto [2008], BAM relativista estudia sistemas binarios en 3D M. Thierfelder [2011].

Por otro lado, muchos autores también han desarrollado códigos para estudiar fenómenos donde se involucra a la magnetohidrodinámica relativista: en relatividad especial y general L. Antón [2006], en un espacio-tiempo de un hoyo negro de Schwarzschild el código RAISHIN C. F. Gammie [2003], así como también un hoyo negro rotante Penner [2011b], algunos otros códigos como HARM que tienen una versión MHD C. F. Gammie [2003] y una versión más general con términos radiativos HARMRAD J. C. McKinney [2013]. Existen otros construidos en *Cactus Einstein Toolkit* Cactus code como WhiskyMHD B. Giacomazzo [2007], GRHydro P. Mosta [2013]. También códigos en 3D P. Cerdá-Durán [2008] y en simetría axial X-ECHO N. Bucciantini [2011]. Otros especializados en estudiar ondas gravitacionales y electromagnéticas producidas por sistemas binarios C. Palenzuela [2013], así como también en espacio-tiempo usando la formulación BSSN Z. B. Etienne [2010].

En este trabajo se presenta un nuevo código de magnetohidrodinámica ideal relativista en tres dimensiones cartesianas. El código *CAFE* es un código independiente que resuelve las ecuaciones de Euler-Maxwell bajo la hipótesis de magnetohidrodinámica ideal en un espacio-tiempo fijo, en particular se presenta el desarrollo e implementación en el espacio-tiempo de Minkowski. El código resuelve las ecuaciones de la RMHD ideal usando el esquema HRSC. Para validar el código, se presentan las pruebas a las que fue sometido el código, que son las mismas que se usan para validar la mayoría de los códigos existentes, como los mencionados anteriormente.

---

La implementación del código *CAFE* está enfocada al estudio de fenómenos de altas energías relacionados con la propagación de jets relativistas en un medio modelado por un fluido magnetizado, en regiones lejanas al objeto compacto donde el jet fue emitido. El sistema a resolver está compuesto por un espacio-tiempo de fondo en este caso Minkowski, pues en las regiones lejanas al objeto compacto donde se generan los jets los efectos del campo gravitacional son despreciables, así como la evolución del espacio-tiempo. Los campos magnéticos son descritos por las ecuaciones de Maxwell y el fluido se describe por las ecuaciones de Euler. La RMHD ideal se implementa en tres dimensiones espaciales en coordenadas cartesianas usando el lenguaje *Fortran 90*.

En este trabajo se describe la implementación de nuestro código capaz de resolver las ecuaciones de RMHD. La descripción del código se hace de la siguiente manera: En el capítulo 2, se hace una breve descripción de la formulación 3+1, se presentan las ecuaciones de RMHD ideal escritas de forma conservativa para un espacio-tiempo en general, así como la estructura característica del sistema de ecuaciones de la RMHD ideal. En el capítulo 3, se presentan los métodos numéricos usados en el desarrollo del código, así como el esquema de volúmenes finitos, la reconstrucción de variables y flujos en las interceldas numéricas y la técnica para controlar la restricción  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ . En el capítulo 4, se hace una compilación de las pruebas al que fue sometido el código *CAFE* en dos partes. La primera consiste en pruebas hidrodinámicas y la segunda en pruebas magnetohidrodinámicas. En el capítulo 5, se presenta un estudio de la morfología de jets relativistas hidrodinámicos y magnetohidrodinámicos. Finalmente, en el capítulo 6 se presentan algunos comentarios finales.

## Capítulo 2

# Magnetohidrodinámica ideal relativista

La magnetohidrodinámica (MHD) se encarga del estudio de un fluido conductor eléctrico en interacción con campos magnéticos. Algunos fluidos que cumplen con la condición de conductor perfecto son los metales líquidos, gases ionizados o plasmas y electrolitos. Astrofísicamente, se espera en algunos escenarios la presencia de materia altamente ionizada, es decir, un plasma. Algunos ejemplos son la ionosfera de la tierra, medio interestelar, discos de acreción en estrellas, jets en galaxias activas, etc. En la MHD los campos magnéticos inducen corrientes en un fluido conductor móvil, y que a su vez también cambia el campo magnético. Sin embargo, generalmente en el ámbito de la astrofísica se trabaja bajo la aproximación de MHD ideal.

La magnetohidrodinámica ideal relativista (RMHD) se considera válida bajo la imposición de algunos límites, es decir, la RMHD ideal describe la evolución de los campos magnéticos y el fluido en una versión reducida en la cual se desprecian efectos microscópicos como la interacción entre iones y electrones. Esto consiste en considerar que la frecuencia de variación de los campos es menor que la frecuencia efectiva de colisión de los electrones, de tal modo que no hay separación de cargas y el fluido puede considerarse como único. Este es el caso del llamado *plasma no colisionante* Spruit [2013]. La siguiente suposición es que el fluido es

---

un conductor perfecto, la cuál impone la condición de que el campo eléctrico en el marco de referencia del fluido sea despreciable. También se considera que la contribución de la corriente de desplazamiento en la ley de Ampère-Maxwell es despreciable, lo cuál implica que las contribuciones electromagnéticas al fluido están determinadas en su totalidad por el campo magnético. La condición de conductividad perfecta simplifica al fluido al estado de "flujo congelado", donde el número de líneas de flujo magnético en cada elemento de fluido en movimiento es constante en el tiempo. Además de que el fluido tiene propiedades de un fluido ideal con viscosidad y conductividad térmica nulas. El conjunto de todas estas hipótesis definen la *magnetohidrodinámica ideal relativista*.

En este capítulo se introducen las ecuaciones que describen a la RMHD ideal, que se obtienen de la conservación local del tensor de energía-momento del sistema formado por el fluido y el campo magnético y la conservación de la masa del fluido. En el contexto de la relatividad general dichas ecuaciones están acopladas a la geometría del espacio-tiempo, en particular en este trabajo el espacio-tiempo se describe mediante la descomposición  $3 + 1$ . Por lo que se hace una breve descripción de la descomposición  $3 + 1$  de la geometría espacio-tiempo.

Se presenta la derivación de las ecuaciones de la MHD ideal relativista escrita en forma conservativa, con el fin de adaptar dichas ecuaciones a los métodos numéricos que se usaran en este trabajo. Así también se describe la manera de obtener la estructura característica de las ecuaciones de RMHD ideal. Cabe mencionar que las ecuaciones descritas en este capítulo son válidas para cualquier espacio-tiempo.

## 2.1. Descomposición $3 + 1$ de relatividad general

Es importante mencionar en este punto, que en este trabajo no se evoluciona la geometría del espacio-tiempo. Sin embargo, es importante dar una breve descripción de la descomposición  $3+1$  del espacio-tiempo, debido a que las ecuaciones de la RMHD están escritas en dicha formulación.

Para casos más generales, al evolucionar el espacio-tiempo de cualquier sistema físico se debe formular dicha evolución como un problema de valores iniciales o un

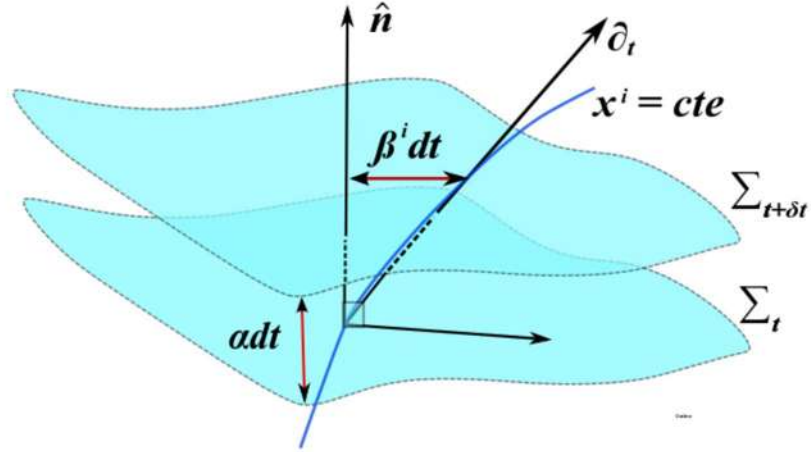


Figura 2.1: *Descomposición 3+1 del espacio-tiempo. El espacio-tiempo cuatro dimensional se describe mediante hipersuperficies espaciales  $\Sigma_t$  de tres dimensiones a lo largo de la coordenada temporal.*

problema de Cauchy. Para esto es necesario reescribir las ecuaciones del campo de Einstein como un problema de Cauchy.

Debido a que en las ecuaciones de Einstein no hay una distinción clara entre el espacio y el tiempo, es necesario separar los papeles de espacio y el tiempo con el fin de tener un mejor entendimiento y tratamiento de la ecuaciones de evolución del espacio-tiempo. La formulación de la relatividad general que resulta de esta foliación se conoce como "formalismo 3 + 1". En la Figura 2.1 se muestra un esquema de la descomposición 3+1, se describe al espacio-tiempo en hipersuperficies espaciales de tres dimensiones, una por cada instante de tiempo constante  $\Sigma_t$ .

La geometría del espacio-tiempo, bajo la descomposición 3+1 queda descrita en términos de tres componentes, que describen a las hipersuperficies espaciales y a la separación entre ellas:

- La métrica espacial  $\gamma_{ij}$ , con  $i, j = 1, 2, 3$ . Esta métrica mide las distancias en las hipersupecifcies,

$$dl^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j. \quad (2.1)$$

- 
- La función lapso  $\alpha$ , es el tiempo propio que mide un observador que se mueve en dirección normal a las hipersuperficies (un observador euleriano)

$$d\tau = \alpha dt. \quad (2.2)$$

- El vector de corrimiento  $\beta^i$ , es la velocidad relativa entre los observadores de Euler y las líneas con coordenadas espaciales constantes

$$x_{t+dt}^i = x_t^i - \beta^i dt. \quad (2.3)$$

Las funciones  $\alpha$  y  $\beta^i$  se pueden determinar con cierta libertad y se les conoce como "funciones de norma". En términos de estos tres componentes y usando las ecuaciones (2.2) y (2.3), el elemento de línea del espacio-tiempo tiene un término temporal y otro espacial

$$ds^2 = -d^2\tau + d^2l. \quad (2.4)$$

Explícitamente se tiene una métrica de la forma

$$ds^2 = (-\alpha^2 + \beta_j \beta^j) dt^2 + 2\beta_i dt dx^i + \gamma_{ij} dx^i dx^j. \quad (2.5)$$

Así, las componentes del tensor métrico en su forma matricial y su inversa son

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= \begin{pmatrix} -\alpha^2 + \beta_j \beta^j & \beta^i \\ \beta^i & \gamma_{ij} \end{pmatrix}, \\ g^{\mu\nu} &= \begin{pmatrix} -1/\alpha^2 & \beta^i/\alpha^2 \\ \beta^i/\alpha^2 & \gamma^{ij} - \beta^i \beta^j/\alpha^2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

donde  $\gamma^{ij}$  es la inversa de la 3-métrica.

Si  $\mathbf{n}$  es un vector unitario tipo tiempo, que cumple la relación  $n^\mu n_\mu = -1$  y es un vector normal a las hipersuperficies  $\Sigma_t$  con  $t$  constante, entonces tiene componentes

---


$$\begin{aligned} n_\mu &= (-\alpha, 0, 0, 0), \\ n^\mu &= \frac{1}{\alpha}(1, -\beta^i), \end{aligned}$$

entonces por definición se cumple la siguiente relación  $\partial_t = \alpha \mathbf{n} + \beta^i \partial_i$ , donde  $\partial_i$  son los tres vectores coordenados tangentes a la hipersuperficie  $\Sigma_t$ .

La descomposición 3+1 define una base, asociada a un observador <sup>1</sup>euleriano. Dicha base se puede escribir en términos de las funciones de norma y la 3-métrica como

$$\begin{aligned} a_{(\mu)} &= \{\mathbf{n}, \partial_i\}, \\ a_{(0)\nu} &= -\alpha \delta_{0\nu}, \\ a_{(k)\nu} &= (\partial_k)_\nu = \{\beta_k, \gamma_{kj}\}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Esta base asociada a un observador euleriano es útil para definir nuevas cantidades en el formalismo 3 + 1 sobre las hipersuperficies espaciales. Para mayor detalle de el lector puede consultar las referencias [Alcubierre \[2008\]](#); [Baungarte and Shapiro \[2010\]](#); [Gourgoulhon \[2012\]](#).

En la MHD ideal, esta base es particularmente útil para definir las variables conservativas en las hipersuperficies espaciales, como se podrá ver en la siguiente sección de este capítulo.

## 2.2. MHD ideal relativista

La descripción de los campos electromagnéticos en un espacio-tiempo general está dada por el tensor de campo electromagnético de Faraday  $F^{\mu\nu}$ . Este tensor se puede expresar en términos de los campos eléctrico  $e^\mu$  y magnético  $b^\mu$ , para un observador con cuadrivelocidad  $u^\mu$

---

<sup>1</sup>Observadores en reposo situados en hipersuperficies 3-dimensionales a  $t$  constante.

---


$$F^{\mu\nu} = u^\mu e^\nu - u^\nu e^\mu - \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} u_\alpha b_\beta, \quad (2.8)$$

$$*F^{\mu\nu} = u^\mu b^\nu - u^\nu b^\mu + \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} u_\alpha e_\beta, \quad (2.9)$$

donde  $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$  es la densidad tensorial de Levi-Civita definida como  $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} = \sqrt{-g}[\mu\nu\alpha\beta]$ ,  $g$  es el determinante de la cuatro métrica del espacio-tiempo y  $[\mu\nu\alpha\beta]$ <sup>1</sup> es el símbolo antisimétrico de Levi-Civita,  $*F^{\mu\nu}$  es el dual del tensor  $F^{\mu\nu}$

$$*F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}. \quad (2.10)$$

En un sistema localmente inercial se cumple que

$$e^\mu u_\mu = 0, \quad (2.11)$$

$$b^\mu u_\mu = 0, \quad (2.12)$$

y las componentes de los campos se pueden escribir en términos del tensor de Faraday

$$e^\mu = F^{\mu\nu} u_\nu, \quad (2.13)$$

$$b^\nu = *F^{\mu\nu} u_\mu. \quad (2.14)$$

En forma completa, se puede ver que en un marco de referencia localmente inercial los campos eléctrico y magnético son vectores puramente espaciales

$$e^\mu a_\mu = F^{\mu\nu} u_\nu a_\mu \quad (2.15)$$

---

<sup>1</sup> El símbolo de Levi-Civita esta definida como:

$$[\mu\nu\alpha\beta] = \begin{cases} +1 & \text{permutaciones pares de 1234,} \\ -1 & \text{permutaciones impares de 1234,} \\ 0 & \text{índices repetidos.} \end{cases}$$

---


$$= F^{00}u_0a_0 + F^{0i}u_ia_0 + F^{i0}u_0a_i + F^{ij}u_ia_j \quad (2.16)$$

$$= F^{i0}u_0a_i, \quad (2.17)$$

donde  $a_\mu$  son las componentes de la base construida en la seccion anterior dada por la ecuación (2.7), de manera similar se tiene una expresión para el campo magnético. Explícitamente las componentes de los campos  $e^\mu$  y  $b^\mu$  son

$$e^\mu = (0, E^1, E^2, E^3), \quad (2.18)$$

$$b^\nu = (0, B^1, B^2, B^3), \quad (2.19)$$

donde los campos  $E^i$  y  $B^i$  son vectores de tres dimensiones. Usualmente en magnetohidrodinámica ideal relativista se tienen campos medidos en el marco del fluido que definiremos como  $e^\mu, b^\mu$  y campos medidos por un observador con cuadrivelocidad  $u^\mu$  que definiremos como  $E^i, B^i$ , la relación entre los campos se define más adelante.

Las ecuaciones de Maxwell en forma covariante se pueden escribir en términos del tensor electromagnético de Faraday

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} = J^\mu, \quad (2.20)$$

$$\nabla_\nu^* F^{\mu\nu} = 0, \quad (2.21)$$

donde

$$J^\mu = \rho_q u^\mu + \sigma F^{\mu\nu} u_\nu, \quad (2.22)$$

es la cuadracorriente eléctrica,  $\rho_q$  es la densidad de carga propia (neta) , y  $\sigma$  es la conductividad eléctrica,  $u^\mu$  es la cuadrivelocidad del fluido. El primer término es la corriente debida al movimiento del fluido conductor cargado y el segundo es la ley de Ohm.

---

Con todos los elementos anteriores se tiene que el tensor de energía-momento asociado al campo electromagnético está dado como

$$\begin{aligned}
T_{em}^{\mu\nu} &= F^{\mu\alpha}F_{\alpha}^{\nu} - \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} \\
&= \left(\frac{1}{2}g^{\mu\nu} - u^{\mu}u^{\nu}\right)(e_{\alpha}e^{\alpha} + b_{\alpha}b^{\alpha}) - e^{\mu}e^{\nu} - b^{\mu}b^{\nu} \\
&\quad - u^{\mu}\epsilon^{\nu\alpha\beta\gamma}e_{\alpha}b_{\beta}u_{\gamma} - u^{\nu}\epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}e_{\alpha}b_{\beta}u_{\gamma}.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

## Aproximación de Magnetohidrodinámica ideal

En esta sección se describen las aproximaciones que se impondrán en las ecuaciones de Euler-Maxwell hasta llegar a la RMHD ideal. En esta aproximación se pierden varias características del plasma. Sin embargo la RMHD ideal es una buena aproximación para procesos lentos en los cuales las frecuencias sean menores a la frecuencia de plasma. En esta aproximación el tamaño, la duración, la densidad y la intensidad del campo magnético deben ser tales que el comportamiento del fluido se describa de manera macroscópica. Es decir, la escala de tiempo debe ser mayor que el inverso de la frecuencia del plasma y las escalas deben ser mayor que el radio de Debye. La frecuencia del plasma  $\omega_p = \sqrt{ne^2/(\epsilon_0 m_e)}$ , es la oscilación producida cuando un electrón es desplazado por pequeñas corrientes debido a pequeñas diferencias de carga. En esta expresión  $n$  es la densidad numérica de partículas del plasma. La longitud de Debye  $\lambda_D = \sqrt{\epsilon_0(\frac{1}{2}m\langle v \rangle^2)/(ne^2)}$  se define como la distancia recorrida por una partícula que se mueve a una velocidad  $v$  en un tiempo característico del plasma  $\tau_p = 1/\omega_p$ .

- Usualmente en MHD ideal se usa la suposición de que la magnitud de la corriente de desplazamiento  $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$  comparada con la magnitud de la densidad de corriente  $\mathbf{J}$  es despreciable, dicha razón es del orden de

$$\epsilon_0 \frac{\|\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\|}{J} \sim \frac{10^{-11} s}{\tau}, \tag{2.24}$$

donde  $\tau$  es el tiempo característico, que para algunos escenarios toma los siguientes valores: el núcleo terrestre  $\tau_{nt} = 10^{11} s$ , el sol  $\tau_{sol} = 10^{17} s$ , y jets

---

relativistas  $\tau_{jets} = 10^{13} s$ . En todos estos casos la expresión (2.24) resulta ser al menos del orden de  $10^{-22}$ , suficiente para ser despreciada en las ecuaciones de Maxwell. Esta condición esta ligada a la condición descrita al inicio de esta sección, las escalas de tiempo son más grandes que las escalas de tiempo del plasma.

- El fluido es aproximadamente neutro, es decir,  $\rho_e \rightarrow 0$ , esto implica  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ . Esta condición también implica la primera, ya que al no tener cargas libres no se tienen corrientes de desplazamiento.
- La MHD ideal asume que el fluido es un conductor perfecto, es decir,  $\sigma \rightarrow \infty$ . Por lo que, en el marco de referencia del fluido se debe pedir que  $\mathbf{E} = 0$ . Sin embargo para un observador que se mueve a velocidad  $\mathbf{v}$  la condición  $\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0$  implica que  $\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ .

Las aproximaciones ideales de la magnetohidrodinámica relativista imponen ciertas condiciones a las ecuaciones de Maxwell en forma covariante; la condición de que el fluido sea un conductor perfecto conduce a la necesidad de anular el campo eléctrico en el marco de referencia del fluido a fin de mantener una densidad de corriente finita

$$e^\mu = F^{\nu\mu} u_\nu = 0, \quad (2.25)$$

el tensor electromagnético de Faraday y su dual se reducen y solo tienen la contribución del campo magnético

$$F^{\mu\nu} = -\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} u_\alpha b_\beta, \quad (2.26)$$

$${}^*F^{\mu\nu} = u^\mu b^\nu - u^\nu b^\mu. \quad (2.27)$$

Bajo esta suposición, la evolución del campo magnético está descrita por las ecuaciones

---


$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} = \nabla_\nu(-\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} u_\alpha b_\beta) = J^\mu, \quad (2.28)$$

$$\nabla_\nu(*F^{\mu\nu}) = \nabla_\nu(u^\mu b^\nu - u^\nu b^\mu) = 0. \quad (2.29)$$

La ecuación (2.28) contiene la ley de Ampere, la ley de Gauss para el eléctrico <sup>1</sup> y la ecuación (2.29) la ecuación de evolución del campo magnético, la ley de Faraday y la constricción del campo magnético <sup>2</sup>. Sin embargo, se puede notar que para la evolución del campo solo son necesarias las últimas dos ecuaciones, debido a las aproximaciones definidas arriba.

El tensor electromagnético (2.23) bajo la condición de que el campo eléctrico en el marco de referencia del fluido es cero, se reduce y solo contiene la contribución del campo magnético

$$T_{em}^{\mu\nu} = (u^\mu u^\nu + \frac{1}{2}g^{\mu\nu})b_\alpha b^\alpha - b^\mu b^\nu, \quad (2.30)$$

donde la relación entre los campos medidos en el marco de referencia del fluido  $e^\mu, b^\mu$  y campos medidos por un observador con cuadrivelocidad  $u^\mu$  que definiremos como  $E^i, B^i$  es

$$b^0 = \frac{W B^i v_i}{\alpha}, \quad (2.31)$$

$$b^i = \frac{B^i + \alpha b^0 (v^i - \frac{\beta^i}{\alpha})}{W}, \quad (2.32)$$

---

1

$$\text{Ecuación (2.28)} \begin{cases} \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J}, \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = 0. \end{cases}$$

2

$$\text{Ecuación (2.29)} \begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \end{cases}$$

---

donde  $\alpha$  es la función *lapso*,  $\beta^i$  las componentes del vector de corrimiento y  $W = \frac{1}{\sqrt{1-\gamma_{ij}v^iv^j}}$  es el factor de Lorentz. Es importante hacer notar que de este punto en adelante en la aproximación de RMHD ideal, la contribución electromagnética esta determinada únicamente por el campo magnético.

## Ecuaciones de evolucion de la magnetohidrodinámica ideal relativista en forma conservativa

Las ecuaciones que describen la magnetohidrodinámica ideal en relatividad se derivan de la conservación de la masa, la conservación local del tensor de energía-momento total y las ecuaciones de Maxwell, que bajo la aproximación de MHD ideal se reducen a las ecuaciones para el campo magnético (2.29)

$$\nabla_\mu(\rho u^\mu) = 0, \quad (2.33)$$

$$\nabla_\mu(T^{\mu\nu}) = 0, \quad (2.34)$$

$$\nabla_\mu(u^\mu b^\nu - u^\nu b^\mu) = 0, \quad (2.35)$$

donde  $\nabla_\mu$  es la derivada covariante asociada a la métrica  $g^{\mu\nu}$  y  $T^{\mu\nu}$  es el tensor de energía-momento total, el cuál contiene la contribución del tensor de energía momento del fluido  $T_{fluido}^{\mu\nu} = \rho h u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu}$  y la del tensor de energía-momento del campo electromagnético  $T_{EM}^{\mu\nu}$  definida por la ecuación (2.30)

$$T^{\mu\nu} = (\rho h + b^2)u^\mu u^\nu + (p + b^2/2)g^{\mu\nu} - b^\mu b^\nu, \quad (2.36)$$

donde  $\rho$  es la densidad de masa en reposo<sup>1</sup>,  $h$  es la entalpía específica

$$h = 1 + \epsilon + \frac{p}{\rho}, \quad (2.37)$$

$\epsilon$  es la energía interna específica y  $p$  es la presión del gas.

---

<sup>1</sup>Cabe mencionar que esta cantidad es diferente a la densidad de carga neta  $\rho_q$ .

---

Para tener la evolución de las ecuaciones de la MHD ideal relativista es necesario descomponer las ecuaciones covariantes (2.33-2.35) bajo la descomposición 3+1 del espacio-tiempo. Para ello se definen cantidades proyectadas en la base de un observador euleriano definida por las ecuaciones (2.7). Las cantidades que resultan de dicha proyección son:  $D$  que es la densidad de masa relativista, la densidad de momento  $S_i$  en la dirección  $i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) y la densidad de energía total  $E$

$$D \equiv -J^\nu n_\nu = \rho W, \quad (2.38)$$

$$S_j \equiv T^{\mu\nu} n_\mu a_{(j)\nu} = \rho h^* W^2 v_j - \alpha b^0 b_j, \quad (2.39)$$

$$E \equiv T^{\mu\nu} n_\mu n_\nu = \rho h^* W^2 - p^* - (\alpha b^0)^2, \quad (2.40)$$

donde las variables (\*),  $h^* = h + b^2/\rho$  y  $p^* = p + b^2/2$  son la entalpía total, que es la suma de la entalpía específica y la energía específica magnética  $\epsilon_{mag} = b^2/(2\rho)$  y la presión total que tiene una contribución de la presión del fluido  $p$ , más la presión magnética  $p_{mag} = b^2/2$ , respectivamente.

Las ecuaciones de conservación (2.33-2.35) definirán las ecuaciones de evolución de las nuevas variables proyectadas en la base Euleriana. Desarrollando la suma de índices en la ecuación (2.33) se tiene

$$\partial_t [\sqrt{\gamma} D] + \partial_j [\alpha \sqrt{\gamma} D (v^j - \beta^j / \alpha)] = 0,$$

donde  $\alpha$  es la función lapso,  $\beta^i$  las componentes del vector de corrimiento y  $\gamma$  el determinante de la 3-métrica respectivamente. Sin embargo, para escribir la ecuación de conservación del tensor de energía-momento en términos de las cantidades proyectadas, se define la divergencia del tensor de energía-momento proyectada en la base euleriana, de manera que la conservación local del tensor de energía-momento se reescribe como  $\nabla_\mu (T^{\mu\nu} a_{(\mu)\nu}) = T^{\mu\nu} \nabla_\mu (a_{(\mu)\nu})$ <sup>1</sup>.

Consideremos primero las componentes  $a_{(i)\nu}$ ,  $\nabla_\mu (T^{\mu\nu} a_{(i)\nu}) = T^{\mu\nu} \nabla_\mu (a_{(i)\nu})$  sustituyendo todos los términos se tiene

---

<sup>1</sup> Esta expresión se obtiene la ecuación (2.35), al sustituir  $T^{\mu\nu}$  por  $T^{\mu\nu} a_{(\mu)\nu}$ .

---


$$\begin{aligned}
& \partial_t \left[ \sqrt{\gamma} (\rho h^* W^2 v_i - \alpha b^0 b_i) \right] \\
& + \partial_j \left[ \alpha \sqrt{\gamma} \left( \rho h^* W^2 (v^j - \beta^j / \alpha) v_i + p^* - b^j b_i \right) \right] \\
& = \alpha \sqrt{\gamma} T^{\mu\nu} \nabla_\mu (a_{(i)\nu}),
\end{aligned} \tag{2.41}$$

donde la parte derecha de la ecuación, que es la derivada covariante de la base Euleriana es  $\nabla_\mu (a_{(i)\nu}) = \partial_\mu g_{i\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\delta g_{i\delta}$ , donde  $\Gamma_{\mu\nu}^\delta = \frac{1}{2} g^{\delta\beta} (g_{\mu\beta,\nu} + g_{\nu\beta,\mu} - g_{\mu\nu,\delta})$  son las componentes del símbolo de Christoffel.

Finalmente se tiene la ecuación de evolución de la densidad de momento

$$\begin{aligned}
& \partial_t \left[ \sqrt{\gamma} S_i \right] + \partial_j \left[ \alpha \sqrt{\gamma} \left( S_i (v^j - \beta^j / \alpha) + p^* \delta_i^j - b^j b_i \right) \right] \\
& = \alpha \sqrt{\gamma} T^{\mu\nu} (\partial_\mu g_{i\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\delta g_{i\delta}).
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Ahora se hace el desarrollo para la componente  $(a_{(0)\nu})$  de la ecuación de conservación local del tensor de energía-momento en su forma reescrita  $\nabla_\mu (T^{\mu\nu} a_{(0)\nu}) = T^{\mu\nu} \nabla_\mu (a_{(0)\nu})$ .

Desarrollando los términos del tensor de energía-momento se tiene

$$\begin{aligned}
& \partial_t \left[ \sqrt{\gamma} (\rho h^* W^2 - p^* - \alpha^2 b^0 b^0) \right] \\
& + \partial_j \left[ \alpha \sqrt{\gamma} \left( \rho h^* W^2 (v^j - \beta^j / \alpha) v_i + p^* \beta^i / \alpha - \alpha b^j b_i \right) \right] \\
& = \alpha \sqrt{\gamma} T^{\mu\nu} \nabla_\mu (a_{(0)\nu}),
\end{aligned} \tag{2.43}$$

y desarrollando la parte derecha de la ecuación  $T^{\mu\nu} \nabla_\mu (a_{(0)\nu}) = T^{\mu 0} \partial_\mu \alpha - T^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^0 \alpha$ , se tiene

$$\begin{aligned}
& \partial_t \left[ \sqrt{\gamma} (E - D) \right] + \partial_j \left[ \alpha \sqrt{\gamma} \left( (E - D) (v^j - \beta^j / \alpha) + p^* v^j - b^j b_0 \right) \right] \\
& = \alpha \sqrt{\gamma} (T^{\mu 0} \partial_\mu \alpha - T^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^0 \alpha).
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Si se define una nueva variable  $\tau \equiv E - D$ , que es la diferencia entre la densidad

---

de energía total y la densidad de energía relativista

$$\begin{aligned} \partial_t [\sqrt{\gamma}\tau] + \partial_j [\alpha\sqrt{\gamma}(\tau(v^j - \beta^j/\alpha) + p^*v^j - b^jb_0)] \\ = \alpha\sqrt{\gamma}(T^{\mu 0}\partial_\mu\alpha - T^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}^0\alpha). \end{aligned} \quad (2.45)$$

El conjunto de ecuaciones de la MHD ideal relativista se puede escribir en forma de ley de balance, más una constricción

$$\frac{\partial\sqrt{\gamma}\vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial\sqrt{-g}\vec{F}^i}{\partial x^i} = \sqrt{-g}\vec{S}, \quad (2.46)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.47)$$

donde  $\vec{U}$  es el vector de variables conservativas,  $\vec{F}^i$  es el vector de flujos y  $\vec{S}$  es el vector de fuentes, cuyas componentes son

$$\vec{U} = \begin{bmatrix} D \\ S_j \\ \tau \\ B^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho W \\ \rho h^* W^2 v_j - \alpha b^0 b_j \\ \rho h^* W^2 - p^* - \alpha^2 (b^0)^2 - \rho W \\ B^k \end{bmatrix}, \quad (2.48)$$

$$\vec{F}^i = \begin{bmatrix} D(v^i - \frac{\beta^i}{\alpha}) \\ S_j(v^i - \frac{\beta^i}{\alpha}) + p^*\delta_j^i - b^i b_j \\ \rho h^* W^2(v^i - \frac{\beta^i}{\alpha}) + p^*\beta^i/\alpha - \alpha b^0 b^i \\ (v^i - \frac{\beta^i}{\alpha})B^k - (v^k - \frac{\beta^k}{\alpha})B^i \end{bmatrix}, \quad (2.49)$$

$$\vec{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ T^{\mu\nu}g_{\nu\sigma}\Gamma_{\mu j}^\sigma \\ (T^{\mu 0}\partial_\mu\alpha - T^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}^0\alpha) \\ 0^k \end{bmatrix}, \quad (2.50)$$

donde los índices  $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ , los índices  $j, k = 1, 2, 3$  indican las componentes de la densidad de momento y las componentes del campo magnético respecti-

---

vamente,  $0^k = (0, 0, 0)^T$  y el índice  $i = 1, 2, 3$  que indica la dirección del flujo calculado.

Para tener un sistema de ecuaciones cerrado, se determina la relación entre  $\rho$ ,  $\epsilon$  y  $p$  mediante la ecuación de estado

$$p = \rho\epsilon(\Gamma - 1), \quad (2.51)$$

donde  $\Gamma$  es el índice adiabático del gas. En este caso se ha elegido la de un gas ideal.

### 2.3. Estructura característica de la MHD

La estructura característica de las matrices jacobianas del sistema de ecuaciones de la MHD ideal relativista en variables conservativas, no es la más adecuada según la experiencia de autores que han trabajado en la MHD ideal. El cálculo de los eigenvalores y eigenvectores resulta más fácil usando el sistema de variables covariantes definidos por Anile [1989],  $\tilde{U} = (u^\alpha, b^\alpha, p, s)^T$ , donde  $s$  es la entropía específica.

Para ello, se parte de las ecuaciones de conservación en forma covariante y las ecuaciones de Maxwell para el campo magnético definidas en las ecuaciones (2.33, 2.35, 2.35)

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha T^{\alpha\beta} &= 0, \\ \nabla_\alpha(\rho u^\alpha) &= 0, \\ \nabla_\alpha(u^\alpha b^\beta - u^\beta b^\alpha) &= 0, \end{aligned}$$

A diferencia de la sección anterior, ahora se escriben las ecuaciones de la MHD en forma no conservativa, solo para obtener la estructura característica del sistema. Sin embargo, cabe recalcar que las ecuaciones (2.46) y (2.47) son las que se usarían para la evolución del fluido y del campo magnético. Se procede proyectando la

---

ecuación (2.52) a lo largo de  $u_\nu$ <sup>1</sup>

$$u_\nu \nabla_\mu (u^\mu b^\nu - u^\nu b^\mu) = u_\nu u^\mu \nabla_\mu b^\nu + \nabla_\mu b^\mu = 0. \quad (2.52)$$

Ahora se proyecta la ecuación (2.52) a lo largo de  $b_\nu$

$$b_\nu \nabla_\mu (u^\mu b^\nu - u^\nu b^\mu) = b^2 \nabla_\mu u^\mu + \frac{1}{2} u_\mu \nabla_\mu (b^2) - b_\nu b^\mu \nabla_\mu u^\nu = 0. \quad (2.53)$$

De la misma forma, ahora se contrae la ecuación (2.52) a lo largo de  $u_\mu$

$$u^\nu \nabla_\nu (\rho + \epsilon \rho) + \rho h \nabla_\nu u^\nu = 0. \quad (2.54)$$

Sustituyendo la ecuación (2.52) en la ecuación (2.54) se tiene que

$$u^\nu \left[ \nabla_\nu \epsilon - \frac{p}{\rho^2} \nabla_\nu \rho \right] = 0. \quad (2.55)$$

Usando que  $T ds = d\epsilon - \frac{p}{\rho^2} d\rho$ , se tiene la condición adiabática

$$u^\nu \nabla_\nu s = 0. \quad (2.56)$$

Con el fin de obtener una ecuación para la presión, se usa la condición adiabática y la definición de la velocidad del sonido con  $s = cte$ ,  $C_s^2 = \frac{1}{h} (\partial p / \partial \rho)_s = \frac{1}{h} (\nabla_\nu p / \nabla_\nu \rho)_s$  en la ecuación (2.54) obteniendo

$$\frac{u^\nu}{C_s^2} \nabla_\nu p + \rho h \nabla_\nu u^\nu = 0. \quad (2.57)$$

Proyectando la ecuación (2.52) a lo largo de  $b_\nu$  se tiene la relación

---

<sup>1</sup>También se han usado las relaciones  $u^\nu u^\nu = -1$ ,  $b^\nu u_\nu = 0$  y  $u_\nu \nabla_\mu u^\nu = \frac{1}{2} \nabla_\mu u^\nu u_\nu = 0$ .

---


$$u^\mu u^\nu \nabla_\mu b_\nu - \frac{b^\mu}{\rho h} \nabla_\mu p = 0. \quad (2.58)$$

Ahora calculamos  $h_{\mu\nu} \nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$ , haciendo uso de la ecuación (2.53) se obtiene

$$\begin{aligned} E u^\alpha \nabla_\alpha u^\mu - b^\alpha \nabla_\alpha b^\mu + (h^{\mu\alpha} + u^\mu U^\alpha) b_\nu \nabla_\alpha b^\nu + \\ \frac{1}{\rho h} (\rho h h^{\mu\alpha} - \frac{b^2}{C_s^2} u^\mu u^\alpha + b^\mu b^\alpha) \nabla_\alpha p = 0, \end{aligned} \quad (2.59)$$

donde

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu, \quad (2.60)$$

$$E = \rho h + b^2, \quad (2.61)$$

$h_{\mu\nu}$ <sup>1</sup> es el proyector de vectores y tensores sobre hipersuperficies de tres dimensiones ortogonales a  $u^\mu$  y  $E$  es la energía total (fluido + magnética) medida en el marco de referencia del fluido.

Para obtener la ecuación para  $b^\mu$ , se introducen las ecuaciones (2.57) y (2.58) en la ecuación (2.52), obteniendo

$$u^\mu \nabla_\mu b^\nu - b^\mu \nabla_\mu u^\nu + \frac{1}{\rho h} (u^\nu b^\mu - \frac{b^\nu u^\mu}{C_s^2}) \nabla_\mu p = 0. \quad (2.62)$$

Finalmente, el conjunto de ecuaciones (2.56, 2.57, 2.59, 2.62) de la MHD ideal relativista para las variables de Anile  $\tilde{U} = (u^\alpha, b^\alpha, p, s)^T$  son

$$\begin{aligned} u^\mu \nabla_\mu S &= 0, \\ \frac{u^\mu}{C_s^2} \nabla_\mu p + \rho h \nabla_\mu u^\mu &= 0, \\ E u^\alpha \nabla_\alpha u^\mu - b^\alpha \nabla_\alpha b^\mu + (h^{\mu\alpha} + u^\mu u^\alpha) b_\nu \nabla_\alpha b^\nu + \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Nótese que  $h_{\mu\nu} = P_{\mu\nu}$  cuando  $u^\mu = n^\mu$ .

---


$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho h}(\rho h h^{\mu\alpha} - \frac{b^2}{C_s^2} u^\mu u^\alpha + b^\mu b^\alpha) \nabla_\alpha p &= 0, \\ u^\alpha \nabla_\alpha b^\mu - b^\alpha \nabla_\alpha u^\mu + \frac{1}{\rho h} (u^\mu b^\alpha - \frac{b^\mu u^\alpha}{C_s^2}) \nabla_\alpha p &= 0,\end{aligned}$$

donde  $\alpha = 0, 1, 2, 3$  y  $\lambda, \sigma = 0, 1, \dots, 10$ . Se puede ver que estas ecuaciones se pueden reescribir en forma cuasilineal  $(A^\alpha)^\lambda_\sigma \nabla_\alpha \tilde{U}^\sigma = 0$ . Esto se hace con la finalidad de facilitar el estudio de la estructura característica de MHD ideal relativista. Identificando cuidadosamente los términos de cada ecuación, se tiene que las componentes de la matriz <sup>1</sup>  $A^\alpha$  son

$$A^\alpha = \begin{pmatrix} Eu^\alpha \delta_\nu^\mu & -b^\alpha \delta_\nu^\mu + \tilde{p}^{\mu\alpha} b_\nu & l^{\mu\alpha} & 0^\mu \\ b^\alpha \delta_\nu^\mu & -u^\alpha \delta_\nu^\mu & f^{\mu\alpha} & 0^\mu \\ \rho h \delta_\nu^\alpha & 0_\nu & u^\alpha / C_s^2 & 0 \\ 0_\nu & 0_\nu & 0 & u^\alpha \end{pmatrix} \quad (2.63)$$

donde  $0_\nu = (0, 0, 0, 0)$ ,  $0^\mu = (0, 0, 0, 0)^T$ ,  $\delta_\nu^\mu$  es la delta de Kronecker, y

$$\tilde{p}^{\mu\alpha} = h^{\mu\alpha} + u^\mu u^\alpha, \quad (2.64)$$

$$l^{\mu\alpha} = g^{\mu\alpha} + [(\rho h - b^2 / C_s^2) u^\mu u^\alpha + b^\mu b^\alpha] / \rho h, \quad (2.65)$$

$$f^{\mu\alpha} = [b^\mu u^\alpha / C_s^2 - u^\mu b^\alpha] / \rho h. \quad (2.66)$$

Cabe señalar que estas ecuaciones, se escribieron bajo las condiciones<sup>2</sup>

$$u^\alpha u_\alpha = -1, \quad b^\alpha u_\alpha = 0, \quad \nabla_\mu (u^\mu b^0 - u^0 b^\mu) = 0, \quad (2.67)$$

restricciones que se deben considerar al calcular los eigenvalores del sistema. Se tienen 10 variables que sujetas a las restricciones anteriores resultan ser siete variables independientes, por lo que se esperan obtener siete eigenvalores para cada dirección espacial.

---

<sup>1</sup>Se tendran cuatro matrices, una por cada valor de  $\alpha = 0, 1, 2, 3$ .

<sup>2</sup>Recordemos que la condición  $u^\alpha u_\alpha = -1$ , viene de la propiedad de que  $u^\nu$  es un vector tipo tiempo.

---

Para calcular los eigenvalores se introduce una función  $\phi(x^\beta) = 0$ , esta función describe la hipersuperficie característica asociada a cada uno de los eigenvalores, en cada hipersuperficie característica se cumple que  $\det(A^\alpha \phi_\alpha) = 0$ . Dicha superficie que cumple esta condición, representa la propagación de la onda correspondiente a un eigenvalor en el espacio-tiempo. La matriz característica de MHD relativista para alguna dirección espacial se puede escribir como

$$A^\alpha \phi_\alpha = \begin{pmatrix} Ea\delta_\nu^\mu & m_\nu^\mu & l^\mu & 0^\mu \\ \mathcal{B}\delta_\nu^\mu & -a\delta_\nu^\mu & f^\mu & 0^\mu \\ \rho h\phi_\nu & 0_\nu & a/C_s^2 & 0 \\ 0_\nu & 0_\nu & 0 & a \end{pmatrix} \quad (2.68)$$

donde aparecen algunas cantidades contraídas con  $\phi_\alpha$

$$a = u^\alpha \phi_\alpha, \quad (2.69)$$

$$\mathcal{B} = b^\alpha \phi_\alpha, \quad (2.70)$$

$$m_\nu^\mu = (\phi^\mu + 2u^\mu a)b_\nu - \mathcal{B}\delta_\nu^\mu, \quad (2.71)$$

$$l^\mu = \phi^\mu + [(\rho h - b^2/C_s^2)u^\mu a + b^\mu \mathcal{B}] / \rho h, \quad (2.72)$$

$$f^\mu = [b^\mu a/C_s^2 - u^\mu \mathcal{B}] / \rho h. \quad (2.73)$$

Ahora para calcular los eigenvalores  $\lambda^\sigma$  de cada una de las matrices características, se procede de manera usual, calculando el determinante de  $A^\alpha \phi_\alpha$

$$\det(A^\alpha \phi_\alpha) = Ea^2 \mathcal{A}^2 N_4 = 0, \quad (2.74)$$

donde, los términos que aparecen son respectivamente  $a = u^\alpha \phi_\alpha$ ,  $\mathcal{A} = Ea^2 - \mathcal{B}$ ,  $N_4 = \rho h(\frac{1}{C_s^2} - 1)a^4 - (\rho h + \frac{b^2}{C_s^2})a^2 G + \mathcal{B}^2 G$ ,  $G = \phi^\alpha \phi_\alpha$ .

Sin embargo, debido a que la matriz anterior está escrita para una dirección en general, en este punto se tiene que escoger una en particular. En coordenadas cartesianas, en tres dimensiones, se define  $\phi_\alpha = (-\lambda, 1, 0, 0)$  como una hipersu-

---

perficie característica correspondiente a una onda propagándose en la dirección  $x$  con una velocidad  $\lambda$ .

Habiendo escogido la dirección  $x$  en específico, se desarrollan los términos  $(a, \mathcal{B}, G)$  y definiendo una variable auxiliar  $\eta$  se obtienen las siguientes expresiones

$$\eta \equiv \frac{\lambda + \beta^x}{\alpha}, \quad (2.75)$$

$$G = -\eta^2 + \gamma^{xx}, \quad (2.76)$$

$$\mathcal{B} = -b^0(\alpha\eta - \beta^x) + b^x, \quad (2.77)$$

$$a = -W(\eta + v^x). \quad (2.78)$$

Regresando a la ecuación (2.74), la cual debe cumplirse para encontrar los eigenvalores del sistema de ecuaciones de la MHD ideal, nos concentramos en el primer factor que es  $E$  la energía total medida en el marco de referencia del fluido por lo tanto es positivo, el segundo factor es  $a^2$  entonces para que la expresión se cumpla se exige que  $a^2 = 0$ , de dicha condición se obtiene el primer eigenvalor. El eigenvalor entrópico

$$\lambda = \alpha(v^x - \beta^x/\alpha). \quad (2.79)$$

La siguiente posibilidad es que el tercer factor cumpla que  $\mathcal{A} = Ea^2 - \mathcal{B} = 0$  de esta manera se obtienen dos eigenvalores. Los eigenvalores de Alfvén

$$\lambda_{\pm} = \frac{b^x \pm \sqrt{Eu^x}}{b^0 \pm \sqrt{Eu^0}}. \quad (2.80)$$

Finalmente, se impone la condición de que el factor  $N_4$  sea cero obteniendo una ecuación cuártica para  $a$ ,  $\rho h(\frac{1}{C_s^2} - 1)a^4 - (\rho h + \frac{b^2}{C_s^2})a^2G + \mathcal{B}^2G = 0$ , que se puede expresar como

$$a_4\eta^4 + a_3\eta^3 + a_2\eta^2 + a_1\eta^1 + a_0 = 0, \quad (2.81)$$

donde  $\eta$  y los coeficientes  $a_{0,1,2,3}$  son

$$\begin{aligned}
\eta &= \frac{\lambda + \beta^x}{\alpha}, \\
a_4 &= 1 - \Omega^2 + \Omega^2/W^2 - \frac{(\alpha b^0)^2}{EW^4}, \\
a_3 &= -4v^x(1 - \Omega^2) - \frac{2v^x\Omega^2}{W^2} + 2\alpha C_s^2 \frac{(b^0\beta^x - b^0b^x)}{EW^4}, \\
a_2 &= 6(v^x)^2(1 - \Omega^2) - \frac{(\gamma^{xx} - (v^x)^2)\Omega^2}{W^2} \\
&\quad + \frac{[\gamma^{xx}(\alpha b^0)^2 - (b^0\beta^x)^2 + 2b^0b^1\beta^x - (b^x)^2]C_s^2}{EW^4}, \\
a_1 &= -4(v^x)^3(1 - \Omega^2) + \frac{2\gamma^{xx}v^x\Omega^2}{W^2} - 2\alpha\gamma^{xx}C_s^2 \frac{((b^0)^2\beta^x - b^0b^x)}{EW^4}, \\
a_0 &= (v^x)^4(1 - \Omega^2) - \gamma^{xx} \frac{(v^x)^2\Omega^2}{W^2} + \gamma^{xx} \frac{((b^2\beta^x)^2 - 2b^0b^x\beta^x + (b^x)^2)C_s^2}{EW^4},
\end{aligned}$$

aparece una cantidad relacionada con la velocidad del sonido  $C_s$  y la velocidad de Alfvén  $C_A^2 = b^2/E^1$ ,  $\Omega^2 = C_s^2 + C_A^2 - C_s^2C_A^2$ .

Algunos autores resuelven numéricamente o analíticamente esta ecuación, obteniendo las velocidades características relacionadas con dos ondas magnetosónicas lentas y dos rápidas. Sin embargo, en este trabajo no se calculan las 4 velocidades características magnetosónicas, ya que los métodos numéricos implementados en el código solo requieren de las velocidades magnetosónicas rápidas. Para calcularlas usaremos la prescripción de [T. Leismann \[2005\]](#). Esta consiste en reescribir la ecuación  $N_4$  de la forma

$$\left(\frac{\mathcal{B}}{a}\right)^2 = \left(\rho h + \frac{b^2}{C_s^2}\right) - \rho h \left(\frac{1}{C_s^2} - 1\right) \frac{a^2}{G}. \quad (2.82)$$

El requisito de que los eigenvalores sean reales conduce a que  $\mathcal{B}$  y  $a$  sean positivas, por lo tanto la parte izquierda de la ecuación debe ser positiva también. Como consecuencia, de la ecuación (2.82) se obtiene la desigualdad

<sup>1</sup>La velocidad de Alfvén en la dirección  $x$  es  $V_A \sim B/\sqrt{E}$ , [Alfvén \[1942\]](#).

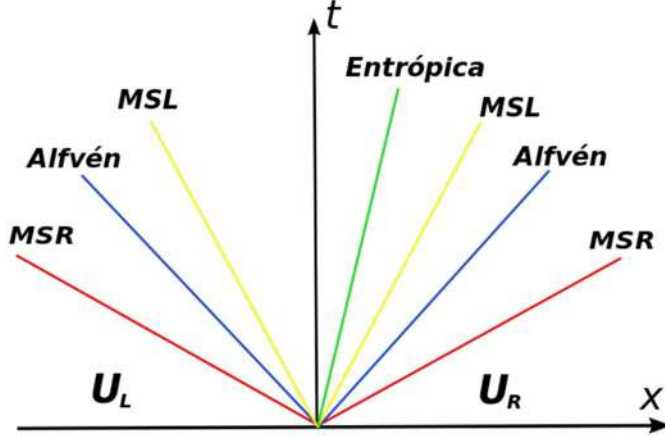


Figura 2.2: En esta figura se muestra el conjunto completo de eigenvalores de la MHD ideal, de manera ordenado. Los eigenvalores magnetosónicos rápidos MSR, los eigenvalores de Alfvén, los eigenvalores magnetosónicos lentos MSL una que viaja a la derecha y una a la izquierda, respectivamente. Y el eigenvalor entrópico.

$$\left(\rho h + \frac{b^2}{C_s^2}\right) - \rho h \left(\frac{1}{C_s^2} - 1\right) \frac{a^2}{G} \geq 0, \quad (2.83)$$

la cual es una ecuación cuadrática. Usando los valores de  $a$  y  $G$  de las ecuaciones (2.76) y (2.78), respectivamente, en la ecuación (2.83), se obtienen los eigenvalores correspondientes a las ondas magnetosónicas rápidas,

$$\begin{aligned} \lambda_{\pm} &= \frac{W^2(-\alpha v^x + \beta^x) + \Omega^2(W^2(\alpha v^x - \beta^x) + \beta^x)}{-\Omega^2 + W^2(\Omega^2 - 1)} \\ &\pm \frac{\sqrt{\alpha^2 \Omega^2 (W^2(\gamma^{xx} - v^x v^x) + \Omega^2 (W^2(v^x v^x - \gamma^{xx}) + \gamma^{xx}))}}{-\Omega^2 + W^2(\Omega^2 - 1)}. \end{aligned} \quad (2.84)$$

Estos eigenvalores contienen la información de perturbaciones en el fluido (que asociamos con  $C_s$ ), así como perturbaciones magnéticas (que asociamos con  $C_A$ ), de ahí el nombre magnetosónico. Es sencillo ver que la ecuación (2.84), cuando el campo magnético es cero se reduce a los eigenvalores que se obtienen en la

---

hidrodinámica relativista.

Como se puede ver en la Figura 2.2, en este trabajo solo se han obtenido cinco eigenvalores. De acuerdo a la figura los eigenvalores magnetosónicos lentos son faltantes. Sin embargo como se podrá ver más adelante, los métodos numéricos empleados en el código desarrollado no requieren dichos valores. El cálculo de los eigenvalores en la dirección  $y$  y en la dirección  $z$  se pueden obtener de manera similar.

De esta forma, en este capítulo se han descrito las ecuaciones de la RMHD ideal y su estructura característica, necesarias para proceder a la implementación numérica. Y para ello en el siguiente capítulo se introducen las herramientas numéricas necesarias.

## Capítulo 3

# Métodos Numéricos

El sistema de ecuaciones de la MHD ideal relativista es un sistema de ecuaciones, que pueden desarrollar discontinuidades independientemente de que los datos iniciales sean suaves. Por esta razón, los métodos basados en diferencias finitas son insuficientes para el tratamiento de este tipo de ecuaciones, sin embargo, en el pasado se han hecho intentos de usar diferencias finitas agregando disipación artificial para poder resolver las discontinuidades. Debido a que parte importante de los modelos en astrofísica involucran la propagación de ondas de choque, el uso de disipación artificial afecta en gran medida los modelos. Existen diferentes métodos para la resolución del sistema de ecuaciones de la MHD en relatividad, en particular en este trabajo las ecuaciones de la magnetohidrodinámica relativista se resuelven numéricamente mediante métodos de alta resolución con captura de choques (*High Resolution Shock Capturing Methods* HRSC).

Este tipo de métodos se basan en la discretización de volumen finito. En la MHD ideal relativista además de la ecuación en forma de ley de balance (2.46), se tiene adicionalmente una ecuación de constricción relacionada con la ausencia de monopolos magnéticos dada por la ecuación (2.47). Para controlar la constricción se usan métodos adaptados a volúmenes finitos, a pesar de que existen varios métodos como: *8-wave method*, *Field-Constraint Transport*, *Flux-Constraint Transport*, *Cleaning*. En este trabajo se usan los métodos de "transporte de flujo restringido" (*Flux-Constraint Transport*) Flux-CT que consiste en escoger una discretización adecuada de los flujos para preservar la constricción y *Cleaning* que

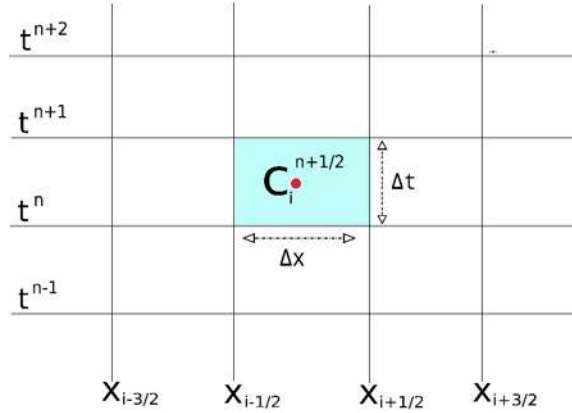


Figura 3.1: *Discretización de la malla numérica en el esquema de volúmenes finitos. En esta figura se muestra un elemento de volumen del espacio-tiempo  $\Delta V = \Delta t \Delta x$  en una dimensión espacial definida en la celda que ocupa el dominio  $[t^n, t^{n+1}] \times [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ . En este esquema, el centro de la celda  $C_i^{n+1/2}$  está localizado en  $(t^{n+1/2}, x_i)$ .*

consiste en controlar la constricción mediante una variable de evolución adicional y un término de disipación. En este capítulo se hace una descripción de los métodos utilizados para resolver el sistema de ecuaciones de la magnetohidrodinámica ideal relativista.

### 3.1. Discretización en volumen finito

El método de volúmenes finitos consiste en resolver las ecuaciones tipo ley de balance en su forma integral sobre un volumen  $V$ . Para ilustrar el método, considérese una malla numérica con una dimensión espacial y una temporal  $\vec{x} = (t^n, x_i)$ , donde la coordenada temporal se discretiza como  $t^n = n\Delta t$  y la coordenada espacial como  $x_i = i\Delta x$ ,  $n = 0, 1, 2, 3, \dots, N_t$  e  $i = 0, 1, 2, 3, \dots, N_x$  son las etiquetas de las celdas en las que se divide el dominio espacio-temporal en cuestión. La malla numérica resultante se puede apreciar en la Figura 3.1.

La ecuación de ley de balance de flujos (2.46) se puede escribir en una dimensión como

---


$$\partial_t \mathbf{q} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{q}) = \mathbf{s}, \quad (3.1)$$

donde el vector  $\mathbf{q}$  tiene como componentes a las variables conservativas definidas en la ecuación (2.48),  $\mathbf{f}(\mathbf{q})$  son los flujos definidos en la ecuación (2.49), y  $\mathbf{s}$  son los términos fuente dados por la ecuación (2.50). Se desea integrar en cada una de las celdas de la malla numérica. Integrando la ecuación (3.1) en el elemento de volumen de la Figura 3.1, se tiene la expresión

$$\frac{1}{V} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \left\{ \partial_t \mathbf{q} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{q}) \right\} dx dt = \frac{1}{V} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{s} dx dt,$$

de tal manera que el avance temporal de las variables conservativas  $q$  puede ser calculado mediante la expresión

$$\mathbf{Q}_i^{n+1} = \mathbf{Q}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{F}_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) + \mathbf{S} \Delta t, \quad (3.2)$$

donde  $\mathbf{Q}_i^n$  es la integral de las variables  $\mathbf{q}_i^n$  a lo largo de  $x$ . Esta cantidad se puede interpretar como un promedio espacial de las variables conservativas en cada una de las celdas numéricas

$$\mathbf{Q}_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{q}(t_n, x) dx. \quad (3.3)$$

Los términos fuente  $\mathbf{S}$ , son cantidades promediadas tanto en el espacio como en el tiempo en el dominio  $[t^n, t^{n+1}] \times [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$  de la celda  $C_i^{n+1/2}$

$$\mathbf{S}_i^n = \frac{1}{\Delta x \Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{s}(t, x) dx dt. \quad (3.4)$$

Del mismo modo se calculan los flujos numéricos como un promedio temporal, de

---

tal manera que los flujos a través de las inter-celdas numéricas  $\mathbf{F}_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$  se definen como

$$\mathbf{F}_{i\pm 1/2}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{f}[\mathbf{q}(t, x_{i\pm 1/2})] dt. \quad (3.5)$$

Este último término debe recibir un tratamiento especial, ya que estos flujos numéricos son calculados en las interceldas donde el fluido puede ser discontinuo, de tal forma que para obtenerlos es necesario resolver el problema de Riemann exacto o aproximado en las fronteras de las interceldas. Los métodos numéricos que se usan en este trabajo se basan en el método Godunov [Godunov \[1959\]](#), que consiste precisamente en definir y resolver el problema de Riemann en cada intercelda de la malla numérica.

Existen en la actualidad varios resolvedores de el problema de Riemann aproximados, el método Roe desarrollado por [Roe \[1986\]](#), el método HLLC por [Einfeldt \[1988\]](#); [P. Harten \[1983\]](#), HLLC por [Gurski \[2004\]](#); [Li \[2005\]](#); [Titarev \[2004\]](#), el método Marquina por [Marquina \[1994\]](#). Una compilación de diferentes métodos se puede encontrar en el libro de [Toro \[1997\]](#).

## 3.2. Reconstrucción de variables

El cálculo de los flujos numéricos mediante resolvedores de Riemann, requiere del conocimiento de las variables primitivas y conservativas a la izquierda y derecha de cada intercelda numérica, para lo cual se reconstruyen las variables que en cada celda representarán estados de un problema de Riemann. En esta sección describiremos solo algunos de los tantos reconstructores que existen, limitándonos a los métodos usados en el código desarrollado. En el método de Godunov, las variables se reconstruyen como constantes por pedazos. Sin embargo, existen varios métodos de reconstrucción que tienen una aproximación lineal o parabólica o incluso polinomial.

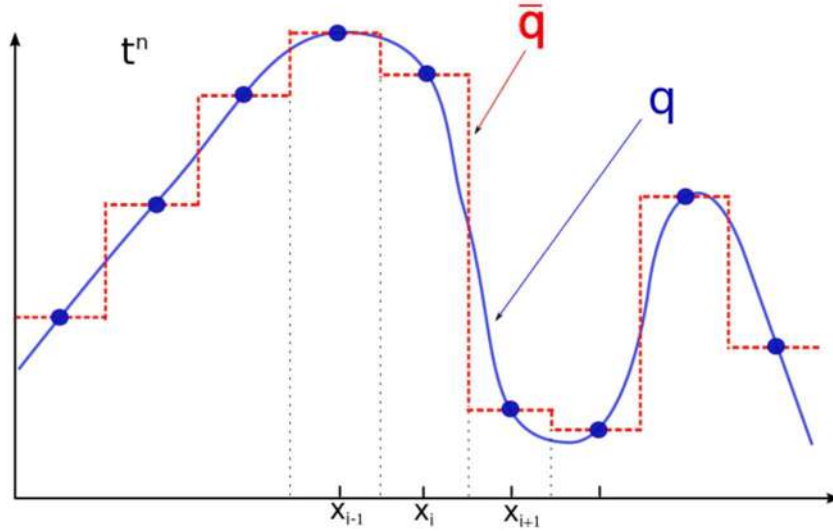


Figura 3.2: En esta figura se muestra la aproximación constante por pedazos de la función  $q(x, t)$ , resultando una función  $\bar{q}(x, t)$ , compuesta por funciones escalón en cada intercelda.

### 3.2.1. Constante por pedazos: Método de Godunov

El método de Godunov, es la forma más sencilla de reconstruir o aproximar una función. Este método aproxima la función  $q(x, t)$  con valores constantes definidos en la malla numérica  $x_i$  obteniendo una función constante por pedazos  $\bar{q}(x, t)$  como se muestra en la Figura 3.2. Bajo esta aproximación, en cada interfase entre celdas localizada en  $x_{i+1/2}$  se definen valores a izquierda  $\bar{q}_L$  y valores a la derecha  $\bar{q}_R$  de la interfase, estos valores se definen de la siguiente manera

$$\bar{q}_{i+1/2}^L = q_i, \quad (3.6)$$

$$\bar{q}_{i+1/2}^R = q_{i+1}, \quad (3.7)$$

Este método aunque es fácil de implementar y de poco costo computacional es poco usado debido a que disipa mucho las discontinuidades, lo cual es inconveniente.

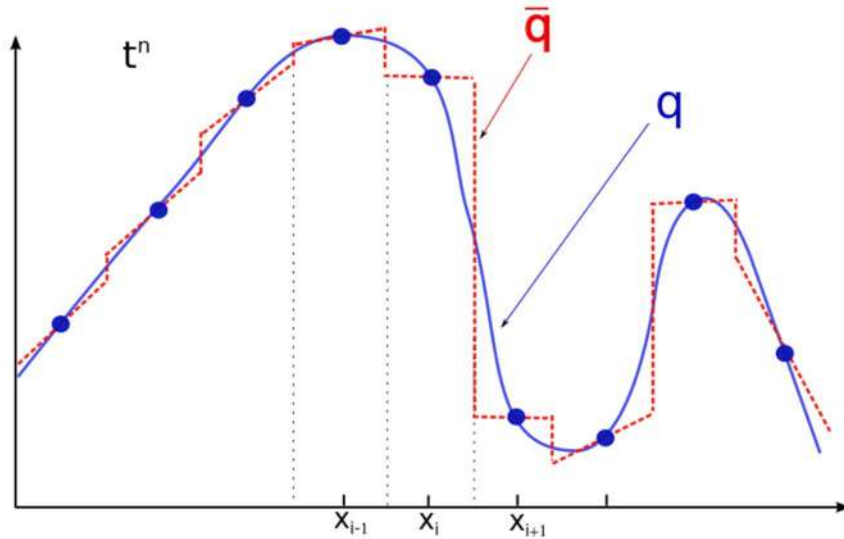


Figura 3.3: *Reconstrucción lineal por pedazos. Aquí se muestra de manera ilustrativa una función  $\bar{q}$  construida con funciones lineales en cada celda con el método minmod.*

### 3.2.2. Lineal por pedazos

La aproximación lineal por pedazos de la función  $q(x, t)$  mejora la precisión de la aproximación, con un error de segundo orden. Como se muestra en la Figura 3.3, éste método consiste en construir una función por pedazos, con líneas rectas con una pendiente aproximada. Esta pendiente puede escogerse de diferentes maneras, a continuación se describen los métodos MINMOD Roe [1986] y MC Leer [1977].

#### Minmod

Como su nombre lo indica este método reconstruye las variables con líneas rectas a pedazos. Para calcular la pendiente de dicha función lineal en la interfase  $x_{i+1/2}$ , se requieren valores de  $q(x, t)$  en los puntos vecinos  $q_{i-1}$ ,  $q_i$  y  $q_{i+1}$ . Se calcula las pendientes auxiliares  $m1 = m_{i-1/2}$ ,  $m2 = m_{i+1/2}$  y  $m3 = m_{i+3/2}$ , donde la pendiente centrada en  $x_{i+1/2}$  se define como

---


$$m_{i+1/2} = \frac{q_{i+1} - q_i}{x_{i+1} - x_i}. \quad (3.8)$$

La variable aproximada  $\bar{q}$  se puede construir usando la formula

$$\bar{q}_{i+1/2}^L = q_i + \sigma_i(x_i - x_{i-1/2}), \quad (3.9)$$

$$\bar{q}_{i+1/2}^R = q_{i+1} + \sigma_{i+1}(x_i - x_{i+1/2}), \quad (3.10)$$

donde el valor de las pendientes  $\sigma_i = \sigma(m1, m2)$  y  $\sigma_{i+1} = \sigma(m2, m3)$ , se determina mediante la función *minmod*

$$\sigma = \text{minmod}(a, b) = \begin{cases} a & \text{si } |a| < |b|, \text{ con } ab > 0, \\ b & \text{si } |a| > |b|, \text{ con } ab > 0, \\ 0 & \text{si } ab < 0. \end{cases} \quad (3.11)$$

Esta función escoge la pendiente mínima en cada intercelda siempre y cuando las pendientes tengan el mismo signo. En el caso en que las pendientes tienen signos opuestos, como  $m2$  y  $m3$  en la Figura 3.4, se toma una función constante  $q_{i+1}$  con el valor de la función evaluada en el punto  $x_{i+1}$ . Aunque la descripción es en una dimensión, esta forma de reconstruir las variables en las intercelas se emplea del mismo modo en cada una de las direcciones, en el caso 3D en las direcciones  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

### MC: Monotonized Central

El reconstructor *MC* es similar al reconstructor *minmod*, la información necesaria para calcular la pendiente en el punto  $x_{i+1/2}$  es la misma. Sin embargo en este caso se permite que la pendiente tenga un valore intermedio a diferencia del caso de *minmod*, de tal forma que la pendiente no se reduce de manera tan pronunciada, así como también preserva la monotonicidad de las variables aproximadas. Para calcular los valores a izquierda y derecha de la interfase ubicada en  $x_{i+1/2}$ , se utiliza la expresión dada por la ecuación (3.10), usando la siguiente formula para calcular la pendiente de la función lineal

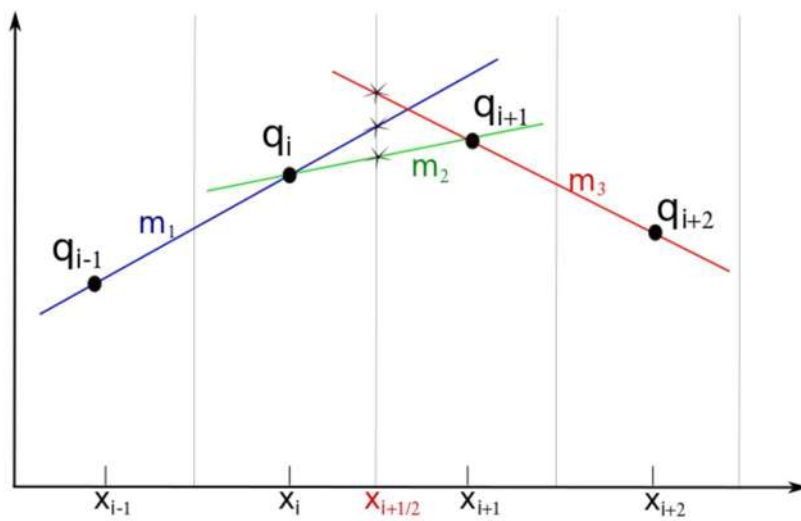


Figura 3.4: Figura esquemática de las pendientes adyacentes a los puntos  $x_{i+1/2}$ , necesarias para calcular la función minmod. Como se puede ver, para calcular las pendientes  $m_1$ ,  $m_2$  y  $m_3$  se requiere de los valores de la variable  $q$  en los puntos vecinos,  $q_{i-1}$ ,  $q_i$ ,  $q_{i+1}$  y  $q_{i+2}$ .

---


$$\sigma = MC(a, b) = \begin{cases} 2a & \text{si } |a| < |b| & \text{y } 2|a| < |c|, \\ 2b & \text{si } |a| > |b| & \text{y } 2|b| < |c|, \\ c & \text{si } |c| < 2|a| & \text{y } |c| < 2|b|, \\ 0 & \text{si } ab < 0. \end{cases} \quad (3.12)$$

Particularmente se puede apreciar que las pendientes son el doble que en el caso *minmod*, se tiene además una pendiente intermedia  $c = (a + b)/2$  antes de considerar el valor mínimo ( $\sigma = 0$ ).

Una vez que se conocen los valores a derecha e izquierda de cada intercelda, se pueden calcular los flujos numéricos en términos de las variables reconstruidas. Este método reconstruye mejor que *minmod*, sin embargo, introduce oscilaciones debido a errores numéricos, por lo que no es muy recomendable.

### 3.2.3. PPM: Piecewise Parabolic Method

El método PPM fue desarrollado por [Coella \[1984\]](#) y adaptado de la versión relativista por [J. M. Martí \[1994\]](#). La interpolación PPM reconstruye las variables en las interfaces de celdas numéricas con un polinomio de cuarto orden, en cada zona de  $i$  se interpolan los valores de  $q_L$  y  $q_R$  utilizando los valores de las en cinco celdas  $q_{i-2}$ ,  $q_{i-1}$ ,  $q_i$ ,  $q_{i+1}$  y  $q_{i+2}$ . Este método de reconstrucción consisten en cuatro pasos: *Interpolación*, *Steeping*, *Flattening*, y *Monotonización*. A continuación se describen brevemente cada uno de los pasos.

**Paso 1: Interpolación.** Este paso consiste en interpolar los valores de las variables  $q$  cada intercelda ubicada en  $x_{j+1/2}$ , se obtiene así el valor  $a_{j+1/2}$  usando los valores adyacentes a dicha intercelda  $q_{i-2}$ ,  $q_{i-1}$ ,  $q_i$ ,  $q_{i+1}$  y  $q_{i+2}$

$$\begin{aligned} q_{j+1/2} = & q_j + \frac{\Delta x_j}{\Delta x_j + \Delta x_{j+1}}(q_{j+1} + q_j) + \frac{1}{\sum_{k=1}^2 \Delta x_{j+k}} \left\{ \frac{2\Delta x_{j+1} + \Delta x_j}{\Delta x_j + \Delta x_{j+1}} \right. \\ & \left[ \frac{\Delta x_{j-1} + \Delta x_j}{2\Delta x_j + \Delta x_{j+1}} + \frac{\Delta x_{j+2} + \Delta x_{j+1}}{2\Delta x_{j+1} + \Delta x_j} \right] (q_{j+1} - q_j) \\ & \left. - \Delta x_j \frac{\Delta x_{j-1} + \Delta x_j}{2\Delta x_j + \Delta x_{j+1}} \delta_m q_{j+1} + \Delta x_{j+1} \frac{\Delta x_{j+1} + \Delta x_{j+2}}{2\Delta x_j + \Delta x_{j+1}} \delta_m q_j \right\}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

---

donde de manera general para malla no uniformes se define el tamaño de cada celda como  $\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$ , los valores de  $\delta_m q_j$  se definen como

$$\delta_m q_j = \begin{cases} \min(|\delta q_j|, 2|q_j - q_{j-1}|, 2|q_{j+1} - q_j|) \text{sign}(\delta q_j) & \text{si } (q_{j+1} - q_j)(q_j - q_{j-1}) > 0, \\ 0 & \text{de otro modo,} \end{cases}$$

los valores de  $\delta q_j$  en cada intercelda se calculan con la siguiente función

$$\delta q_j = \frac{\Delta x_j}{\Delta x_{j-1} + \Delta x_j + \Delta x_{j+1}} \left[ \frac{2\Delta x_{j-1} + \Delta x_j}{\Delta x_{j+1} + \Delta x_j} (q_{j+1} - q_j) + \frac{\Delta x_j + 2\Delta x_{j+1}}{\Delta x_{j-1} + \Delta x_j} (q_j - q_{j-1}) \right],$$

Sin embargo, la parábolas se ajustan de tal manera que se tengan funciones monótonas en cada celda. Esto se hace en los siguientes pasos del algoritmo.

**Paso 2: Steeping.** La interpolación anterior se modifica ajustando los perfiles en los puntos vecinos a la discontinuidad de contacto, para ello se identifica que un salto en los valores de las variables es abrupto en la discontinuidad de contacto si la siguiente condición sobre la densidad de masa en reposo y la presión se cumple

$$\gamma K_0 \frac{|\rho_{j+1} - \rho_{j-1}|}{\min(\rho_{j+1}, \rho_{j-1})} \geq \frac{|p_{j+1} - p_{j-1}|}{\min(p_{j+1}, p_{j-1})}$$

donde  $K_0$  es una constante. Donde esta condición se cumple, los valores se ajustan de acuerdo a las siguientes relaciones

$$q_{L,j} \rightarrow q_{L,j}(1 - \eta_j) + q_{L,j}^d \eta_j, \quad (3.14)$$

$$q_{R,j} \rightarrow q_{R,j}(1 - \eta_j) + q_{R,j}^d \eta_j \quad (3.15)$$

donde se tiene que

$$q_{L,j}^d = q_{j-1} + \frac{\delta_m q_{j-1}}{2}, \quad (3.16)$$

---


$$q_{R,j}^d = q_{j+1} - \frac{\delta_m q_{j+1}}{2}, \quad (3.17)$$

$$\eta_j = \max[0, \min(\eta^{(1)}(\tilde{\eta}_j - \eta^{(2)}), 1)] \quad (3.18)$$

los valores de  $\eta^{(1)}$  y  $\eta^{(2)}$  se pueden ajustar libremente, mientras que  $\tilde{\eta}_j$  se define como

$$\tilde{\eta}_j = \begin{cases} \left( \frac{\delta^2 q_{j+1} - \delta^2 q_{j-1}}{x_{j+1} - x_{j-1}} \right) \left( \frac{(x_j - x_{j-1})^3 + (x_{j+1} - x_j)^3}{q_{j+1} - q_{j-1}} \right) & \text{si } (\delta^2 q_{j+1} \delta^2 q_{j-1} > 0, \\ & \text{y } |q_{j+1} q_{j-1}| - \epsilon^{(1)} \min(|q_{j+1}|, |q_{j-1}|) > 0 \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

y donde se tiene que

$$\delta^2 q_j = \frac{\Delta x_j}{\Delta x_{j-1} + \Delta x_j + \Delta x_{j+1}} \left[ \frac{q_{j+1} - q_j}{\Delta x_{j+1} + \Delta x_j} + \frac{q_j - q_{j-1}}{\Delta x_j + \Delta x_{j-1}} \right].$$

**Paso 3: Flattening.** Este paso tiene la finalidad en aliminar oscilaciones espurias cerca de choques fuertes, para ello se redefinen las variables a derecha e izquierda de la siguiente forma

$$q_{L,j}^{flat} = q_j f_j + q_{L,j} (1 - f_j), \quad (3.19)$$

$$q_{R,j}^{flat} = q_j f_j + q_{R,j} (1 - f_j), \quad (3.20)$$

donde la función  $f_j$  se define como  $f_i = \max(\tilde{f}_j, \tilde{f}_{j+s})$ , donde la función  $\tilde{f}_j$  está definida como

$$\tilde{f}_j = \min \left[ 1, w_j \max \left( 0, \left( \frac{p_{j+1} - p_{j-1}}{p_{j+2} - p_{j-2}} \omega^{(1)} \right) \omega^{(2)} \right) \right], \quad (3.21)$$

y donde el valor de  $s$  es  $+1$  si la diferencia de presiones  $p_{j+1} - p_{j-1}$  es positivo y  $-1$  si  $p_{j+1} - p_{j-1}$  es negativa. Los valores de  $\omega^{(1)}$  y  $\omega^{(2)}$  son constantes y  $w_j$  es igual a 1 si la zona está dentro del choque y 0 si la zona no está dentro del choque. El criterio para saber si la zona está dentro del choque es si se cumple la

---

siguiente condición

$$\frac{|p_{j+1} - p_{j-1}|}{\min(p_{j+1}, p_{j-1})} > \epsilon^{(2)}, \quad v_{j-1} > v_{j+1}.$$

**Paso 4: Monotonización.** Finalmente, los valores de la interpolación obtenidas en los pasos anteriores se ajusta para obtener funciones monotonas en cada intercelda  $x_{j+1/2}$ , esto se hace cerca de las discontinuidades ajustando los valores a derecha e izquierda bajo los siguientes criterios

$$\delta_m q_j = \begin{cases} q_{L,j} \rightarrow q_j, & q_{R,j} \rightarrow q_j & \text{si } (q_{R,j} - q_j)(q_j - q_{L,j}) \leq 0, \\ q_{L,j} \rightarrow 3q_j - 2q_{R,j}, & & \text{si } (q_{R,j} - q_{L,j})(q_j - \frac{q_{R,j} + q_{L,j}}{2}) > \frac{(q_{R,j} - q_{L,j})^2}{6}, \\ q_{R,j} \rightarrow 3q_j - 2q_{L,j}, & & \text{si } -(q_{R,j} - q_{L,j})(q_j - \frac{q_{R,j} + q_{L,j}}{2}) > \frac{(q_{R,j} - q_{L,j})^2}{6}. \end{cases}$$

Los valores de las constantes utilizadas en este trabajo son  $K_0 = 1,0$ ,  $\eta^1 = 5,0$ ,  $\eta^2 = 0,5$ ,  $\epsilon^1 = 0,1$ ,  $\epsilon^2 = 1,0$ ,  $\omega^{(1)} = 0,52$  y  $\omega^{(1)} = 10,0$ . De esta forma se tiene el algoritmo PPM completo, el cual aproxima los valores de las variables a derecha e izquierda de cada intercelda usando parábolas monótonas, obteniendo un mejor ajuste comparado con los reconstructores que son constante y lineal por pedazos. Un problema que presenta este método es que en choques muy fuertes el orden de la aproximación se reduce *Godunov*.

### 3.2.4. WENO: Weighted Essentially Non-Oscillatory

Finalmente se tiene el reconstructor WENO. El método *WENO* aproxima las variables a derecha e izquierda de cada intercelda numérica usando polinomios de alto orden para la interpolación. La diferencia de esta técnica es que reduce las oscilaciones debido a errores numéricos con el caso de método *MC* descrita arriba y es mucho más simple de implementar que *PPM*. Existen diferentes órdenes del método *WENO*, en este trabajo se utilizan el caso  $r = 2$  que corresponde a una reconstrucción por polinomios de quinto orden, por simplicidad solo se describe brevemente el algoritmo correspondiente a este caso. En este caso, el uso la interpolación *WENO* usa cinco valores de las variables en  $q_{i-2}$ ,  $q_{i-1}$ ,  $q_i$ ,  $q_{i+1}$  y  $q_{i+2}$ , porque lo se llamara *WENO5*. Para los detalles del algoritmo numérico,

---

concernientes a los diferentes ordenes del método *WENO* el lector puede consultar a los siguientes autores [Harten \[1997\]](#); [Titarev \[2004\]](#). En este algoritmo se reconstruyen los valores de las variables  $q$  de la forma

$$u(x) = \sum_{l=0}^{r-1} p_l(x) \omega_l, \quad (3.22)$$

los coeficientes son calculados, de tal forma de que el polinomio aproxime de manera optima a las variables en cada intercenda. Los coeficientes son

$$\alpha_l = \frac{d_l}{(\epsilon + \beta_l)^2}, \quad \omega_l = \frac{\alpha_l}{\sum_{k=0}^{r-1} \alpha_k}, \quad l = 0, 1, \dots, r-1, \quad (3.23)$$

donde los valores de  $\beta_l$  para el caso  $r = 2$  están dados de la siguientes forma

$$\beta_0 = \frac{13}{12}(q_i - 2q_{i+1} + q_{i+2})^2 + \frac{1}{4}(3q_i - 4q_{i+1} + q_{i+2})^2, \quad (3.24)$$

$$\beta_1 = \frac{13}{12}(q_{i-1} - 2q_i + q_{i+1})^2 + \frac{1}{4}(q_{i-1} - q_{i+1})^2, \quad (3.25)$$

$$\beta_2 = \frac{13}{12}(q_{i-2} - 2q_{i-1} + q_i)^2 + \frac{1}{4}(q_{i-2} - 4q_{i-1} + q_i)^2. \quad (3.26)$$

Una vez que se encuentran los valores optimos

$$d_0 = \frac{3}{10}, \quad d_1 = \frac{3}{5}, \quad d_2 = \frac{1}{10}, \quad (3.27)$$

se calcula el valor cada variable  $q_{L,i+1/2}$  a la izquierda de la intercenda  $x_{i+1/2}$  con la formula

$$q_{i+1/2}^L = \frac{1}{6} \omega_0 (-q_{i+2} + 5q_{i+1} + 2q_i) \quad (3.28)$$

$$+ \frac{1}{6} \omega_1 (-q_{i-1} + 5q_i + 2q_{i+1}) \quad (3.29)$$

$$+ \frac{1}{6} \omega_2 (2q_{i-2} - 7q_{i-1} + 11q_i). \quad (3.30)$$

---

De la misma forma se encuentran los coeficientes adecuados para interpolar las variables a la derecha de la interfaz  $x_{i-1/2}$

$$d_0 = \frac{1}{10}, \quad d_1 = \frac{3}{5}, \quad d_2 = \frac{3}{10}, \quad (3.31)$$

de tal manera que la formula para reconstruir  $q_{i-1/2}^R$  esta dada por

$$q_{i-1/2}^R = \frac{1}{6}\omega_0(2q_{i+2} - 7q_{i+1} + 11q_i) \quad (3.32)$$

$$+ \frac{1}{6}\omega_1(-q_{i+1} + 5q_i + 2q_{i-1}) \quad (3.33)$$

$$+ \frac{1}{6}\omega_2(-q_{i-2} + 5q_{i-1} + 2q_i). \quad (3.34)$$

Un problema común aparece cuando dos discontinuidades aparecen muy juntas, ya que pueden aparecer oscilaciones debidas a errores. Algunos reconstructores como *PPM* reducen el orden. El algoritmo *WENO5* evita este problema usando el reconstructor *minmod* (ver la sección 3.2.2) donde la siguiente condición no se satisfaga

$$|\rho_L - \rho_i| \leq 0,9\rho_i, \quad |p_L - p_i| \leq 0,9p_i. \quad (3.35)$$

De acuerdo a los experimentos numéricos realizados, se encontró que este algoritmo de reconstrucción de variables a derecha e izquierda es el más óptimo, ya que usa un polinomio de orden cinco, tiene un bajo costo computacional y evita oscilaciones debido a errores numéricos.

### 3.3. Construcción de flujos numéricos

Para el cálculo de flujos numéricos en las interfases de cada celda numérica, se usan resolvedores de Riemann aproximados. Estos métodos se basan en la estructura característica de la matriz Jacobiana de las ecuaciones tipo ley de balance, como el sistema de ecuaciones de la MHD (2.46).

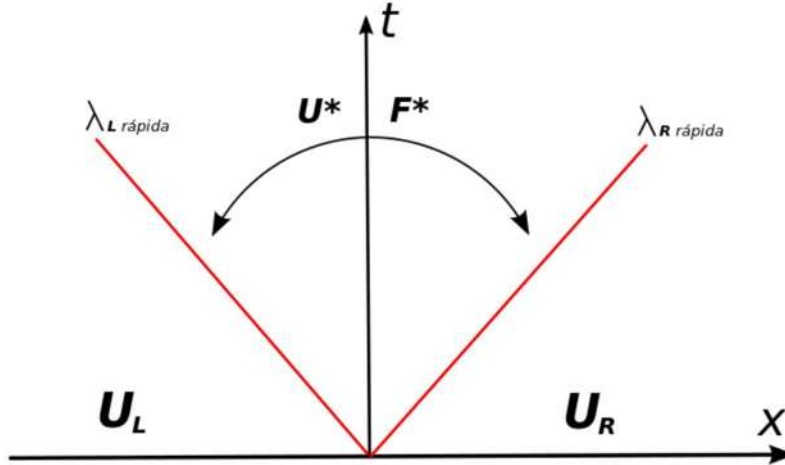


Figura 3.5: En esta figura se muestran los eigenvalores más rápidos en el plano  $t - x$ . El resolvidor de Riemann aproximado HLLE, usa solo los eigenvalores más rápidos, uno que viaja a la derecha y otra que viaja a la izquierda.

La matriz Jacobiana  $\mathbf{A}$  resulta de una linealización de la ecuación tipo ley de balance. La ecuación resultante es

$$\partial_t \mathbf{q} + \mathbf{A}(\mathbf{q}) \partial_x \mathbf{q} = 0, \quad (3.36)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}) = \frac{\partial f^\mu}{\partial q^\nu}, \quad (3.37)$$

donde  $\mathbf{A}$  es la matriz Jacobiana para la dirección  $x$ . En general se tendrán tres matrices Jacobianas, una para cada dirección. Una vez que se conoce esta matriz, se pueden calcular los eigenvalores y eigenvectores correspondientes a cada dirección. Este procedimiento se llevó a cabo en la sección 2.3.

### 3.3.1. HLLE: Harten, Lax and van Leer and Einfeldt

El método HLLE para la reconstrucción de flujos en las intercelas numéricas usa las dos velocidades características, las más rápidas en la dirección  $\hat{x}$  y  $-\hat{x}$ . La ventaja que se tiene en este método comparado con otros métodos además

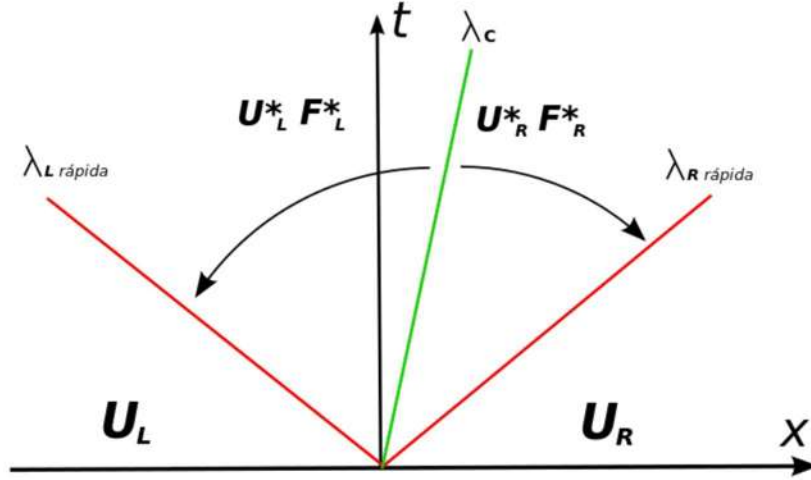


Figura 3.6: En esta figura se muestra un esquema en el plano  $t-x$  de los eigenvalores máximos  $\lambda_{L,R}$  y la onda de contacto  $\lambda_c$ . El método HLLC agrega dos nuevos estados, uno a la derecha y otro a la izquierda de la onda de contacto como se muestra en el esquema.

de tiempo de cómputo, es que la información requerida involucra sólo a los eigenvalores del sistema. Las velocidades se escogen tomando en cuenta todos los eigenvalores evaluados a la derecha e izquierda de cada intercelda en términos de  $q^L$  y  $q^R$

$$\lambda^+ = \max(0, \lambda_i^L, \lambda_i^R), \quad (3.38)$$

$$\lambda^- = \min(0, \lambda_i^L, \lambda_i^R), \quad (3.39)$$

donde  $\lambda_i$  son los eigenvalores de la matriz Jacobiana, para la MHD  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ . Los flujos numéricos se calculan mediante la siguiente fórmula

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^{HLLC} = \frac{\lambda^+ \mathbf{f}(\mathbf{q}_{i+1/2}^L) - \lambda^- \mathbf{f}(\mathbf{q}_{i+1/2}^R) + \lambda^+ \lambda^- (\mathbf{q}_{i+1/2}^R - \mathbf{q}_{i+1/2}^L)}{\lambda^+ - \lambda^-}, \quad (3.40)$$

donde  $\mathbf{f}(\mathbf{q}_{i+1/2}^{L,R})$  son los flujos numéricos escritos en términos de las variables a derecha e izquierda de cada interfase.

---

### 3.4. Constricción $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

En la MHD ideal, se tiene una ecuación adicional a las ecuaciones de evolución (2.46). La condición de nulidad de la divergencia del campo magnético  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , se tiene que monitorear durante la evolución como una constricción que se debe satisfacer a cada paso de tiempo. La evolución libre de las ecuaciones de Maxwell (2.35) y las del fluido en su forma conservativa producen pequeños errores numéricos que desencadenan en valores no físicos y hacen que el valor de la constricción crezca en el tiempo, dando resultados no físicos como la presencia de monopolos magnéticos. Por esta razón, en la MHD ideal se requieren técnicas que mantengan la constricción. Una compilación de diferentes técnicas se puede encontrar en el trabajo de Toth [2000], en donde se analizan varias técnicas y su implementación numérica. En este trabajo se usa el método *Flux-Constrained Transport* (Flux-CT) C. R. Evans [1988], en su versión adaptada a métodos HRSC D.S. Balsara [1999]; Ryu D [1998]; W. Dai [1998]. A continuación se hace una descripción de las técnicas usadas en este trabajo.

#### 3.4.1. Transporte de flujo restringido: Flux-CT

Este método consiste en discretizar los campos magnéticos de una forma especial, tal que al evolucionar los campos se conserve la condición  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ . Bajo la discretización *Flux-CT*, si el campo magnético inicial tiene divergencia cero, entonces este debe mantenerse con errores del orden del error de redondeo de la máquina.

Se tiene entonces que en cada elemento de volumen (ver Figura 3.7), la constricción se tiene que satisfacer a cada paso de tiempo. Por lo tanto, la descripción que se hace a continuación para un elemento de volumen es válida y se tiene que aplicar a cada una de las celdas numéricas que constituyen el dominio numérico. En este trabajo se usan coordenadas cartesianas abarcando un dominio  $[x_{min}, x_{max}] \times [y_{min}, y_{max}] \times [z_{min}, z_{max}]$ .

La descripción del método se hace para los campos medidos por un observador euleriano, ya que son los campos que se evolucionan como se puede ver en el capítulo anterior. Las ecuaciones que describen la evolución del campo magnético

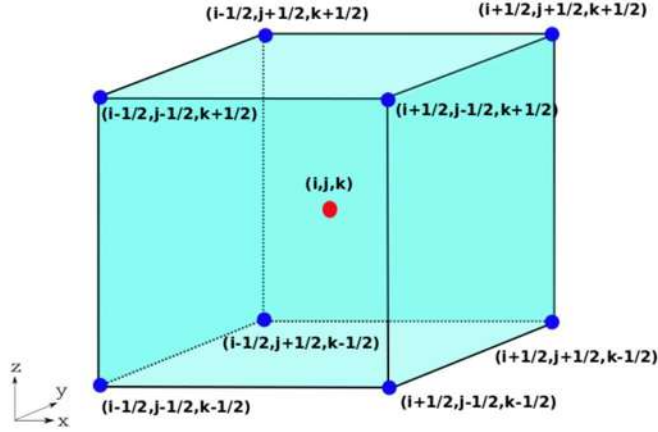


Figura 3.7: *Discretización numérica de un elemento de volumen en tres dimensiones espaciales, en coordenadas cartesianas. Los índices  $(i, j, k)$  etiquetan una celda y por lo tanto se ubican en el centro de cada elemento de volumen. Además se indican los puntos que delimitan el elemento de volumen.*

medido por un observador euleriano son

$$\partial_t \mathbf{B} = -\nabla \times \mathbf{E}, \quad (3.41)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (3.42)$$

en donde  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  son los campos eléctrico y magnético medidos por un observador euleriano. Una de las suposiciones de la MHD ideal es que el campo eléctrico en el marco del fluido es despreciable  $\sim 0$ . De dicha condición se tiene que  $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0$ . De esta manera se puede reescribir el campo eléctrico en términos del campo magnético  $\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ . Por conveniencia se define una nueva cantidad  $\mathbf{\Omega} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ . Tomando en cuenta estas suposiciones, las ecuaciones (3.41) y (3.42) se reescriben como

$$\partial_t \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{\Omega}, \quad (3.43)$$

---


$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (3.44)$$

La técnica *Flux-CT* se basa en la integración de la ecuación de inducción o Ley de Faraday, ecuación (3.43), en cada elemento de volumen  $\Delta V$ .

Se tiene que la integral de volumen de la constricción  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  se puede reducir a una integral de superficie aplicando la ley de Gauss

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{B} dV = \oint_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0. \quad (3.45)$$

Debido a que en este trabajo las celdas son cubos, la superficie cerrada  $\partial V$  que contiene a  $\Delta V$  está compuesta por las 6 caras cuadradas de un cubo. En la figura 3.7 se pueden apreciar los puntos que limitan un elemento de volumen de la malla 3D. Entonces, se tiene que la integral sobre la superficie del cubo se puede descomponer en 6 integrales de área

$$\begin{aligned} \oint_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} &= \int_{A_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}_1 + \int_{A_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}_2 + \int_{A_3} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}_3 \\ &+ \int_{A_4} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}_4 + \int_{A_5} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}_5 + \int_{A_6} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}_6. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Por otro lado, la ecuación de inducción (3.43) y la ecuación  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  en su forma integral, en cada cara del cubo, se pueden relacionar de la siguiente manera

$$\frac{d}{dt} \int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = \int_A \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A} = \int_A (\nabla \times \boldsymbol{\Omega}) \cdot d\mathbf{A}. \quad (3.47)$$

Aplicando el teorema de Stokes en la segunda igualdad de la ecuación (3.47), se tiene como resultado la ecuación de evolución del campo magnético en la dirección normal a la cara del cubo,

$$\frac{d}{dt} \int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = \oint_{\partial A} \boldsymbol{\Omega} \cdot d\mathbf{l}, \quad (3.48)$$

---

donde, la integral de línea se hace a lo largo del contorno de cada cara del cubo. A continuación se desarrollan las integrales en tres caras del cubo.

### Integración en la dirección $x$

Se desarrolla primero la integral en la cara lateral derecha de la Figura 3.7, a esta cara se etiqueta como  $A_1$ . En la Figura 3.9 se puede ver la posición de los vértices que limitan el área  $A_1 = A_1(i + 1/2, j, k)$ , correspondiente a un elemento de volumen centrado en  $(i, j, k)$ . El vector normal a esta superficie es  $\hat{x}$ . Esto define una de las caras de un elemento de volumen centrado en  $(i, j, k)$ . La ecuación (3.48) en  $A_1$  toma la forma

$$\frac{d}{dt} \int_{A_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}_1 = \oint_{\partial A_1} \boldsymbol{\Omega} \cdot d\mathbf{l}. \quad (3.49)$$

Como se puede observar en la Figura 3.9, la integral de línea cerrada se hace en el contorno de  $A_1$ , en la dirección  $y$  en el intervalo  $[j - 1/2, j + 1/2]$  y en la dirección  $z$  en el intervalo  $[k - 1/2, k + 1/2]$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{A_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}_1 &= \int_{j-1/2}^{j+1/2} \boldsymbol{\Omega}(x_{i+1/2}, y, z_{k-1/2}) \cdot \hat{y} dy & (3.50) \\ &+ \int_{k-1/2}^{k+1/2} \boldsymbol{\Omega}(x_{i+1/2}, y_{j+1/2}, z) \cdot \hat{z} dz \\ &- \int_{j-1/2}^{j+1/2} \boldsymbol{\Omega}(x_{i+1/2}, y, z_{k+1/2}) \cdot \hat{y} dy \\ &- \int_{k-1/2}^{k+1/2} \boldsymbol{\Omega}(x_{i+1/2}, y_{j-1/2}, z) \cdot \hat{z} dz. \end{aligned}$$

Por otro lado, se tiene que el vector normal a  $A_1$  es  $\hat{x}$ , de tal forma que se puede definir  $B_x(i + 1/2, j, k)$  como un promedio en el área  $A_1$

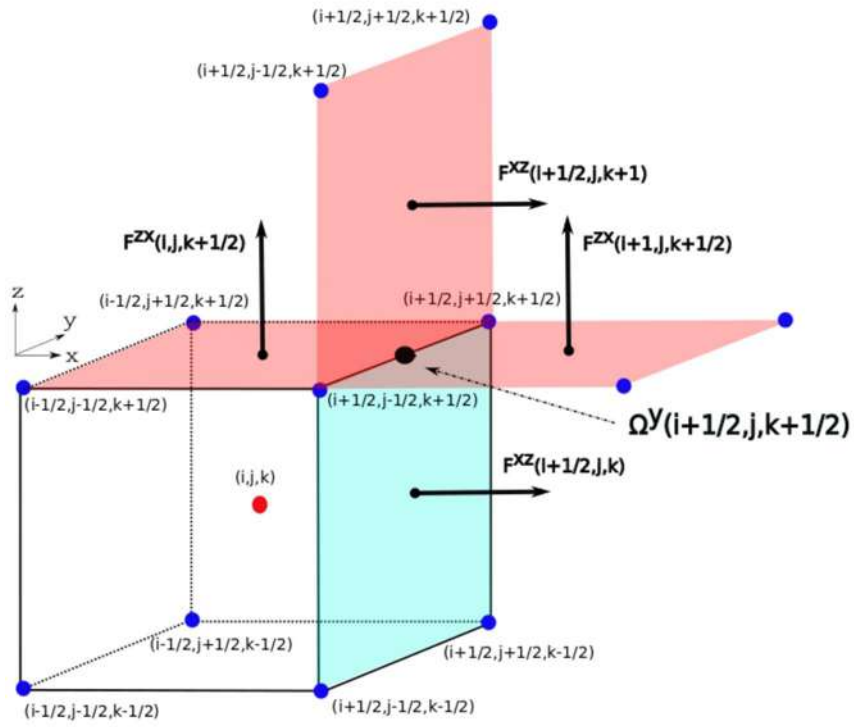


Figura 3.8: En esta figura se muestra un elemento de volumen centrado en  $(i, j, k)$  y los flujos necesarios para calcular la componente  $\Omega^y$  ubicada en el vértice  $(i + 1/2, j, k + 1/2)$ . Se muestra también la ubicación de los flujos calculados con la fórmula HLLC. Los flujos  $F^{zx}$  se calculan en la dirección  $z$  en el centro de las dos caras adyacentes al vértice ubicados en los puntos  $(i, j, k + 1/2)$  y  $(i + 1, j, k + 1/2)$ . Los flujos  $F^{xz}$  se calculan en la dirección  $x$  en el centro de las dos caras adyacentes al vértice ubicados en los puntos  $(i + 1/2, j, k)$  y  $(i + 1/2, j, k + 1)$ .

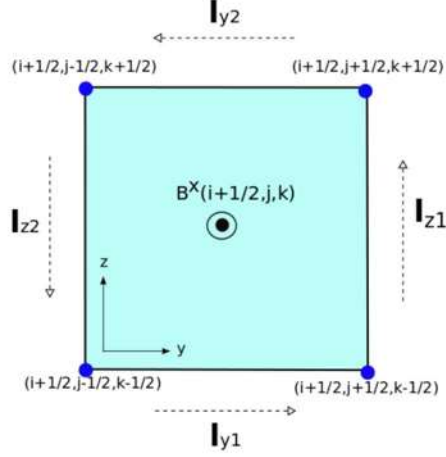


Figura 3.9: Cara lateral derecha del cubo de la Figura 3.7,  $A_1$ . Los límites de esta superficie están definidos por los vértices ubicados en  $(i + 1/2, j - 1/2, k - 1/2)$ ,  $(i + 1/2, j + 1/2, k - 1/2)$ ,  $(i + 1/2, j + 1/2, k + 1/2)$  y  $(i + 1/2, j - 1/2, k + 1/2)$ . Al integrar en esta cara, se tiene la ecuación de evolución para  $B^x(i + 1/2, j, k)$  calculada en el centro de  $A_1$ .

$$B_x(i + 1/2, j, k) = \frac{1}{A_1} \int_{A_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}_1. \quad (3.51)$$

Esta ecuación define la componente  $x$  del campo magnético ubicada en el punto  $(i + 1/2, j, k)$ . Nótese que esta cantidad es diferente a la componente  $x$  del campo magnético definida en el centro de la celda  $B_x(i, j, k)$ . De igual manera se definen las componentes  $\Omega$ , resultando cantidades ubicadas en las aristas del cubo, como se puede apreciar en la Figura 3.8

$$\Omega^y(i + 1/2, j, k + 1/2) = \int_{j-1/2}^{j+1/2} \Omega(x_{i+1/2}, y, z_{k+1/2}) \cdot \hat{y} dy, \quad (3.52)$$

$$\Omega^z(i + 1/2, j + 1/2, k) = \int_{k-1/2}^{k+1/2} \Omega(x_{i+1/2}, y_{j+1/2}, z) \cdot \hat{z} dz. \quad (3.53)$$

Sustituyendo estas definiciones en la ecuación (3.51), la ecuación de evolución se

puede escribir como

$$\begin{aligned} \partial_t B_x(i + 1/2, j, k) &= \frac{\Omega^z(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) - \Omega^z(i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}, k)}{\Delta y} \\ &- \frac{\Omega^y(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) - \Omega^y(i + \frac{1}{2}, j, k - \frac{1}{2})}{\Delta z}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Cabe recalcar que esta ecuación de evolución queda definida en el centro de la cara  $A_1$  ubicada en  $(i + 1/2, j, k)$ .

### Integración en la dirección $y$

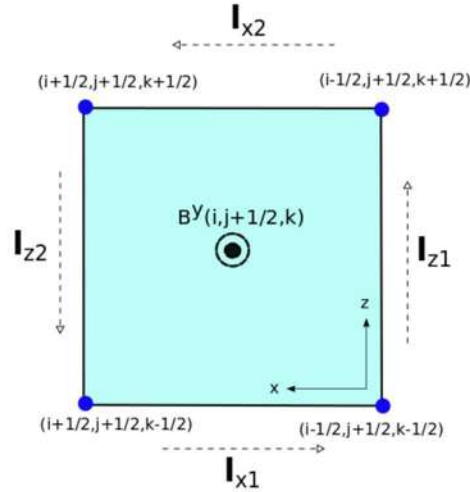


Figura 3.10: Cara lateral trasera del cubo de la Figura 3.7,  $A_2$ . El área de esta superficie está definida por los vértices ubicados en  $(i + 1/2, j + 1/2, k - 1/2)$ ,  $(i - 1/2, j + 1/2, k - 1/2)$ ,  $(i - 1/2, j + 1/2, k + 1/2)$  y  $(i + 1/2, j + 1/2, k + 1/2)$ . Al integrar en esta cara, se tiene la ecuación de evolución para  $B^y(i, j + 1/2, k)$  calculado en el centro de  $A_2$ .

Ahora consideremos la cara lateral trasera de la Figura 3.7, a esta cara se etiqueta como  $A_2$ . En la Figura 3.10, se observan los puntos que determinan el área  $A_2 = A_2(i, j + 1/2, k)$ , el vector normal ahora es  $\hat{y}$ . La ecuación (3.48) en  $A_2$  toma la forma

---


$$\frac{d}{dt} \int_{A_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}_2 = \oint_{\partial A_2} \boldsymbol{\Omega} \cdot d\mathbf{l}. \quad (3.55)$$

En el Figura 3.10, se puede ver la dirección de la integral de línea cerrada en el contorno de  $A_2$ , en la dirección  $x$  en el intervalo  $[i + 1/2, i - 1/2]$  y en la dirección  $z$  en el intervalo  $[k - 1/2, k + 1/2]$ . Desarrollando los términos a lo largo de la trayectoria se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{A_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}_2 &= - \int_{i-1/2}^{i+1/2} \boldsymbol{\Omega}(x, y_{j+1/2}, z_{k-1/2}) \cdot \hat{x} dx & (3.56) \\ &+ \int_{k-1/2}^{k+1/2} \boldsymbol{\Omega}(x_{i-1/2}, y_{j+1/2}, z) \cdot \hat{z} dz \\ &+ \int_{i-1/2}^{i+1/2} \boldsymbol{\Omega}(x, y_{j+1/2}, z_{k+1/2}) \cdot \hat{x} dx \\ &- \int_{k-1/2}^{k+1/2} \boldsymbol{\Omega}(x_{i+1/2}, y_{j+1/2}, z) \cdot \hat{z} dz, \end{aligned}$$

Se define entonces una nueva variable  $B_y(i, j + 1/2, k)$  promediada en el área  $A_2$

$$B_y(i, j + 1/2, k) = \frac{1}{A_2} \int_{A_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}_2, \quad (3.57)$$

y la ecuación de evolución queda definida en el centro de la cara  $A_2$  en el punto  $(i, j + 1/2, k)$

$$\begin{aligned} \partial_t B_y(i, j + \frac{1}{2}, k) &= \frac{\Omega^x(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) - \Omega^x(i, j + \frac{1}{2}, k - \frac{1}{2})}{\Delta z} & (3.58) \\ &- \frac{\Omega^z(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) - \Omega^z(i - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k)}{\Delta x}, \end{aligned}$$

donde  $\Omega^z$  obedece la definición dada en la ecuación (3.53) y  $\Omega^x$  está definida como

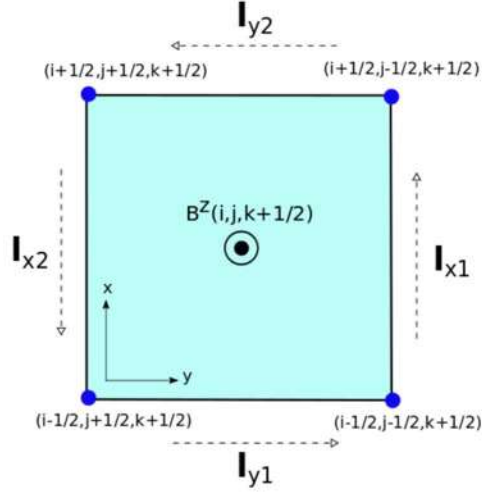


Figura 3.11: Cara superior del cubo de la Figura 3.7,  $A_3$ . El área de  $A_3$  está definida por los vértices correspondientes a los puntos  $(i + 1/2, j - 1/2, k - 1/2)$ ,  $(i + 1/2, j + 1/2, k - 1/2)$ ,  $(i + 1/2, j + 1/2, k + 1/2)$  y  $(i + 1/2, j - 1/2, k + 1/2)$ . Al integrar en esta cara, se tiene la ecuación de evolución para  $B^z(i, j, k + 1/2)$  calculada en el centro de  $A_3$ .

$$\Omega^x(i, j + 1/2, k + 1/2) = \int_{i-1/2}^{i+1/2} \Omega(x, y_{j+1/2}, z_{k+1/2}) \cdot \hat{x} dx. \quad (3.59)$$

### Integración en la dirección $z$

Finalmente se toma la cara superior del cubo que se ilustra en la Figura 3.7, esta cara se etiqueta como  $A_3$ . En la Figura 3.11, se observan los puntos que definen el área  $A_3 = A_3(i, j, k + 1/2)$ , el vector normal ahora es  $\hat{z}$ . La ecuación (3.48) en  $A_3$  toma la forma

$$\frac{d}{dt} \int_{A_3} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}_3 = \oint_{\partial A_3} \boldsymbol{\Omega} \cdot d\mathbf{l}. \quad (3.60)$$

En la Figura 3.11 se puede ver la cara  $A_3 = A_3(i, j, k + 1/2)$ , para un elemento de volumen centrado en  $(i, j, k)$  en donde se tiene que integrar la ecuación (3.60)

---


$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{A_3} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}_3 &= - \int_{j-1/2}^{j+1/2} \boldsymbol{\Omega}(x_{i-1/2}, y, z_{k+1/2}) \cdot \hat{y} dy & (3.61) \\
&+ \int_{i-1/2}^{i+1/2} \boldsymbol{\Omega}(x, y_{j-1/2}, z_{k+1/2}) \cdot \hat{x} dx \\
&+ \int_{j-1/2}^{j+1/2} \boldsymbol{\Omega}(x_{i+1/2}, y, z_{k+1/2}) \cdot \hat{y} dy \\
&- \int_{i-1/2}^{i+1/2} \boldsymbol{\Omega}(x, y_{j+1/2}, z_{k+1/2}) \cdot \hat{x} dx.
\end{aligned}$$

Al igual que en los casos anteriores se define una variable ubicada en el centro de superficie  $A_3$

$$B_z(i, j, k + 1/2) = \frac{1}{A_3} \int_{A_3} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}_3, \quad (3.62)$$

obteniendo así la ecuación de evolución para la componente  $z$  del campo magnético

$$\begin{aligned}
\partial_t B_z(i, j, k + 1/2) &= \frac{\Omega^y(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) - \Omega^y(i - \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2})}{\Delta x} & (3.63) \\
&- \frac{\Omega^x(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) - \Omega^x(i, j - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})}{\Delta y}.
\end{aligned}$$

El cálculo en las caras restantes del cubo  $A_4$ ,  $A_5$  y  $A_6$  ubicadas en  $x_{i-1/2}$ , en  $y_{j-1/2}$  y  $z_{k-1/2}$  es similar. Los vectores normales ahora son  $-\hat{x}$ ,  $-\hat{y}$ ,  $-\hat{z}$ . Sin embargo, para escribir las ecuaciones de evolución del campo magnético el cálculo en estas caras es innecesario.

Finalmente, la evolución del campo magnético está determinada por las ecuaciones (3.54, 3.58, 3.63).

En las ecuaciones de evolución aparecen componentes de  $\boldsymbol{\Omega}$  que se calculan en los vértices del cubo. Cabe señalar que los flujos que se calculan según el esquema el HLLE descrito en la sección 3.3, se evalúan en las interfases de cada

---

celda (ver ecuación (3.40)). Por ejemplo, en la dirección  $x$  los flujos se ubican en el punto  $(i + 1/2, j, k)$ , en la dirección  $y$  los flujos están definidos en el punto  $(i, j + 1/2, k)$  y en la dirección  $z$  los flujos se localizan en el punto  $(i, j, k + 1/2)$ .

Los valores de  $\mathbf{\Omega}$  en los vértices del cubo se calculan como un promedio aritmético usando los flujos adyacentes. En la figura 3.8, se muestran los flujos adyacentes a la cara  $A_1$ , que se usan para calcular la componente  $y$  de  $\mathbf{\Omega}$ ,  $\Omega^y$  en el vértice localizado en  $(i + 1/2, j, k + 1/2)$ . Se puede ver que los flujos adyacentes a  $\Omega^y$  son cuatro, dos flujos en la dirección  $x$ ,  $F^{xz}(i + 1/2, j, k)$ ,  $F^{xz}(i + 1/2, j, k + 1)$  y en dirección  $z$   $F^{zx}(i, j, k + 1/2)$ ,  $F^{zx}(i + 1, j, k + 1/2)$  formando una cruz. De igual manera se construyen las componentes  $\Omega^x$  y  $\Omega^z$

$$\begin{aligned} \Omega^x(i, j + 1/2, k + 1/2) &= \frac{1}{4}(F^{yz}(i, j + \frac{1}{2}, k) + F^{yz}(i, j + \frac{1}{2}, k + 1)) \\ &\quad - F^{zy}(i, j, k + \frac{1}{2}) - F^{zy}(i, j + 1, k + \frac{1}{2}), \end{aligned} \quad (3.64)$$

$$\begin{aligned} \Omega^y(i + 1/2, j, k + 1/2) &= \frac{1}{4}(F^{zx}(i, j, k + \frac{1}{2}) + F^{zx}(i + 1, j, k + \frac{1}{2})) \\ &\quad - F^{xz}(i + \frac{1}{2}, j, k) - F^{xz}(i + \frac{1}{2}, j, k + 1), \end{aligned} \quad (3.65)$$

$$\begin{aligned} \Omega^z(i + 1/2, j + 1/2, k) &= \frac{1}{4}(F^{xy}(i + \frac{1}{2}, j, k) + F^{xy}(i + \frac{1}{2}, j + 1, k)) \\ &\quad - F^{yx}(i, j + \frac{1}{2}, k) - F^{yx}(i + 1, j + \frac{1}{2}, k), \end{aligned} \quad (3.66)$$

donde por definición se tiene que

$$\Omega^x = -F^{zy} = F^{yz}, \quad (3.67)$$

$$\Omega^y = F^{zx} = -F^{xz}, \quad (3.68)$$

$$\Omega^z = -F^{yx} = F^{xy}, \quad (3.69)$$

y de manera general los flujos  $F^{lm}$  se definen como

$$F^{lm} \equiv v^l B^m - v^m B^l, \quad (3.70)$$

$F^{lm}$  esta notación significa que el flujo apunta en dirección  $l$  para la componente

---

$m$  del campo magnético, y se calculan usando la formula HLLE

$$F_{HLL}^{lm} = \frac{\lambda_+ F_L^{lm} - \lambda_- F_R^{lm} + \lambda_+ \lambda_- (B_R^m - B_L^m)}{\lambda_+ - \lambda_-}. \quad (3.71)$$

La contribución de cada una de las seis caras del cubo, debe satisfacer la constricción en su forma integral definida en la ecuación (3.47). Relacionando las ecuaciones (3.47, 3.46, 3.45) se puede ver que, si la constricción  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  se cumple al tiempo inicial, esta debe mantenerse durante la evolución.

### 3.4.2. Método Cleaning

El segundo método usado en este trabajo es el método cleaning . En este trabajo se usa método de *limpieza hiperbólica difusiva de la divergencia* por sus siglas en inglés *diffusive hyperbolic divergence cleaning* Dedner A. [2002]; Liebling [2010]; Penner [2011b]. Como ya se discutió previamente es necesario garantizar que se mantenga la restricción  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  a lo largo de la evolución numérica. Este método controla dicha restricción del campo magnético resolver un sistema de ecuaciones de Maxwell modificado.

De esta forma las ecuaciones de Maxwell dadas en la ecuación (2.29) que describen la evolución del campo magnético en la aproximación de MHD ideal, se modifican de la siguiente forma

$$\nabla_\mu (* F^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \psi) = -\kappa n^\nu \psi, \quad (3.72)$$

donde dos términos se han agregado. Una término  $\nabla_\mu (g^{\mu\nu} \psi)$  donde aparece una variable auxiliar  $\psi$  y un segundo término que es difusivo  $\kappa n^\nu \psi$ , cuyo parámetro  $\kappa$  se puede ajustar con la finalidad de tener mayor control sobre la constricción. La variable  $\psi$  obedece una ecuación de onda amortiguada,

$$\partial_\nu \partial^\nu \psi = -\kappa \partial_\nu (n^\nu \psi), \quad (3.73)$$

por lo que la variable auxiliar  $\psi$  se encarga de expulsar errores numéricos fuera

---

del dominio de estudio y disipa dichos errores con una taza  $\kappa$ . Se puede ver que cuando  $\psi$  tiende a cero las ecuaciones de Maxwell (2.29) se recuperan y la restricción se cumple.

Las ecuaciones modificadas para la evolución el campo magnético en un espacio-tiempo de fondo son

$$\begin{aligned}\partial_t(\sqrt{\gamma}\Pi^j) + \partial_i\left[\sqrt{-g}(v^i B^j - v^j B^i + \alpha g^{ij}\Psi)\right] &= -\alpha\sqrt{-g}g^{\alpha\mu}\Gamma_{\alpha\mu}^j\Psi + \kappa\beta^j\Psi, \\ \partial_t(\sqrt{\gamma}\Psi) + \partial_i\left[\sqrt{-g}\left(\frac{B^j}{\alpha} - \frac{\beta^i}{\alpha}\Psi\right)\right] &= \alpha\sqrt{-g}g^{\alpha\mu}\Gamma_{\alpha\mu}^t\Psi - \kappa\Psi,\end{aligned}$$

donde  $\Pi^i \equiv B^i + \Psi\beta^i$  y  $\Psi \equiv \frac{\psi}{\alpha}$ . El dato inicial de la función *psi* puede ser conatante o una gaussiana con amplitud del orden de  $10^{-12}$  o incluso cero y el valor optimo de  $\kappa$  se encuentra entre los valores 5 – 10. Según los experimentos numéricos realizados, valores mayores a 10 no disminuyen los errores obtenidos, asi que en este trabajo se escoge  $\kappa = 10$ .

### 3.5. Recuperación de variables primitivas

El código numérico evoluciona las variables conservativas,  $(D, S_i, \tau, B^i)$ , sin embargo obtener las variables primitivas  $(\rho, v^i, p, B^i)$  a cada paso de tiempo es necesario para el cálculo de los flujos numéricos en las interfases de la malla numérica, porque los flujos dependen tanto de las variables conservativas como de las primitivas. La recuperación de variables primitivas en la MHD relativista debe realizarse de manera numérica resolviendo un sistema de ecuaciones algebraicas no lineales, debido a que se tiene una ecuación trascendental, para dos variables independientes Noble et al. [2006].

A continuación se escribe explícitamente las funciones a resolver. Se define una variable auxiliar  $Z \equiv \rho h W^2$  con el fin de simplificar un poco las expresiones. En los siguientes calculos es útil conocer las siguientes relaciones

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = \frac{\alpha b^0 Z}{W}, \quad (3.74)$$

$$b_i b^i = b^2 + \alpha^2 (b^o)^2, \quad (3.75)$$

---


$$v_i b^i = \alpha b^0, \quad (3.76)$$

$$v_i B^i = \frac{\alpha b^0}{w}. \quad (3.77)$$

Primero se parte de la definición de la densidad de momento  $S^i$  dada en la ecuación (2.39). Usando las relaciones (3.74- 3.77) se calcula  $S^2 = S_i S^i = \gamma_{ij} S^i S^j$  y después de ciertas operaciones se obtiene

$$S^2 = (Z + B^2)^2 (1 - W^{-2}) - \left( \frac{B \cdot S}{Z} \right)^2 (2Z + B^2), \quad (3.78)$$

donde  $B^2 = B_i B^i = \gamma_{ij} B^i B^j$ .

Una segunda expresión se obtiene de la definición de la densidad de energía  $\tau \equiv E - D$ . De la misma forma que en la expresión anterior, se reescribe  $\tau$  en términos de variables conservativas y de  $Z$ , obteniendo

$$\tau = Z + B^2 - p - D - \frac{B^2}{2W^2} - \frac{1}{2} \left( \frac{B \cdot S}{Z} \right)^2, \quad (3.79)$$

donde la presión  $p = p(\rho, \epsilon)$  está determinada por la ecuación de estado de un gas ideal, y se puede reescribir también en términos de  $D$ ,  $Z$  y  $W$

$$p = \frac{\Gamma - 1}{\Gamma} \frac{Z - DW}{W^2}. \quad (3.80)$$

Se tiene entonces que las ecuaciones (3.78 - 3.80) forman un sistema de dos ecuaciones para dos incógnitas, la variable auxiliar  $Z$  y el factor de Lorentz  $W$ . Por lo tanto, después de obtener  $Z$  y  $W$  de manera numérica, es posible recuperar la presión usando la ecuación (3.80), posteriormente la densidad se recupera de la definición de  $D$  dada por la ecuación (2.38) en términos del factor de Lorentz, las componentes de la velocidad  $v^i$  se recuperan de la definición de  $S^i$  de la siguiente manera

$$\rho = \frac{D}{W}, \quad (3.81)$$

$$v^i = \frac{S^i + (B \cdot S) B^i / Z}{Z + B^2}, \quad (3.82)$$

---

y finalmente usando la ecuación de estado se recupera la densidad de energía específica  $\epsilon = p/(\rho(\Gamma - 1))$ , [Komissarov \[1999\]](#).

Existen diferentes maneras de resolver este sistema de ecuaciones. Por ejemplo en el trabajo de [Noble et al. \[2006\]](#), se describen y analizan diferentes formas de obtener  $Z$  y  $W$ . En este trabajo se usa la prescripción desarrollada por [Mignone and Bodo \[2006\]](#).

La técnica consiste en calcular el factor de Lorentz de las expresiones (3.78) y (3.79), obteniendo una función  $W$  en términos de  $S^2$ ,  $B$  y  $Z$

$$W(Z) = \left(1 - \frac{(B \cdot S)^2(2Z + B^2) + S^2 Z^2}{(Z + B^2)^2 Z^2}\right)^{-1/2}. \quad (3.83)$$

Ya que las variables conservativas son las que se evolucionan, por lo tanto se conocen, el factor de Lorentz es una función que depende sólo de una variable desconocida  $Z$ . Como consecuencia, la presión y las expresiones anteriores dependen de  $Z$ . Entonces, usando  $W(Z)$  de la ecuación (3.83) en la ecuación (3.79), se obtiene la función a resolver  $f(Z)$

$$f(Z) = Z + B^2 - (\tau + D) - p - \frac{B^2}{2W^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{B \cdot S}{Z}\right)^2. \quad (3.84)$$

Las raíces de esta función se calculan numéricamente usando el algoritmo *rtsafe* descrito en [Press W. H. and Vetterlin \[1986\]](#). Este encontrador de raíces *rtsafe*, consiste en una combinación del método de Newton-Raphson y el método de bisección. Por esta razón se necesita calcular las derivadas de las funciones involucradas.

La derivada de la función  $f(Z)$  respecto a  $Z$  es

$$\frac{df(Z)}{dZ} = 1 - \frac{dp}{dZ} + \frac{B^2}{W^3} \frac{dW}{dZ} + \frac{(B \cdot S)^2}{Z^3}, \quad (3.85)$$

donde la derivada de la presión  $p(Z)$  respecto a  $Z$ , se puede calcular de la ecuación (3.80)

$$\frac{dp}{dZ} = \frac{\Gamma - 1}{\Gamma} \frac{W(1 + DdW/dZ) - 2ZdW/dZ}{W^3}, \quad (3.86)$$

---

y la derivada del factor de Lorentz se calcula de la ecuación (3.83), obteniendo

$$\frac{dW}{dZ} = -W^3 \frac{S^2 Z^3 + (B^4 + 3B^2 Z + 3Z^2)(B.S)^2}{Z^3(B^2 + Z)^3}. \quad (3.87)$$

Por otro lado, el método de bisección requiere de un intervalo de búsqueda,  $[Z_{min}, Z_{max}]$ . Los valores de  $Z$  utilizados en este trabajo son  $Z_{min} = 10^{-12}$  y  $Z_{max} = 10^8$ , en la práctica se espera los valores de  $Z_{max}$  no estén fuera de este rango Noble et al. [2006]. La tolerancia que se impone para calcular la raíz de la función  $F(Z)$  es de  $10^{-8}$ .

Es importante también monitorear y controlar que algunos valores físicos aparezcan durante la evolución. Uno de ellos es que la velocidad del fluido no supere a la velocidad de la luz. Esta condición se controla imponiendo un valor máximo de la velocidad en cada celda numérica para evitar resultados no físicos.

### 3.6. Evolución temporal

El avance temporal del sistema de ecuaciones de la MHD ideal relativista se lleva a cabo mediante el uso del método de líneas junto con el algoritmo de integración Runge-Kutta que preserva la propiedad TVD (*total variation diminishing*), desarrollado por Shu and Osher [1989].

El sistema de ecuaciones se discretiza de tal manera que se distinguen los términos temporales de los espaciales. Se usa el método de líneas (MoL) que consiste en escribir el sistema de ecuaciones de la MHD como ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden en el tiempo, de tal forma que se puede escribir de la siguiente forma

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \mathcal{L}(U), \quad (3.88)$$

donde en el lado derecho de la ecuación, el operador  $\mathcal{L}(U)$  contiene la información de la discretización espacial y los términos de fuente

$$\mathcal{L}(U^n) \equiv \frac{F_{(i+1/2)}^n - F_{(i-1/2)}^n}{\Delta x} + S^n. \quad (3.89)$$

Los flujos numéricos  $F^n$  se construyen con los métodos HRSC descritos en en la

---

sección anterior. Los flujos y términos de fuente están calculados en el nivel de tiempo  $t^n$ .

Las iteraciones del método Runge-Kutta de segundo y tercer orden, se describen de la siguiente manera

- Runge-Kutta de segundo orden:  $\alpha = 2$  y  $\beta = 1$

$$U^{(1)} = U^n + \Delta t \mathcal{L}(U^n), \quad (3.90)$$

$$U^{n+1} = \frac{1}{\alpha} [\beta U^n + U^{(1)} + \Delta t \mathcal{L}(U^{(1)})]. \quad (3.91)$$

- Runge-Kutta de tercer orden:  $\alpha = 4$  y  $\beta = 3$

$$U^{(1)} = U^n + \Delta t \mathcal{L}(U^n), \quad (3.92)$$

$$U^{(2)} = \frac{1}{\alpha} [\beta U^{2n} + U^{(1)} + \Delta t \mathcal{L}(U^{(1)})], \quad (3.93)$$

$$U^{n+1} = \frac{1}{\alpha} [\beta U^{2n} + 2U^{(2)} + 2\Delta t \mathcal{L}(U^{(2)})]. \quad (3.94)$$

Usando los valores de  $U^n$  y  $\mathcal{L}(U^n)$  calculados al tiempo  $t^n$  se pueden encontrar los valores de  $U^{n+1}$  al tiempo  $t^{n+1}$ , [Shu and Osher \[1989\]](#). El paso en el tiempo  $\Delta t$  es constante, y está dado por  $\Delta t = CFL * dx$ , donde CFL (*Courant-Friedrichs-Lewy*) es el factor de Courant, el cual es fijo y constante. Para el caso de tres dimensiones, el paso de tiempo se escoge con la formula  $\Delta t = CFL * \min(dx, dy, dz)$ . De esta forma se escoge el paso en el tiempo  $\Delta t$  de manera apropiada para probar que se cumplen los criterios de convergencia y autoconvergencia, ya que el paso de tiempo se mantiene uniforme.

### 3.6.1. Propiedad TVD

Oscilaciones no físicas debidos a errores numéricos que pueden generarse ya sea por el uso de operadores de diferencias finitas, volúmenes finitos o cuando se realiza la evolución temporal. Se necesita una manera de medir las oscilaciones en la solución. Esto lo provee la noción de variación total (*TV* por sus siglas en

---

inglés, Total Variation) de una función. Para una función o variable definida en una malla numérica se define

$$TV(q) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} |q_i - q_{i-1}|, \quad (3.95)$$

$TV(q)$  es finito si  $q_i$  es cero o constante cuando  $i \rightarrow \pm\infty$ . Para evitar que las oscilaciones aparezcan, el método empleado debe evitar que se incremente la variación total en el tiempo

$$TV(q^{n+1}) \leq TV(q^n). \quad (3.96)$$

Si el método es  $TV D$  (Total Variation Diminishing), y se tiene un dato inicialmente monótono, esta permanecerá monótono en los pasos temporales futuros. Por lo tanto, si discretizamos una discontinuidad que se propaga, la discontinuidad puede suavizarse en pasos temporales futuros, pero no podrá volverse oscilatoria.

### 3.7. Condiciones de Frontera

Las condiciones de frontera son importantes en la evolución numérica de la MHD ideal, y deben ser tratadas de manera adecuada, según el problema físico que se esté estudiando. Debido a que estas condiciones se aplican en los borde del dominio numérico, se definen las siguientes cantidades  $q_0 = q(x(0))$ ,  $q_1 = q(x(1))$  y  $q_N = q(x(Nx))$ ,  $q_{N-1} = q(x(N-1))$ , en una dimensión espacial, denotan las variables evaluadas en los extremos de la malla numérica.

#### Condiciones de frontera de flujo saliente

Esta condición evita que el flujo que ha salido del dominio numérico regrese y contamine de errores numéricos la evolución. La condición de flujo saliente se define de manera simple como:

$$q_0 = q_1, \quad (3.97)$$

---

$$q_N = q_{N-1}, \quad (3.98)$$

en las dos fronteras la condición consiste en copiar el punto anterior, en todos los casos se ha notado que esta prescripción es muy efectiva.

### Condiciones de frontera de flujo entrante

A diferencia de la condición de frontera, esta consiste en inyectar materia al dominio numérico conatantemente, de la misma forma que en el dato inicial, esto se logra definiendo

$$q_0^{n+1} = q_0^n, \quad (3.99)$$

$$q_N^{n+1} = q_0^n, \quad (3.100)$$

donde  $q^n$  y  $q^{n+1}$  son dos tiempo diferentes. Se puede ver que en el tiempo  $n + 1$  se hereda el valor de la variable al tiempo  $n$ .

### Condiciones de frontera periódicas

Estas consisten en unir las fronteras opuestas del dominio numérico de la siguiente manera

$$q_0 = q_{N-1}, \quad (3.101)$$

$$q_N = q_1, \quad (3.102)$$

de esta forma el fluido circula de manera periódica en el dominio estudiado.

### Condiciones de frontera de reflejantes

Estas condiciones simulan numéricamente la presencia se una pared rigida en la cual el fluido es reflejado hacia el dominio numérico, esta condición se impone de

---

la siguiente manera

$$q_0 = q_1, \quad v_0 = -v_1 \quad (3.103)$$

$$q_N = q_{N-1}, \quad v_N = -v_{N-1}, \quad (3.104)$$

donde se puede ver que las variables en la frontera copian el valor en el penúltimo punto, excepto la velocidad, que tiene el signo contrario a la velocidad en el penúltimo punto. De esta manera el fluido es reflejado hacia adentro del dominio en las paredes que se encuentran al final de dominio escogido.

En este capítulo se han provisto los métodos numéricos utilizados en el código desarrollado en esta tesis. Los cuales están basados en volúmenes finitos. Como reconstructores de variables en las interceladas *MC*, *minmod*, *WENO5* y *PPM* y reconstructores de flujos *HLLC*. También se han descrito dos métodos que se usaron para controlar la constricción  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  como *Flux-CT* y *Cleaning*. Y las condiciones de frontera usadas en los problemas estudiados.

Las ecuaciones en forma conservativa de MHD ideal se resuelven numéricamente usando los métodos basados en el esquema *HRSC* descritos en este capítulo. Se estudian algunas combinaciones entre reconstructores de variables, reconstructores de flujos y el método para controlar la constricción. Los resultados numéricos y algunas comparaciones se presentan en el capítulo siguiente.

# Capítulo 4

## Pruebas del código numérico

Antes de proceder a realizar simulaciones numéricas para estudiar un problema físico, el código numérico tiene que ser validado mediante pruebas numéricas. Dichas pruebas estándar son las que códigos existentes han reproducido. Algunas de estas pruebas tienen solución exacta, como los problemas de Riemann 1D en el caso de hidrodinámica y las pruebas de Komissarov [1999] y las pruebas de Balsara [2001] en el caso de la magnetohidrodinámica. En el caso de hidrodinámica ideal relativista se usan las soluciones exactas desarrolladas por J. M. Martí [1994, 2003] y F. D. Lora-Clavijo [2013] para comparar los resultados numéricos obtenidos. Por otro lado, para el caso de la MHD ideal relativista se usan las soluciones exactas desarrolladas por B. Giacomazzo [2006]. En el caso 2D no existen soluciones exactas, una forma alternativa de mostrar que el código MHD ideal relativista reproduce las pruebas estándar en 2D es comparar directamente los resultados obtenidos con los resultados obtenidos en códigos existentes para los mismos problemas. En este capítulo se muestran, las pruebas de hidrodinámica y magnetohidrodinámica relativista, que validan el código desarrollado en este trabajo.

---

## 4.1. Pruebas numéricas de hidrodinámica relativista

En esta primera sección se considera que el campo magnético es cero, teniendo entonces el caso de la hidrodinámica relativista. A continuación se enumeran las pruebas estandar al que se sometió el código numérico desarrollado.

En la primera parte se presentan las pruebas en una dimensión espacial. Dichas pruebas 1D consisten básicamente en un problema de Riemann en una dirección centrado en  $x_0 = 0$ . En la mayoría de los casos se usa un dominio de  $[-0.5, 0.5]$  con 400, 800, 1600 celdas y un factor de Courant  $CFL = 0.1$  y  $0.25$  en algunos casos. En la Tabla 4.1 se muestran los parámetros correspondientes a distintas configuraciones hidrodinámicas del problema de Riemann en 1D. Cabe mencionar que, cada una de las pruebas fue estudiada en cada una de las tres direcciones  $x, y, z$  para corroborar el funcionamiento del código numérico.

### Prueba 1: "Blast wave" mediano

La densidad, presión y energía interna del fluido obedecen la ecuación de estado de un gas ideal con índice adiabático  $\Gamma = 5/3$ . En la Figura 4.1, se muestran los resultados de la simulación numérica. En esta figura se compara la solución numérica (líneas con cruces negras) con la solución exacta (línea continua roja) desarrollada por [J. M. Martí, 1994, 2003]. Esta primera prueba muestra la capacidad del código de lidiar con presiones bajas, como se puede ver en la figura el código reproduce muy bien la solución exacta.

### Prueba 2: "Blast wave" fuerte

La segunda prueba hidrodinámica es la prueba llamada "Blast wave fuerte" J. M. Martí [1994]. Los parámetros iniciales de esta prueba se pueden encontrar en la Tabla 4.1. En la Figura 4.2 se muestra un instante de la evolución de las variables del fluido, al tiempo  $t = 0.4$ . Se muestran: la presión, la densidad, la velocidad y la energía interna, comparando la solución numérica y la solución

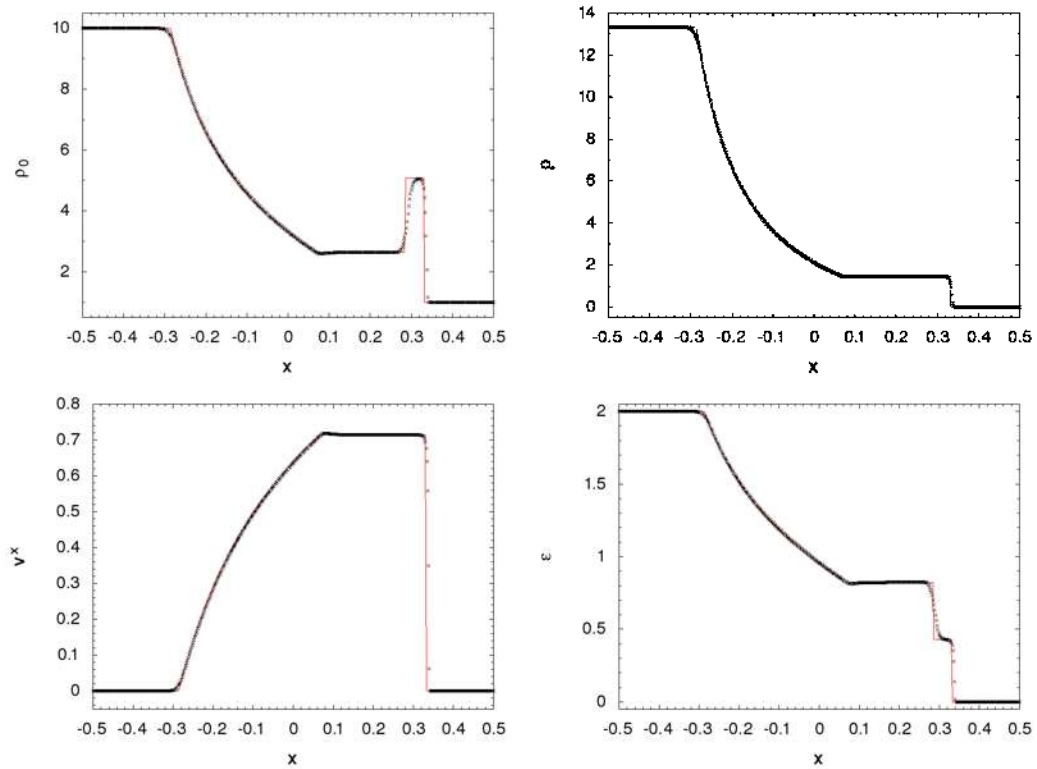


Figura 4.1: Prueba 1: el problema de Riemann 1D del Blast mediano. En esta figura se muestran las variables que describen al fluido al tiempo  $t = 0.4$ . En línea negra con cruces se muestra la solución numérica y en línea continua roja se muestra la solución exacta. La prueba se llevó a cabo en la dirección  $x$  usando 500 celdas.

---

Tipo de Prueba	$\Gamma$	$\rho_0$	$p$	$v^x$	$v^y$	$v^z$
<b>Prueba 1</b>						
Izquierda	5/3	10.0	13.33	0.0	0.0	0.0
Derecha		1.0	$10^{-8}$	0.0	0.0	0.0
<b>Prueba 2</b>						
Izquierda	5/3	1.0	1000.0	0.0	0.0	0.0
Derecha		1.0	1.0	0.0	0.0	0.0
<b>Prueba 3</b>						
Izquierda	4/3	1.0	0.001	0.999999995	0.0	0.0
Derecha		1.0	0.001	-0.999999995	0.0	0.0
<b>Prueba 4</b>						
Izquierda	4/3	1.0	1.0	0.9	0.0	0.0
Derecha		1.0	10.0	0.0	0.0	0.0
<b>Prueba 5</b>						
Izquierda	5/3	1.0	1000.0	0.0	0.0	0.0
Derecha		1.0	0.01	0.0	0.99	0.0
<b>Prueba 6</b>						
Izquierda	5/3	1.0	1000.0	0.0	0.9	0.0
Derecha		1.0	0.01	0.0	0.9	0.0

Cuadro 4.1: *En esta tabla se presentan los valores iniciales de las variables  $p$ ,  $\rho$  y  $v^i$  a derecha e izquierda de la discontinuidad inicial localizada en  $x_0 = 0$ , en el dominio numérico  $x \in [-0.5, 0.5]$ .*

exacta de cada una respectivamente. En esta figura se puede notar una región delgada de alta densidad que se mueve, en la dirección del choque debido a la enorme diferencia de presiones entre las dos regiones iniciales. En esta prueba tiene el objetivo de verificar que los métodos empleados capturan choques fuertes en donde se tiene un perfil de densidad picuda y diferencias de presión de 1000.

### Prueba 3: Colisión frontal

Esta prueba consiste en la colisión frontal de dos vientos de fluido que se mueven a velocidades cercanas a la de la luz, alcanzando factores de Lorentz del orden de 1000. Este problema prueba la capacidad de código de resolver casos extremos, en las cuales no solo el factor de Lorentz sino también la densidad, la

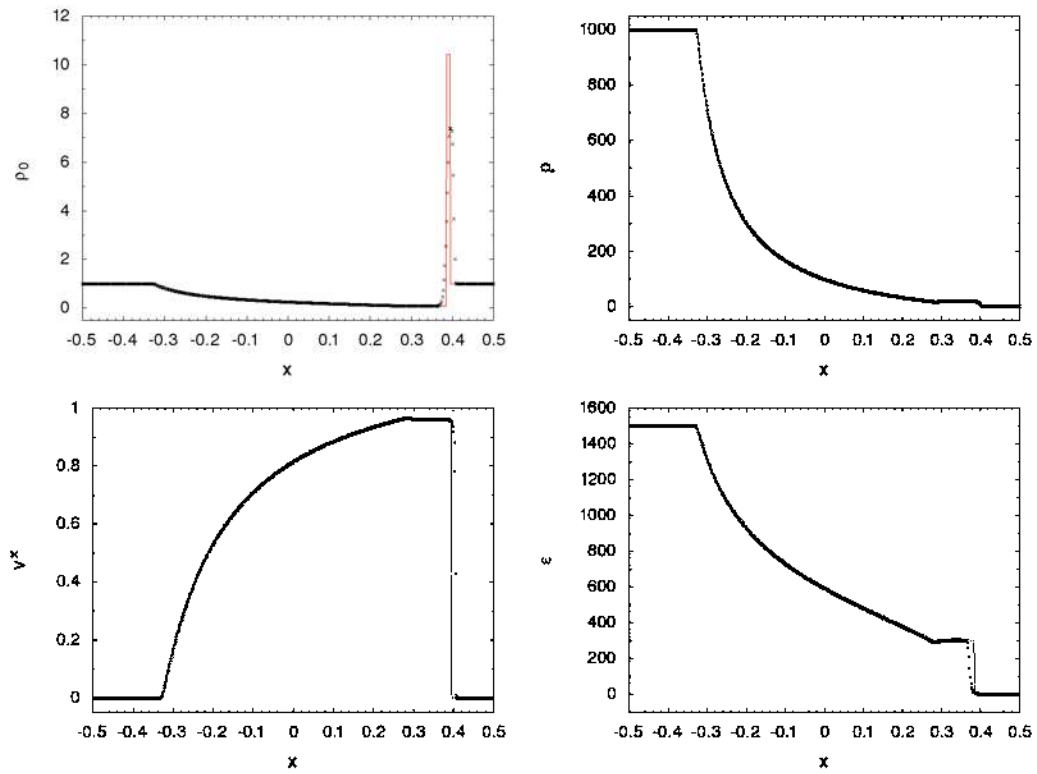


Figura 4.2: Prueba 2: Blast wave fuerte. En esta figura se muestran la densidad, presión, velocidad en  $x$  y energía interna, comparando la solución exacta y la solución numérica al tiempo  $t = 0.4$ . Se puede observar en la densidad una región, que corresponde a un cascaron de alta densidad, muy delgado.

presión y la energía interna alcanzan valores muy grandes, como se muestra en la Figura 4.3.

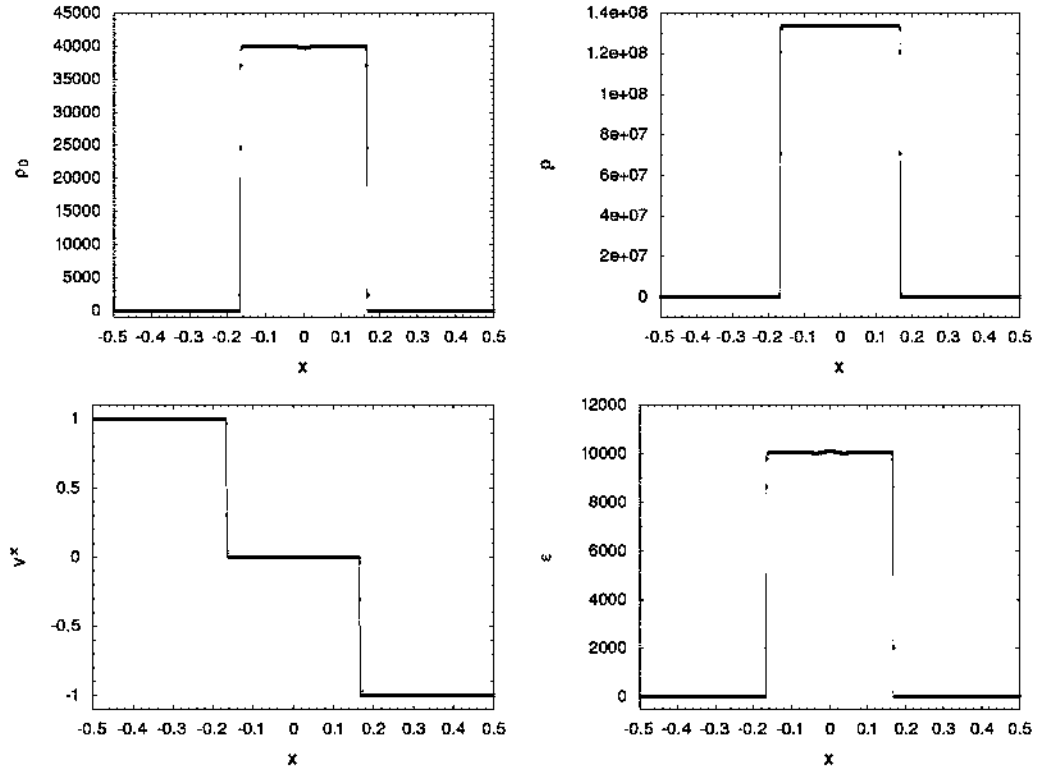


Figura 4.3: *Prueba 3, colisión frontal.* Se muestran la densidad, presión, velocidad y energía interna al tiempo  $t = 0.4$ . En este caso se usa el índice adiabático  $\Gamma = 4/3$ . En esta figura se muestran los valores extremos que alcanzan las variables del fluido, cuando el fluido se mueve velocidades tales que el factores de Lorentz es del orden de 1000.

#### Prueba 4: Choque fuerte en reversa

En esta prueba, a diferencia de las anteriores, se tiene una presión menor en la parte izquierda de la discontinuidad inicial (ver Tabla 4.1). Se puede observar en la Figura 4.4 que se forma un choque en reversa. También se observa, al comparar con la solución exacta aparecen unas oscilaciones en la presión y densidad debido a los métodos numéricos utilizados en este trabajo.

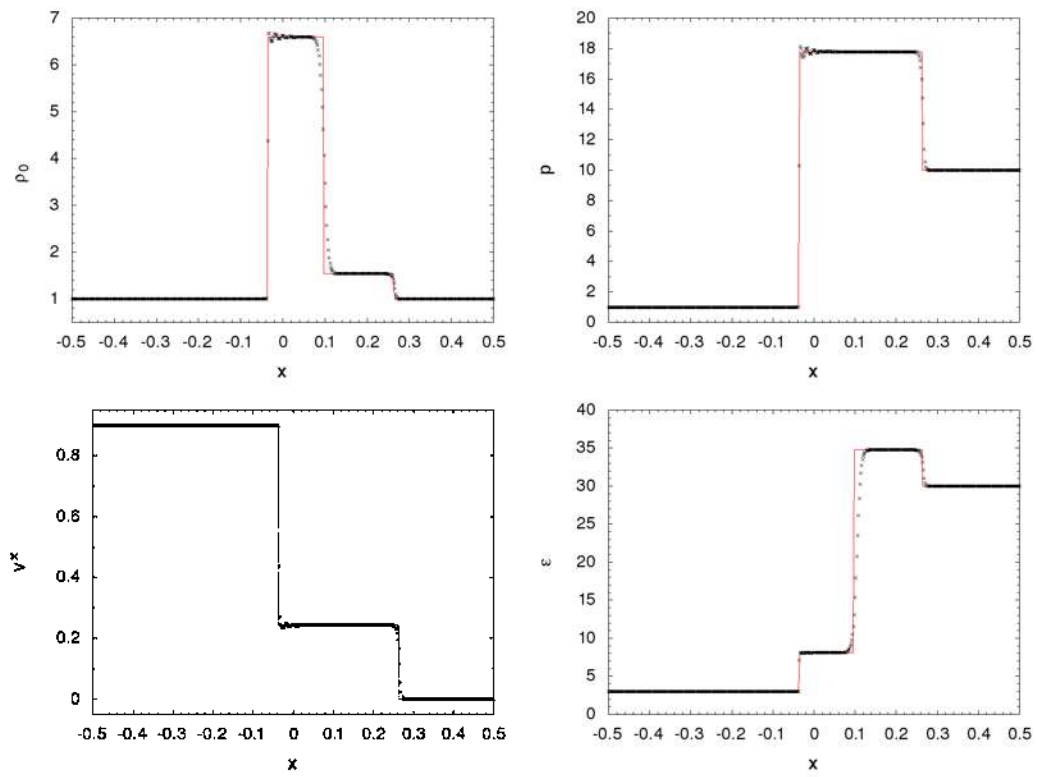


Figura 4.4: Prueba 4: Choque fuerte en reversa. Se muestran las variables del fluido a un instante de la evolución que corresponde al tiempo  $t = 0.4$ . En este caso el índice adiabático es  $\Gamma = 4/3$ .

---

## Prueba 5: Velocidad transversal diferente de cero, caso débil

Esta prueba muestra la capacidad del código de manejar problemas en los cuales existe una componente transversal de la velocidad a la propagación del fluido. Este problema es de interés debido a que en muchos escenarios astrofísicos se puede encontrar gas con esta configuración. En este caso el problema es relativamente fácil debido a que se tiene velocidad transversal diferente de cero solo en el lado derecho, donde el gas es frío. Los resultados numéricos se comparan con la solución exacta calculada por [J. M. Martí \[1994\]](#), como se muestra en la Figura 4.5.

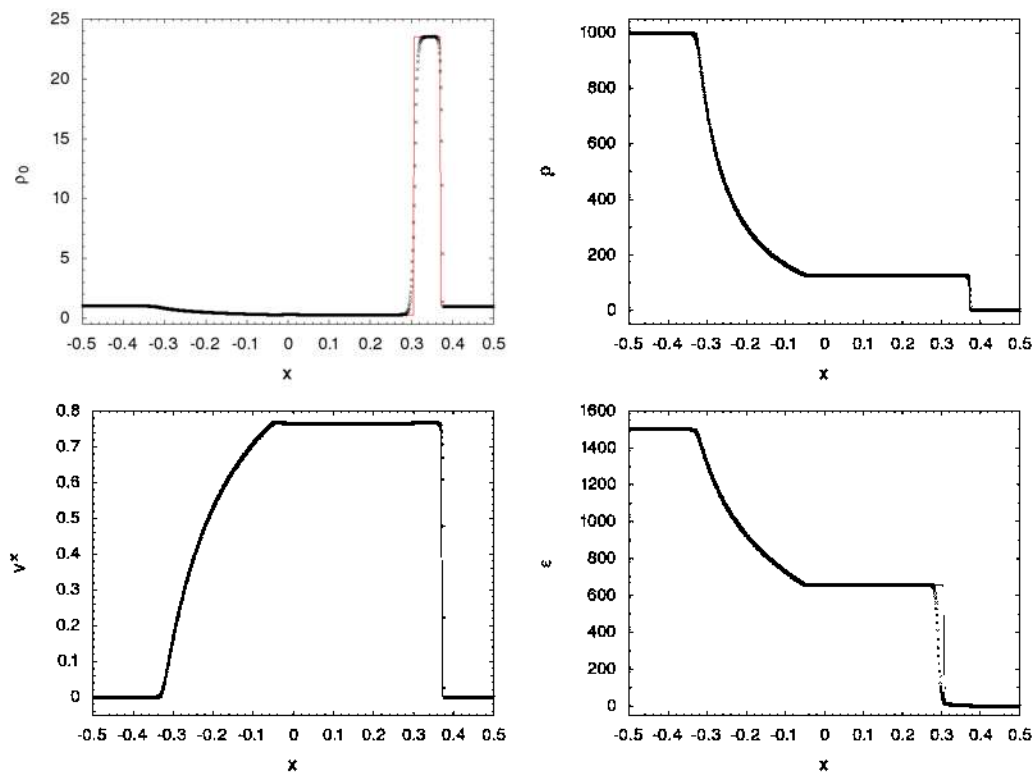


Figura 4.5: Prueba 5: Velocidad transversal diferente de cero, caso débil. Se muestran las variables a  $t = 0.4$ .

---

## Prueba 6: Velocidad transversal diferente de cero, caso fuerte

En este caso la velocidad transversal al movimiento del fluido también es diferente de cero en la zona izquierda en donde el gas está más caliente. Los resultados numéricos se comparan con la solución exacta en la Figura 4.6, al tiempo  $t = 0.4$ . A diferencia de los casos anteriores, para tener una mejor aproximación a la solución exacta la resolución juega un papel importante. En la Figura 4.6 se muestran los resultados obtenidos con 400, 3200, 10000 celdas.

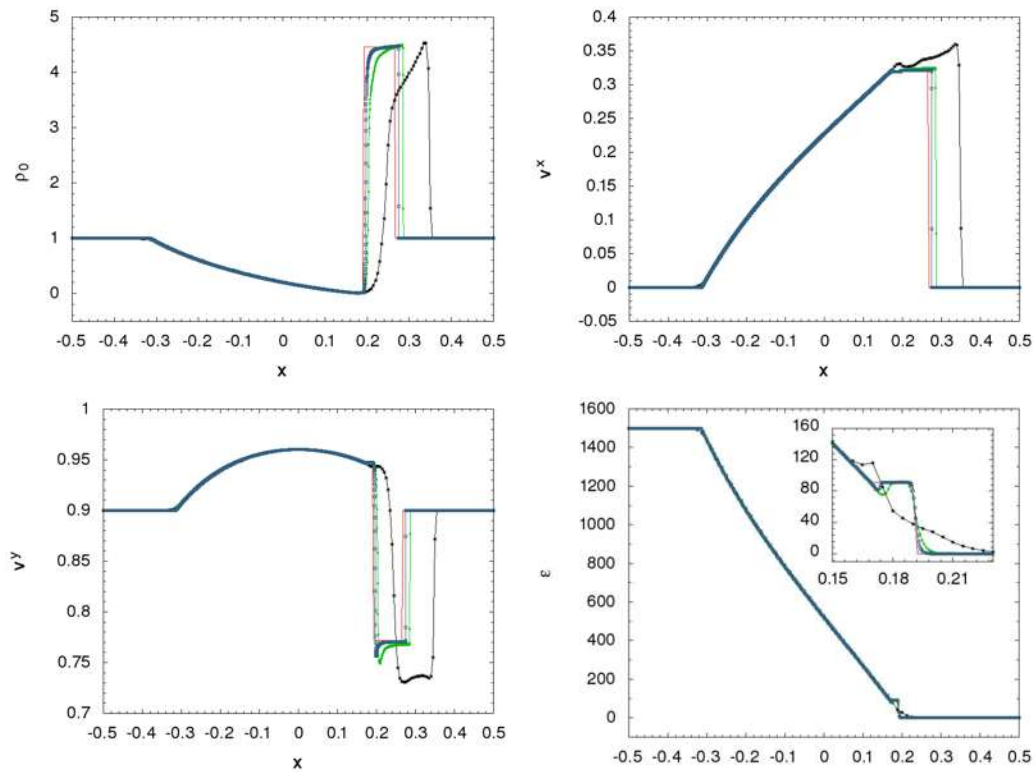


Figura 4.6: prueba 6: Velocidad transversal diferente de cero: caso fuerte. Se muestran las variables del fluido al tiempo  $t = 0.6$ . Se compara la solución numérica, usando tres resoluciones, con la solución exacta (línea continua roja). Con línea punteada negra se muestra la solución numérica usando 400 celdas, en verde con puntos usando 3200 celdas y en azul con puntos usando 10000 celdas, respectivamente. Como se aprecia en esta figura se necesita mucha resolución para tener una aproximación adecuada a la solución exacta.

---

## Problema de Riemann 2D relativista

El problema de Riemann 2D relativista, consiste en dividir al dominio  $[-0.5, 0.5] \times [-0.5, 0.5]$  en cuatro regiones al tiempo inicial. Esta prueba se lleva a cabo en el plano  $x$ - $y$ . Los valores de las variables del fluido en cada región son los siguientes

$$(\rho, p, v^x, v^y)^1 = (0.1, 1.0, 0.99, 0)$$

$$(\rho, p, v^x, v^y)^2 = (0.1, 0.01, 0, 0)$$

$$(\rho, p, v^x, v^y)^3 = (0.5, 1.0, 0, 0)$$

$$(\rho, p, v^x, v^y)^4 = (0.1, 1.0, 0, 0.99)$$

en donde la región 1 corresponde al dominio  $x < 0, y > 0$ , la región 2 corresponde a  $x > 0, y > 0$ , la región 3 corresponde a  $x < 0, y < 0$  y la región 4 corresponde al dominio  $x > 0, y < 0$ . En la Figura 4.7 se muestra el resultado de la evolución en los tiempos  $t = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ . Se muestra la morfología de la densidad de masa en reposo, el cual es consistente con resultados anteriores (e.g. [L. Del Zanna, 2002]).

## Túnel de viento de Emery relativista

El túnel de viento relativista consiste en un viento entrante a la izquierda del dominio numérico, con un obstáculo rectangular dentro del túnel. Esta prueba muestra la habilidad del código para imponer condiciones de frontera artificiales en el obstáculo y en las paredes del túnel. Los datos iniciales estándares, son  $\rho = 1.4, p = 1.0, v^x = 0.99, v^y = 0$  con índice adiabático  $\Gamma = 1.4$ . El escalón tiene una altura de 0.2 en  $y$  y se extiende para valores de  $x > 0.6$  en un dominio  $[0, 1] \times [0, 3]$  [W. Zhang, 2006]. Las condiciones de frontera son: de flujo entrante en la frontera izquierda, de flujo saliente en la frontera derecha, reflejantes en las paredes del túnel y en el escalón. En la Figura 4.8 se muestran los resultados de la evolución a los tiempos  $t = 1, 2, 3, 4$ . En esta figura se puede observar como el flujo es desviado hacia arriba por el obstáculo, y después es reflejado en la pared superior. Se puede ver en la última fotografía el mismo efecto cuando el fluido rebota del obstáculo nuevamente después de cierto tiempo.

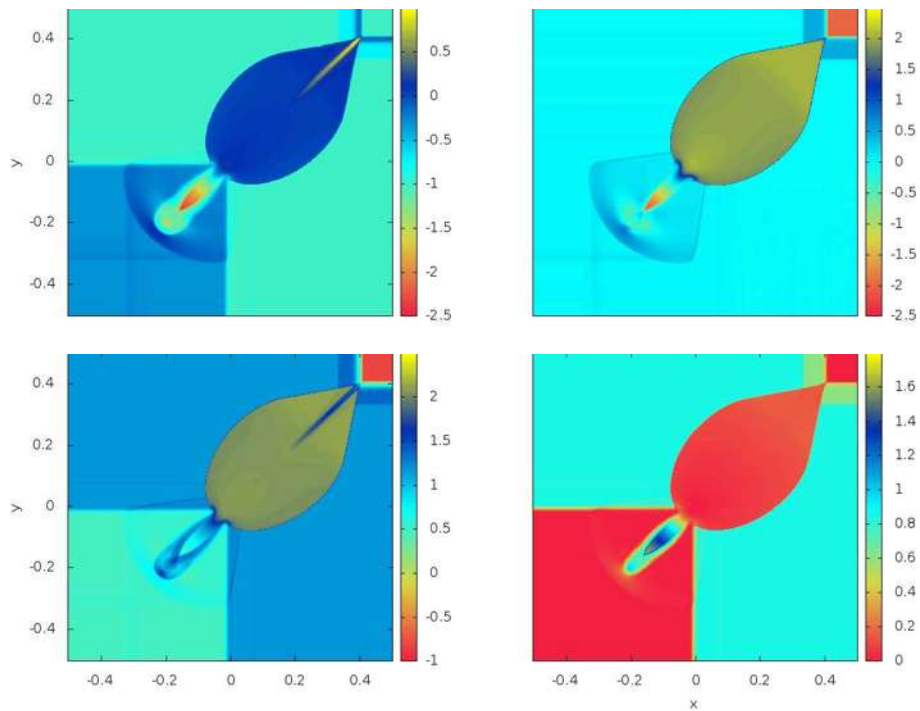


Figura 4.7: *Problema de Riemann 2D. En esta figura se muestra la evolución de la densidad de masa en reposo a los tiempos  $t = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ . Se ilustra cómo cambia la morfología durante la evolución. Para esta prueba se usaron  $512 \times 512$  celdas en el dominio  $[-0.5, 0.5] \times [-0.5, 0.5]$ , con un factor de Courant  $CFL = 0.25$ . El índice adiabático del gas es de  $\Gamma = 5/3$ .*

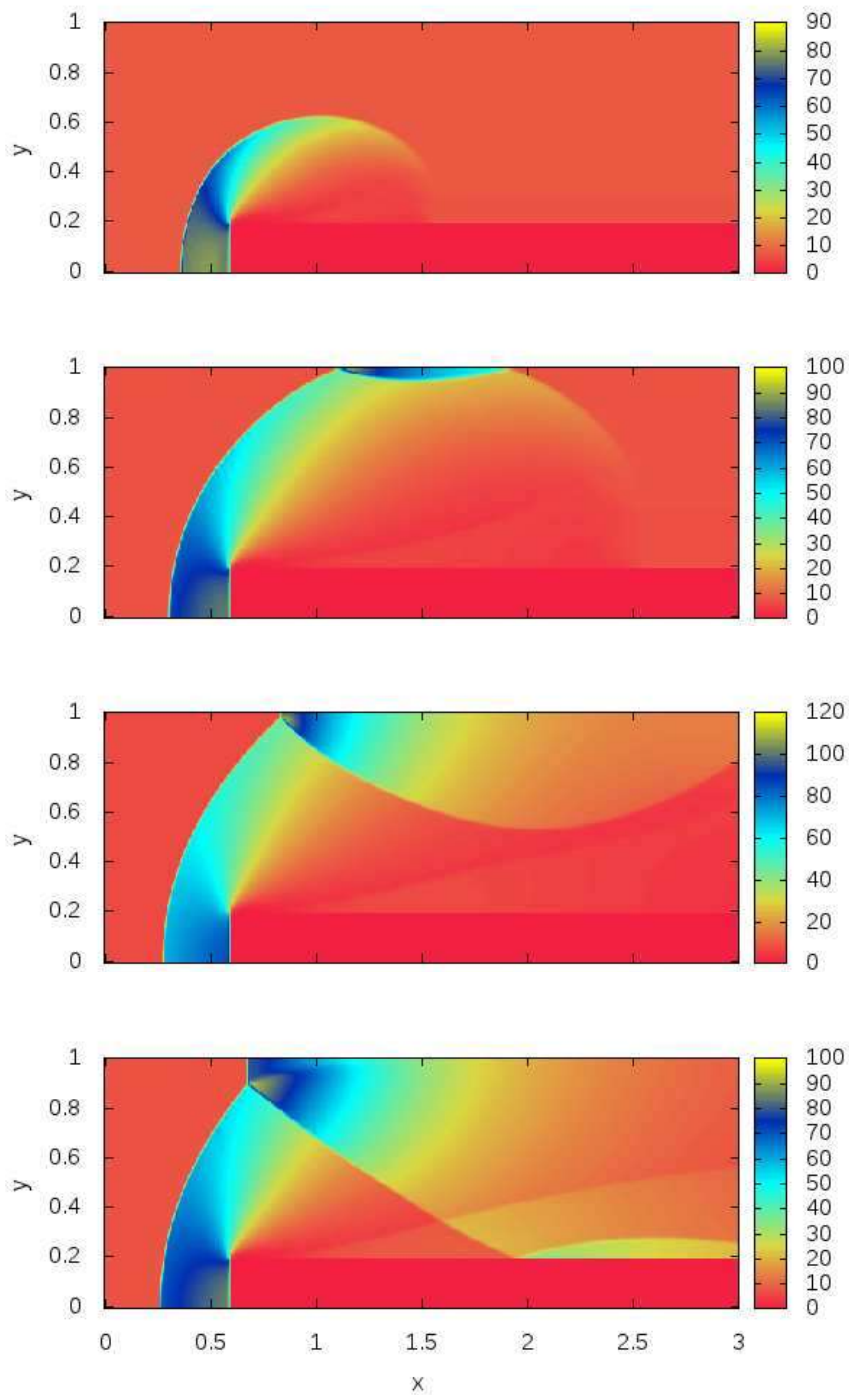


Figura 4.8: Túnel de viento de Emery relativista. Se muestra la evolución de la densidad de masa en reposo a los tiempos  $t = 1, 2, 3, 4$ . Se usan  $600 \times 200$  celdas en un dominio  $[0, 3] \times [0, 1]$ . Se usa un factor de Courant  $CFL = 0.25$ .

---

## Inestabilidad de Kelvin Helmholtz

La segunda prueba 2D, es la inestabilidad de Kelvin Helmholtz (KH). Este tipo de inestabilidades se desarrolla cuando se tienen dos regiones en las cuales el fluido se mueve en direcciones opuestas. Para este problema se utilizan los parámetros usados por Penner [2011a] en el caso relativista. Esta prueba es la versión relativista del caso de hidrodinámica clásica estudiada en A. Frank and Gaalaas [1996]; ATHENA. El dominio numérico se divide en tres regiones, en las cuales las variables del fluido toman los siguientes valores

$$\begin{aligned}(\rho, p, v^x, v^y) &= (2, 2.5, 0.5, 0) \quad \text{si } |y| < 0.25, \\(\rho, p, v^x, v^y) &= (1, 2.5, -0.5, 0) \quad \text{si } |y| \geq 0.25.\end{aligned}$$

El fluido tiene índice adiabático  $\Gamma = 5/3$ . Adicionalmente se perturba la velocidad de la siguiente manera  $v^x = v^x * (1 + 0.01 * \cos(10\pi x) \cos(10\pi y))$  y  $v^y = v^y * (0.01 * \cos(10\pi x) \cos(10\pi y))$ . En la Figura 4.9 se muestran los resultados de la evolución de las variables  $\rho$  y  $\epsilon$  a los tiempos  $t = 10$  y  $15$ . Se puede observar que en las dos membranas en donde el fluido tiene velocidades opuestas se desarrollan las inestabilidades. Las condiciones de frontera son: periódicas en la dirección  $x$  y reflejantes en  $y$ .

El segundo caso que se considera es el caso de la inestabilidad de KH con un gas altamente presurizado. En este caso se tiene una sola membrana en forma sinusoidal a la mitad del dominio numérico, en donde solo una región se mueve a alta velocidad respecto de la otra. En esta caso, la forma sinusoidal de la membrana que separa a las dos regiones produce las inestabilidades a diferencia del primer caso en el cuál se necesita una perturbación. En esta caso se usa un índice adiabático  $\Gamma = 5/3$ , y los parámetros estudiados por W. Zhang [2006]

$$\begin{aligned}(\rho, p, v^x, v^y) &= (1, 1000, 0, 0.9) \quad \text{si } |y| > 0.01 \sin(2\pi y), \\(\rho, p, v^x, v^y) &= (10, 1000, 0, 0) \quad \text{en otro caso.}\end{aligned}$$

En la Figura 4.10, se muestra el resultado de la evolución a los tiempos  $t =$

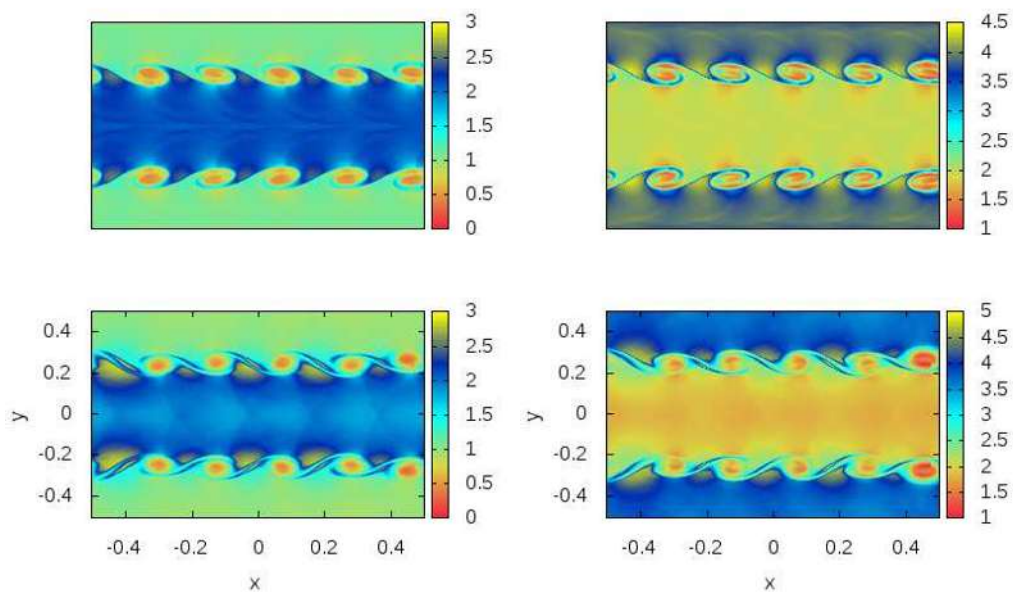


Figura 4.9: *Inestabilidad de Kelvin Helmholtz. En esta figura se muestran: a la izquierda la densidad de masa en reposo al tiempo  $t = 10$  (arriba) y al tiempo  $t = 15$  (abajo), a la derecha la energía interna específica a  $t = 10$  (arriba) y a  $t = 15$  (abajo). Se usa un dominio de  $[-0,5 : 0,5] \times [-0,5 : 0,5]$  con  $512 \times 512$  celdas.*

0.5, 1.5, 2.5 y 3.5. La resolución usada en esta prueba es de  $\Delta x = \Delta y = 1/1024$ , que equivale a la resolución efectiva del mayor refinamiento usado en [W. Zhang \[2006\]](#). Nuevamente se usan condiciones de frontera periódicas en  $x$  y reflejantes en  $y$ , el dominio usado es  $[0 : 1] \times [-2.5 : 2.5]$ .

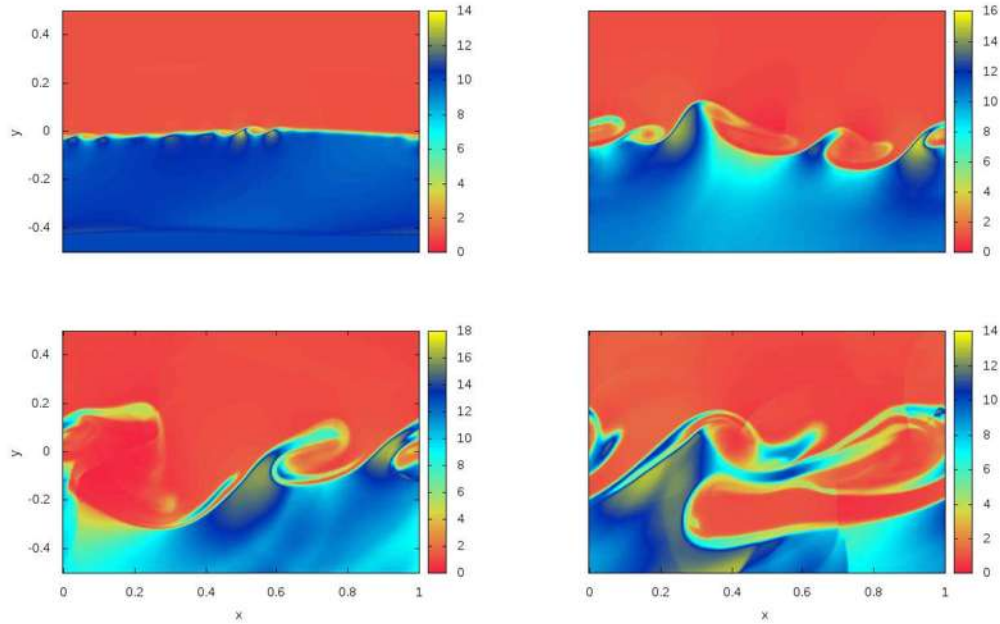


Figura 4.10: *Inestabilidad KH con presión alta. En esta figura se muestra un acercamiento de la densidad de masa en reposo a diferentes instantes de la evolución,  $t = 0.5$  (arriba izquierda),  $t = 1.5$  (arriba derecha),  $t = 2.5$  (abajo izquierda) y  $t = 3.5$  (abajo derecha). El dominio que se muestra es  $[0, 1] \times [-0.5, 0.5]$ , la resolución usada es de  $\Delta x = \Delta y = 1/1024$ .*

## 4.2. Pruebas numéricas de Magnetohidrodinámica relativista

En la segunda parte de este capítulo se presentan las pruebas estándar de la magnetohidrodinámica ideal relativista. Los resultados numéricos se comparan

---

con las soluciones exactas desarrolladas por [B. Giacomazzo \[2006\]](#); [Balsara \[2001\]](#). Al igual que en la hidrodinámica relativista, solo existen soluciones exactas para las pruebas 1D. En la Tabla [4.2](#) se enumeran los parámetros usados en cada una de las pruebas. En el caso 2D, se comparan los resultados morfológicamente con los códigos existentes.

Las pruebas 1D de Komissarov se llevan a cabo en un dominio de  $[-2 : 2]$  usando 3200 celdas, en las pruebas de Balsara se usa un dominio de  $[-0.5 : 0.5]$  usando 1600 celdas. En ambos casos se usa un factor de Courant de 0.1. Al tiempo inicial se tiene una discontinuidad en el centro del dominio numérico  $x_0 = 0$ .

### **Prueba 1: Tubo de choque de Komissarov**

Esta prueba consiste en un tubo de choque magnetizado, con campo magnético constante a lo largo de la dirección  $x$  y diferencia de presiones del orden  $\Delta p \sim 10^3$ . Los parámetros iniciales se pueden encontrar en la Tabla [4.2](#). En la Figura [4.11](#) se muestra el resultado de la evolución numérica al tiempo  $t = 1$ . Los resultados numéricos se comparan con la solución exacta obtenida por [B. Giacomazzo \[2006\]](#). Como se puede apreciar en la figura, se reproduce satisfactoriamente la solución exacta. En esta prueba se usa un dominio  $[-2, 2]$  en la dirección  $x$  dividida en 3200 celdas.

### **Prueba 2: Colisión fronta de Komissarov**

La segunda prueba MHD 1D, es la colisión de dos vientos moviéndose en direcciones opuestas, con  $v^x = 0.98058$ . El campo magnético en dirección del choque es constante en la componente  $x$ , mientras que la componente  $y$  del campo magnético entre las dos regiones iniciales es opuesto (ver Tabla [4.2](#)). En la Figura [4.12](#) se muestran los choques que aparacen después de un tiempo  $t = 1.22$ . Al igual que en el caso hidrodinámico aparacen dos choques, uno lento y uno rápido moviéndose a la derecha y a la izquierda de la discontinuidad inicial  $x_0 = 0$ .

---

#Prueba	$\Gamma$	$\rho_0$	$p$	$v^x$	$v^y$	$v^z$	$B^x$	$B^y$	$B^z$
<b>Prueba 1</b>									
Izquierda	4/3	1.0	1000.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0
Derecha		0.1	1.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0
<b>Prueba 2</b>						2			
Izquierda	4/3	1.0	1.0	$5/\sqrt{26}$	0.0	0.0	10.0	10.0	0.0
Derecha		1.0	1.0	$-5/\sqrt{26}$	0.0	0.0	10.0	-10.0	0.0
<b>Prueba 3</b>									
Izquierda	2	1.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.5	1.0	0.0
Derecha		0.125	0.1	0.0	0.0	0.0	0.5	-1.0	0.0
<b>Prueba 4</b>									
Izquierda	5/3	1.0	30.0	0.0	0.0	0.0	5.0	6.0	6.0
Derecha		1.0	1.0	0.0	0.0	0.0	5.0	0.7	0.7
<b>Prueba 5</b>									
Izquierda	5/3	1.0	1000.0	0.0	0.0	0.0	10.0	7.0	7.0
Derecha		1.0	0.1	0.0	0.0	0.0	10.0	0.7	0.7
<b>Prueba 6</b>									
Izquierda	5/3	1.0	0.1	0.999	0.0	0.0	10.0	7.0	7.0
Derecha		1.0	0.1	-0.999	0.0	0.0	10.0	-7.0	-7.0
<b>Prueba 7</b>									
Izquierda	5/3	1.08	0.95	0.4	0.3	0.2	2.0	0.3	0.3
Derecha		1.0	1.0	-0.45	-0.2	0.2	2.0	-0.7	0.5
<b>Prueba 8</b>									
Izquierda	5/3	1.0	5.0	0.0	0.3	0.4	1.0	6.0	2.0
Derecha		0.9	5.3	0.0	0.0	0.0	1.0	5.0	2.0

Cuadro 4.2: En esta tabla se muestran los parámetros usados para las pruebas de MHD ideal relativista 1D.

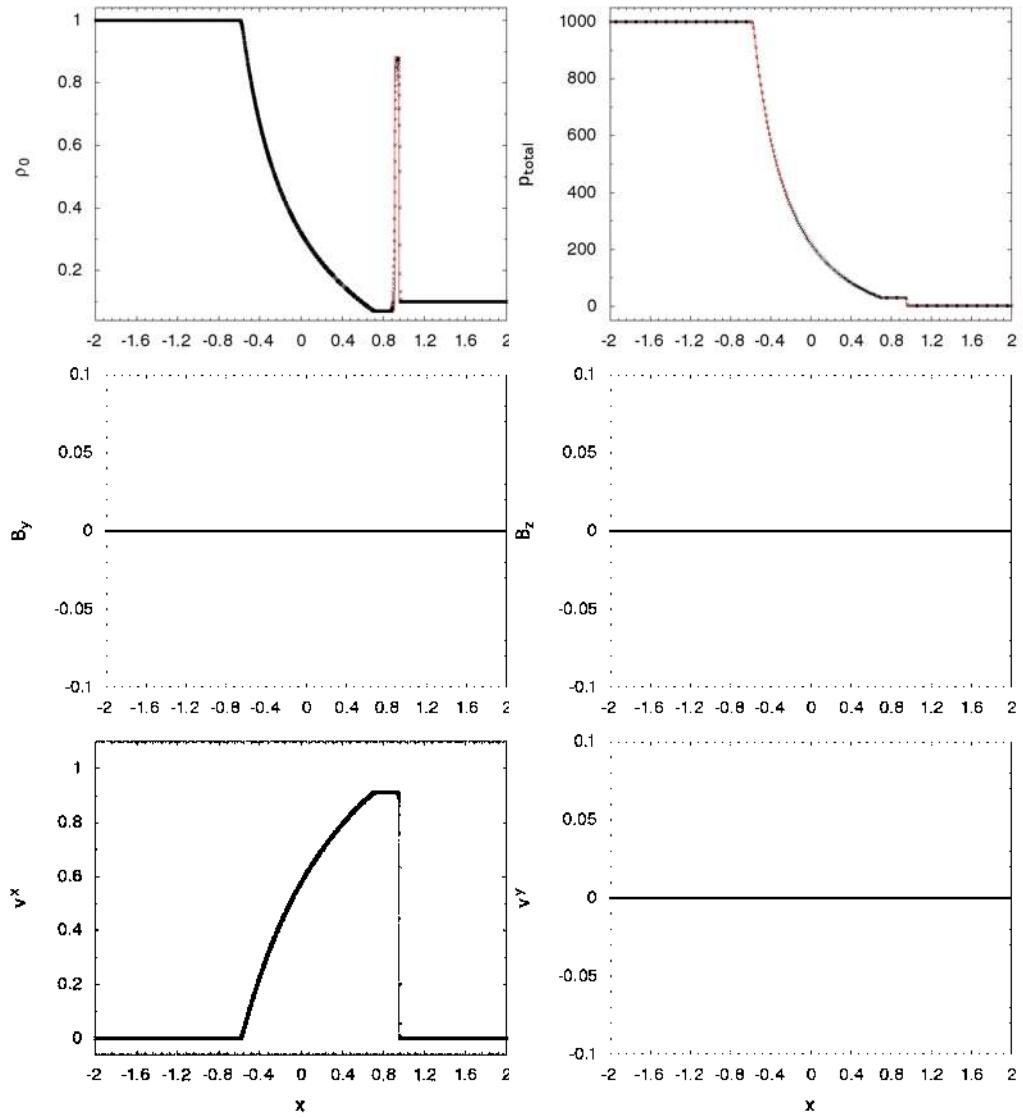


Figura 4.11: Prueba 1: Tubo de choque de Komissarov. Se muestran las variables del fluido al tiempo  $t = 1$ . En línea punteada negra se muestra la solución numérica comparada con la solución exacta en línea continua roja.

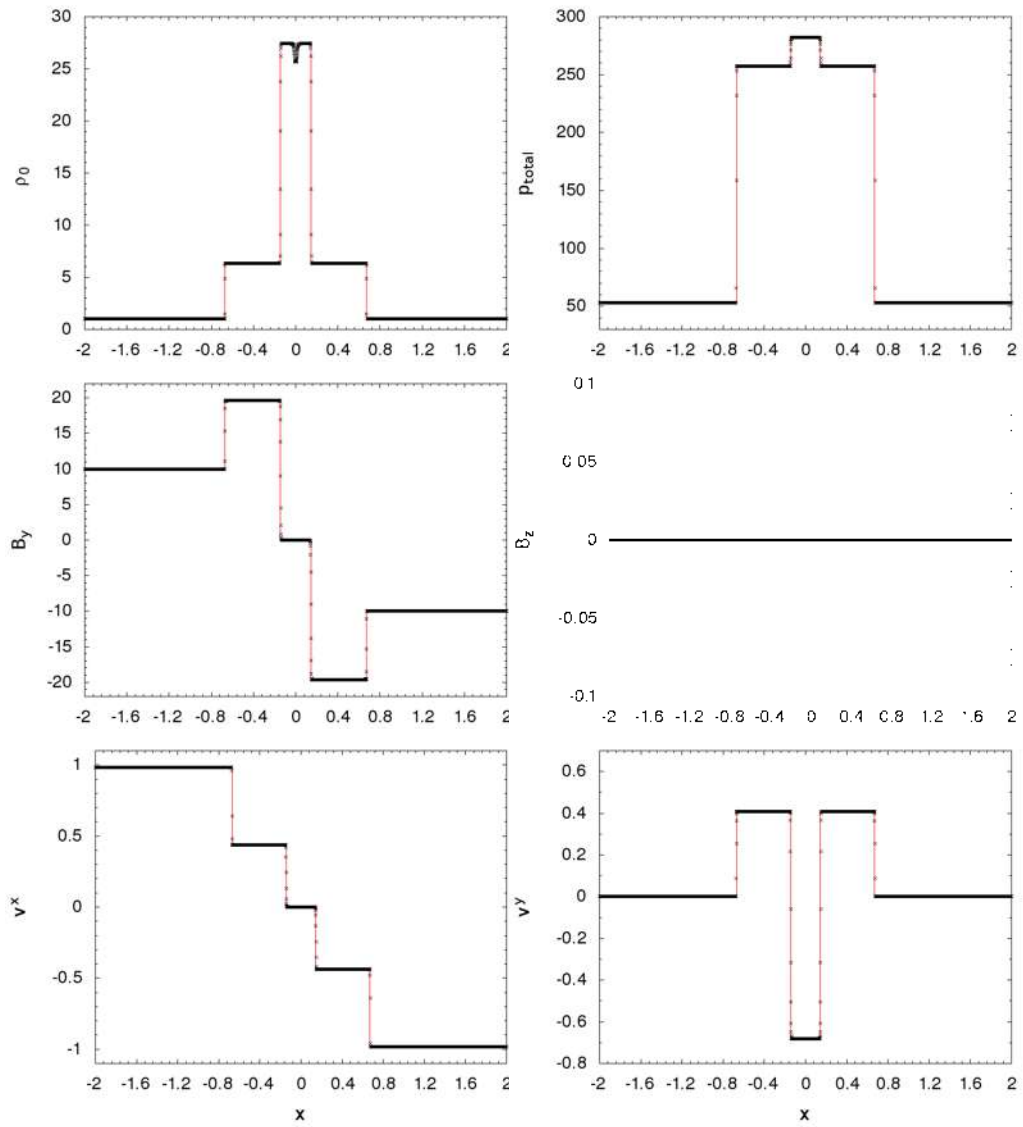


Figura 4.12: Prueba 2: Choque frontal de Komissarov. En esta figura se presenta el resultado de la evolución numérica. Se compara la solución numérica en línea con cruces y la solución numérica en línea roja al tiempo  $t = 1.22$ .

---

### Prueba 3: Balsara 1

Esta prueba 1D de MHD corresponde a la generalización relativista de la prueba clásica de Brio-Wu [D.S. Balsara \[1999\]](#). Esta prueba es básicamente un tubo de choque magnetizado. En la Figura [4.13](#) se comparan la solución numérica y la solución exacta al tiempo  $t = 0.4$ . Se puede apreciar en la figura, una zona de rarefacción rápida en la región que se mueve a la izquierda, una onda compuesta, la onda de contacto, un choque lento y una zona pequeña de rarefacción rápida que se mueve a la derecha.

### Prueba 4: Balsara 2

Esta prueba corresponde a un blast wave mediano. Al tiempo inicial separadas por la discontinuidad en  $x_0 = 0$ , la razón entre las presiones de las dos regiones es  $\Delta p = 30$ . En la Figura [4.14](#) se muestran las variables del fluido magnetizado al tiempo  $t = 0.4$ . Se puede apreciar en la densidad de masa en reposo, la explosión moviéndose en dirección  $x$ . El factor de Lorentz es del orden de  $W \sim 1.36$ .

### Prueba 5: Balsara 3

Este es el caso fuerte de la prueba anterior, Blast wave fuerte. En este caso la relación de presiones en la discontinuidad es de  $p_L/p_R = 10^4$ . La densidad de masa en reposo y  $B^x$  son constantes. El fluido está en reposo al tiempo inicial. En la Figura [4.15](#) se muestra un instante de la evolución correspondiente al tiempo  $t = 0.4$ . Se puede apreciar la onda expansiva en la densidad de masa en reposo y los efectos sobre la velocidad y el campo magnético. El factor de Lorentz alcanza valores de  $W \sim 3.5$ . La solución numérica es consistente con la solución exacta. Se puede ver la aparición de zonas de rarefacción (una rápida y una lenta) moviéndose a la izquierda, una onda de contacto y dos choques (uno rápida y otro lenta) moviéndose a la derecha.

### Prueba 6: Balsara 4

Este caso, nuevamente corresponde a un choque frontal de dos vientos. Sin embargo, a diferencia de la prueba colisión frontal de Komissarov, en este caso la

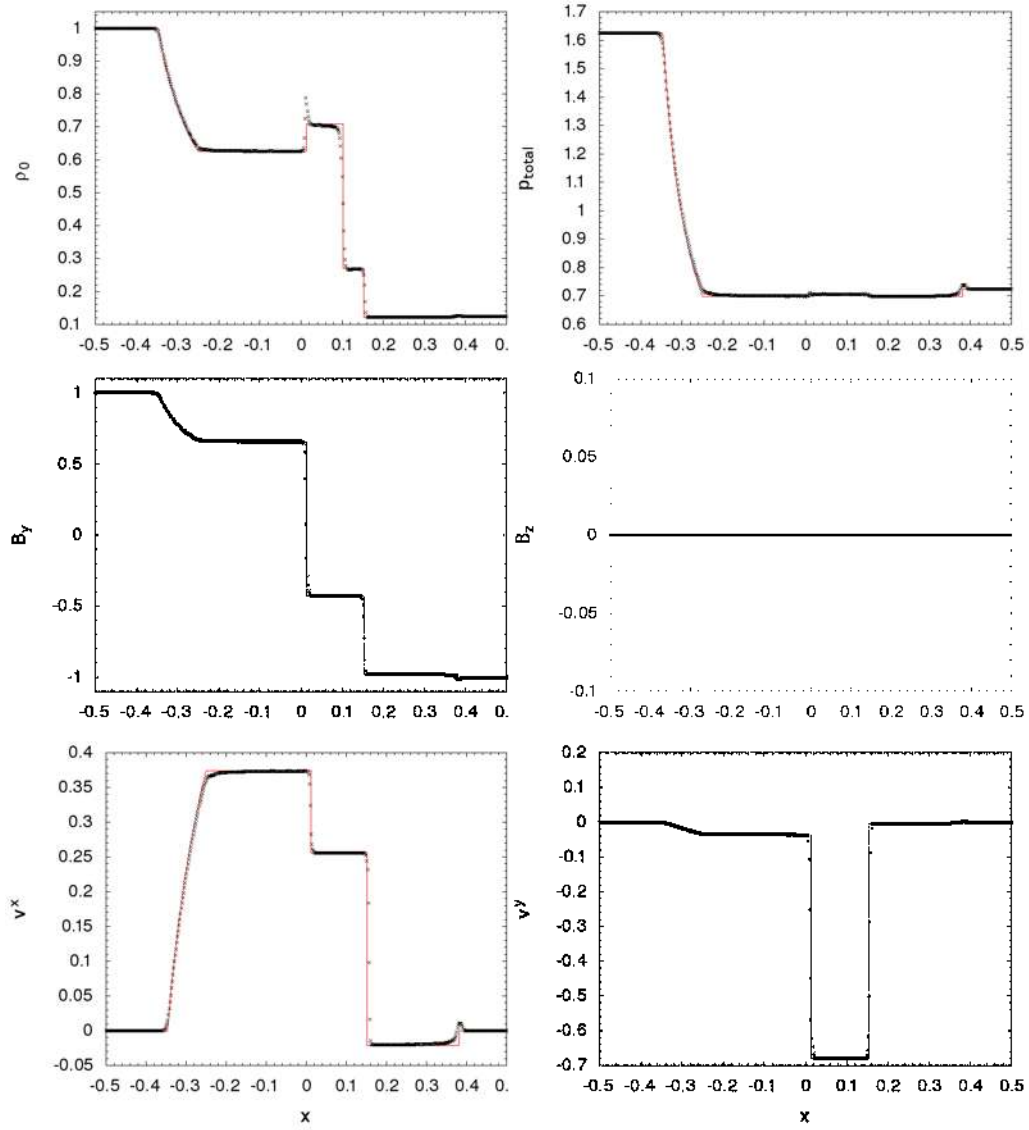


Figura 4.13: Prueba 3: Balsara 1, Tubo de Choque magnetizado. Se muestra el resultado de la evolución numérica al tiempo  $t = 0.1$ .

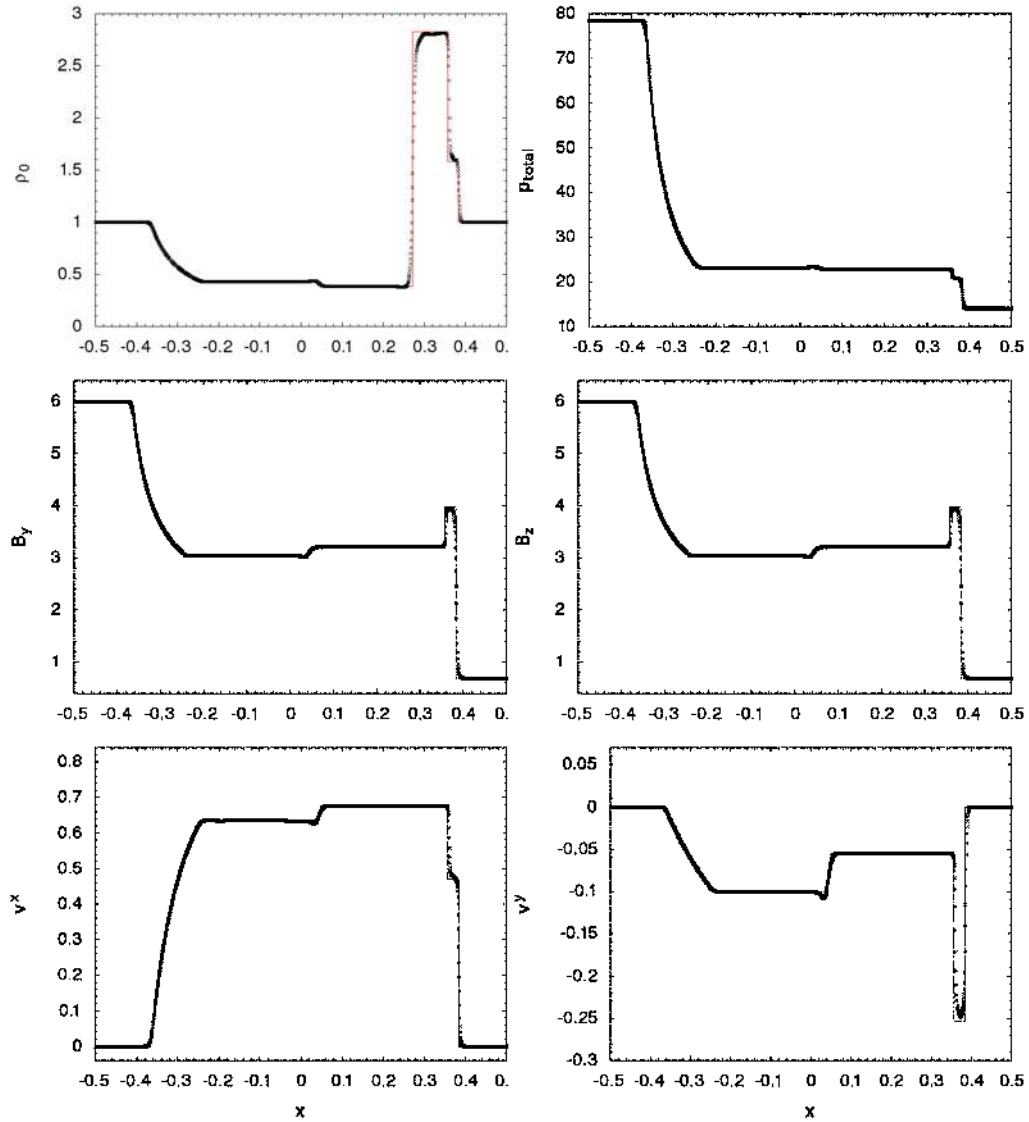


Figura 4.14: Prueba 4: Balsara 2. Esta prueba corresponde a un MHD Blast wave mediano. Se muestran en línea negra con cruces las variables de la MHD obtenidas mediante la solución numérica mientras en línea sólida roja se muestra la solución exacta al tiempo  $t = 0.4$ .

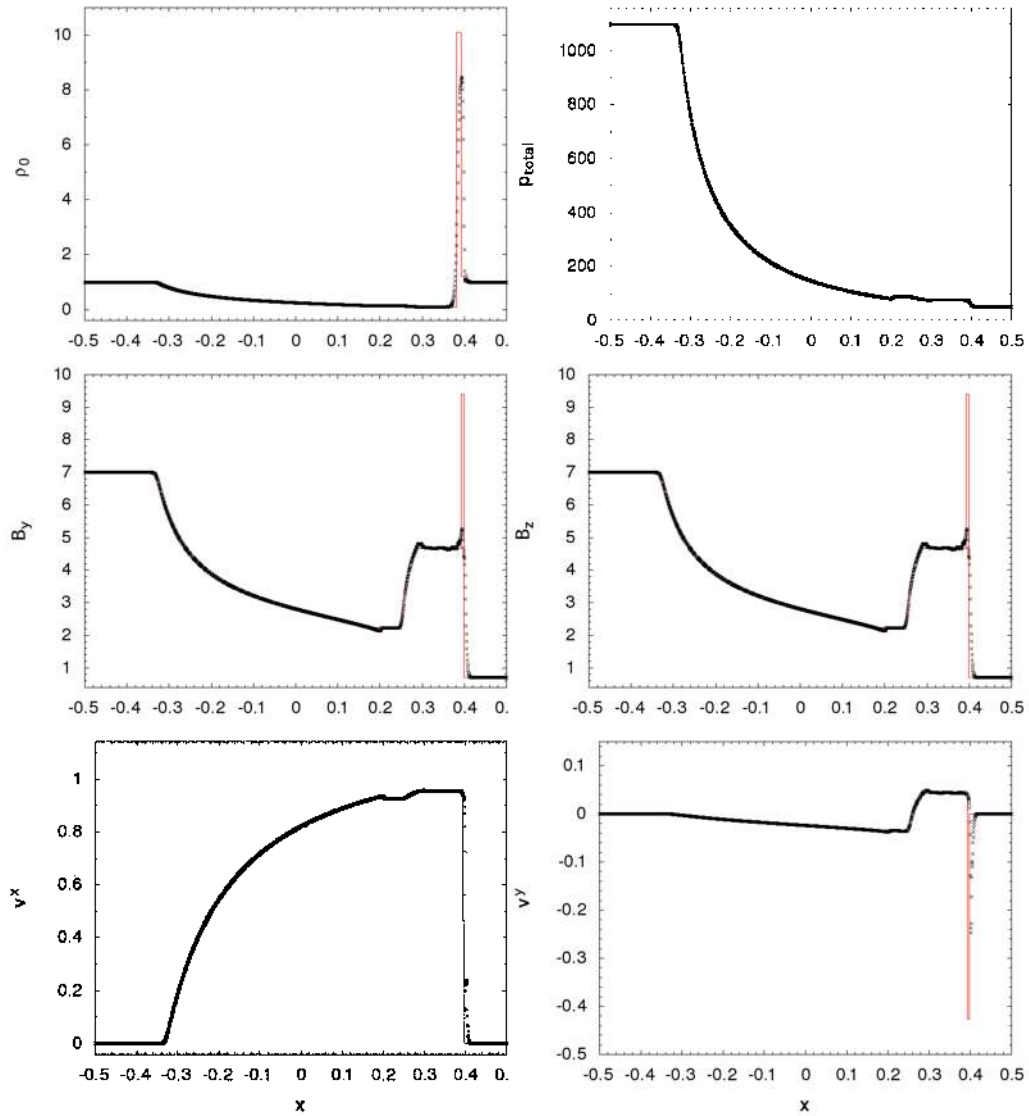


Figura 4.15: Prueba 5: Balsara 3, "MHD Blast wave" fuerte. Se muestran la solución numérica y la solución exacta al tiempo  $t = 0.4$ . Se usa un índice adiabático  $\Gamma = 5/3$ .

---

velocidad de la colisión es más alta, alcanzando factores de Lorentz del orden de  $W \sim 22.366$  durante la evolución. Y las componentes del campo magnético transversales a la propagación del choque son todas diferentes de cero y discontinuas. En la Figura 4.16, se muestran las variables del fluido magnetizado al tiempo  $t = 0.4$ . Se puede observar que la densidad y la presión alcanzan valores muy grandes comparados con la prueba de Komissarov que se presentó unas páginas antes.

### **Prueba 7: Balsara 5**

Esta prueba es más general, en el sentido de que las componentes transversales tanto del campo magnético como de la velocidad son diferentes de cero y son discontinuas. Además, como se puede ver en la Tabla 4.2, la presión magnética es mayor a la derecha de la discontinuidad inicial a diferencia de los casos anteriores. En la Figura 4.17, se muestra un instante de la evolución correspondiente al tiempo  $t = 0,4$ , se compara la solución numérica y exacta. El fluido magnetizado solo alcanza factores de Lorentz del orden de  $W \sim 1,86$ .

### **Prueba 8: Onda genérica Alfvén**

La última prueba de MHD en 1D, es la prueba llama onda genérica de Alfvén. Los parámetros iniciales consisten en un fluido en reposo, a la derecha de la discontinuidad, y a la izquierda un fluido con velocidades transversales diferentes de cero. Durante la evolución aparecen: una zona de rarefacción rápida, una onda de Alfvén, un choque lento hacia la izquierda, la onda de contacto, y dos choques moviéndose a la derecha, como se puede apreciar en la Figura 4.18.

### **Prueba del rotor rígido magnetizado**

El rotor rígido MHD es la primera prueba en 2D. Esta prueba se estudia en el plano  $x-y$ . La configuración inicial consiste en una región cilíndrica de radio  $r_{in} = 0.1$ , en donde la densidad de masa en reposo inicial es de  $\rho_{in} = 10$  y el momento angular es de  $W_z = 9.95$ , inmerso en un fluido en reposo con densidad  $\rho_{out} = 1$ . La presión es constante en todo el dominio numérico  $p = 1$  y el campo magnético es

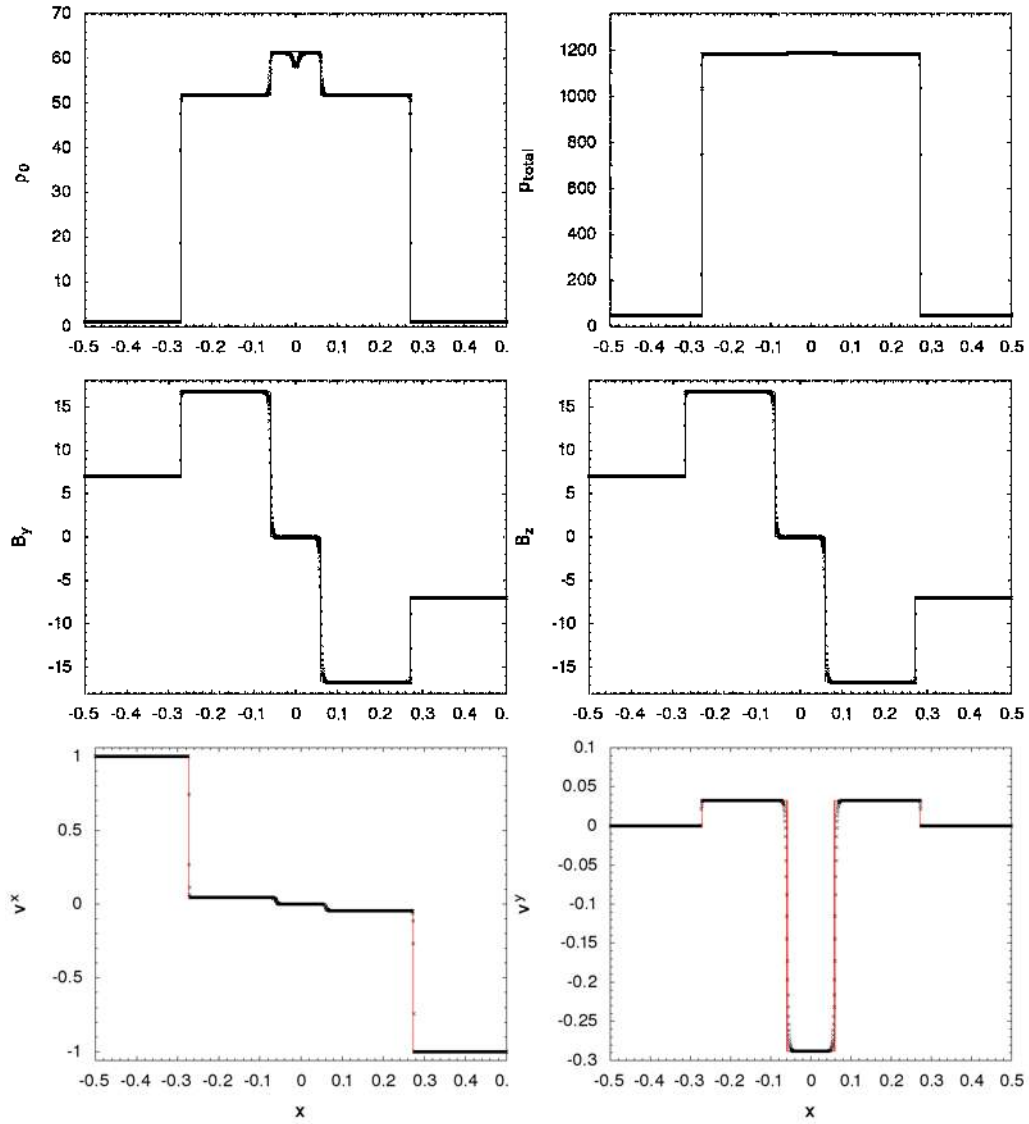


Figura 4.16: Prueba 6: Colisión frontal MHD. Se muestra un instante de la evolución al tiempo  $t = 0,1$ .

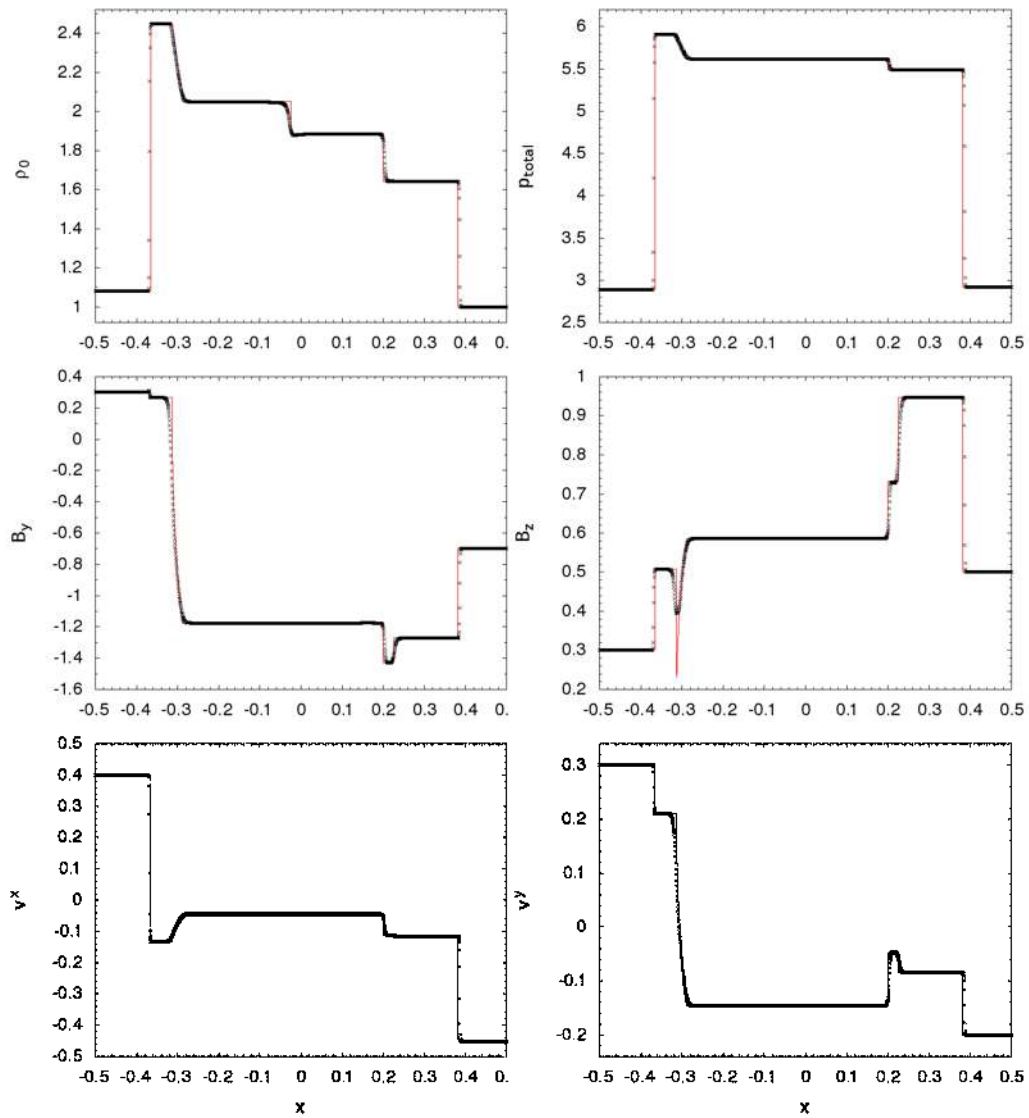


Figura 4.17: Prueba 7: Balsara 5. Se muestran las variables de la MHD en el tiempo  $t = 0,4$ . La solución numérica reproduce todos los choques que aparecen durante la evolución.

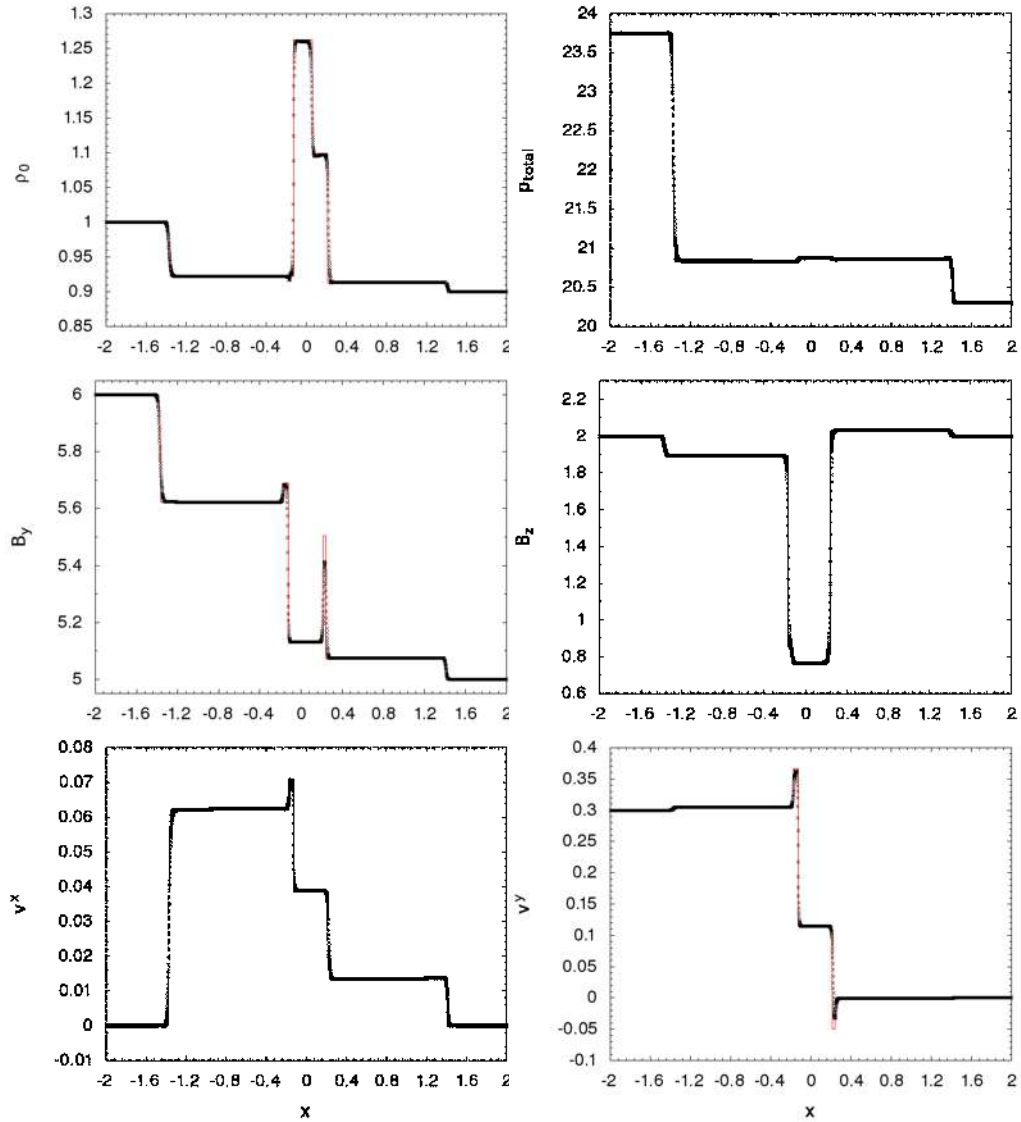


Figura 4.18: Prueba 8: Prueba genérica de Alfvén. En esta prueba se usan 3200 celdas en el dominio  $[-2, 2]$ , manteniendo la resolución de las pruebas anteriores. En esta figura se muestran las variables del fluido magnetizado al tiempo  $t = 1.5$ , comparando la solución numérica y la solución exacta.

---

uniforme en la dirección  $x$ ,  $B^x = 1$ . El índice adiabático del fluido es  $\Gamma = 5/3$ . Las componentes de la velocidad dentro del cilindro se pueden calcular como  $v_{in}^x = -W_z$  y  $v_{in}^y = W_z x$  P. Mosta [2013]. Los resultados de la evolución se muestran en la Figura 4.19, en donde se puede apreciar la morfología de algunas variables, la cuál es consistente con las presentadas en L. Del Zanna [2002]; P. Mosta [2013]. Se muestra también la violación de la constricción  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , que resulta ser del orden de  $\nabla \cdot \mathbf{B} \sim 10^{-11}$  cuando se usan  $1200 \times 1200$  en un dominio  $[-0.5, 0.5] \times [-0.5, 0.5]$ . Se puede apreciar en todas las variables el arrastre del fluido provocado por la rotación inicial. En la Figura 4.20 adicionalmente se muestran los perfiles de las variables a lo largo de los ejes  $x$  e  $y$ , usando tres resoluciones diferentes. Se puede ver que los perfiles mejoran con la resolución.

## 2D MHD Explosión cilíndrica

La segunda prueba en 2D es la explosión cilíndrica magnetizada. Se empieza con una región cilíndrica de radio  $r_{in} = 0,08$  en donde la densidad de masa en reposo  $\rho_{in} = 10^{-2}$  y la presión es de  $p_{in} = 100$ . Fuera de esta región  $\rho_{out} = 10^{-4}$  y  $p_{out} = 3 \times 10^{-5}$ . El campo magnético es uniforme a lo largo de la dirección  $x$  y es  $B^x = 0,1$  y el índice adiabático es  $\Gamma = 5/3$ . En esta prueba el fluido está en reposo inicialmente. Y se usa una función de suavizado en la densidad y presión, como en P. Mosta [2013]. En la Figura 4.21 se muestra el resultado de la evolución en el plano  $x-y$ . La morfología obtenida reproduce la de los autores L. Del Zanna [2002]; P. Mosta [2013]. En este caso la violación de la constricción es del orden de  $\nabla \cdot \mathbf{B} \sim 10^{-13}$ . Se observa en la morfología de las variables, que el gas se expande radialmente. Se muestra en la Figura 4.22, de la misma manera que en el caso anterior, una proyección de las variables en los ejes usando tres resoluciones. Observese que los perfiles mejoran con la resolución.

## 2D MHD Inestabilidad de Kelvin-Helmholtz

La tercera prueba es la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz magnetizada. En esta prueba la configuración inicial consiste en dividir al dominio numérico en tres regiones. En dos de ellas el fluido se mueve hacia la izquierda y en medio de ellas una región en el que el fluido se mueve a la derecha con la misma velocidad. La

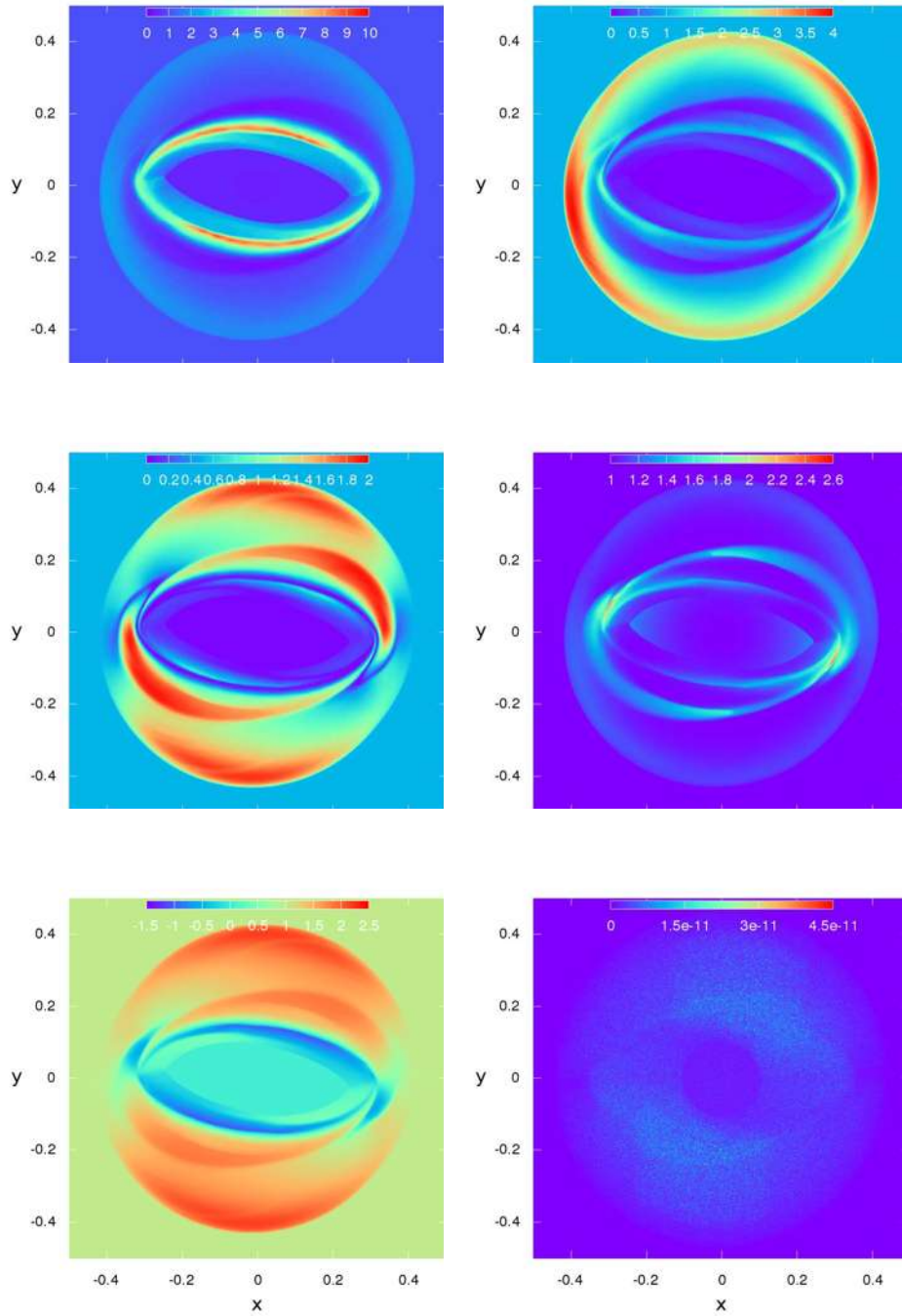


Figura 4.19: *2D Rotor magnético. Se muestran la variables del fluido en el plano  $x$ - $y$  al tiempo  $t = 0.4$ . En la primera columna, se muestran de arriba hacia abajo, la densidad de masa en reposo, la presión magnética y  $B^x$ . En la segunda columna de arriba hacia abajo la presión del fluido, el factor de Lorentz y la divergencia del campo magnético. En esta prueba se usaron  $1200 \times 1200$  celdas en el dominio  $[-0.5, 0.5] \times [-0.5, 0.5]$ , con  $CFL = 0.25$ .*

---

interacción de estas regiones más una perturbación producen las *inestabilidades de Kelvin-Helmholtz*. El dominio en donde se estudia esta prueba es de  $[-0.5, 0.5] \times [-0.5, 0.5]$  en el plano  $x$ - $y$ , usando  $512 \times 512$  celdas numéricas. El fluido se mueve a la derecha con densidad de masa en reposo inicial  $\rho = 1$  y velocidad  $v^x = 0.5$  en la región  $|y| \leq 0.25$ . Afuera de esta región el fluido se mueve a la izquierda con densidad de masa en reposo  $\rho = 2$  y  $v^x = -0.5$ . La presión inicial del fluido es uniforme y el índice adiabático es  $\Gamma = 1.4$ . El campo magnético es uniforme en la dirección  $x$ ,  $B_x$  al tiempo  $t = 5$ . Las componentes de la velocidad, incluyendo la perturbación quedan escritas de la siguiente forma

$$v^x = v_0^x(1 + 0.01 \cos(2\pi y l) \sin(2\pi x l)), \quad (4.1)$$

$$v^y = v_0^y 0.01 \cos(2\pi y l) \sin(2\pi x l), \quad (4.2)$$

donde  $l$  es el número de nodos de la perturbación y  $v_0$  es el valor inicial de la velocidad.

En la Figura 4.23, se muestran las variables del fluido magnetizado: en la primera columna se tiene la densidad de masa en reposo (arriba), la presión (en medio) y  $B^x$  (abajo), en la segunda columna la presión magnética (arriba), el factor de Lorentz (en medio) y finalmente la divergencia del campo magnético (abajo). Esta figura corresponde al tiempo  $t = 5$  de la evolución. Se puede apreciar en la figura que la violación de la constricción es del orden de  $10^{-11}$ .

En este capítulo se han presentado todas las pruebas numéricas que el código de RMHD ideal ha pasado. Las pruebas 1D se realizaron en cada una de las direcciones espaciales  $x$ ,  $y$  y  $z$ , y se compararon con la solución exacta, obteniendo errores del mismo orden que los obtenidos en otros códigos. Las pruebas 2D se hicieron solo en un plano, en estas pruebas el error se mide con la constricción del campo magnético, los resultados de los errores fueron del orden de  $\sim 10^{-11}$  como se esperaba, y en algunos casos del orden del error de maquina, lo cual indica que el código funciona adecuadamente y es capaz de resolver problemas físicos al igual que los códigos comerciales existentes.

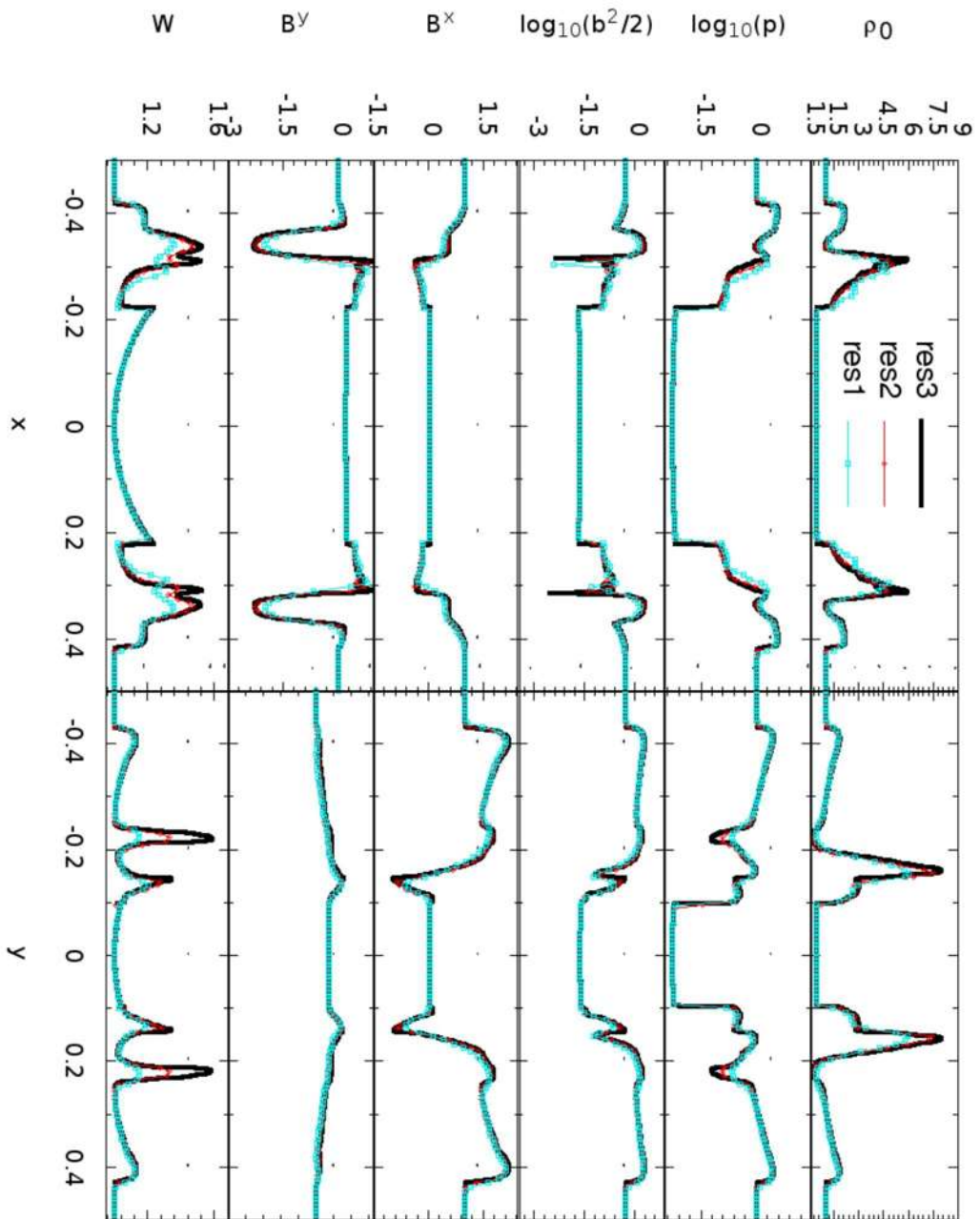


Figura 4.20: En esta figura se muestra un corte de las variables del fluido magnetizado a lo largo de los ejes  $x$  y  $y$  al tiempo  $t = 0.4$ . A la izquierda se muestran las variables a lo largo del eje  $x$ , a la derecha a lo largo del eje  $y$ . Se presentan tres resoluciones:  $400 \times 400$ ,  $800 \times 800$  y  $1200 \times 1200$  celdas respectivamente, en un dominio  $[-0.5, 0.5] \times [-0.5, 0.5]$ .

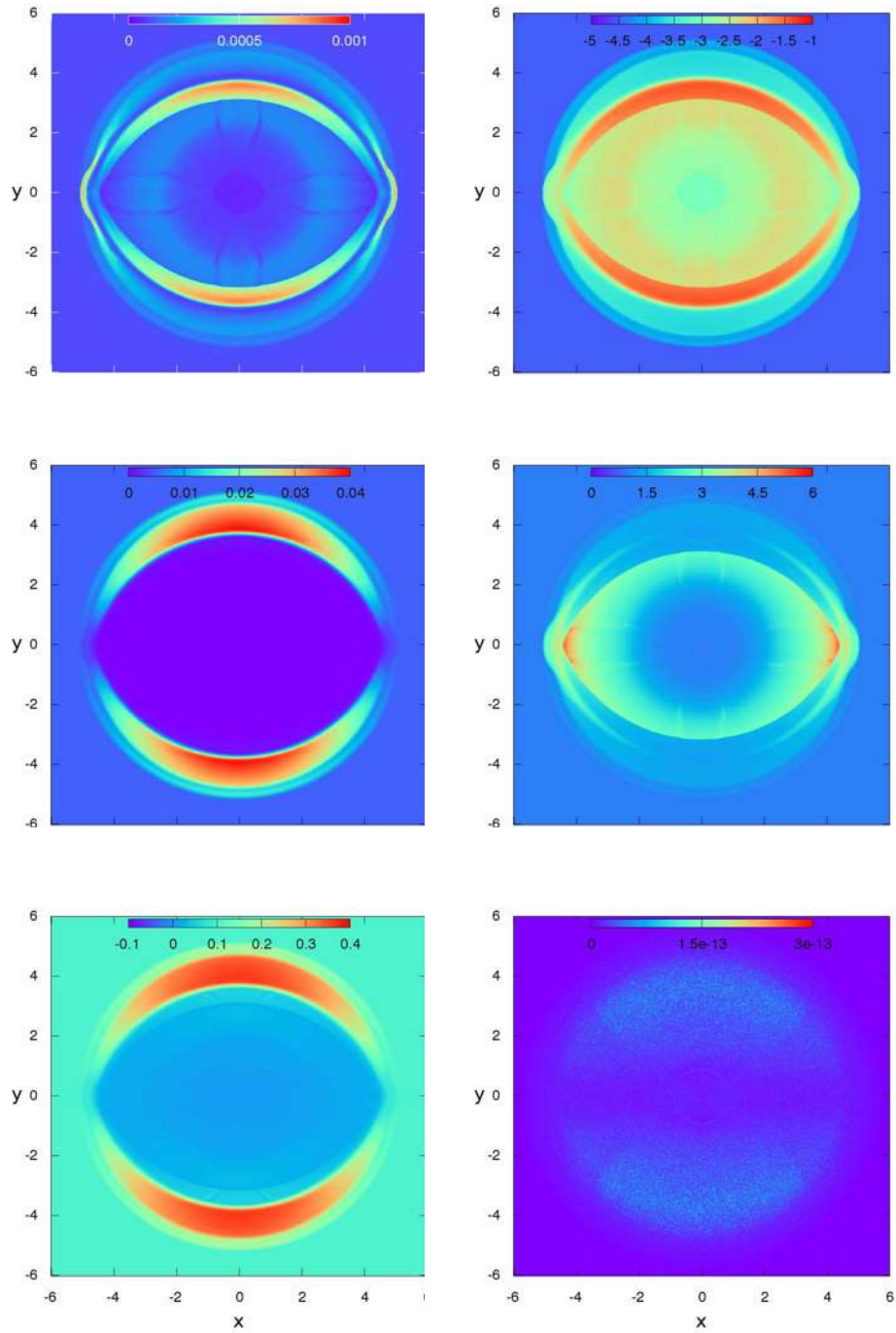


Figura 4.21: 2D explosi3n cilndrica. En la primera columna, de arriba hacia abajo, se muestran la densidad de masa en reposo, la presi3n magn3tica y  $B^x$ . En la segunda columna, la presi3n del fluido, el factor de Lorentz y la divergencia del campo magn3tico al tiempo  $t = 4$ . Se usan  $1200 \times 1200$  celdas en un dominio  $[-6, 6] \times [-6, 6]$  y  $CFL = 0.25$ .

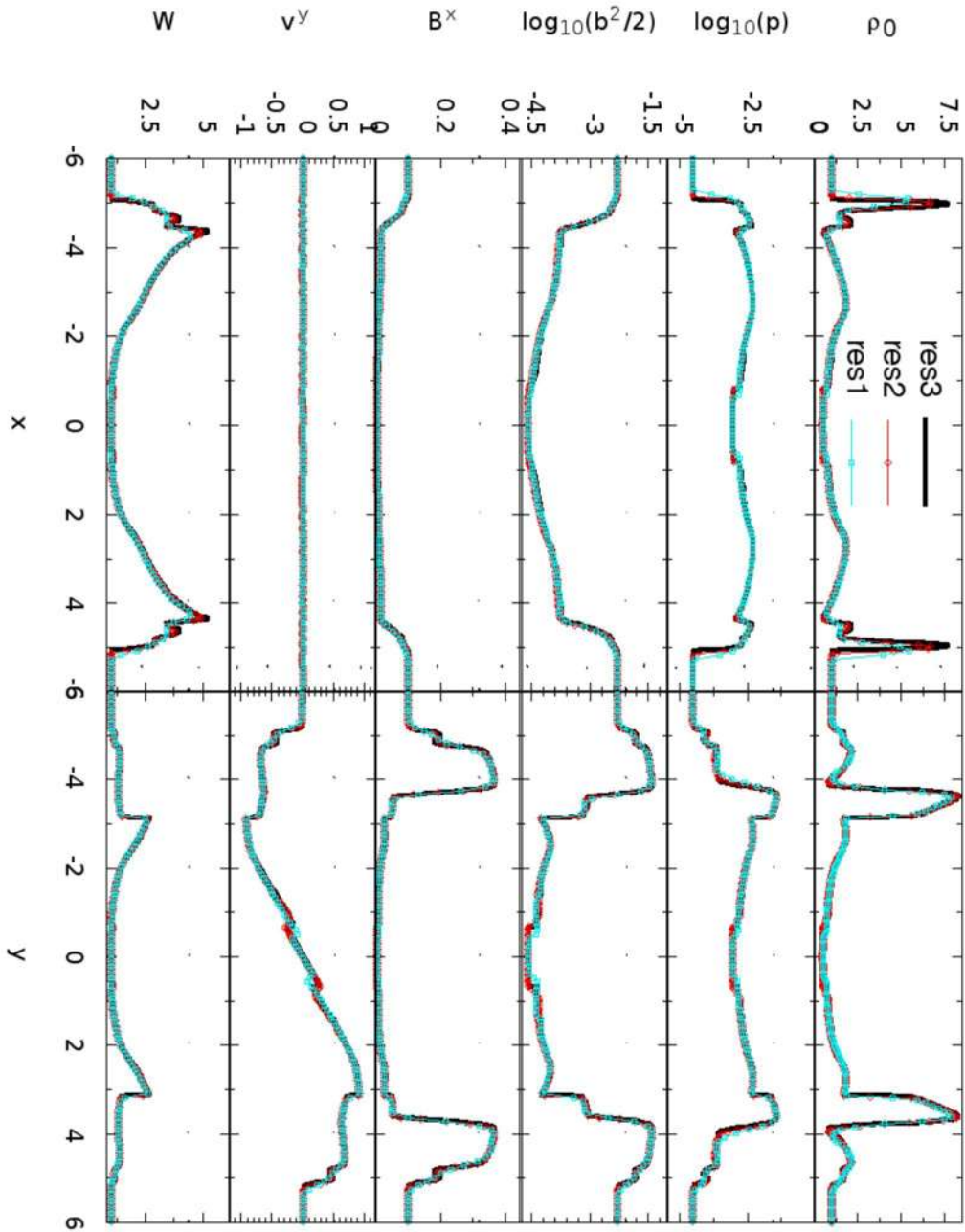


Figura 4.22: En esta figura se muestra una proyección de las variables a lo largo de los ejes  $x$  y  $y$  al tiempo  $t = 4$ . Se muestran tres resoluciones,  $400 \times 400$ ,  $800 \times 800$  y  $1200 \times 1200$  celdas numéricas, respectivamente. Se usa un dominio numérico de  $[-6, 6] \times [-6, 6]$ .

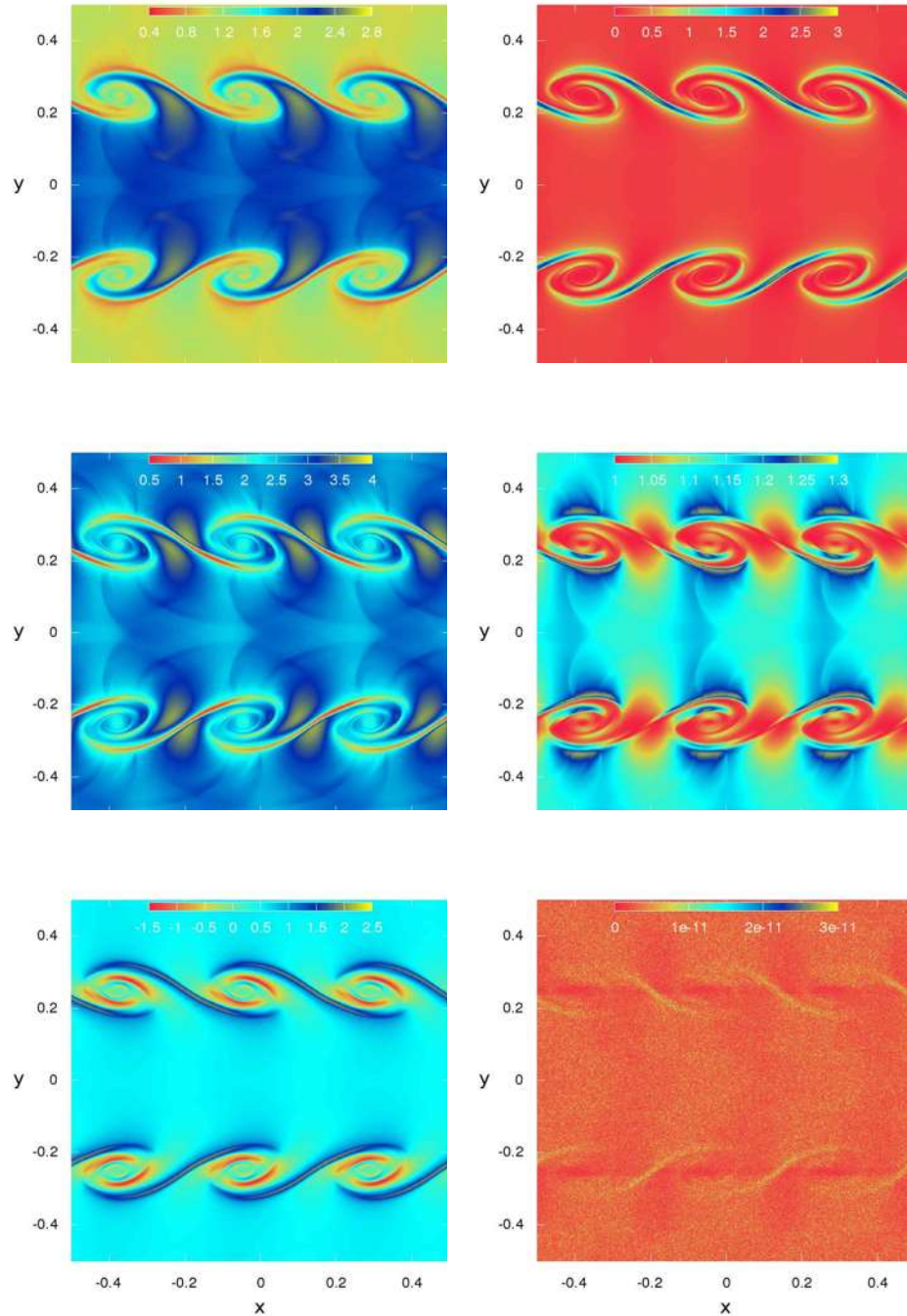


Figura 4.23: *Inestabilidad de Kelvin Helmholtz MHD. Se muestran las variables del fluido magnetizado a un tiempo  $t = 4$ . A la izquierda, de arriba hacia abajo, se muestra la densidad de masa en reposo, la presión magnética y  $B^x$ . A la derecha, la presión del fluido, el factor de Lorentz y la divergencia del campo magnético. Este caso corresponde a  $l = 3$ .*

# Capítulo 5

## Jets relativistas

Un *jet relativista* o un chorro relativista, es una emanación de materia y radiación que se mueve a velocidades cercanas a la de la luz. En general los *jets* se mueven en una región colimada. Los *jets* relativistas son asociados a Nucleos Galácticos Activos (ó Active Galactic Nuclei AGN's) [G. C. Duncan \[1994\]](#); [J. M. Martí \[1994\]](#); [Mignone and Bodo \[2006\]](#); [T. Leismann \[2005\]](#), así como también a formación de discos alrededor de objetos compactos como estrellas de neutrones y hoyos negros [Fragile \[2008\]](#); [Hawley \[2006\]](#); [J. C. McKinney \[2013\]](#). En este trabajo se estudia sólo el primer caso, usando la aproximación de *jets* en la región lejana a la fuente como usualmente se ha estudiado por la mayoría de los autores, es decir, se estudia la interacción de jets con el medio interestelar. En este capítulo, se presenta un estudio de parámetros que describen la dinámica y morfología de los *jets* relativistas, así como los efectos que inducen la presencia de campos magnéticos sobre estos. En particular se estudian los efectos de campos magnéticos poloidales y toroidales en la dinámica y morfología de los *jets* relativistas.

### Antecedentes

Los *jets* relativistas de los AGN's fueron propuestos a inicios de los años 70 [R. D. Blandford \[1974\]](#), [Scheuer \[1974\]](#), y observados más tarde por rayos  $x$  usando el VLA (Very Large Array). Algunas son provenientes de fuentes débiles y otras provenientes de fuentes intensas [B. L. Fanaroff \[1974\]](#). Las que provienen de

---

fuentes débiles se distinguen morfológicamente por ser más suave con estructura lobular y continuo, también tiene dos *jets* opuestos. Por otro lado, los jets que provienen de fuentes intensas, tienen un solo *jet*, y zonas más calientes, además de moverse en una región delgada y larga, extendiéndose a distancias que van desde 0.1 hasta 1 kiloparsecs, y alcanzando factores de Lorentz de  $\sim 10$ .

Las simulaciones numéricas para estudiar los *jets* comenzaron a desarrollarse por M. L. Norman [1982] usando hidrodinámica, verificando el modelo de *jets* de R. D. Blandford [1974]. Simulaciones MHD han mostrado la importancia de la presencia de campos toroidales en la colimación del *jet* D.A Clarke [1989], K. R Lind [1989], D. Kossel [1990]. También se han estudiado las propiedades del capullo en *jets* supersónicos C. Loken [1992]; M. C. Begelman [1989].

Por otro lado en el ámbito relativista, los primeros estudios numéricos sobre *jets* fueron realizados por F. Eulderink [1994]; G. C. Duncan [1994]; J. M. Martí [1994]; van Putten [1993]; ?. En estos trabajos, los factores de Lorentz utilizados son del orden de  $\sim 3$ , en simetría ecuatorial y axial, aunque los dominios y tiempos de evolución eran muy pequeños. Posteriormente se hicieron simulaciones más largas por G. C. Duncan [1994], y factores de Lorentz del orden de  $\sim 22$  por ?.

Recientemente se han hecho estudios más detallados de la morfología de los *jets* J. Ma. Martí [1997] y T. Leismann [2005]. En el primer trabajo se realizó un estudio de la morfología y dinámica de *jets* relativistas, considerando una amplia gama de parámetros usando sólo hidrodinámica. En el trabajo de T. Leismann [2005] por otro lado, se hace un estudio de *jets* relativistas magnetizados, usando configuraciones poloidales y toroidales del campo magnético.

## Características de los Jets

Las características morfológicas de un jet se componen de las siguientes regiones sugeridas por R.J. LeVeque [1998] y T. Leismann [2004] son :

- Cavidad o cascarón, es toda la región dentro del frente de choque (bow shock).
- *Jet* o haz de materia, que va desde la zona de inyección de materia hasta la zona de interacción con el medio.

- 
- Capullo, formado por una mezcla de flujos en reversa de material del *jet* desviados por el choque de la cabeza del *jet* y material del medio.
  - Cascarón, es la parte externa de la cavidad que consiste en una región de alta densidad. Esta se mueve penetrando el gas del ambiente.
- Choques internos, estos se desarrollan adentro del haz del *jet*.
  - Manchas o puntos calientes, son regiones de alta presión causadas por el impacto del gas, generalmente aparacen detrás de la cabeza del *jet*.

En la Figura 5.1 se muestran de manera esquemática las regiones que componen el *jet*. Este modelo fue propuesto por R.J. LeVeque [1998]. Esta es la morfología que se espera obtener en las simulaciones numéricas.

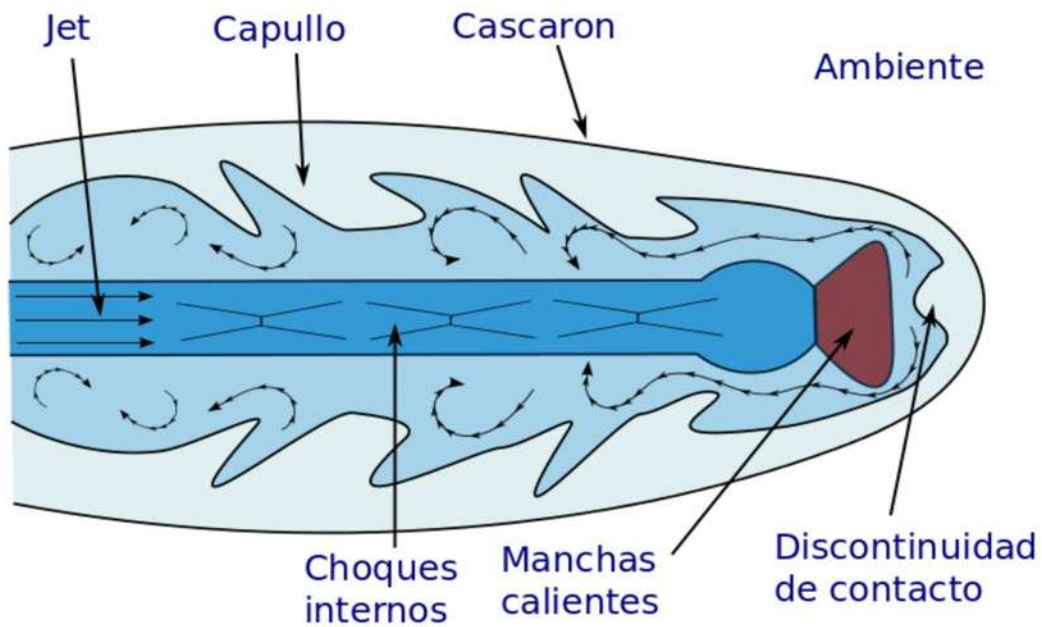


Figura 5.1: *Regiones que componen la morfología del jet.*

---

## Algunos parámetros

Regresando a la parte numérica, antes de describir la configuración inicial de un *jet*, es conveniente introducir algunos parámetros útiles para la descripción de los *jets*. El primero es el *parámetro de magnetización*  $\beta_{mag}$ , que es la razón entre la presión magnética y la presión del fluido

$$\beta_{mag} = \frac{p_{mag}}{p}. \quad (5.1)$$

Cuando  $\beta_{mag} = 1$ , se tiene que la densidad de energía magnética es igual a la densidad de energía térmica, y en ausencia de campos magnéticos  $\beta_{mag} = 0$ . El segundo parámetro es la razón entre la densidad de energía magnética y la densidad de masa en reposo

$$\sigma = \frac{b^2}{\rho}. \quad (5.2)$$

En términos de estos parámetros se pueden reescribir la energía total  $h^*$  y la velocidad de Alfvén  $C_a^2$  como

$$h^* = h + \sigma, \quad (5.3)$$

$$C_a^2 = \frac{\sigma}{h + \sigma}. \quad (5.4)$$

De este modo, se puede identificar fácilmente cuándo la energía magnética domina. De esta manera,  $\beta_{mag}$  y  $\sigma$ , son parámetros útiles para medir la magnetización del fluido.

Usando los siguientes parámetros también se puede determinar si un fluido magnetizado es relativista, *a)* si la velocidad del fluido es cercana a  $c$ , *b)* si el fluido es muy caliente ( $p \gg \rho$ ) de tal manera que la velocidad del sonido se vuelve relativista; *c)* cuando  $b^2 \gg \rho$  de tal manera que la velocidad de Alfvén es muy grande, cercana a  $c$ .

---

## Configuración inicial de los Jets

La configuración inicial de un jet consiste en la inyección de un chorro de fluido moviéndose a través de un gas en reposo. El jet se inyecta a través de una boquilla (nozzle) de radio  $r_b$  que usualmente se escoge como  $r_b = 1$ . La razón entre la densidad del jet entrante y el gas del medio se define como  $\eta = \rho_b/\rho_m$ . La razón entre la presión del gas que forma el jet y el medio es  $K = p_b/p_m$ , en general se usa  $K = 1$ . Es importante saber también el número Mach del fluido entrante que se define como (para fluidos Newtonianos)  $M_b$ , cuya generalización en relatividad se define como  $\mathcal{M}_b = M_b W_b / \sqrt{(1 - C_s^2)}$ , y velocidad de haz  $v_b$ , de tal manera que la velocidad del sonido del haz se puede calcular como  $C_s^2 = v_b/\mathcal{M}$ . En las Tablas 5.1 y 5.2 se muestran la gama de parámetros que se estudia en este trabajo.

En la Figura 5.2, se muestra el dominio usado para estudiar jets axisimétricos, así como la zona de inyección del jet en rojo (oscuro) y las condiciones de frontera que se implementan en los límites del dominio numérico.



Figura 5.2: *Dominio numérico y configuración inicial.* Este diagrama muestra cómo se inyecta el fluido al tiempo inicial y las condiciones de frontera en cada pared.

## Campos magnéticos

Cuando se hace un estudio numérico de jets relativistas con un campo magnético toroidal, se introduce un parámetro adicional, el *radio de magnetización*  $r_m$ . El

---

campo magnético toroidal inicial  $B^\phi = b_b^{phi}$  en la boquilla de inyección está dado por

$$b_b^\phi = \begin{cases} b_0 \frac{r}{r_m} & r > r_m, \\ b_0 \frac{r_m}{r} & r \geq r_m, \\ 0 & r > r_b. \end{cases} \quad (5.5)$$

donde  $b_0$  se puede obtener del promedio del factor de magnetización entre la interfase de la boquilla de inyección y el medio

$$\bar{\beta}_{mag} = \frac{b_0^2 r_m^2 (1/4 - \ln(r_m))}{p_b}. \quad (5.6)$$

Por otro lado, cuando el campo magnético es poloidal, se escoge el campo magnético  $B^z$  constante en todo el dominio numérico,

$$B^z = \sqrt{2 \frac{\beta}{p_b}}. \quad (5.7)$$

En la Tabla 5.2, se puede ver la gama de parámetros estudiados en este trabajo.

## Clasificación

**J. Ma. Martí [1997]**, en su estudio sobre jets en hidrodinámica relativista, clasifica a los jets como:

**Jets Calientes**, modelos **H\***, se caracterizan por tener efectos relativistas debido a energías altas, comparables con los efectos de la velocidad de flujo cercanas a la velocidad de la luz.

**Jets supersónicos**, modelos **SS\***. Estas configuraciones se caracterizan por tener un número de Mach grande. En este trabajo se estudian algunas configuraciones **SS\*** que se enlistan en la Tabla 5.1.

---

Modelo	$\Gamma$	$\rho_m$	$\eta$	$v_b$	$M_b$	$Z_{max}$
<b>Modelo H1</b>	4/3	1	0.01	0.99	1.72	50
<b>Modelo H2</b>	4/3	1	0.01	0.999	1.74	50
<b>Modelo H3</b>	4/3	1	0.1	0.99	1.72	25
<b>Modelo H4</b>	4/3	1	1	0.99	1.72	25
<b>Modelo SS1</b>	4/3	1	0.01	0.99	6.0	50
<b>Modelo SS2</b>	4/3	1	0.01	0.999	6.0	50
<b>Modelo SS3</b>	4/3	1	0.1	0.9	6.0	25
<b>Modelo SS4</b>	4/3	1	0.1	0.99	6.0	25
<b>Modelo A1</b>	5/3	1	0.01	0.9	6.0	50
<b>Modelo A2</b>	5/3	1	0.01	0.99	6.0	50
<b>Modelo A3</b>	5/3	1	0.01	0.999	6.0	50
<b>Modelo A4</b>	5/3	1	0.1	0.9	6.0	25
<b>Modelo A5</b>	5/3	1	0.1	0.99	6.0	25

Cuadro 5.1: *Tabla de parámetros. En esta tabla se muestran las configuraciones al tiempo inicial de jets hidrodinámicos estudiadas en este trabajo.*

## 5.1. Resultados numéricos: Morfología de Jets

Los valores de  $\rho_b$ ,  $\eta$ ,  $\Gamma$ ,  $v_b$  y  $M_b$  de las configuraciones estudiadas en este trabajo se pueden encontrar en la Tabla 5.1, el radio de la boquilla es  $r_b = 1$  en todos los casos. Se usa el dominio mostrado en la Figura 5.2, con  $r \times z = [0, 15] \times [0, 50]$  en algunos casos y  $r \times z = [0, 15] \times [0, 25]$  como se puede ver en la Tabla 5.2. Como se ha mencionado antes, los datos iniciales consisten en enviar un haz de materia moviéndose en un medio en reposo. A continuación se muestran los resultados numéricos obtenidos después de la evolución del fluido.

### 5.1.1. Jets Hidrodinámicos

En esta primera sección se considera que el campo magnético es cero. Se presenta la morfología de jets puramente hidrodinámicos.

El primer caso es el modelo *H1*. En la Figura 5.3 se muestra el resultado de la

---

Modelo	$\Gamma$	$\rho_m$	$\eta$	$v_b$	$M_b$	$\beta$	$Z_{max}$
<b>C2-0</b>	5/3	1	0.01	0.99	6	0	50
<b>C2-1/20-tor</b>	5/3	1	0.01	0.99	6	1/20	50
<b>C2-1/2-tor</b>	5/3	1	0.01	0.99	6	1/2	50
<b>C2-1-tor</b>	5/3	1	0.01	0.99	6	1	50
<b>C2-10/3-tor</b>	5/3	1	0.01	0.99	6	10/3	50
<b>C2-1-pol</b>	5/3	1	0.01	0.99	6	1	50
<b>SS1-0</b>	4/3	1	0.01	0.99	6.0	0	50
<b>SS1-1/20-tor</b>	4/3	1	0.01	0.99	6.0	1/20	50
<b>SS1-1/2-tor</b>	4/3	1	0.01	0.99	6.0	1/2	50
<b>SS1-1-tor</b>	4/3	1	0.01	0.99	6.0	1	50
<b>SS1-10/3-tor</b>	4/3	1	0.01	0.99	6.0	10/3	50
<b>SS1-1-pol</b>	4/3	1	0.01	0.99	6.0	1	50
<b>C1 - 0</b>	5/3	1	0.01	0.9	6.0	0	50
<b>C1 - 1 - tor</b>	5/3	1	0.01	0.9	6.0	1	50
<b>C1 - 10/3 - tor</b>	5/3	1	0.01	0.9	6.0	10/3	50
<b>C1 - 1 - pol</b>	5/3	1	0.1	0.9	6.0	1	50

Cuadro 5.2: *Tabla de parámetros. En esta tabla se muestran las diferentes configuraciones de un jet magnetohidrodinámico al tiempo inicial estudiados en esta tesis.*

evolución de un jet con velocidad inicial  $v_b = 0,99$ , número de Mach  $M_b = 1,72$ . Al tiempo  $t = 121,09$  se puede ver en la morfología la presencia del frente de choque en forma de cascarón, el capullo formado de la interacción del jet y el medio, los choques internos dentro del haz y la discontinuidad de contacto. Se puede apreciar también que el factor de Lorentz alcanza valores de  $W \sim 20$ .

En la Figura 5.4, se muestra el modelos  $H2$  (ver Tabla 5.1) que consiste en un jet inyectado con una velocidad  $v_b = 0,999$ , número de Mach  $M_b = 1,74$ . En esta figura se muestra la morfología al tiempo  $t = 101,56$ . Este caso se distingue del anterior por la ausencia de capullo y el que factor de Lorentz alcanza valores de  $W \sim 30$ .

El tercer caso  $H3$  se muestra en la Figura 5.5. Se puede ver que existen dos choques de arco, un capullo más delgado que el del caso  $H1$  y factores de Lorentz del

---

orden de  $W \sim 20$ . La morfología mostrada corresponde al tiempo  $t = 116,21$ . Este primer conjunto corresponde a jets calientes, según la clasificación de [J. M. Martí \[1994\]](#).

En el siguiente conjunto, se tiene el modelo *SS1* de la Tabla [5.1](#). Este caso corresponde a un jet con velocidad  $v_b = 0,99$  pero con número de Mach  $M_b = 6$ . En la Figura [5.6](#) se muestra el resultado de la evolución después de un tiempo  $t = 151,17$ . Se puede apreciar que el cascarón es más delgado en comparación de los casos *H\**, el capullo es más delgado en la punta del jet y los factores de Lorentz son del orden  $W \sim 8$ .

En Figura [5.7](#), se muestra la morfología del jet correspondiente al modelo *SS2* al tiempo  $t = 114,25$ . En este modelo el capullo es muy delgado así como el cascarón. El factor de Lorentz alcanza valores de orden  $W \sim 25$ .

La evolución del modelo *SS3* se muestra en la Figura [5.8](#). Este modelo corresponde a un jet con velocidad  $v_b = 0,9$ , número de Mach  $M_b = 6$  y  $\eta = 0,1$ . Al tiempo  $t = 227,34$  la morfología del jet muestra un capullo más extendido, choques internos más pronunciados alcanzando factores de Lorentz no tan altos del orden de  $W \sim 2,4$ .

Finalmente en la Figura [5.9](#) se muestra la morfología del modelo *A1* al tiempo  $t = 114,5$ . En la Figura [5.10](#) se muestra el modelo *A2* al tiempo  $t = 114,5$ . Y en la Figura [5.11](#) se muestra el modelo *A3* al tiempo  $t =$ . En estos modelos se tiene que los capullos son más extendidos o gruesos comparados con los casos anteriores y los choques internos son más notorios.

En este capítulo se han estudiado diferentes configuraciones de jets relativistas, obteniendo jets con morfologías similares a las obtenidas en estudios anteriores por [G. C. Duncan \[1994\]](#); [J. M. Martí \[1994\]](#); [Mignone and Bodo \[2006\]](#); [T. Leismann \[2005\]](#). Entre los jets estudiados se encuentran algunos que alcanzan factores de Lorentz del orden de 30. En todos los casos estudiados, se inyecta el jet inicialmente con número de Mach igual a 6. La estructura del jet es consistente con las características teóricas esperadas.

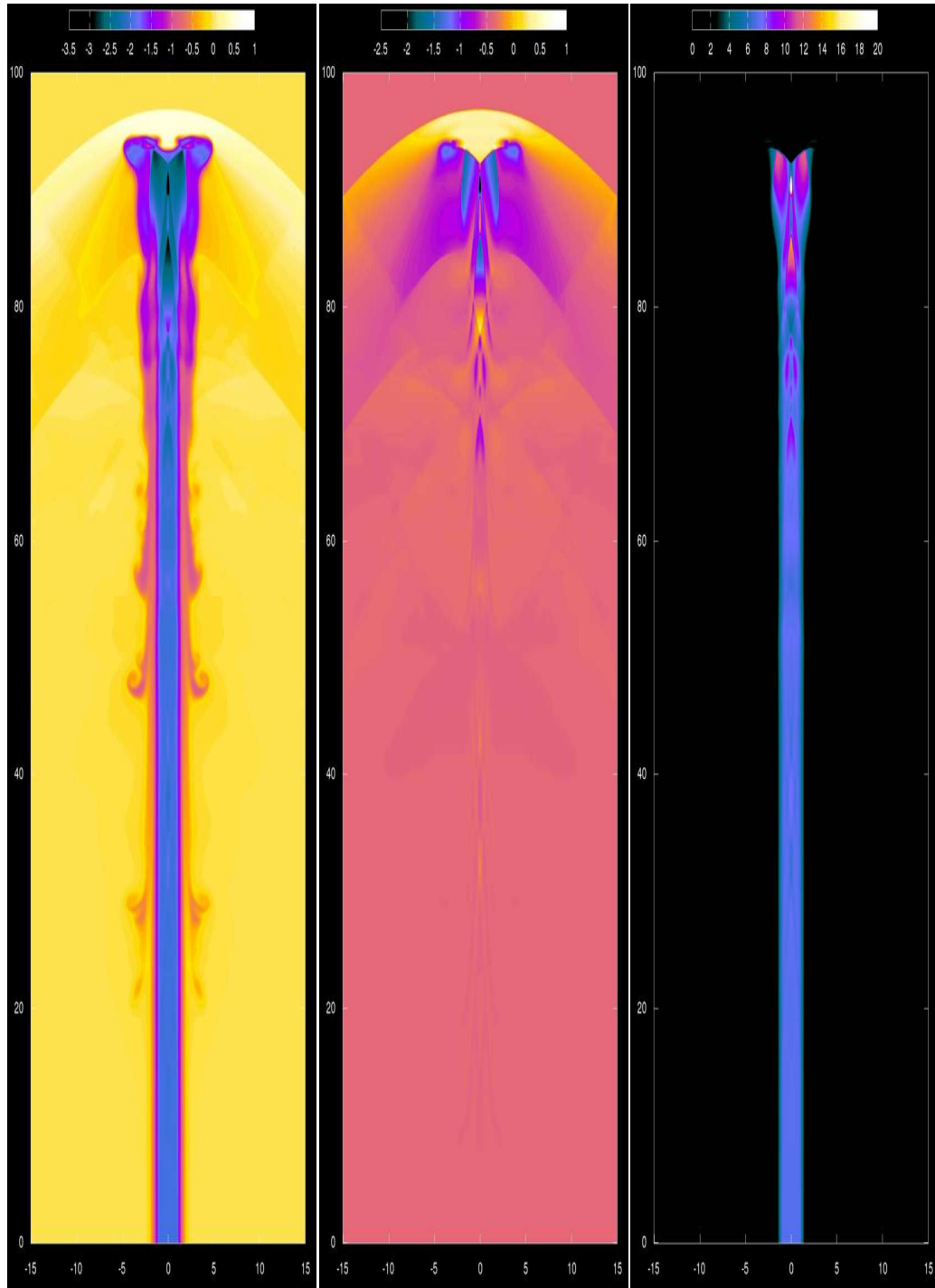


Figura 5.3: *Modelo H1.* En esta figura se muestran de izquierda a derecha, el logaritmo de la densidad de masa en reposo  $\log_{10}(\rho)$ , el logaritmo de la presión  $\log_{10}(p)$  y el factor de Lorentz  $W$  al tiempo  $t = 121,09$ .

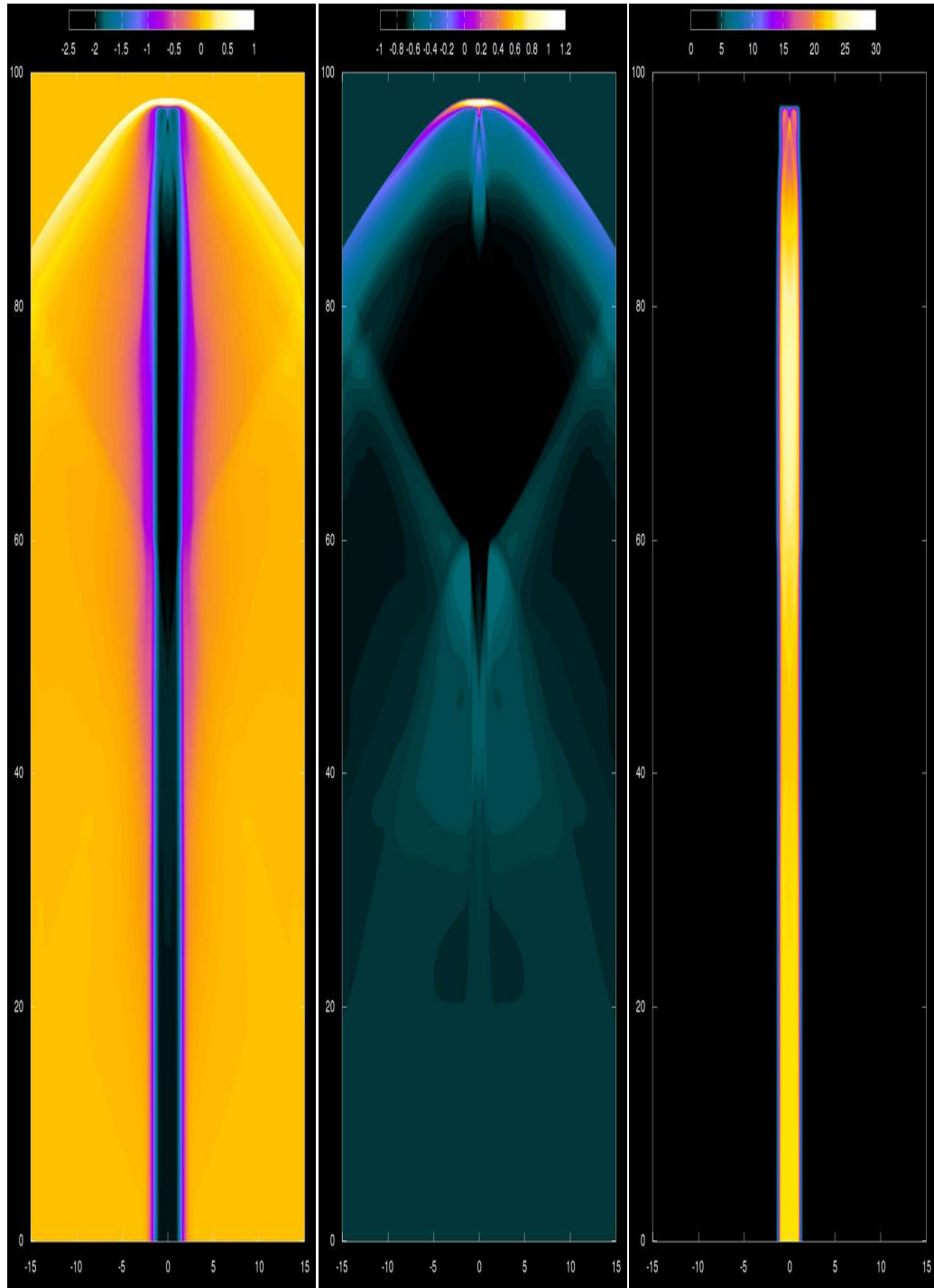


Figura 5.4: *Modelo H2. Se muestra la densidad de masa en reposo  $\log_{10}(\rho)$ , el logaritmo de la presión  $\log_{10}(p)$  y el factor de Lorentz  $W$  al tiempo  $t = 101,56$ .*

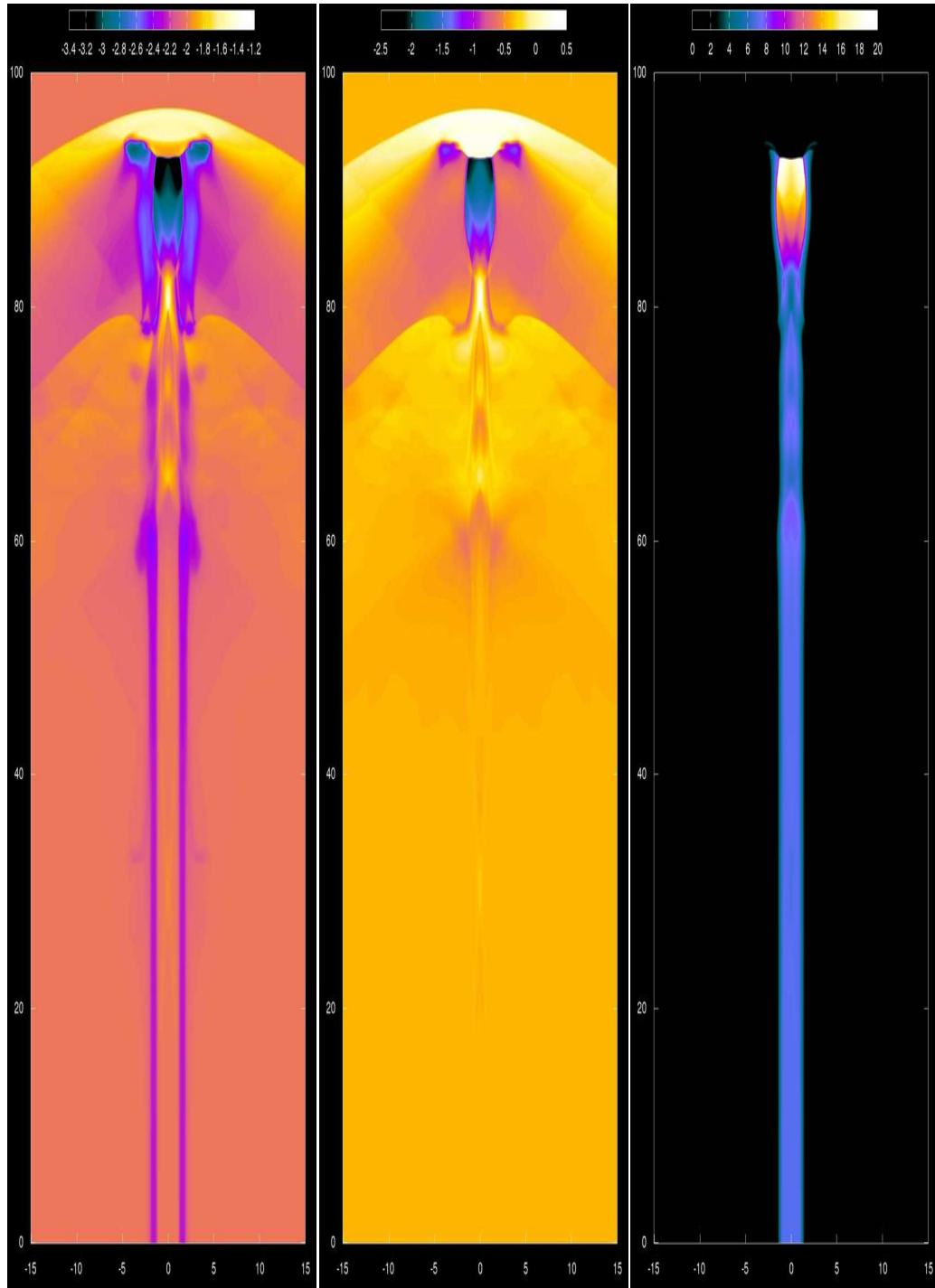


Figura 5.5: *Modelo H3. Se muestra la densidad de masa en reposo  $\log_{10}(\rho)$ , el logaritmo de la presión  $\log_{10}(p)$  y el factor de Lorentz  $W$  al tiempo  $t = 116,21$ .*

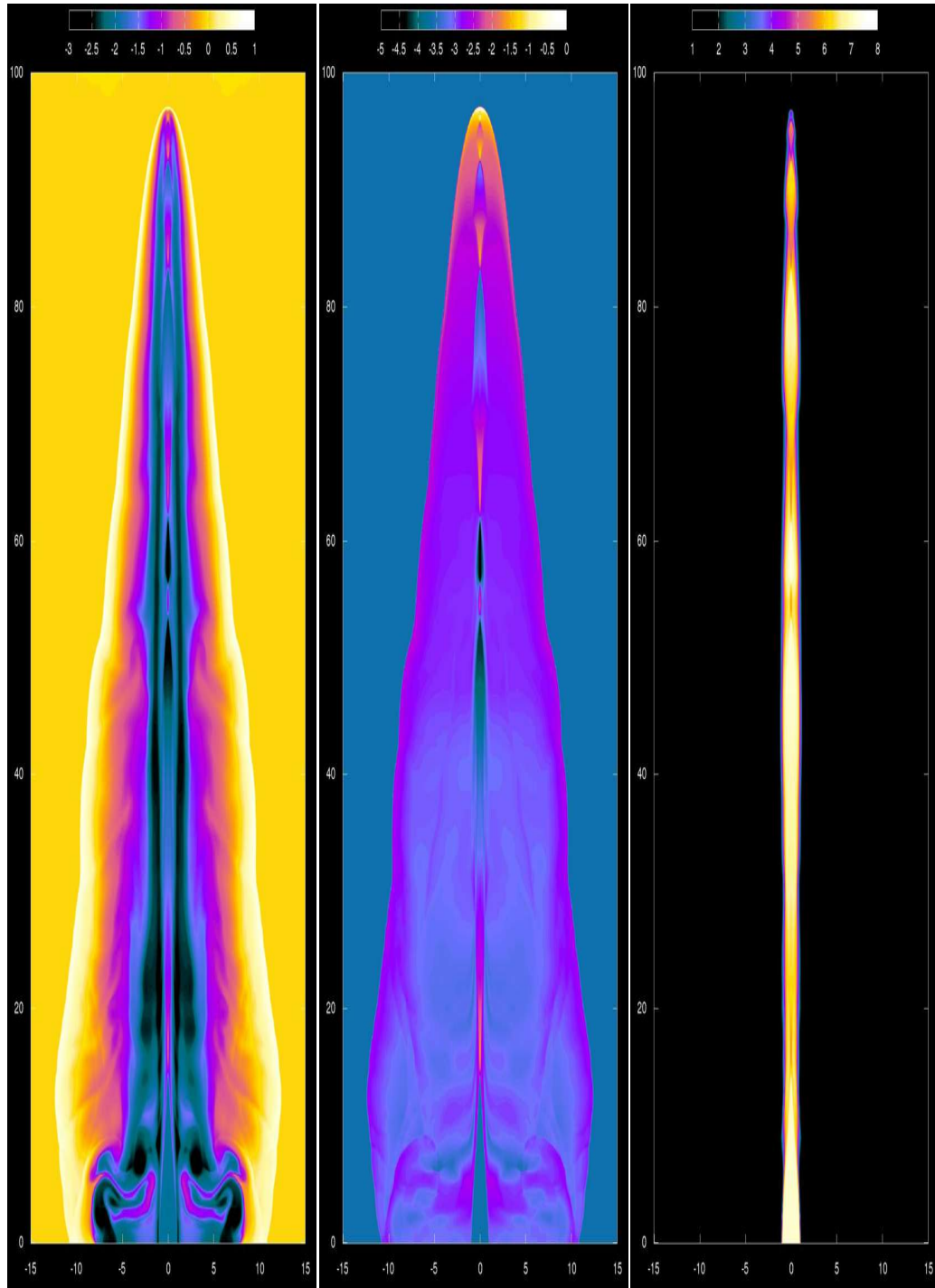


Figura 5.6: *Modelo SS1*. Se muestra la densidad de masa en reposo  $\log_{10}(\rho)$ , el logaritmo de la presión  $\log_{10}(p)$  y el factor de Lorentz  $W$  al tiempo  $t = 151,17$ .

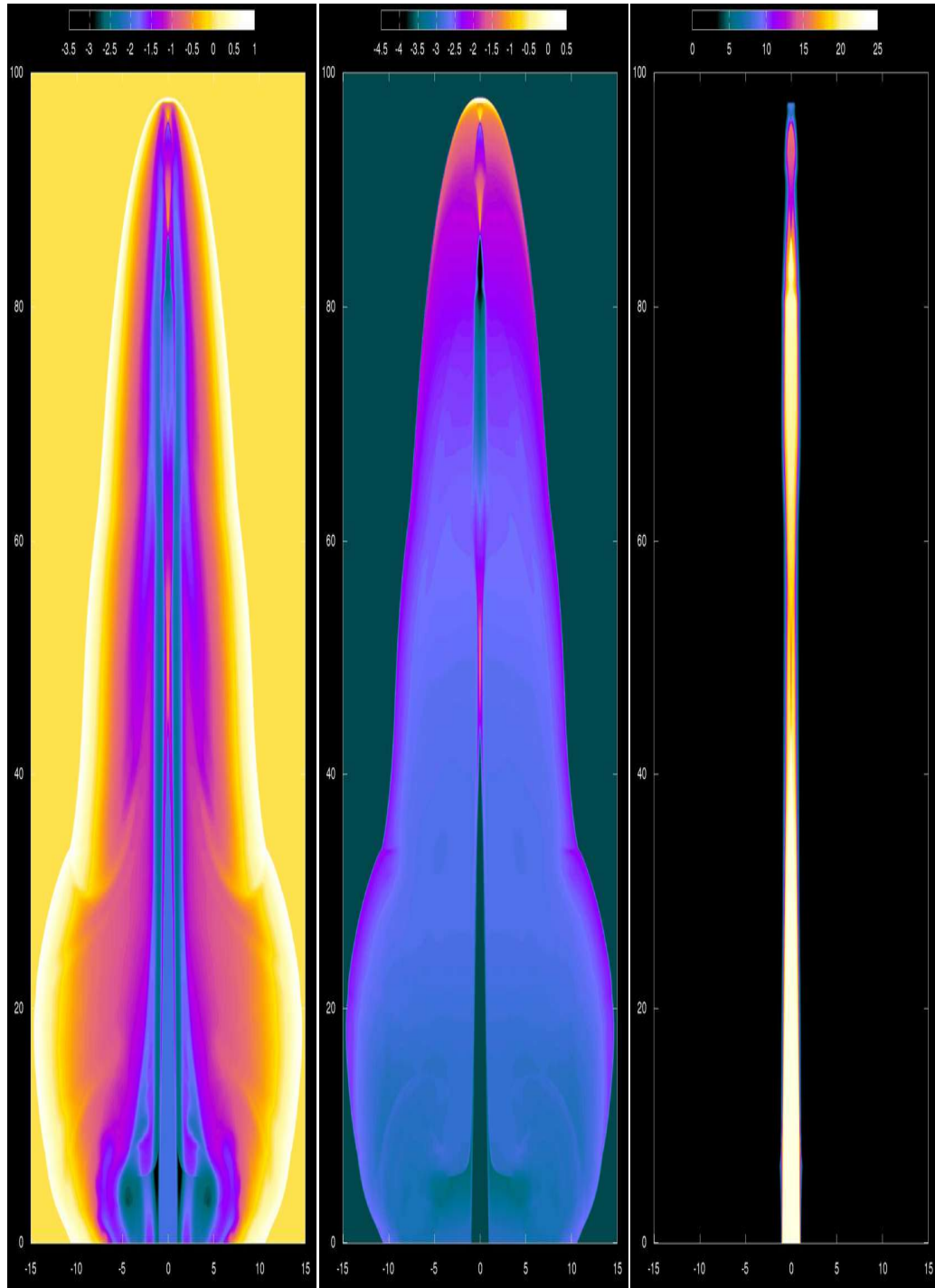


Figura 5.7: *Modelo SS2*. Se muestra la densidad de masa en reposo  $\log_{10}(\rho)$ , el logaritmo de la presión  $\log_{10}(p)$  y el factor de Lorentz  $W$  al tiempo  $t = 114,25$ .

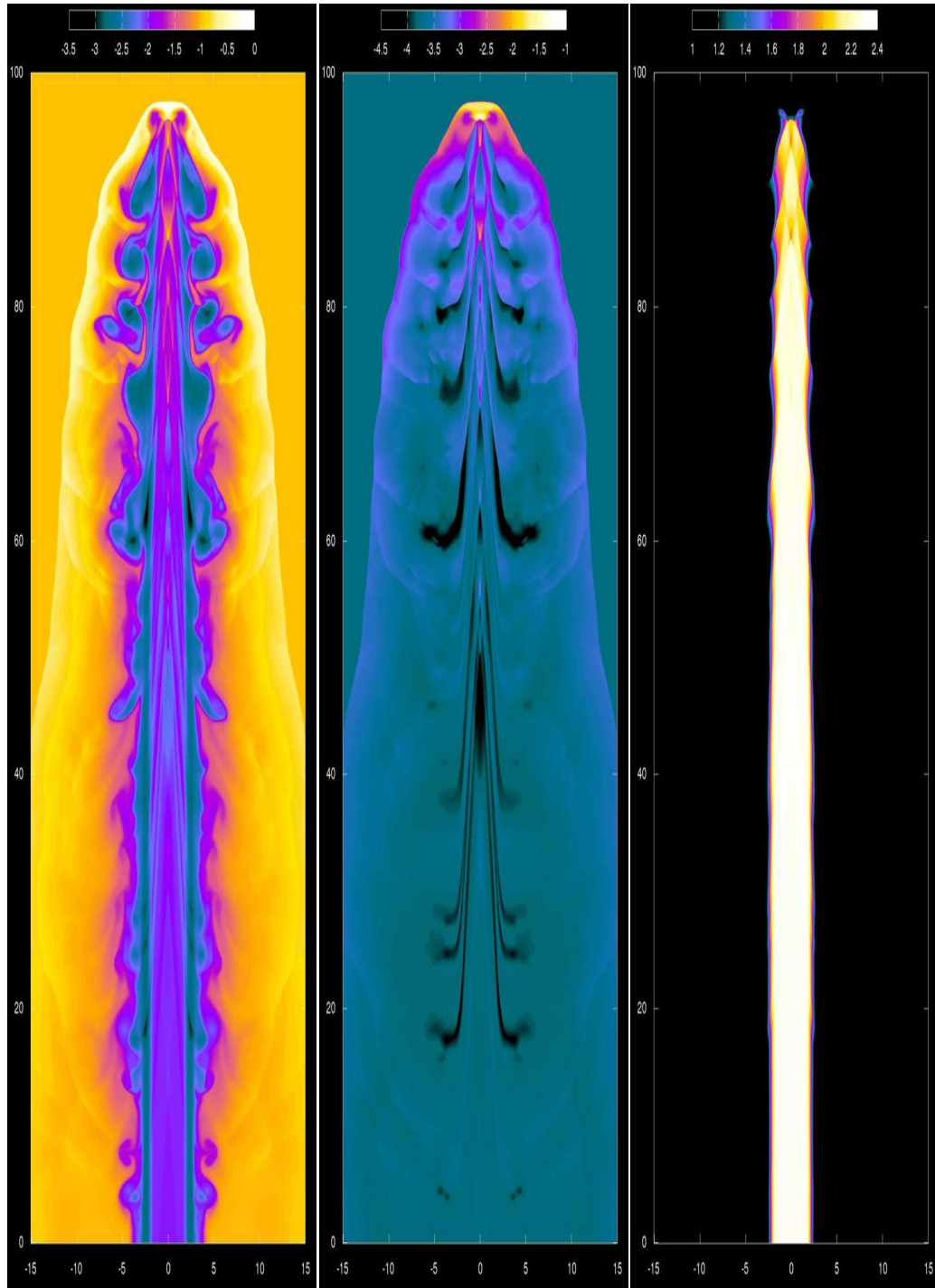


Figura 5.8: *Modelo SS3*. Se muestra la densidad de masa en reposo  $\log_{10}(\rho)$ , el logaritmo de la presión  $\log_{10}(p)$  y el factor de Lorentz  $W$  al tiempo  $t = 227,34$ .

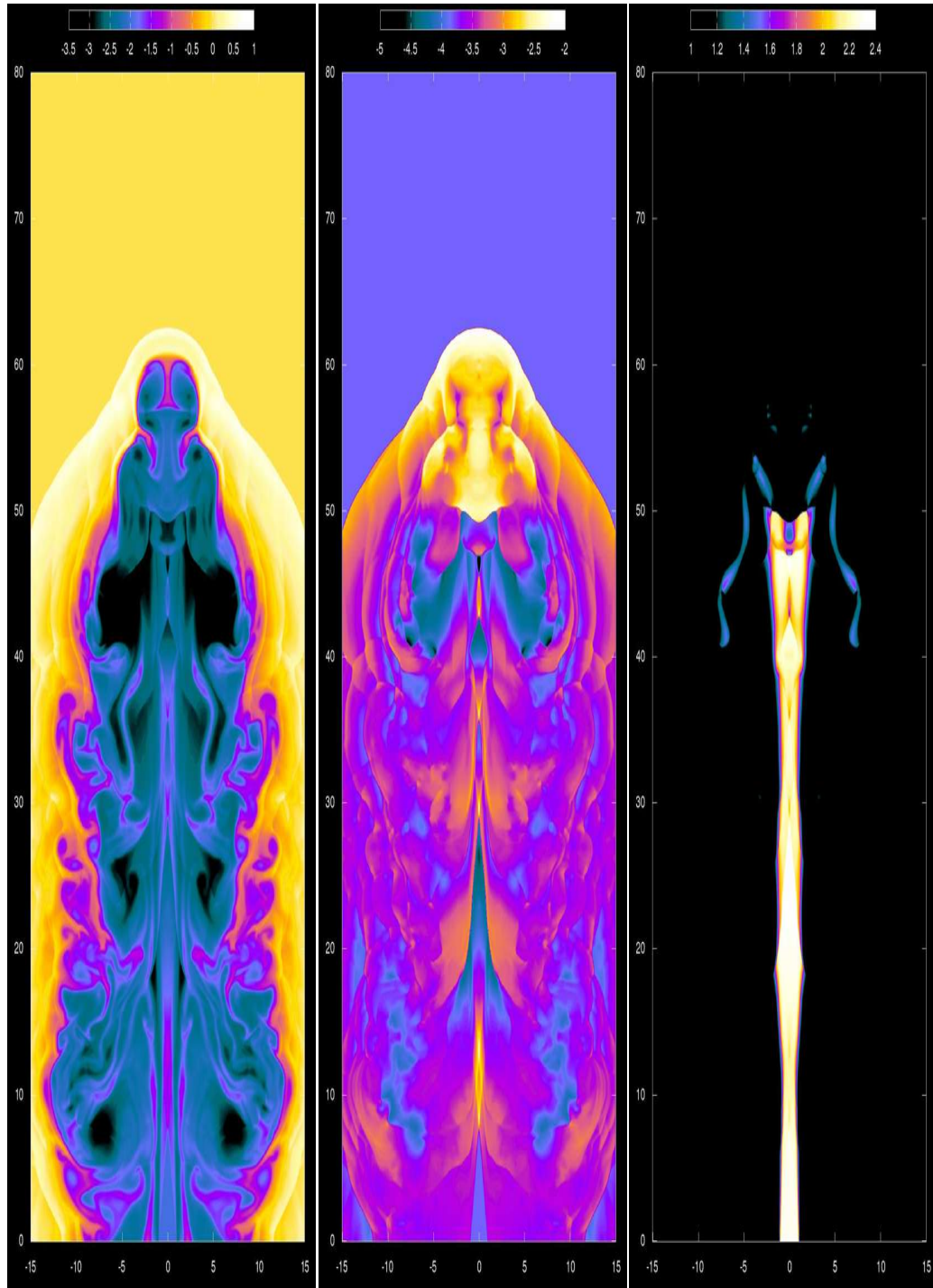


Figura 5.9: *Modelo A1. Se muestra la densidad de masa en reposo  $\log_{10}(\rho)$ , el logaritmo de la presión  $\log_{10}(p)$  y el factor de Lorentz  $W$  al tiempo  $t = 585,937$ .*

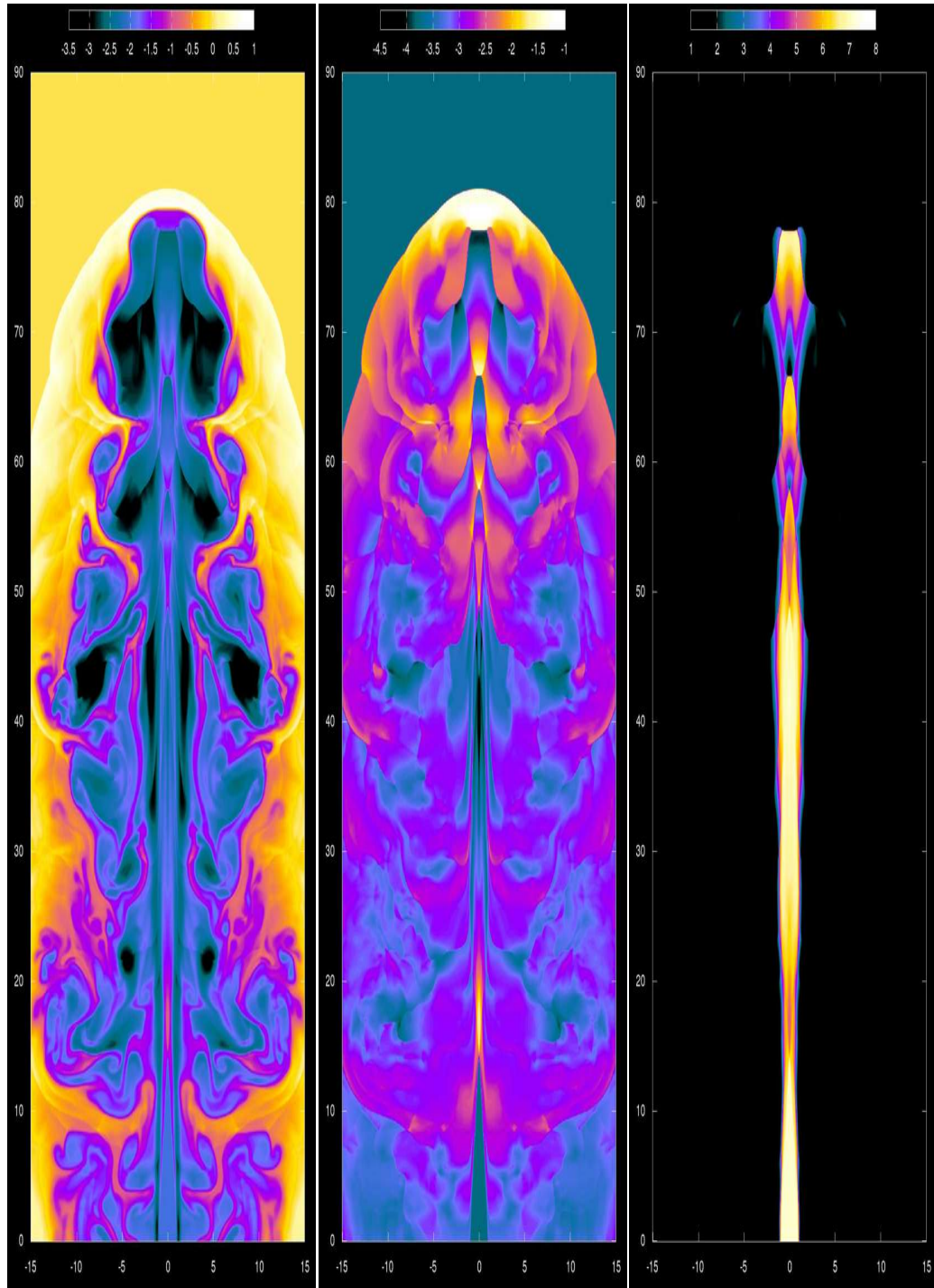


Figura 5.10: *Modelo A2. Se muestra la densidad de masa en reposo  $\log_{10}(\rho)$ , el logaritmo de la presión  $\log_{10}(p)$  y el factor de Lorentz  $W$  al tiempo  $t = 383,25$ .*

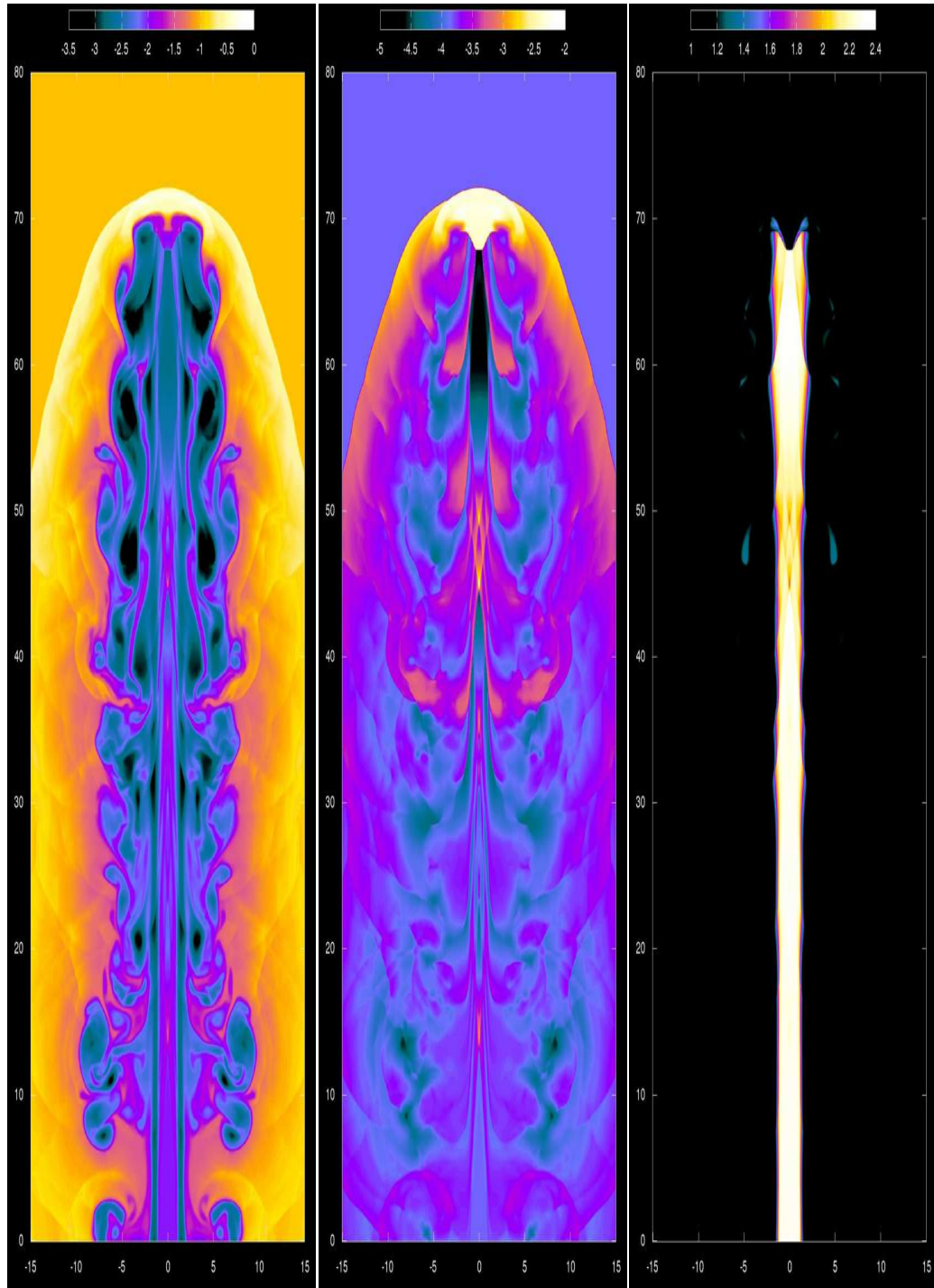


Figura 5.11: *Modelo A3*. Se muestra la densidad de masa en reposo  $\log_{10}(\rho)$ , el logaritmo de la presión  $\log_{10}(p)$  y el factor de Lorentz  $W$  al tiempo  $t = 241,21$ .

# Capítulo 6

## Conclusiones

Se construyó el código *CAFE*, un código nuevo de magnetohidrodinámica en relatividad especial, que usa el esquema de HRSC para el tratamiento de discontinuidades y el método MoL para resolver las ecuaciones de evolución. Dichas ecuaciones describen al sistema constituido por un espacio-tiempo plano y las ecuaciones de Euler-Maxwell. El código está escrito en el lenguaje *fortran* en tres dimensiones cartesianas.

*CAFE* supera todas las pruebas con éxito, al igual que todos los códigos existentes. Entre las pruebas se encuentran, el problema de Riemann en 1D con diferentes configuraciones, el problema de Riemann en 2D, problemas en 2D que incluyen fluidos con rotación e inestabilidades. También problemas con mayor complejidad como los jets relativistas que además de desarrollar discontinuidades, las velocidades del fluido son supersónicas y contienen componentes transversales desarrollando choques fuertes e inestabilidades. La constricción de no monopolos magnéticos se mantiene con errores del orden de  $10^{-14}$  a  $10^{-11}$ , como se espera.

Este código puede emplearse como herramienta para el estudio de problemas de interés en astrofísica. Nos proponemos continuar de inmediato, con la generalización del código, para que nos permita estudiar la RMHD en espacio-tiempos curvos.

# Referencias

- D. Ryu A. Frank, T. Jones and J. Gaalaas. The magnetohydrodynamic kelvin-helmholtz instability: A two-dimensional numerical study. *ApJ*, 460:777–793, 1996. [75](#)
- [Alcubierre] A. Alcubierre. *Introduction to 3 + 1 Numerical relativity*. Oxford University Press, EU, 2008. [8](#)
- H. Alfvén. Existence of electromagnetic-hydrodynamic waves. *Nature*, 150:405–406, 1942. [24](#)
- H. Anile. *Relativistic fluids and magneto-fluids*. Cambridge University Press, 1989. [18](#)
- ATHENA. <http://www.astro.princeton.edu/~jstone/Athena/tests/kh/kh.html>. [75](#)
- F. Pretorius W. E. East B. C., Stephens. Hydrodynamics in full general relativity with conservative adaptive mesh refinement. *Phys. Rev. D*, 85:124010, 2012. [2](#)
- L. Rezzolla B. Giacomazzo. The exact solution of the riemann problem in relativistic mhd. *J. Fluid Mech.*, 562:223–259, 2006. [63](#), [78](#)
- L. Rezzolla B. Giacomazzo. Whiskymhd: a new numerical code for general relativistic magnetohydrodynamics. *Class.Quant.Grav.*, 24:S235–S258, 2007. [2](#)
- J. M. Riley B. L. Fanaroff. The morphology of extragalactic radio sources of high and low luminosity. *MNRAS*, 167:31P–36P, 1974. [97](#)

- D.S. Balsara. Total variation diminishing scheme for relativistic magnetohydrodynamics. *ApJS*, 132:83–101, 2001. [63](#), [78](#)
- T. W. Baumgarte and Stuart L. Shapiro. *NUNERICAL RELATIVITY: Solving Einstein's Equtions in the Computer*. Cambridge Univertsity Press,UK, UK, 2010. [8](#)
- G. Tóth C. F. Gammie, J. C. McKinney. Harm: A numerical scheme for general relativistic magnetohydrodynamics. *ApJ*, 589:444–457, 2003. [2](#)
- T. Strohmayer J. van Paradijs G. J. Fishman C. A. Meegan K. Hurley J. Kommers I. Smith D. Frail T. Murakami C. Kouveliotou, S. Dieters. An x-ray pulsar with a superstrong magnetic field in the soft big gamma-ray repeater sgr1806-20. *Nature*, 393:235–237, 1998. [1](#)
- D. A. Clarke M. L. Norman C. Loken, J. O. Bunrs. Ram-pressure confinement of a hypersonic jet. *ApJ*, 392:54–64, 1992. [98](#)
- S. L. Liebling M. Ponce M. Anderson D. Neilsen P. Motl C. Palenzuela, L. Lehner. Linking electromagnetic and gravitational radiation in coalescing binary neutron stars. *Phys. Rev. D*, 88:043011, 2013. [2](#)
- J. F. Hawley C. R. Evans. Simulation of magnetohydrodynamic flows: A constrained transport method. *Astrophysical Journal*, 332:659–677, 1988. [43](#)
- Cactus code. <http://cactuscode.org/>. [2](#)
- Woodward P.R. Colella, P. The piecewise parabolic method for gas-dynamical simulations. *J. Comput. Phys*, 54:174201, 1984. [35](#)
- H. D. Curtis. Descriptions of 762 nebulae and clusters photographed with the crossley reflector. *Lick Observatory*, 13:9–42, 1918. [1](#)
- W. Hillebrandt D. Kossl, E. Muller. Numerical simulations of axially symmetric magnetized jets. i - the influence of equipartition magnetic fields. *Astronomy and Astrophysics*, 229:378–396, 1990. [98](#)

- J. O. Burns D.A Clarke, M. L. Norman. Numerical observations of a simulated jet with a passive helical magnetic field. *ApJ*, 342:700–717, 1989. [98](#)
- D. Kroner C. D. Munz T. Schitzer M. Wesenberg Dedner A., F. Kemm. Hyperbolic divergence cleaning for the mhd equations. *Journal of Computational Physics*, 175:645–673, 2002. [54](#)
- O. Donmez. Code development of three-dimensional general relativistic hydrodynamics with amr(adaptive-mesh refinement) and results from special and general relativistic hydrodynamic. *Astrophys.Space Sci.*, 293:323–354, 2004. [2](#)
- D.S. Spicer D.S. Balsara. A staggered mesh algorithm using high order godunov fluxes to ensure solenoidal magnetic fields in magnetohydrodynamic simulations. *Journal of Computational Physics*, 149:270–292, 1999. [43](#), [82](#)
- C.D Ott E. O’Connor. A new open-source code for spherically symmetric stellar collapse to neutron stars and black holes. *Class. Quantum Grav.*, 27:114103, 2010. [2](#)
- B. Einfeldt. On godunov-type methods for gas dynamics. *SIAM J. Numer. Anal.*, 25(2):294–318, 1988. [30](#)
- F. S. Guzmán J. A. González F. D. Lora-Clavijo, J. P. Cruz-Pérez. Exact solution of the 1d riemann problem in newtonian and relativistic hydrodynamics. *Rev. Mex. Fis. E*, 59:28, 2013. [2](#), [63](#)
- G. Mellema F. Eulerink. Special relativistic jet collimation by inertial confinement. *Astronomy and Astrophysics*, 284:654–662, 1994. [98](#)
- A. Ferrari. Modeling extragalactic jets. *An. Rev. Astron. and Astrophys.*, 36: 539–598, 1998. [1](#)
- P. C. Fragile. Jet formation in mhd simulation. *PoS MQW7*, 039:14pp, 2008. arXiv:0810.0526 [astro-ph]. [97](#)
- P. A. Hughes G. C. Duncan. Simulations of relativistic extragalactic jets. *ApJ*, 436:L119–L122, 1994. [97](#), [98](#), [105](#)

- S. K. Godunov. A difference scheme for numerical solution of discontinuous solution of hydrodynamic equations. *Math. Sbornik*, 47:271–306, 1959. [30](#)
- E. Gourgoulhon. *3+1 Formalism in General Relativity: Bases of Numerical Relativity*. Springer:Lecture Notes in Physics, Vol. 846, 2012. [8](#)
- K. F. Gurski. *SIAM J. Sci. Compt.*, 25:2165, 2004. [30](#)
- Engquist B. Chakravarthy S. R. Harten, A. Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory, iii\*. *J. Comput. Phys*, 131:347, 1997. [39](#)
- J. F. Hawley. Magnetically driven jets in the kerr metric. *ApJ*, 641:103–116, 2006. [97](#)
- K. D. Kokkotas J. A. Font, N. Stergioulas. Non-linear hydrodynamical evolution of rotating relativistic stars: numerical methods and code tests. *MNRAS*, 313: 678–688, 2000a. [2](#)
- Wai-Mo Suen T. Malcolm J. A. Font, M. Miller. Three-dimensional numerical general relativistic hydrodynamics: Formulations, methods, and code tests. *Phys. Rev. D*, 61:044011, 2000b. [2](#)
- A. Sadowski R. Narayan J. C. McKinney, A. Tchekhovskoy. Three-dimensional general relativistic radiation magnetohydrodynamical simulation of super-eddington accretion, using a new code harmrad with m1 closure. arXiv:1312.6127 [astro-ph.CO], 2013. [2](#), [97](#)
- E. Muller J. M. Martí. The analytical solution of the riemann problem in relativistic hydrodynamics. *J. Fluid. Mech.*, 258:317–333, 1994. [35](#), [63](#), [64](#), [70](#), [97](#), [98](#), [105](#)
- E. Muller J. M. Martí. Numerical hydrodynamics in special relativity. *Living Rev. Relativity*, 6:1–100, 2003. [63](#), [64](#)
- J. A. Font J. Ma. Ibáñez A. Marquina J. Ma. Martí, E. Muller. Morphology and dynamics of relativistic jets. *ApJ*, 479:151–163, 1997. [98](#), [102](#)

- J. A. Miralles J. Ma. Martí, J. Ma. Ibáñez. Numerical relativistic hydrodynamics: Local characteristic approach. *Phys. Rev. D*, 43:3794–3801, 1991. [1](#)
- D. L. Meier R. D. Blandford K. R Lind, D. G. Payne. Numerical simulations of magnetized jets. *ApJ*, 344:89–103, 1989. [98](#)
- S. S. Komissarov. A godunov-type scheme for relativistic magnetohydrodynamics. *MNRAS*, 303:343–266, 1999. [57](#), [63](#)
- J.A. Miralles J.M. Martí J.M. Ibáñez J.A. Font J.A. Pons L. Antón, O. Zanotti. Numerical 3+1 general relativistic magnetohydrodynamics: A local characteristic approach. *ApJ*, 637:296–312, 2006. [2](#)
- P. J. Montero L. Rezzolla L. Baiotti, I. Hawke. A new three-dimensional general-relativistic hydrodynamics code. *Men. S. A. It. Suppl.*, 1:210, 2003. [2](#)
- N. Bucciantini L. Del Zanna. An efficient shock-capturing central-type scheme for multidimensional relativistic flows. *Astronomy and Astrophysics*, 390(3): 1177–1186, 2002. [72](#), [90](#)
- B. Van Leer. Towards the ultimate conservative difference scheme iii. upstream-centered finite-difference schemes for ideal compressible flow. *J. Comp. Phys.*, 23(3):263–275, 1977. [32](#)
- S. Li. An hllc riemann solver for magneto-hydrodynamics. *J. of Comput. Phys.*, 203:334–357, 2005. [30](#)
- Lehner L. Neilsen D. Palenzuela C. Liebling, S. L. *Phys. Rev. D*, 81:124023, 2010. [54](#)
- J. M. Martí E. Muller M A Aloy, J. M. Ibáñez. Genesis: A high-resolution code for three-dimensional relativistic hydrodynamics. *ApJS*, 122:151–166, 1999. [1](#)
- E. Gourgoulhon J. Novak M. Bocquet, S. Bonazzola. Rotating neutron star models with a magnetic field. *Astronomy and Astrophysics*, 301:757–775, 1995. [1](#)

- D. F. Cioffi M. C. Begelman. Overpressured cocoons in extragalactic radio sources. *ApJ*, 345:L21–L24, 1989. [98](#)
- L. Smarr M. D. Smith M. L. Norman, K. H. A. Winkler. Structure and dynamics of supersonic jets. *Astronomy and Astrophysics*, 113:285–302, 1982. [98](#)
- B. Bruggmann M. Thierfelder, S. Bernuzzi. Numerical relativity simulations of binary neutron stars. *Phys. Rev. D*, 84:044012, 2011. [2](#)
- A. Marquina. Local piecewise hyperbolic reconstruction of numerical fluxes for nonlinear scalar conservation laws. *SIAM J. Sci. Comput.*, 15(4):892915, 1994. [30](#)
- A. Mignone and G. Bodo. An hllc solver for relativistic flows ii. magnetohydrodynamics. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 368:1040–1054, 2006. [57](#), [97](#), [105](#)
- L. Del Zanna N. Bucciantini. Grmhd in axisymmetric dynamical spacetimes: the x-echo code. *Astronomy and Astrophysics*, 528:A101, 2011. [2](#)
- Scott C. Noble, Jonathan C. McKinney Charles F. Gammie, and Luca Del Zanna. Primitive variable solvers for conservative general relativistic magnetohydrodynamics. *ApJ*, 641:626, 2006. [55](#), [57](#), [58](#)
- L. Rezzolla O. Donmez. On the development of qpos in bondi-hoyle accretion flows. *MNRAS*, 412:1659–1668, 2011. [2](#)
- A. I. MacFadyen P. C. Duffell. Tess: A relativistic hydrodynamics code on a moving voronoi mesh. *ApJS*, 197:22pp, 2011. [1](#)
- L. Antón E. Muller P. Cerdá-Durán, J. A. Font. A new general relativistic magnetohydrodynamics code for dynamical spacetimes. *Astronomy and Astrophysics*, 492:937–953, 2008. [2](#)
- B. van Leer P. Harten, P. D.Lax. On upstream differencing and godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws. *SIAM review*, 25(1):35–61, 1983. [30](#)
- J. A. Faber R. Haas S. C. Noble T. Bode Frank Loeffler C. D. Ott C. Reisswig E. Schnetter P. Mosta, B. C. Mundim. Grhydro: A new open source general-relativistic magnetohydrodynamics code for the einstein toolkit. 2013. [2](#), [90](#)

- A. J. Penner. *Numerical Analysis of the Ultrarelativistic and Magnetized Bondi-Hoyle Problem*. PhD thesis, THE UNIVERSITY OF BRITISH COLUMBIA, 2011a. [75](#)
- A. J. Penner. General relativistic magnetohydrodynamic bondi-hoyle accretion. *MNRAS*, 414:1467–1482, 2011b. [2](#), [54](#)
- B. P. Teukolsky S. A. Press W. H., Flannery and Vetterlin. *Numerical Recipes*. Cambridge University Press, 1986. [57](#)
- M. J. Rees R. D. Blandford. A twin-exhaust model for double radio sources. *MNRAS*, 169:395–415, 1974. [97](#), [98](#)
- E.A. Dorfi E. Muller R.J. LeVeque, D. Mihalas. *Computational Methods for Astrophysical Fluid Flow*. 27th Saas-Fee Advanced Course/Lecture Notes 1997 (Springer-Verlag), Berlin, 1998. [98](#), [99](#)
- P.L. Roe. Characteristic-based schemes for the euler equations. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 18:337–365, 1986. [30](#), [32](#)
- Jones T W Frank A Ryu D, Miniati F. A divergence-free upwind code for multi-dimensional magnetohydrodynamic flows. *Astrophysical Journal*, 509:244–255, 1998. [43](#)
- P.A G. Scheuer. Models of extragalactic radio sources with a continuous energy supply from a central object. *MNRAS*, 166:513–528, 1974. [97](#)
- C. W. Shu and S. J. Osher. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes, ii. *J. Comput. Phys.*, 83:32–78, 1989. [58](#), [59](#)
- H.C. Spruit. Essential magnetohydrodynamics for astrophysics. 2013. [4](#)
- M. A. Aloy E. Muller J.M. Martí J.A. Mirelles J. M. Ibáñez T. Leismann, L. Antón. Relativistic mhd simulations of extragalactic jets. *Astronomy and Astrophysics*, 436:503–526, 2005. [24](#), [97](#), [98](#), [105](#)
- K. Taniguchi T. Yamamoto, M. Shibata. Simulating coalescing compact binaries by a new code (sacra). *Phys. Rev. D*, 78:064054, 2008. [2](#)

- Toro E. F. Titarev, V. A. Finite-volume weno schemes for three-dimensional conservation laws. *J. Comput. Phys*, 201:238260, 2004. [30](#), [39](#)
- T.Leismann. *Relativistic Magnetohydrodynamic Simulations of Extragalactic Jets*. PhD thesis, 2004. [98](#)
- E. F. Toro. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. Springer-Verlag, Berlin, 1997. [30](#)
- G. Toth. The  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$  constraint in shock-capturing magnohydrodynamic codes. *Journal of Computational Physics*, 161:605–652, 2000. [43](#)
- M. H. P. M. van Putten. A two-dimensional relativistic ( $\gamma = 3,25$ ) jet simulation. *ApJ*, 408:L21–L23, 1993. [98](#)
- P. R. Woodward W. Dai. On the divergence-free condition and conservation laws in numerical simulations for supersonic magnetohydrodynamic flows. *Astrophysical Journal*, 494:317, 1998. [43](#)
- A. I. MacFadyen W. Zhang. Ram: A relativistic adaptive mesh refinement hydrodynamics code. *ApJS*, 164:255–279, 2006. [1](#), [72](#), [75](#), [77](#)
- J. R. Wilson. Numerical study of fluid flow in a kerr space. *ApJ*, 173:431–438, 1972. [1](#)
- S. L. Shapiro Z. B. Etienne, Y. T. Liu. Relativistic magnetohydrodynamics in dynamical spacetimes: A new adaptive mesh refinement implementation. *Phys. Rev. D*, 82:084031,, 2010. [2](#)