



*Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo*

*Instituto de Física y Matemáticas*

# Constricciones perturbativas al vértice quark-gluón

Tesis

que para obtener el grado de

**Maestro en Ciencias en el área de Física**

presenta

**Luis Albino Fernández Rangel**

Morelia, Michoacán. Febrero del 2014

Director de tesis:  
Doctor en ciencias en el área de física Adnan Bashir

Instituto de Física y Matemáticas,  
UMSNH.



# Contenido

Resumen	5
Abstract	5
Introducción	7
<b>1 Lagrangiano de QED</b>	<b>11</b>
1.1 Lagrangiano de QED . . . . .	11
1.1.1 Transformaciones de norma . . . . .	12
1.1.2 Invariancia de norma local . . . . .	14
1.2 Reglas de Feynman . . . . .	16
1.3 Ecuaciones de Schwinger-Dyson (SDE) . . . . .	17
1.4 Identidades de Ward-Takahashi . . . . .	20
<b>2 Vértice en QED</b>	<b>23</b>
2.1 Construcción del vértice . . . . .	24
2.2 Vértice de Ball-Chiu . . . . .	24
2.3 Vértices en la literatura . . . . .	27
2.4 Vértice electrón-fotón . . . . .	28
<b>3 Lagrangiano de QCD</b>	<b>45</b>
3.1 Quarks y la simetría global $SU(3)$ . . . . .	46
3.2 $SU(N)$ y sus generadores . . . . .	46
3.3 Transformaciones de norma locales . . . . .	47

3.4	Reglas de Feynman . . . . .	49
3.5	El vértice quark-gluón a un lazo . . . . .	50
<b>4</b>	<b>Vértice quark-gluón</b>	<b>53</b>
4.1	Correcciones a un lazo . . . . .	54
4.2	Diagrama Abeliano . . . . .	55
4.3	Diagrama no Abeliano . . . . .	56
4.4	Resultados: Vértices transversos . . . . .	66
<b>5</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>69</b>
5.1	Perspectivas . . . . .	70
	<b>Apéndice A</b>	<b>71</b>
	<b>Apéndice B</b>	<b>73</b>
	<b>Apéndice C</b>	<b>75</b>
	<b>Apéndice D</b>	<b>79</b>
	<b>Apéndice E</b>	<b>83</b>

# Resumen

En éste trabajo de tesis calculamos el vértice de interacción quark-gluón, en teoría de perturbaciones a un lazo, en el límite asintótico  $k^2 \gg p^2 \gg m^2$  de momentos externos  $k$  y  $p$  del quark y masa desnuda  $m$  del quark. Este vértice consiste de dos diagramas de Feynman de naturaleza Abeliana y no Abeliana. Ambos diagramas son calculados. Invocando las identidades de Ward-Slavnov-Taylor y restando el vértice longitudinal tipo Ball-Chiu, calculamos la parte transversa del vértice, la cual nos da pistas de cómo construir un ansatz confiable y físicamente coherente para su contraparte no perturbativa. La construcción de este ansatz no perturbativo tiene efectos medibles en física hadrónica, los cuales son observados en varios laboratorios.

**Palabras clave:** Cromodinámica Cuántica, Vértice quark-gluón, Teoría de Perturbaciones, Ecuaciones de Schwinger-Dyson, Física hadrónica.

# Abstract

In this thesis we calculate the quark-gluon interaction vertex in perturbation theory to one loop in the asymptotic limit  $k^2 \gg p^2 \gg m^2$  of external quark momenta  $k$  and  $p$  and the bare quark mass  $m$ . This vertex consists of two Feynman diagrams of Abelian and non Abelian nature. We calculate both these diagrams. Invoking the Slavnov- Taylor identity and subtracting out the longitudinal Ball-Chiu type vertex, we compute the transverse vertex which can help to construct a physically meaningful and reliable ansatz for its non perturbative counterpart. Construction of this non perturbative ansatz has measurable effects in hadron physics, which are being observed in different laboratories worldwide.

**Keywords:** Quantum Chromodynamics, Quark-Gluon Vertex, Perturbation Theory, Schwinger-Dyson Equations, Hadron Physics.



# Introducción

La masa es una de las propiedades más intrigantes en la física, y su origen no sólo es misterioso a nivel de las partículas fundamentales, sino también a nivel de partículas no fundamentales como los hadrones (formados por quarks). Por ejemplo, un protón está constituido por 3 quarks, los cuales tienen una masa de aproximadamente  $3MeV$  cada uno debido al rompimiento espontáneo de la simetría de norma por el campo de Higgs; uno esperaría entonces que la masa del protón fuese alrededor de  $10MeV$ , sin embargo la masa de éste es de aproximadamente  $1GeV$ , es decir, más de 100 veces el valor que se esperaría. Este fenómeno no es exclusivo de los protones, sino de todos los hadrones (Con excepción de los mesones de Goldstone, los cuales tienen masas significativamente pequeñas); uno se pregunta entonces ¿De dónde proviene esa masa extra?

Son las interacciones fuertes entre los quarks las responsables de la generación de la masa extra en los hadrones mediante un proceso llamado *generación dinámica de masas*, y es el resultado de una ruptura en la simetría quiral del sistema. Sin embargo, la interacción fuerte entre quarks se da a través del intercambio de gluones, por ello, es imperativo estudiar las interacciones entre quarks y gluones en el marco de la *cromodinámica cuántica* (QCD) para entender la generación de masas en los hadrones. En el régimen de bajas energías, conocido también como el límite infrarrojo, las interacciones entre quarks son tan fuertes que los mantienen *confinados* en lo que conocemos como hadrones. Es por esto que estudiar el comportamiento infrarrojo del vértice (interacción) quark-gluón es la clave para entender la generación dinámica de masas y el confinamiento.

La dinámica en una *teoría cuántica de campos* (QFT), tal como la QCD, está completamente determinada por las *ecuaciones de Schwinger-Dyson* (SDE) [1], [2], las cuales son un conjunto de ecuaciones integrales infinitas en número y acopladas entre sí, que relacionan funciones de Green de  $n$ -puntos con funciones de Green de  $(n+1)$ -puntos. Estudiar el vértice de interacción quark-gluón en el régimen no perturbativo (o régimen de interacciones fuertes, en el cual los quarks se encuentran confinados en los hadrones) a través de las SDE resulta particularmente muy complicado ya que es prácticamente imposible encontrar una solución a dichas ecuaciones

en este régimen puesto que debemos determinar 12 funciones (las *amplitudes de espín*). Resulta conveniente estudiar la SDE correspondiente al vértice quark-gluón en el régimen perturbativo, pues en este régimen dicha ecuación se puede truncar de manera sistemática en las potencias del acoplamiento  $\alpha$ . El comportamiento asintótico del vértice quark-gluón nos da pistas de cómo construir un *ansatz* para su contraparte no perturbativa que se reduzca a su límite perturbativo en el régimen de acoplamiento débil. Proponer este *ansatz* es una de las prácticas comunes por el hecho de que fenómenos como el confinamiento y la generación dinámica de masas toman lugar únicamente en el régimen no perturbativo.

El primer paso en la búsqueda de un *ansatz* para el vértice en QCD será en el estudio de la interacción electrón-fotón en el marco de la *electrodinámica cuántica* (QED), puesto que esta es la más simple de las teorías de norma, y sirve como un modelo de juguete para el estudio de teorías de norma más complicadas, como lo es la QCD; la estructura del vértice en QED nos da las primeras pistas de la estructura del vértice quark-gluón.

En búsqueda de un marco que simplifique las SDE en QED, se exige al sistema una invarianza de norma, la cual tiene como consecuencia las *identidades de Ward-Takahashi* (WTI) [3], [4], [5], las cuales relacionan las funciones de Green unas con otras, imponiendo restricciones sobre el sistema. Una forma general tensorial para el vértice consistente con las identidades de Ward y libre de singularidades cinemáticas fue construida por Ball y Chiu [6], quienes encontraron una expresión para la parte longitudinal del vértice y propusieron una base tensorial de 8 componentes independientes para la construcción de la parte transversa del vértice en la norma de Feynman. La modificación de esta base tensorial para cualquier norma covariante fue propuesta por Kisilerzü, Reenders y Pennington [16].

El vértice en QCD es muy parecido al vértice en QED a nivel árbol, sin embargo, existen ciertas sutilezas: El vértice quark-gluón difiere del vértice electrón-fotón incluso a un lazo, debido a la contribución de un diagrama de Feynman no Abelson adicional, el cual involucra la interacción entre 3 gluones, además de introducir una estructura de color adicional. El vértice quark-gluón se ha estudiado en detalle a un lazo para las “piernas” off-shell en norma covariante y dimensiones arbitrarias por Davydychev, Oslands y Saks [7]. Sin embargo, las expresiones resultantes tienen alto grado de complejidad y sus implicaciones no perturbativas no son fáciles de descifrar. Por lo tanto, nosotros seguiremos el camino sugerido por Curtis y Pennington [8], [9], y calcularemos el vértice quark-gluón a un lazo en el límite asintótico de momentos externos. Este límite es importante porque resulta sencillo construir así un *ansatz* no perturbativo que cumpla con los requisitos de la renormalizabilidad multiplicativa del propagador fermiónico. Tomar este límite desde el trabajo de Davydychev es más difícil que realizar el cálculo nuevamente.

En el capítulo 1 estudiaremos QED empezando con su lagrangiano y derivando las SDE que la determinan por completo. En el capítulo 2 revisaremos algunos de los estudios sobre el vértice electrón-fotón, relevantes para esta tesis. En el capítulo 3 estudiaremos el lagrangiano de QCD y la expresión perturbativa del vértice quark-gluón. En el capítulo 4 presentaremos los cálculos y resultados para el vértice quark-gluón. Finalmente, en el capítulo 5 discutiremos nuestros resultados y presentaremos las conclusiones.



# Capítulo 1

## Lagrangiano de QED

La electrodinámica cuántica (QED) es la teoría cuántica de campos (también llamada teoría de norma) que describe las interacciones entre los fotones y las partículas con carga eléctrica. Esta teoría está determinada por un conjunto de ecuaciones muy simples (las ecuaciones de Maxwell y la ecuación de Dirac) cuya forma es esencialmente determinada por la invarianza relativista y la simetría de norma. Las detalladas predicciones de fenómenos electromagnéticos de QED son válidas desde escalas macroscópicas hasta escalas cientos de veces más pequeñas que un protón. Esta teoría es hasta hoy en día la más precisa de todas por sus predicciones, tales como el corrimiento de la constante de estructura fina electromagnética, el momento magnético del electrón o el efecto Lamb (*lamb shift*), que han llegado a coincidir con mucha precisión con los experimentos. En este capítulo estudiaremos el lagrangiano de QED y algunos conceptos fundamentales que se derivan de él, y que serán de gran relevancia en esta tesis.

### 1.1 Lagrangiano de QED

Una de las primeras ecuaciones que describió con éxito el comportamiento de sistemas dinámicos a escalas muy pequeñas (atómicas o subatómicas) fue la ecuación de Schrödinger, pero esta presentaba un problema: No era invariante ante transformaciones de Lorentz. La versión relativista de la ecuación de Schrodinger fue la ecuación de Klein-Gordon, la cual prometía describir electrones relativistas, sin embargo presentaba ciertos problemas: Es una ecuación diferencial de segundo orden en el tiempo, lo cual generaba aparentes inconsistencias en la densidad de probabilidad (la cual fue reinterpretada como la densidad de carga años después); el segundo problema era que predecía energías negativas (las cuales fueron interpretadas como la manifestación de las antipartículas, tiempo después), lo que implicaba sistemas

no acotados inferiormente desde el punto de vista energético y por consecuencia eran inestables. Adicionalmente la ecuación de Klein-Gordon describe bosones de espín cero, y no electrones (fermiones) de espín  $1/2$ .

El problema fue resuelto por Dirac, quien encontró una ecuación diferencial de primer orden en el tiempo que es invariante de Lorentz y que adicionalmente describe partículas de espín  $1/2$ . La ecuación de Dirac es

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) = 0, \quad (1.1)$$

donde

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{2 \times 2} & \mathbb{O}_{2 \times 2} \\ \mathbb{O}_{2 \times 2} & -\mathbb{I}_{2 \times 2} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} \mathbb{O}_{2 \times 2} & \sigma^i \\ -\sigma^i & \mathbb{O}_{2 \times 2} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3,$$

donde  $\mathbb{I}_{2 \times 2}$  y  $\mathbb{O}_{2 \times 2}$  son la matriz unidad y la matriz cero de dimensión  $2 \times 2$ , respectivamente, y  $\sigma^i$  son las matrices de Pauli. Estas matrices satisfacen el álgebra de Clifford:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}.$$

Aunque la ecuación (1.1) contiene la información acerca de la dinámica del sistema (cuando no hay interacciones electromagnéticas), resulta más conveniente trabajar con el lagrangiano y la acción de dicho sistema, pues podemos obtener las ecuaciones dinámicas a partir de estos utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange. Es fácil ver que el lagrangiano que genera la ecuación de Dirac es simplemente:

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \bar{\psi}(x) (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x). \quad (1.2)$$

En la siguiente sección, estudiaremos el Lagrangiano de Dirac y su comportamiento bajo transformaciones de norma  $U(1)$ .

### 1.1.1 Transformaciones de norma

Una de las ideas más profundas de la física teórica es que las interacciones están dictadas por principios de simetría. Uno de los ejemplos más famosos de lo poderoso que es esta idea es la relatividad general de Einstein, la cual fue construida considerando invarianza ante transformaciones de coordenadas generales (junto con el principio de equivalencia). La conexión entre simetrías y leyes de conservación de sistemas físicos es más clara en el marco de la teoría lagrangiana.

La dinámica de un sistema puede ser obtenida de su lagrangiano y de su correspondiente acción vía las ecuaciones de Euler-Lagrange. A partir de las simetrías del lagrangiano del sistema podemos obtener las leyes de conservación (o corrientes

conservadas), vía el teorema de Noether<sup>1</sup>. La conservación del momento, la energía, el momento angular, entre otras cantidades físicas, se manifiesta en la invariancia del lagrangiano bajo desplazamientos en el espacio, desplazamientos en el tiempo, rotaciones, etc.

Las interacciones entre partículas están dictadas por las llamadas simetrías de norma (*gauge transformations*). Las transformaciones de norma pueden ser globales o locales. En el caso del grupo  $U(1)$ , la transformación de norma global es

$$\psi(x) \rightarrow U(\alpha)\psi(x), \quad \text{donde} \quad U(\alpha) \equiv e^{i\alpha}; \quad (1.3)$$

donde  $\alpha$  es una constante. El lagrangiano (1.2) es invariante ante la transformación anterior. En su forma infinitesimal, esta transformación es

$$U(\alpha) = 1 + i\alpha \quad \Rightarrow \quad \psi(x) \rightarrow (1 + i\alpha)\psi(x);$$

la invariancia del lagrangiano requiere

$$\begin{aligned} 0 = \delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi}\delta\psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\delta(\partial_\mu\psi) + \delta\bar{\psi}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} + \delta(\partial_\mu\bar{\psi})\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})} \\ &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi}(i\alpha\psi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}(i\alpha\partial_\mu\psi) + \dots \\ &= i\alpha \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} \right) \right] \psi + \partial_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} \psi \right) + \dots \end{aligned}$$

El término en los paréntesis cuadrados desaparece en virtud de las ecuaciones de Euler-Lagrange para  $\psi$ , entonces la expresión anterior se reduce a la forma de una ecuación de corriente conservada (ecuación de continuidad):

$$\partial_\mu j^\mu = 0,$$

donde

$$j^\mu \equiv \frac{ie}{2} \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\psi - \bar{\psi}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})} \right) = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi,$$

usando el lagrangiano (1.2). El factor de proporcionalidad  $ie/2$  se escoge de tal manera que  $j^\mu$  exprese la densidad de carga electromagnética de un electrón con carga  $-e$ . Integrando a la ecuación de continuidad sobre todo el espacio, es evidente que

$$Q \equiv \int d^3x j^0$$

---

<sup>1</sup>En el caso de simetrías continuas.

es una cantidad conservada. De hecho  $Q$  es justamente la carga eléctrica, la cual es una cantidad conservada.

La familia de transformaciones de fase  $U(\alpha) \equiv e^{i\alpha}$ , donde  $\alpha$  es un número real, forma un grupo Abelian<sup>2</sup> unitario conocido como *el grupo*  $U(1)$ .

### 1.1.2 Invariancia de norma local

No existe ningún argumento convincente del por qué una invariancia de norma global se debe satisfacer también localmente, sin embargo esta premisa ha demostrado ser fundamental en la descripción de las interacciones entre partículas fundamentales. La generalización de la transformación (1.3) a una transformación de norma local es

$$\psi(x) \rightarrow U(\alpha)\psi(x), \quad \text{donde} \quad U(\alpha) \equiv e^{i\alpha(x)}, \quad (1.4)$$

siendo  $\alpha(x)$  es una función arbitraria que depende de la posición en el espacio-tiempo. Sin embargo, es fácil ver que el lagrangiano (1.2) no es invariante bajo dicha transformación debido al término que contiene la derivada. Para imponer invarianza en este lagrangiano, debemos reemplazar a la derivada  $\partial_\mu$  en el lagrangiano de Dirac por una “derivada modificada”  $D_\mu$  que se transforme covariantemente ante transformaciones de norma locales, es decir, que se transforme como  $\psi$ :

$$D_\mu\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)}D_\mu\psi(x).$$

Esta nueva derivada  $D_\mu$ , llamada derivada covariante, se define como

$$D_\mu \equiv \partial_\mu - ieA_\mu,$$

donde se introdujo un campo vectorial  $A_\mu$  el cual se debe transformar como

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha,$$

redefiniendo así al lagrangiano como

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi = \mathcal{L}_{\text{Dirac}} + \mathcal{L}_{\text{int}}, \quad (1.5)$$

donde

$$\mathcal{L}_{\text{int}} \equiv e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu = -j^\mu A_\mu.$$

---

<sup>2</sup>Un grupo es Abelian si la multiplicación de grupo es conmutativa

$$U(\alpha_1)U(\alpha_2) = U(\alpha_2)U(\alpha_1).$$

El campo vectorial  $A_\mu$  que nos vimos forzados a introducir para satisfacer la invarianza de norma es llamado campo de norma (*gauge field*), y es de hecho el campo del fotón. Sin embargo, para considerarlo realmente como el campo físico del fotón, debemos introducir su correspondiente término cinético en el lagrangiano (1.5). Como demandamos invarianza ante la transformación (1.4) e invarianza de Lorentz, el término cinético debe ser justamente el tensor de Maxwell:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu,$$

de esta manera, el lagrangiano completo toma la forma

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{Dirac}} + \mathcal{L}_{\text{int}} + \mathcal{L}_{\text{Maxwell}}, \quad (1.6)$$

donde

$$\mathcal{L}_{\text{Maxwell}} \equiv -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}.$$

Para que la teoría electromagnética descrita por el lagrangiano (1.6) defina una teoría cuántica de campos, necesitamos cuantizar el campo electromagnético; para ello exigimos que el campo  $A_\mu$  cumpla ciertas relaciones de conmutación con su correspondiente momento canónico conjugado (llamado  $\pi^\mu$ ), de manera análoga a las relaciones de conmutación entre posición y momento en mecánica cuántica clásica. Sin embargo, la imposición de dichas relaciones de conmutación da lugar a inconsistencias con las restricciones del sistema; uno debe introducir entonces un término “a mano” en el lagrangiano (1.6), el cuál no afecte la dinámica del sistema, pero haga consistentes las relaciones de conmutación con las restricciones de dicho sistema. Uno introduce entonces el término  $-(\partial^\mu A_\mu)^2/2\xi$ , el cuál es trivial si uno impone la condición de Lorentz  $\partial^\mu A_\mu = 0$ <sup>3</sup>. El lagrangiano completo de QED se escribe entonces:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{QED}} &= \mathcal{L}_{\text{Dirac}} + \mathcal{L}_{\text{int}} + \mathcal{L}_{\text{Maxwell}} - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu)^2 \\ &= \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi + e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu)^2. \end{aligned} \quad (1.7)$$

En normas covariantes  $\xi$  es llamado *parámetro de norma*, y puede tomar cualquier valor real finito. Cuando  $\xi = 1$  decimos que estamos en la norma de Feynman, y cuando  $\xi = 0$  decimos que estamos en la norma de Landau.

El lagrangiano (1.7) contiene toda la información acerca de la interacción electrón-fotón. Esta interacción forma parte de fenómenos físicos electromagnéticos tales como los procesos de dispersión, decaimientos, etc. Una de las herramientas que se emplean para entender dichas procesos son los diagramas de Feynman, y sus correspondientes reglas de Feynman, las cuales revisaremos en la siguiente sección.

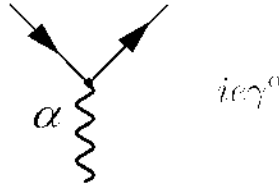
---

<sup>3</sup>Uno podría emplear la condición de Coulomb, sin embargo, esta condición no satisface invarianza de Lorentz, la cual demandamos al sistema.

## 1.2 Reglas de Feynman

En mecánica cuántica un sistema físico está descrito por su correspondiente *estado cuántico*, representado por la función de onda  $\psi$ ; un proceso físico, tal como la dispersión o decaimiento, consiste de una *transición* de un estado a otro. Pero en mecánica cuántica no podemos determinar el resultado de un proceso a partir de sus condiciones iniciales, de hecho lo único que podemos determinar es la *amplitud de probabilidad* de que dicha transición ocurra. El cálculo teórico de dichas amplitudes de probabilidad requiere el uso de integrales muy complicadas; sin embargo, estas integrales tienen una estructura regular, y en el régimen perturbativo pueden ser representadas gráficamente por los llamados *diagramas de Feynman*. Es necesario aprender a "leer" estos diagramas para así extraer de ellos información tal como la amplitud de probabilidad de un cierto proceso, para ello necesitamos las llamadas *reglas de Feynman*, las cuales se derivan del lagrangiano (1.7), y se enuncian a continuación:

- *Factor de vértice*



- *Propagadores*

Positrones  
y  
Electrones

$$S_F(q) = \frac{\not{q} + m}{q^2 - m^2}$$

Fotones

$$\Delta_{\nu\rho}(\omega) = \frac{-i}{\omega^2} \left[ \eta_{\nu\rho} + (\xi - 1) \frac{\omega_\nu \omega_\rho}{\omega^2} \right]$$

La expansión perturbativa de los procesos físicos en términos de los diagramas de Feynman deja de tener sentido físico si la constante de acoplamiento es alrededor de 1. En este caso, empezamos con las ecuaciones de SDE no perturbativas, las cuales discutiremos en la siguiente sección.

### 1.3 Ecuaciones de Schwinger-Dyson (SDE)

Las SDE son un conjunto de ecuaciones integrales acopladas las cuales definen por completo a una teoría cuántica de campos; estas son el análogo a las ecuaciones de Euler-Lagrange. La derivación de dichas ecuaciones es independiente de la constante de acoplamiento entre los campos (derivación no perturbativa), por ello, son válidas tanto para el régimen perturbativo como para el no perturbativo. Para fines prácticos, en esta primera parte de la sección nos limitaremos a derivar las SDE para QED utilizando argumentos perturbativos.

En la sección anterior vimos la representación diagramática para el propagador del electrón y su correspondiente expresión matemática, sin embargo esta fue sólo una aproximación perturbativa; si queremos una descripción más precisa del propagador de un electrón necesitamos considerar todas las posibles maneras en las que dicha propagación toma lugar, por lo que debemos tomar en cuenta correcciones al propagador del electrón de la sección pasada, al cual llamamos propagador desnudo y lo denotamos como  $S_F^0(q)$ , y al propagador que contiene las correcciones lo llamamos propagador completo y lo denotamos como  $S_F(q)$ , cuyas representaciones diagramáticas se muestran en la figura 1.1:

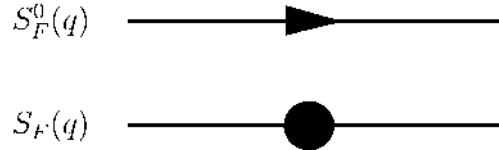


Figura 1.1: Propagador desnudo ( $S_F^0(q)$ ) y propagador completo ( $S_F(q)$ ).

El punto en el propagador completo de la figura 1.1 indica que debemos considerar todas las correcciones a la propagación libre, lo cual se expresa diagramáticamente en la figura 1.2.

De la figura 1.2 podemos notar que existen regularidades en las correcciones al propagador desnudo, las cuales podemos clasificar de la siguiente manera:

- *Correcciones al propagador fermiónico (de tipo arcoiris):*



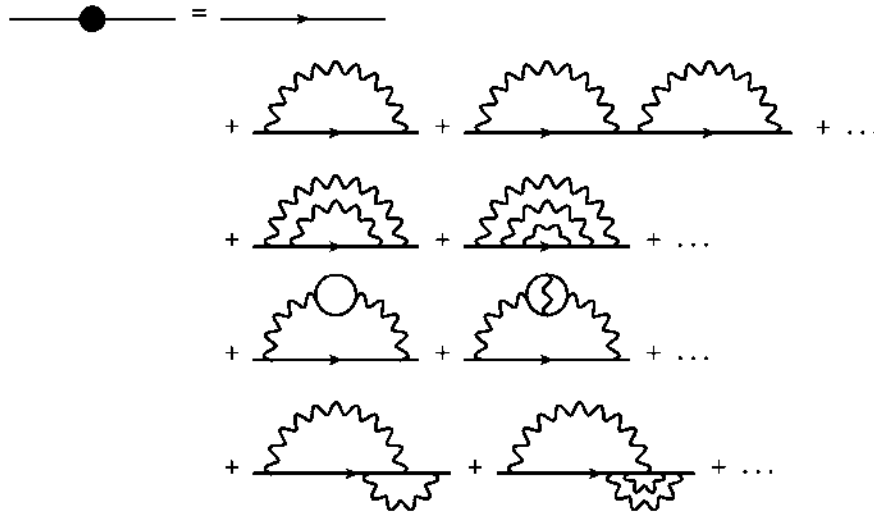
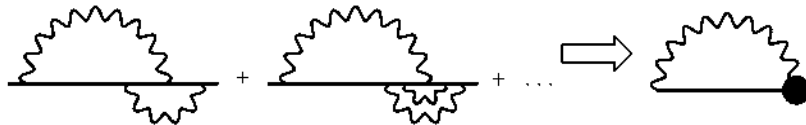


Figura 1.2: Correcciones al propagador del fermión.

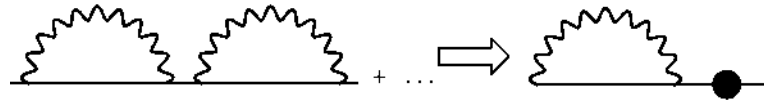
- *Correcciones al propagador fotónico:*



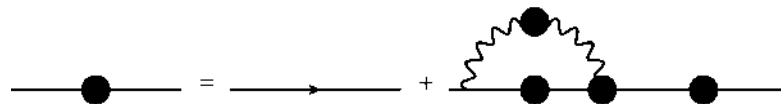
- *Correcciones al vértice:*



- *Recorrecciones:*



Reescribimos entonces al propagador del electrón, de manera diagramática, como



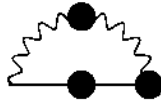
Expandiendo las correcciones, obtenemos



lo cual se expresa matemáticamente como

$$S_F(q) = S_F^0(q) + S_F^0(q)\Sigma(q)S_F^0(q) + S_F^0(q)\Sigma(q)S_F^0(q)\Sigma(q)S_F^0(q) + \dots,$$

donde definimos diagramáticamente a  $\Sigma(q)$  como



Factorizando la expresión para el propagador fermiónico, obtenemos

$$S_F(q) = S_F^0(q) + S_F^0(q)\Sigma(q) [S_F^0(q) + S_F^0(q)\Sigma(q)S_F^0(q) + \dots] .$$

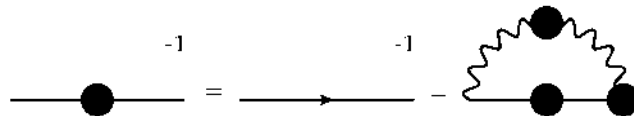
En la ecuación anterior, la expresión dentro del paréntesis es justamente  $S_F(q)$ , es decir

$$S_F(q) = S_F^0(q) + S_F^0(q)\Sigma(q)S_F(q) .$$

Multiplicando toda la expresión anterior por  $S_F^{-1}(q)$  del lado derecho y por  $S_F^{0-1}(q)$  del lado izquierdo, obtenemos la ecuación de Schwinger-Dyson para el propagador inverso del fermión

$$S_F^{-1}(q) = S_F^{0-1}(q) - \Sigma(q) ,$$

cuya representación diagramática es



La resolución de ésta ecuación requiere considerar también correcciones al propagador del fotón y al vértice de interacción; siguiendo los mismos argumentos que nos condujeron a la SDE para el propagador fermiónico, uno puede derivar las SDE para

el propagador del fotón y para el vértice. Las SDE para el propagador fermiónico, el propagador del fotón y el vértice, se escriben de manera diagramática en la figura 1.3, donde  $N_f$  es el número de sabores de los fermiones.

El vértice completo lo denotamos como  $\Gamma^\mu(k, p)$ , siendo  $k$  y  $p$  los cuadrimentos del electrón y el positrón, y  $\mu$  es el índice de polarización del fotón. Notamos que la ecuación del vértice electrón-fotón (función de 3 puntos) involucra la función de 4 puntos, *ad infinitum*.

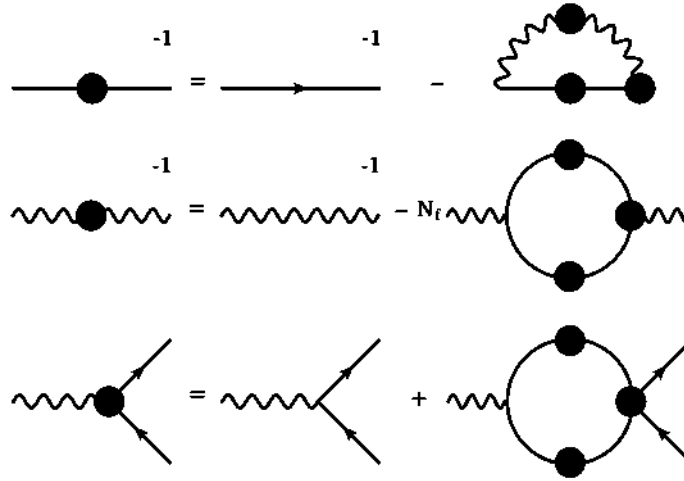


Figura 1.3: SDE para el propagador fermiónico, el propagador del fotón y el vértice.

Las SDE están acopladas entre sí y son una serie de ecuaciones infinitas en número, por lo que encontrar sus soluciones exactas resulta prácticamente imposible; uno debe entonces proponer un *ansatz* para  $\Gamma^\mu(k, p)$ . De esta manera las primeras dos SDE se van a desacoplar del resto del sistema. Para ello resulta conveniente estudiar el vértice en el régimen perturbativo. El vértice en el caso perturbativo nos da una guía de cómo construir un *ansatz* no perturbativo el cual debe reducirse a esta expresión en el límite de interacción débil, lo cual se discutirá en capítulos posteriores. Así también, imponer condiciones adicionales sobre el sistema hace que tengamos más esperanza de obtener soluciones más realistas; una de estas condiciones es la covarianza de norma, lo cual tiene como consecuencia unas identidades llamadas *identidades de Ward-Takahashi* (WTI), las cuales discutiremos en la siguiente sección.

## 1.4 Identidades de Ward-Takahashi

En secciones anteriores discutimos la necesidad de introducir un término que fija la norma (*gauge fixing*) en el lagrangiano del sistema con la finalidad de obtener una

teoría cuántica de campos consistente con las restricciones de dicho sistema: introdujimos a mano el parámetro de norma  $\xi$ . El parámetro de norma no es una cantidad física del sistema, por ello uno exige que las observables físicas sean invariantes de norma. Esta condición que imponemos al sistema nos lleva a las llamadas WTI, las cuales relacionan a las funciones de Green unas con otras, una de ellas es la que relaciona al propagador fermiónico con el vértice fermión-bosón<sup>4</sup>:

$$(k-p)_\mu \Gamma^\mu(k,p) = S_F^{-1}(k) - S_F^{-1}(p). \quad (1.8)$$

Esta identidad es no perturbativa y se satisface a todos los niveles en la teoría de perturbaciones. A nivel árbol ( $\Gamma^\mu(k,p) = \gamma^\mu$ ) se cumple de manera trivial:

$$\begin{aligned} \text{Lado Izquierdo} \quad (k-p)_\mu \Gamma^\mu(k,p) &= (k-p)_\mu \gamma^\mu = \not{k} - \not{p}, \\ \text{Lado Derecho} \quad S_F^{-1}(k) - S_F^{-1}(p) &= (\not{k} - m) - (\not{p} - m). \end{aligned}$$

Uno puede descomponer el vértice  $\Gamma^\mu(k,p)$  en dos partes, las cuales llamamos *vértice longitudinal*  $\Gamma_L^\mu(k,p)$  y *vértice transverso*  $\Gamma_T^\mu(k,p)$ , los cuales se definen de manera que satisfagan

$$q_\mu \Gamma_L^\mu(k,p) = S_F^{-1}(k) - S_F^{-1}(p), \quad (1.9)$$

y

$$q_\mu \Gamma_T^\mu(k,p) = 0, \quad (1.10)$$

con  $q_\mu = (k-p)_\mu$ . Entonces el vértice completo se escribe

$$\Gamma^\mu(k,p) = \Gamma_L^\mu(k,p) + \Gamma_T^\mu(k,p), \quad (1.11)$$

y satisface la identidad (1.8). Esta descomposición del vértice resulta de gran utilidad para proponer un ansatz al caso no perturbativo, pero esto será discutido en capítulos posteriores.

Si tomamos el límite  $p \rightarrow k$  en la ecuación (1.8), obtendremos la expresión

$$\Gamma^\mu(k,k) = \frac{\partial}{\partial k_\mu} S_F^{-1}(k), \quad (1.12)$$

la cual es llamada la *identidad de Ward* (WI).

En el siguiente capítulo estudiaremos algunos de los resultados para el vértice electrón-fotón, los cuales son la base para entender el vértice quark-gluón, el cual es el tema central de esta tesis.

---

<sup>4</sup>La demostración de esta identidad queda fuera del alcance de esta tesis.



# Capítulo 2

## Vértice en QED

En el capítulo anterior revisamos cómo los propagadores del electrón y el fotón (también llamados *funciones de Green de dos puntos*) y el vértice electrón-fotón (llamado *función de Green de tres puntos*) se encuentran acoplados entre sí (así como también a otras *funciones de Green de n-puntos*) a través de las SDE. La estructura completa de estas funciones de Green resulta ser un problema muy complicado, por lo que resulta conveniente truncar las SDE sólo hasta funciones de Green de dos puntos, lo cual se logra empleando ansätze para las funciones de Green de tres puntos o más. Las únicas funciones de dos puntos en QED son los propagadores (completos) del fermión  $S_F(p)$  y el fotón  $\Delta_{\mu\nu}(p)$ , los cuales son

$$\begin{aligned} S_F(p) &= \frac{\mathcal{F}(p^2)}{\not{p} - \Sigma(p^2)}, \\ \Delta_{\mu\nu}(p) &= \frac{\mathcal{G}(p^2)}{p^2} \left( \eta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) + \xi \frac{p_\mu p_\nu}{p^4}, \end{aligned}$$

donde  $\mathcal{F}(p^2)$  es la función de onda del fermión,  $\mathcal{G}(p^2)$  es la función del fotón y  $\Sigma(p^2)$  es la función de masa del fermión. Es el estudio de este último término la motivación de este trabajo de tesis, pues este nos da información de la generación dinámica de masas responsable de darle masa a los fermiones fundamentales y a los hadrones.  $\xi$  es el parámetro de norma covariante y  $\eta_{\mu\nu}$  es la métrica de Minkowski.

Para determinar las funciones  $\mathcal{F}(p^2)$ ,  $\mathcal{G}(p^2)$  y  $\Sigma(p^2)$  necesitamos sustituir  $S_F(p^2)$ ,  $\Delta_{\mu\nu}(p^2)$  y los ansätze para las otras funciones de Green en las SDE para las funciones de Green de dos puntos, para finalmente resolver el sistema de ecuaciones acopladas, determinando así las funciones deseadas. En QED espinorial la única función de tres puntos es el vértice electrón-fotón, la cual requiere suma atención ya que la construcción de su respectivo ansatz sirve como referencia en la construcción de ansatz en otras QFT's. En éste capítulo revisaremos algunos de los ansätze propuestos.

## 2.1 Construcción del vértice

El vértice completo electrón-fotón  $\Gamma^\mu(k, p, q)$  debería depender de los momentos  $k$ ,  $p$  y  $q$ , sin embargo, la conservación del momento  $q = k - p$  fija uno de los momentos (digamos  $q$ ), por lo que entonces  $\Gamma^\mu = \Gamma^\mu(k, p)$ . Además, debido a que el vértice es una cantidad vectorial este debe estar construido en términos de vectores y escalares: Debido a que este vértice no debe generar una violación CP, su estructura sólo puede contener los vectores  $\gamma^\mu$ ,  $k^\mu$  y  $p^\mu$  y los escalares  $1$ ,  $\not{k}$ ,  $\not{p}$  y  $\not{k}\not{p}$ . El vértice completo  $\Gamma^\mu(k, p)$ , en términos de las 12 posibles combinaciones de vectores y escalares (llamadas *amplitudes de espín*), se puede escribir como

$$\Gamma^\mu(k, p) = \sum_{j=1}^{j=12} \nu_j(k^2, p^2, q^2) V_j^\mu(k, p), \quad (2.1)$$

donde se definen las amplitudes de espín  $V_j^\mu(k, p)$  como

$$\begin{array}{llll} V_1^\mu = k^\mu \not{k} & V_2^\mu = p^\mu \not{p} & V_3^\mu = k^\mu \not{p} & V_4^\mu = p^\mu \not{k} \\ V_5^\mu = \gamma^\mu \not{k} \not{p} & V_6^\mu = \gamma^\mu & V_7^\mu = k^\mu & V_8^\mu = p^\mu \\ V_9^\mu = p^\mu \not{k} \not{p} & V_{10}^\mu = k^\mu \not{k} \not{p} & V_{11}^\mu = \gamma^\mu \not{k} & V_{12}^\mu = \gamma^\mu \not{p}, \end{array}$$

siendo los  $\nu_j(k^2, p^2, q^2)$  los factores de forma correspondientes. De (2.1) es claro que para determinar  $\Gamma^\mu(k, p)$  es necesario determinar las  $\nu_j$ 's, para ello uno debe imponer restricciones sobre el vértice que faciliten la obtención de estos factores de forma. En la siguiente sección estudiaremos una descomposición más adecuada del vértice.

## 2.2 Vértice de Ball-Chiu

La descomposición (2.1) presenta un problema: Contiene singularidades cinemáticas. Esto significa que los coeficientes  $\nu_j(k^2, p^2, q^2)$  tienen singularidades cuando  $k^2 \rightarrow p^2$  más allá del nivel árbol. Cabe mencionar que las funciones de Green pueden tener singularidades dinámicas, por ejemplo, el propagador fermiónico es singular cuando  $p^2 \rightarrow m^2$  y el propagador del fotón es singular cuando  $p^2 \rightarrow 0$ . Estas singularidades corresponden a las masas físicas del fermión y del fotón, respectivamente. Claro que el vértice completo a un lazo no tiene las singularidades cinemáticas independientemente de la base que se escoja. Sin embargo, si escogemos la base  $V_j^\mu(k, p)$ , cada coeficiente (o varios de ellos) desarrollará singularidades cinemáticas.

En el marco de la teoría de perturbaciones, Ball y Chiu [6] construyeron una forma general para el vértice que satisface las identidades de Ward, de tal manera que

cada coeficiente  $\nu_j(k^2, p^2, q^2)$  en la descomposición (2.1) es libre de singularidades cinemáticas en la norma de Feynman. En su trabajo, Ball y Chiu presentan una forma para la componente longitudinal del vértice (la cual fija 4 de los coeficientes de las amplitudes de espín) e introducen una nueva base de 8 amplitudes de espín para la parte transversa. La parte longitudinal que Ball y Chiu proponen, denotada como  $\Gamma_{BC}^\mu$ , es

$$\begin{aligned}\Gamma_{BC}^\mu &= \frac{\gamma^\mu}{2} \left( \frac{1}{\mathcal{F}(k^2)} + \frac{1}{\mathcal{F}(p^2)} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{(\not{p} + \not{k})(k+p)^\mu}{(k^2 - p^2)} \left( \frac{1}{\mathcal{F}(k^2)} - \frac{1}{\mathcal{F}(p^2)} \right) \\ &\quad - \frac{(p+k)^\mu}{(k^2 - p^2)} \left( \frac{\Sigma(k^2)}{\mathcal{F}(k^2)} - \frac{\Sigma(p^2)}{\mathcal{F}(p^2)} \right).\end{aligned}\quad (2.2)$$

$\Gamma_{BC}^\mu$  satisface por sí sólo la identidad de Ward-Takahashi (1.9). Es fácil demostrar la derivación de éste vértice, comenzando con la identidad de Ward (1.12) y la expresión general del propagador fermiónico:

$$\begin{aligned}\Gamma^\mu(k, k) &= \frac{\partial}{\partial k_\mu} S_F^{-1}(k) = \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left[ \frac{\not{k} - \Sigma(k^2)}{\mathcal{F}(k^2)} \right] \\ &= \gamma^\mu \frac{1}{\mathcal{F}(k^2)} + \not{k} \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left[ \frac{1}{\mathcal{F}(k^2)} \right] - \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left[ \frac{\Sigma(k^2)}{\mathcal{F}(k^2)} \right] \\ &= \gamma^\mu \frac{1}{\mathcal{F}(k^2)} + 2 \not{k} k^\mu \frac{\partial}{\partial k^2} \left[ \frac{1}{\mathcal{F}(k^2)} \right] - 2k^\mu \frac{\partial}{\partial k^2} \left[ \frac{\Sigma(k^2)}{\mathcal{F}(k^2)} \right].\end{aligned}\quad (2.3)$$

Primero debemos encontrar una expresión para  $\Gamma^\mu(k, p)$  que en el límite  $k \rightarrow p$  se reduzca a la expresión anterior. Para ello basta con simetrizar las expresiones

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathcal{F}(k^2)} &\rightarrow \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\mathcal{F}(k^2)} + \frac{1}{\mathcal{F}(p^2)} \right] \\ \not{k} &\rightarrow \frac{1}{2} (\not{k} + \not{p}) \\ k^\mu &\rightarrow \frac{1}{2} (k^\mu + p^\mu),\end{aligned}$$

y reescribir

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial k^2} \left[ \frac{1}{\mathcal{F}(k^2)} \right] &\rightarrow \frac{1}{(k^2 - p^2)} \left[ \frac{1}{\mathcal{F}(k^2)} - \frac{1}{\mathcal{F}(p^2)} \right] \\ \frac{\partial}{\partial k^2} \left[ \frac{\Sigma(k^2)}{\mathcal{F}(k^2)} \right] &\rightarrow \frac{1}{(k^2 - p^2)} \left[ \frac{\Sigma(k^2)}{\mathcal{F}(k^2)} - \frac{\Sigma(p^2)}{\mathcal{F}(p^2)} \right].\end{aligned}$$

Aplicando ahora las sustituciones anteriores en (2.3) obtenemos el vértice de Ball-Chiu (2.2).

La descomposición de la parte transversa, la cual debe satisfacer (1.10), se escribe como

$$\Gamma_T^\mu = \sum_{j=1}^{j=8} \tau^j (k^2, p^2) T_j^\mu(k, p), \quad (2.4)$$

donde las amplitudes de espín  $T_j^\mu(k, p)$  se definen de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} T_1^\mu(k, p) &= p^\mu (k \cdot q) - k^\mu (p \cdot q) \\ T_2^\mu(k, p) &= [p^\mu (k \cdot q) - k^\mu (p \cdot q)] (\not{k} + \not{p}) \\ T_3^\mu(k, p) &= q^2 \gamma^\mu - q^\mu \not{q} \\ T_4^\mu(k, p) &= [p^\mu (k \cdot q) - k^\mu (p \cdot q)] k^\lambda p^\nu \sigma_{\lambda\nu} \\ T_5^\mu(k, p) &= q_\nu \sigma^{\nu\mu} \\ T_6^\mu(k, p) &= -\gamma^\mu (k^2 - p^2) + (k + p)^\mu \not{q} \\ T_7^\mu(k, p) &= -\frac{1}{2} (k^2 - p^2) [\gamma^\mu (\not{k} + \not{p}) - k^\mu - p^\mu] + (k + p)^\mu k^\lambda p^\nu \sigma_{\lambda\nu} \\ T_8^\mu(k, p) &= -\gamma^\mu k^\nu p^\lambda \sigma_{\nu\lambda} + k^\mu \not{p} - p^\mu \not{k}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

con  $\sigma_{\lambda\nu} = \frac{1}{2} [\gamma_\lambda, \gamma_\nu]$ , y  $q$  siendo el momento del fotón,  $q = k - p$ . Notamos que la elección de esta base garantiza que  $q_\mu T_j^\mu = 0$  para todo  $j = 1, 2, \dots, 8$ .

En la siguiente sección presentaremos algunos trabajos subsecuentes al trabajo de Ball-Chiu, en los cuales se mejoran algunos de los puntos débiles de dicho trabajo, uno de ellos es que la base transversa que proponen sólo es libre de singularidades cinemáticas en la norma de Feynman.

## 2.3 Vértices en la literatura

Algunos trabajos importantes en los que se proponen ansätze cada vez más adecuados son:

- *Curtis y Pennington* [8], [9], [10]: Encuentran en [8] una expresión para el vértice transversal en QED, aludiendo a la teoría de perturbaciones a un lazo, en el límite asintótico  $k^2 \gg p^2$ , y a las propiedades de renormalizabilidad multiplicativa del propagador del fermión. Utilizan éste ansatz en [9] y [10] para analizar la generación dinámica de masas del fermión en qQED4 (*quenched* QED4) y QED3.
- *Dong, Munczek y Roberts* [11]: estudian la SDE en qQED para el propagador fermiónico sin masa, en tres y cuatro dimensiones, obteniendo soluciones quiralmente simétricas en ambos casos. Basados en la covarianza de norma y la renormalizabilidad multiplicativa, proponen un ansatz que involucra los tensores base  $T_3^\mu$  y  $T_6^\mu$ .
- *Bashir y Pennington* [12], [13]: Encuentran restricciones (integrales y diferenciales) sobre las funciones que definen el vértice transversal, satisfaciendo las WTI y la renormalizabilidad multiplicativa del propagador del fotón, y asumiendo que la parte transversal se desvanece en la norma de Landau y no depende del ángulo entre los momentos de los fermiones. Éste ansatz asegura que el acoplamiento crítico  $\alpha_c$ , arriba del cual se rompe la simetría quiral en qQED, es independiente de norma, en contraste con los ansätze anteriores.
- *Kizilersü y Pennington* [14]: Dan una forma explícita para el vértice fermión-fotón para fermiones sin masa en QED, la cual satisface las WTI y garantiza que los propagadores fermiónico y fotónico sean multiplicativamente renormalizables a cualquier orden en la aproximación de logaritmos principales, y que además concuerdan con el límite de acoplamiento débil en teoría de perturbaciones a orden  $\mathcal{O}(\alpha)$ .
- *Bashir, Bermudez, Chang y Roberts* [15]: Detallan un modelo para el vértice fermión-fotón (vestido) involucrando todos los vectores de la base transversal, el primero es expresado únicamente en términos de funciones que aparecen en el propagador fermiónico vestido, además, es independiente del ángulo entre los momentos involucrados y no depende explícitamente del parámetro de norma. Este ansatz satisface la WTI, asegura que el propagador fermiónico es multiplicativamente renormalizable y que  $\alpha_c$  en qQED sea estrictamente independiente de norma.

Por otra parte, algunos trabajos en los que se han realizado cálculos perturbativos son:

- *Kizilersü, Reenders y Pennington* [16]: Proponen una nueva base transversa  $S_j^\mu$  la cual modifica a la base  $T_j^\mu$  de Ball-Chiu, siendo esta nueva base libre de singularidades en cualquier norma covariante (a diferencia de la de Ball-Chiu la cual sólo es libre de singularidades en la norma de Feynman).
- *Bashir, Kisilerzü y Pennington* [17]: Muestran que, en el caso de fermiones sin masa, el vértice puede ser expresado en términos de una función  $U_1(x)$  la cual debe asegurar la renormalizabilidad multiplicativa del propagador del fermión. Calculan la forma perturbativa de esta función y, toman esta expresión como un límite de altas energías. Proponen una expresión no perturbativa para dicha función.

En la siguiente sección desarrollaremos parte del trabajo de D.C. Curtis y M.R. Pennington, repitiendo los pasos con los que obtuvieron la parte transversa de vértice electrón-fotón. Esto nos servirá como referencia en cálculos posteriores, los cuales son una extensión de este trabajo en QED a QCD.

## 2.4 Vértice electrón-fotón

En esta sección estudiaremos el vértice de interacción electrón-fotón  $\Gamma^\mu(k, p)$  en QED a un lazo, en el límite asintótico  $k^2 \gg p^2$ . Haciendo un cálculo semejante para el propagador del electrón, evaluaremos  $\Gamma_{BC}^\mu$  en el mismo límite. Después encontraremos  $\Gamma_T^\mu = \Gamma^\mu - \Gamma_{BC}^\mu$ .  $\Gamma_T^\mu$  a un lazo, para  $k^2 \gg p^2$ , nos servirá como guía para la construcción del vértice transverso.

Estamos interesados en calcular sólo las partes del vértice  $\Gamma^\mu(k, p)$  que contengan logaritmos principales (*aproximación de logaritmos principales*). Nosotros usaremos el regulador de corte ultravioleta para lidiar con divergencias ultravioletas (ver apéndice D). Se sabe que éste método no es covariante de norma, ni es invariante bajo transformaciones de Poincaré. Sin embargo, sólo los términos con logaritmos principales siguen respetando dichas invarianzas, y uno espera entonces que la regularización dimensional nos de exactamente el mismo resultado para los logaritmos principales.

La expansión perturbativa de las ESD para el vértice de interacción electrón-fotón a un lazo se escribe

$$-ie\Gamma^\mu(k, p) = -ie\gamma^\mu - ie\Lambda^\mu(k, p), \quad (2.6)$$

donde  $\gamma^\mu$  es el vértice desnudo;  $\Lambda^\mu(k, p)$  es la corrección de orden  $\mathcal{O}(\alpha)$ , correspondiente al diagrama de la figura 2.1, el cual se escribe (usando las reglas de Feynman)

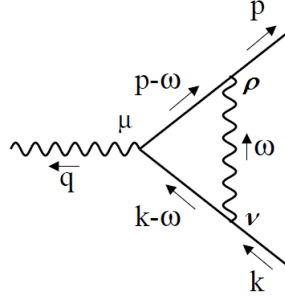


Figura 2.1: Corrección a un lazo del vértice fermión-fotón

como:

$$-ie\Lambda^\mu = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_M d^4\omega (-ie\gamma^\nu) iS_F^0(k-\omega) (-ie\gamma^\mu) iS_F^0(p-\omega) (-ie\gamma^\rho) \Delta_{\nu\rho}^0(\omega), \quad (2.7)$$

donde el propagador desnudo del fotón es

$$\Delta_{\nu\rho}^0(\omega) = -\frac{i}{\omega^2} \left[ \eta_{\nu\rho} + (\xi - 1) \frac{\omega_\nu \omega_\rho}{\omega^2} \right] \quad (2.8)$$

y el propagador desnudo del electrón es

$$S_F^0(k) = \frac{\not{k} + m}{k^2 - m^2}. \quad (2.9)$$

Sustituyendo (2.8) y (2.9) en (2.7) obtenemos:

$$\begin{aligned} -ie\Lambda^\mu &= -\frac{e^3}{(2\pi)^4} \int_M d^4\omega \frac{\gamma^\nu (\not{k} - \not{\omega} + m) \gamma^\mu (\not{p} - \not{\omega} + m) \gamma^\rho \left[ \eta_{\nu\rho} + (\xi - 1) \frac{\omega_\nu \omega_\rho}{\omega^2} \right]}{\omega^2 [(k - \omega)^2 - m^2] [(p - \omega)^2 - m^2]} \\ &= -\frac{e^3}{(2\pi)^4} \int_M d^4\omega \frac{\gamma^\nu (\not{k} - \not{\omega}) \gamma^\mu (\not{p} - \not{\omega}) \gamma^\rho + m^2 \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\rho}{\omega^2 [(k - \omega)^2 - m^2] [(p - \omega)^2 - m^2]} \eta_{\nu\rho} \\ &\quad - \frac{e^3 m}{(2\pi)^4} \int_M \frac{d^4\omega \gamma^\nu (\not{k} - \not{\omega}) \gamma^\mu \gamma^\rho + \gamma^\nu \gamma^\mu (\not{p} - \not{\omega}) \gamma^\rho}{\omega^2 [(k - \omega)^2 - m^2] [(p - \omega)^2 - m^2]} \eta_{\nu\rho} \\ &\quad - \frac{e^3 (\xi - 1)}{(2\pi)^4} \int_M d^4\omega \frac{\gamma^\nu (\not{k} - \not{\omega}) \gamma^\mu (\not{p} - \not{\omega}) \gamma^\rho + m^2 \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\rho}{\omega^4 [(k - \omega)^2 - m^2] [(p - \omega)^2 - m^2]} \omega_\nu \omega_\rho \\ &\quad - \frac{e^3 m (\xi - 1)}{(2\pi)^4} \int_M d^4\omega \frac{\gamma^\nu (\not{k} - \not{\omega}) \gamma^\mu \gamma^\rho + \gamma^\nu \gamma^\mu (\not{p} - \not{\omega}) \gamma^\rho}{\omega^4 [(k - \omega)^2 - m^2] [(p - \omega)^2 - m^2]} \omega_\nu \omega_\rho. \end{aligned}$$

Por conveniencia, en la expresión anterior separamos la integral para el vértice en cuatro integrales que se definen como:

- $I_1^\mu$ : Contiene un número impar de matrices  $\gamma$  y la parte  $\eta_{\nu\rho}$  del propagador del fotón.
- $I_2^\mu$ : Contiene un número impar de matrices  $\gamma$  y la parte  $\omega_\nu\omega_\rho$  del propagador del fotón.
- $I_3^\mu$ : Contiene un número par de matrices  $\gamma$  y la parte  $\eta_{\nu\rho}$  del propagador del fotón.
- $I_4^\mu$ : Contiene un número par de matrices  $\gamma$  y la parte  $\omega_\nu\omega_\rho$  del propagador del fotón.

Es decir:

$$I_1^\mu \equiv -\frac{e^3}{(2\pi)^4} \int_M d^4\omega \frac{\gamma^\nu(\not{k}-\not{\omega})\gamma^\mu(\not{p}-\not{\omega})\gamma^\rho + m^2\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\rho}{\omega^2 [(k-\omega)^2 - m^2] [(p-\omega)^2 - m^2]} \eta_{\nu\rho} \quad (2.10)$$

$$I_2^\mu \equiv -\frac{e^3(\xi-1)}{(2\pi)^4} \int_M d^4\omega \frac{\gamma^\nu(\not{k}-\not{\omega})\gamma^\mu(\not{p}-\not{\omega})\gamma^\rho + m^2\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\rho}{\omega^4 [(k-\omega)^2 - m^2] [(p-\omega)^2 - m^2]} \omega_\nu\omega_\rho \quad (2.11)$$

$$I_3^\mu \equiv -\frac{e^3 m}{(2\pi)^4} \int_M d^4\omega \frac{\gamma^\nu(\not{k}-\not{\omega})\gamma^\mu\gamma^\rho + \gamma^\nu\gamma^\mu(\not{p}-\not{\omega})\gamma^\rho}{\omega^2 [(k-\omega)^2 - m^2] [(p-\omega)^2 - m^2]} \eta_{\nu\rho} \quad (2.12)$$

$$I_4^\mu \equiv -\frac{e^3 m(\xi-1)}{(2\pi)^4} \int_M d^4\omega \frac{\gamma^\nu(\not{k}-\not{\omega})\gamma^\mu\gamma^\rho + \gamma^\nu\gamma^\mu(\not{p}-\not{\omega})\gamma^\rho}{\omega^4 [(k-\omega)^2 - m^2] [(p-\omega)^2 - m^2]} \omega_\nu\omega_\rho, \quad (2.13)$$

de manera que

$$-ie\Lambda^\mu \equiv I_1^\mu + I_2^\mu + I_3^\mu + I_4^\mu.$$

Calculemos cada una de las cuatro integrales, considerando el caso  $k^2 \gg p^2 \gg m^2$  y conservando sólo los términos dominantes (aproximación de logaritmos principales):

### Integral $I_1$

Debido al caso en el que estamos interesados ( $k^2 \gg p^2 \gg m^2$ ) podemos considerar  $m^2 \approx 0$  comparado con términos de segundo orden en  $k$  o  $p$ . Además, recordando que  $\gamma_\nu = \gamma^\rho \eta_{\nu\rho}$ , reescribimos a  $I_1$  como:

$$I_1^\mu = -\frac{e^3}{(2\pi)^4} \int_M d^4\omega \frac{\gamma^\nu(\not{k}-\not{\omega})\gamma^\mu(\not{p}-\not{\omega})\gamma_\nu}{\omega^2 [(k-\omega)^2 - m^2] [(p-\omega)^2 - m^2]},$$

donde  $M$  denota la integración sobre todo el espacio de Minkowski. Aplicando la propiedad (5.5) en el denominador de la expresión anterior, y aplicando también una rotación de Wick (ver apéndice B) obtenemos:

$$I_1^\mu = -\frac{e^3}{(2\pi)^4}(-2)(-i) \int_E d^4\omega \frac{(\not{p}-\not{\omega})_{wr} \gamma^\mu (\not{k}-\not{\omega})_{wr}}{\omega^2 [(k-\omega)^2 + m^2] [(p-\omega)^2 + m^2]}.$$

En la expresión anterior, el subíndice “ $wr$ ” denota una rotación de Wick sobre el objeto correspondiente, lo cual implica que deberíamos reescribirlo en su forma Euclidiana (lo cual no haremos explícitamente, pues las expresiones se complicarían). Para tener una notación aún más sencilla omitiremos dichos subíndices, teniendo siempre presente que estos objetos (matrices  $\gamma$  y slashes) no han sido escritos explícitamente en su forma Euclidiana (ver apéndice B).

Haciendo uso de la parametrización (5.29), con  $f(\omega) = (\not{p}-\not{\omega})\gamma^\mu(\not{k}-\not{\omega})$ , vemos que:

$$\begin{aligned} I_1^\mu &= -\frac{4ie^3}{(2\pi)^4} \int_E d^4\omega \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{[\omega^2 + L^2]^3} \\ &\quad \times \left\{ (1-x)(1-y) \not{p}\gamma^\mu \not{k} - y(1-y) \not{p}\gamma^\mu \not{p} - x(1-x) \not{k}\gamma^\mu \not{k} \right. \\ &\quad \left. + xy \not{k}\gamma^\mu \not{p} + \not{\omega}\gamma^\mu \not{\omega} - (1-y) \not{p}\gamma^\mu \not{\omega} + x \not{k}\gamma^\mu \not{\omega} \right. \\ &\quad \left. - (1-x) \not{\omega}\gamma^\mu \not{k} + y \not{\omega}\gamma^\mu \not{p} \right\}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

donde  $E$  denota la integración sobre todo el espacio de Euclides, y definimos

$$L = k^2x(1-x) + p^2y(1-y) - 2xyk \cdot p + ym^2 + xm^2.$$

De los últimos cuatro términos de la integral (2.14) obtendremos integrales de la forma

$$\int_E d^4\omega \frac{\not{\omega}}{[\omega^2 + L^2]^3},$$

cuyo integrando es antisimétrico ante el intercambio  $\omega \rightarrow -\omega$ , y por tanto la integral

es cero; utilizando adicionalmente la identidad (5.15) obtenemos

$$\begin{aligned}
I_1^\mu &= -\frac{4ie^3}{(2\pi)^4} \int_E d^4\omega \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \\
&\quad \times \left\{ (1-x)(1-y) \not{p}\gamma^\mu \not{k} - y(1-y) \not{p}\gamma^\mu \not{p} - x(1-x) \not{k}\gamma^\mu \not{k} \right. \\
&\quad \left. + xy \not{k}\gamma^\mu \not{p} + \omega^2 \gamma^\mu / 2 \right\} / [\omega^2 + L^2]^3, \\
&= -\frac{4ie^3}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \\
&\quad \times \left\{ [(1-x)(1-y) \not{p}\gamma^\mu \not{k} - y(1-y) \not{p}\gamma^\mu \not{p} - x(1-x) \not{k}\gamma^\mu \not{k} \right. \\
&\quad \left. + xy \not{k}\gamma^\mu \not{p}] \int_E d^4\omega \frac{1}{[\omega^2 + L^2]^3} + \frac{1}{2} \gamma^\mu \int_E d^4\omega \frac{\omega^2}{[\omega^2 + L^2]^3} \right\}.
\end{aligned}$$

Debido a que estamos integrando  $\omega$  sobre todo el espacio, resulta conveniente introducir el llamado *corte ultravioleta*, en el cual integramos a  $\omega$  de 0 a  $\Lambda$  y hasta el final se toma el límite  $\Lambda \rightarrow \infty$  (ver apéndice D). Sustituyendo (5.40) y (5.43) en la expresión anterior obtenemos entonces

$$\begin{aligned}
I_1^\mu &= -\frac{4ie^3}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \\
&\quad \times \left\{ [(1-x)(1-y) \not{p}\gamma^\mu \not{k} - y(1-y) \not{p}\gamma^\mu \not{p} - x(1-x) \not{k}\gamma^\mu \not{k} \right. \\
&\quad \left. + xy \not{k}\gamma^\mu \not{p}] \frac{\pi^2}{2L} + \frac{1}{2} \gamma^\mu \left( \pi^2 \log \frac{\Lambda^2}{L} - \frac{3\pi^2}{2} \right) \right\},
\end{aligned}$$

lo cual se puede separar de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
I_1^\mu &= -\frac{ie^3}{8\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \\
&\quad \times \left\{ [(1-x)(1-y) \not{p}\gamma^\mu \not{k} - y(1-y) \not{p}\gamma^\mu \not{p} - x(1-x) \not{k}\gamma^\mu \not{k} \right. \\
&\quad \left. + xy \not{k}\gamma^\mu \not{p}] / L \right\} - \frac{ie^3}{8\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left\{ \gamma^\mu \left( \log \frac{\Lambda^2}{L} - \frac{3}{2} \right) \right\}.
\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable  $y = z(1-x)$ , la expresión anterior se puede reescribir

de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 I_1^\mu &= -\frac{ie^3}{8\pi^2} \left\{ \int_0^1 dx \int_0^1 dz (1-x) \right. \\
 &\quad \times \left\{ \left[ (1-x)(1-z+zx) \not{p}\gamma^\mu \not{k} - z(1-x)(1-z+zx) \not{p}\gamma^\mu \not{p} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. -x(1-x) \not{k}\gamma^\mu \not{k} + zx(1-x) \not{k}\gamma^\mu \not{p} \right] / L \right\} \\
 &\quad \left. + \gamma^\mu \int_0^1 dx \int_0^1 dz (1-x) \left( \log \frac{\Lambda^2}{L} - \frac{3}{2} \right) \right\},
 \end{aligned}$$

lo cual se reescribe como

$$\begin{aligned}
 I_1^\mu &= -\frac{ie^3}{8\pi^2} \int_0^1 dz \left\{ (1-z) \left[ \int_0^1 dx \frac{(1-x)}{L} \right] \not{p}\gamma^\mu \not{k} - (1-z) \left[ \int_0^1 dx \frac{x(1-x)}{L} \right] \not{p}\gamma^\mu \not{k} \right. \\
 &\quad + z \left[ \int_0^1 dx \frac{x(1-x)^2}{L} \right] \not{p}\gamma^\mu \not{k} - z(1-z) \left[ \int_0^1 dx \frac{(1-x)}{L} \right] \not{p}\gamma^\mu \not{p} \\
 &\quad + z(1-z) \left[ \int_0^1 dx \frac{x(1-x)}{L} \right] \not{p}\gamma^\mu \not{p} - z^2 \left[ \int_0^1 dx \frac{x(1-x)^2}{L} \right] \not{p}\gamma^\mu \not{p} \\
 &\quad \left. - \left[ \int_0^1 dx \frac{x(1-x)^2}{L} \right] \not{k}\gamma^\mu \not{k} + z \left[ \int_0^1 dx \frac{x(1-x)^2}{L} \right] \not{k}\gamma^\mu \not{p} \right\} \\
 &\quad - \frac{ie^3}{8\pi^2} \gamma^\mu \int_0^1 dz \int_0^1 dx (1-x) \left( \log \frac{\Lambda^2}{L} - \frac{3}{2} \right).
 \end{aligned}$$

Sustituyendo (5.59), (5.60) y (5.62) en la expresión anterior, obtenemos

$$\begin{aligned}
 I_1^\mu &= -\frac{ie^3}{8\pi^2} \int_0^1 dz \left\{ (1-z) \frac{\not{p}\gamma^\mu \not{k}}{k^2} \log \frac{k^2}{p^2} - z(1-z) \frac{\not{p}\gamma^\mu \not{p}}{k^2} \log \frac{k^2}{p^2} + \mathcal{O}(k^{-1}, k^{-2} \log k^2) \right\} \\
 &\quad - \frac{ie^3}{8\pi^2} \gamma^\mu \int_0^1 dz \int_0^1 dx (1-x) \log \frac{\Lambda^2}{L} + \frac{3ie^3}{16\pi^2} \gamma^\mu \int_0^1 dz \int_0^1 dx (1-x) \\
 &= -\frac{ie^3}{8\pi^2} \gamma^\mu \int_0^1 dz \int_0^1 dx (1-x) \log \frac{\Lambda^2}{L} - \frac{ie^3}{16\pi^2} \frac{\not{p}\gamma^\mu \not{k}}{k^2} \log \frac{k^2}{p^2} + \mathcal{O}(k^0, k^{-2} \log k^2);
 \end{aligned}$$

sustituyendo ahora (5.54), con  $j, l = 0$ , en la ecuación de arriba, obtenemos

$$\begin{aligned}
 I_1^\mu &= -\frac{ie^3}{8\pi^2} \gamma^\mu \int_0^1 dz \int_0^1 dx (1-x) \log \frac{\Lambda^2}{k^2} - \frac{ie^3}{16\pi^2} \frac{\not{p}\gamma^\mu \not{k}}{k^2} \log \frac{k^2}{p^2} + \mathcal{O}(k^0, k^{-2} \log k^2) \\
 &= \frac{ie^3}{8\pi^2} \gamma^\mu \log \frac{k^2}{\Lambda^2} \int_0^1 dz \int_0^1 dx (1-x) - \frac{ie^3}{16\pi^2} \frac{\not{p}\gamma^\mu \not{k}}{k^2} \log \frac{k^2}{p^2} + \mathcal{O}(k^0, k^{-2} \log k^2) \\
 &= \frac{ie^3}{16\pi^2} \gamma^\mu \log \frac{k^2}{\Lambda^2} - \frac{ie^3}{16\pi^2} \frac{\not{p}\gamma^\mu \not{k}}{k^2} \log \frac{k^2}{p^2} + \mathcal{O}(k^0, k^{-2} \log k^2),
 \end{aligned}$$

pero sólo estamos interesados en los términos dominantes y subdominantes, que en éste caso son los términos de orden  $\mathcal{O}(k^0 \log k^2)$  y  $\mathcal{O}(k^{-1} \log k^2)$ , ya que la contribución de términos sub-subdominantes es prácticamente despreciable debido al límite que estamos tomando ( $k$  muy grande). Por lo tanto, podemos desechar los términos de orden  $\mathcal{O}(k^0, k^{-2} \log k^2)$  en la expresión anterior. De esta manera obtenemos:

$$I_1^\mu = \frac{ie^3}{16\pi^2} \left[ \gamma^\mu \log \frac{k^2}{\Lambda^2} - \frac{\not{p}\gamma^\mu \not{k}}{k^2} \log \frac{k^2}{p^2} \right]. \quad (2.15)$$

### Integral $I_2$

Nuevamente consideraremos  $m^2 \approx 0$  comparado con términos de orden  $\mathcal{O}(k^2, p^2)$ ; además, recordando la definición  $\not{\omega} = \gamma^\rho \omega_\rho$ , reescribimos (2.11) como:

$$I_2^\mu = -\frac{e^3(\xi-1)}{(2\pi)^4} \int_M d^4\omega \frac{\not{\omega}(\not{k}-\not{\omega})\gamma^\mu(\not{p}-\not{\omega})\not{\omega}}{\omega^4 [(k-\omega)^2 - m^2] [(p-\omega)^2 - m^2]}.$$

Al aplicar una rotación de Wick a la expresión anterior, obtenemos:

$$I_2^\mu = -\frac{ie^3(\xi-1)}{(2\pi)^4} \int_E d^4\omega \frac{\not{\omega}(\not{k}-\not{\omega})\gamma^\mu(\not{p}-\not{\omega})\not{\omega}}{\omega^4 [(k-\omega)^2 + m^2] [(p-\omega)^2 + m^2]}.$$

Aplicando la parametrización de Feynman (5.30), con  $f(\omega) = \not{\omega}(\not{k}-\not{\omega})\gamma^\mu(\not{p}-\not{\omega})\not{\omega}$ , en la expresión anterior obtenemos:

$$\begin{aligned} I_2^\mu &= -\frac{i6e^3(\xi-1)}{(2\pi)^4} \int_E d^4\omega \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{(\omega^2 + L)^4} \\ &\quad \times (1-x-y)(\not{\omega} + x\not{k} + y\not{p})[(1-x)\not{k} - y\not{p} - \not{\omega}]\gamma^\mu \\ &\quad [ (1-y)\not{p} - x\not{k} - \not{\omega} ](\not{\omega} + x\not{k} + y\not{p}) \\ &= -\frac{i6e^3(\xi-1)}{(2\pi)^4} \int_E d^4\omega \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{(\omega^2 + L)^4} \\ &\quad \times (1-x-y)(\not{\omega} + \not{a})(\not{b} - \not{\omega})\gamma^\mu(\not{c} - \not{\omega})(\not{\omega} + \not{a}), \end{aligned} \quad (2.16)$$

donde definimos

$$a_\alpha \equiv xk_\alpha + yp_\alpha, \quad b_\beta \equiv (1-x)k_\beta - yp_\beta \quad \text{y} \quad c_\rho \equiv (1-y)p_\rho - xk_\rho;$$

Si expandemos el numerador del integrando en (2.16) obtendremos términos de orden  $\mathcal{O}(\omega^4)$ ,  $\mathcal{O}(\omega^3)$ ,  $\mathcal{O}(\omega^2)$ ,  $\mathcal{O}(\omega^1)$  y  $\mathcal{O}(\omega^0)$ , sin embargo ignoraremos los términos

de orden  $\mathcal{O}(\omega^3)$  y  $\mathcal{O}(\omega^1)$  pues su respectiva integral respecto a  $\omega$  es cero, ya que son términos antisimétricos ante el intercambio  $\omega \rightarrow -\omega$ . De esta manera tenemos que:

$$I_2^\mu \equiv -\frac{i6e^3(\xi-1)}{(2\pi)^4} \int_E d^4\omega \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{(1-x-y)(A^\mu + B^\mu + C^\mu)}{(\omega^2 + L)^4}, \quad (2.17)$$

donde definimos

$$A^\mu \equiv \not{\omega} \not{\omega} \gamma^\mu \not{\omega} \not{\omega},$$

$$B^\mu \equiv -\not{\omega} \not{\omega} \gamma^\mu \not{\epsilon} \not{\omega} + (\not{\omega} \not{\omega} - \not{\omega} \not{\omega}) \gamma^\mu (\not{\epsilon} \not{\omega} - \not{\omega} \not{\epsilon}) - \not{\omega} \not{\omega} \gamma^\mu \not{\omega} \not{\omega},$$

$$C^\mu \equiv \not{\omega} \not{\omega} \gamma^\mu \not{\epsilon} \not{\omega}.$$

Utilizando las identidades (5.16)- (5.22) en  $A^\mu$  y  $B^\mu$  obtenemos:

$$A^\mu = \omega^4 \gamma^\mu, \quad (2.18)$$

$$B^\mu = \omega^2 \left\{ \gamma^\mu \not{\epsilon} \not{\omega} + \not{\omega} \not{\omega} \gamma^\mu + \frac{1}{2} \not{\epsilon} \gamma^\mu \not{\omega} + \frac{1}{2} \not{\omega} \gamma^\mu \not{\epsilon} + b^\mu \not{\omega} + \not{\omega} c^\mu \right\}, \quad (2.19)$$

$$C^\mu = \not{\omega} \not{\omega} \gamma^\mu \not{\epsilon} \not{\omega}; \quad (2.20)$$

esto en el espacio de Minkowski. Con estas nuevas definiciones, podemos reescribir a  $I_2$  como:

$$I_2^\mu \equiv -\frac{i6e^3(\xi-1)}{(2\pi)^4} (I_{2,4}^\mu + I_{2,2}^\mu + I_{2,0}^\mu), \quad (2.21)$$

donde

$$I_{2,4}^\mu \equiv \int_E d^4\omega \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (1-x-y) \frac{A^\mu}{(\omega^2 + L)^4}, \quad (2.22)$$

$$I_{2,2}^\mu \equiv \int_E d^4\omega \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (1-x-y) \frac{B^\mu}{(\omega^2 + L)^4}, \quad (2.23)$$

$$I_{2,0}^\mu \equiv \int_E d^4\omega \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (1-x-y) \frac{C^\mu}{(\omega^2 + L)^4}. \quad (2.24)$$

Sustituyendo (2.18) en (2.22), y utilizando la propiedad (5.47), obtenemos (introduciendo el cambio de variable  $y = z(1-x)$ ):

$$\begin{aligned} I_{2,4}^\mu &= \pi^2 \int_0^1 dx \int_0^1 dz (1-x)^2 (1-z) \gamma^\mu \left[ \log \frac{\Lambda^2}{L} - \frac{11}{6} \right] \\ &= \pi^2 \int_0^1 dx \int_0^1 dz (1-x)^2 (1-z) \gamma^\mu \log \frac{\Lambda^2}{L} + \mathcal{O}(k^0) \\ &= \pi^2 \gamma^\mu \int_0^1 dz (1-z) \int_0^1 dx (1-x)^2 \log \frac{\Lambda^2}{L} + \mathcal{O}(k^0). \end{aligned}$$

Utilizando (5.55) en la expresión anterior, con  $j = 0$  y  $l = 2$ , obtenemos

$$I_{2,4}^\mu = \pi^2 \gamma^\mu \left[ \int_0^1 dz(1-z) \right] \left[ \int_0^1 dx(1-x)^2 \right] \log \frac{\Lambda^2}{k^2} + \mathcal{O}(k^0) = \frac{\pi^2}{6} \gamma^\mu \log \frac{\Lambda^2}{k^2} + \mathcal{O}(k^0).$$

Tomando sólo en cuenta los términos de orden  $\mathcal{O}(k^0 \log k^2, k^{-1} \log k^2)$ , tenemos entonces que

$$I_{2,4}^\mu = \frac{\pi^2}{6} \gamma^\mu \log \frac{\Lambda^2}{k^2}. \quad (2.25)$$

Ahora, sustituyendo (2.19) en (2.23), y utilizando la propiedad (5.44) obtendremos (utilizando el cambio de variable  $y = z(1-x)$ ):

$$I_{2,2}^\mu = \frac{\pi^2}{3} \int_0^1 dx \int_0^1 dz \frac{(1-z)(1-x)^2}{L} \{W^\mu(k, p) x^2 + V^\mu(k, p) x + U^\mu(k, p)\}, \quad (2.26)$$

donde

$$\begin{aligned} U^\mu \equiv & \frac{1}{2}(1-z) \not{p} \gamma^\mu \not{k} + z k^\mu \not{p} + z \not{p} \not{k} \gamma^\mu + z(z - \frac{1}{2}) \not{p} \gamma^\mu \not{p} \\ & + z(1-2z) p^\mu \not{p} + z(1-z) \gamma^\mu \not{p} \not{p} - z^2 \not{p} \not{p} \gamma^\mu; \end{aligned} \quad (2.27)$$

al igual que  $U^\mu$ , los términos  $V^\mu$  y  $W^\mu$  también dependen solamente de  $k$ ,  $p$  y  $z$ , y no de  $x$ , sin embargo, estos no se escribirán explícitamente pues no contribuyen a la integral ya que, si utilizamos las propiedades (5.61) y (5.62), tenemos entonces que las integrales en (2.26) que involucran a  $V^\mu$  y a  $W^\mu$  son cero (tomando sólo órdenes dominantes en  $k$ ). Sustituyendo (2.27) en (2.26) e integrando respecto a  $x$  (utilizando la propiedad anterior) obtenemos:

$$\begin{aligned} I_{2,2}^\mu &= \frac{\pi^2}{3} \int_0^1 dz \frac{(1-z)}{k^2} \left\{ \frac{1}{2}(1-z) \not{p} \gamma^\mu \not{k} + z k^\mu \not{p} + z \not{p} \not{k} \gamma^\mu + z(z - \frac{1}{2}) \not{p} \gamma^\mu \not{p} \right. \\ &\quad \left. + z(1-2z) p^\mu \not{p} + z(1-z) \gamma^\mu \not{p} \not{p} - z^2 \not{p} \not{p} \gamma^\mu \right\} \log \frac{k^2}{p^2} \\ &= \frac{\pi^2}{3} \int_0^1 dz \frac{(1-z)}{k^2} \left\{ \frac{1}{2}(1-z) \not{p} \gamma^\mu \not{k} + z k^\mu \not{p} + z \not{p} \not{k} \gamma^\mu \right\} \log \frac{k^2}{p^2} \\ &\quad + \mathcal{O}(k^{-2} \log k^2). \end{aligned}$$

Integrando respecto a  $z$  y conservando sólo términos de orden  $\mathcal{O}(k^0 \log k^2)$  y además

$\mathcal{O}(k^{-1} \log k^2)$  tenemos entonces que

$$\begin{aligned}
 I_{2,2}^\mu &= \frac{\pi^2}{18k^2} [\not{p}\gamma^\mu \not{k} + k^\mu \not{p} + \not{p} \not{k}\gamma^\mu] \log \frac{k^2}{p^2} \\
 &= \frac{\pi^2}{18k^2} [k^\mu \not{p} + k_\alpha p_\beta (\gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\alpha + \gamma^\beta \gamma^\alpha \gamma^\mu)] \log \frac{k^2}{p^2} \\
 &= \frac{\pi^2}{18k^2} [k^\mu \not{p} + k_\alpha p_\beta (2\gamma^\beta \eta^{\mu\alpha} - \gamma^\beta \gamma^\alpha \gamma^\mu + \gamma^\beta \gamma^\alpha \gamma^\mu)] \log \frac{k^2}{p^2} \\
 &= \frac{\pi^2}{18k^2} [k^\mu \not{p} + 2k^\mu \not{p}] \log \frac{k^2}{p^2},
 \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$I_{2,2}^\mu = \frac{\pi^2}{6k^2} k^\mu \not{p} \log \frac{k^2}{p^2}. \quad (2.28)$$

Sustituyendo (2.20) en (2.24), y utilizando la propiedad (5.41) obtenemos (utilizando el cambio de variable  $y = z(1-x)$ ):

$$\begin{aligned}
 I_{2,0}^\mu &= \frac{\pi^2}{6} \int_0^1 dx \int_0^1 dz \frac{(1-x)^2}{L^2} \left\{ (1-x) [x \not{k} + z(1-x) \not{p}] [\not{k} - z \not{p}] \gamma^\mu \right. \\
 &\quad \left. \times [(1-z+zx) \not{p} - x \not{k}] [x \not{k} + z(1-x) \not{p}] \right\}.
 \end{aligned}$$

De (5.65) y (5.66) vemos entonces que

$$\begin{aligned}
 I_{2,0}^\mu &= \frac{\pi^2}{6} \frac{1}{k^4} \log \frac{k^2}{p^2} \int_0^1 dz \frac{x(1-x)^2}{L^2} \\
 &\quad \times \left\{ z(1-z) [\not{k} \not{k} - z \not{k} \not{p} - z \not{p} \not{k} + z^2 \not{p} \not{p}] \gamma^\mu \not{p} \not{p} \right. \\
 &\quad \left. + z [\not{p} \not{k} - z \not{p} \not{p}] \gamma^\mu [(1-z) \not{p} \not{k} + (z^2 + 2z - 2) \not{p} \not{p}] \right. \\
 &\quad \left. - z \not{k} \not{p} - z^2(1-z) \not{p}(\not{k} - z \not{p}) \gamma^\mu \not{p} \not{p} \right\} \\
 &\quad + \mathcal{O}(k^{-3} \log k^2);
 \end{aligned}$$

Vemos entonces que la expresión anterior es de orden  $\mathcal{O}(k^{-2} \log k^2)$ , pero ya que sólo nos interesan términos de orden  $\mathcal{O}(k^0 \log k^2, k^{-1} \log k^2)$ , entonces vemos que a este orden

$$I_{2,0}^\mu = 0. \quad (2.29)$$

Finalmente, sustituyendo (2.25), (2.28) y (2.29) en (2.21), obtenemos

$$I_2^\mu = \frac{ie^3(\xi-1)}{16\pi^2} \left[ \gamma^\mu \log \frac{k^2}{\Lambda^2} - \frac{k^\mu \not{p}}{k^2} \log \frac{k^2}{p^2} \right]. \quad (2.30)$$

**Integral  $I_3$** 

Podemos reescribir el numerador de la integral (2.12) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
[\gamma^\nu(\not{k} - \not{\phi})\gamma^\mu\gamma^\rho + \gamma^\nu\gamma^\mu(\not{p} - \not{\phi})\gamma^\rho] \eta_{\nu\rho} &= \gamma^\nu(\not{k} - \not{\phi})\gamma^\mu\gamma_\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu(\not{p} - \not{\phi})\gamma_\nu \\
&= (k_\alpha - \omega_\alpha)\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma_\nu + (p_\alpha - \omega_\alpha)\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma_\nu \\
&= (k_\alpha - \omega_\alpha)4\eta^{\alpha\mu}\mathbb{I}_{4\times 4} + (p_\alpha - \omega_\alpha)4\eta^{\alpha\mu}\mathbb{I}_{4\times 4} \\
&= 4(k^\mu + p^\mu - 2\omega^\mu),
\end{aligned}$$

en donde ocupamos la identidad (5.4). Sustituyendo la expresión anterior en (2.12), y aplicando una rotación de Wick, obtenemos:

$$I_3^\mu = \frac{i4e^3m}{(2\pi)^4} \int_E d^4\omega \frac{k^\mu + p^\mu - 2\omega^\mu}{\omega^2 [(k - \omega)^2 + m^2] [(p - \omega)^2 + m^2]}.$$

Aplicando la parametrización de Feynman (5.29), con  $f(\omega) = k^\mu + p^\mu - 2\omega^\mu$ , obtenemos:

$$\begin{aligned}
I_3^\mu &= \frac{i8e^3m}{(2\pi)^4} \int_E d^4\omega \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{(1-2x)k^\mu + (1-2y)p^\mu - 2\omega^\mu}{(\omega^2 + L)^3} \\
&= \frac{i8e^3m}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_E d^4\omega \frac{(1-2x)k^\mu + (1-2y)p^\mu}{(\omega^2 + L)^3} \\
&\quad - \frac{i16e^3m}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_E d^4\omega \frac{\omega^\mu}{(\omega^2 + L)^3};
\end{aligned}$$

sustituyendo (5.40) en la expresión anterior, y notando que la última integral da cero pues es antisimétrica ante el intercambio  $\omega \rightarrow -\omega$ ,  $I_3$  se reescribe (utilizando el cambio de variable  $y = z(1-x)$ ):

$$I_3^\mu = \frac{i4\pi^2 e^3 m}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int_0^1 dz(1-x) \frac{(1-2x)k^\mu + (1-2z+2zx)p^\mu}{L}.$$

Sustituyendo (5.59) y (5.60) en la expresión anterior obtenemos

$$I_3^\mu = \frac{i4\pi^2 e^3 m}{(2\pi)^4} \int_0^1 dz \frac{1}{k^2} [k^\mu + (1-2z)p^\mu] \log \frac{k^2}{p^2} + \mathcal{O}(k^{-2} \log k^2);$$

finalmente, integrando respecto a  $z$  y tomando sólo logaritmos principales, tenemos que

$$I_3^\mu = \frac{ie^3m}{4\pi^2} \frac{k^\mu}{k^2} \log \frac{k^2}{p^2}. \quad (2.31)$$

**Integral  $I_4$** 

Utilizando la definición  $\gamma^\alpha \omega_\alpha = \not{\omega}$ , y aplicando una rotación de Wick en (2.13) obtenemos:

$$I_4^\mu = \frac{ie^3 m(1-\xi)}{(2\pi)^4} \int_E d^4\omega \frac{\not{\omega}(\not{k}-\not{\omega})\gamma^\mu \not{\omega} + \not{\omega}\gamma^\mu(\not{p}-\not{\omega}) \not{\omega}}{\omega^4 [(k-\omega)^2 + m^2] [(p-\omega)^2 + m^2]};$$

Aplicando la parametrización de Feynman (5.30) a la expresión anterior, obtenemos:

$$I_4^\mu = \frac{i6e^3 m(1-\xi)}{(2\pi)^4} \int_E d^4\omega \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (1-x-y)(\not{\omega} + x \not{k} + y \not{p}) \\ \{[(1-x) \not{k} - y \not{p} - \not{\omega}]\gamma^\mu + \gamma^\mu[(1-y) \not{p} - x \not{k} - \not{\omega}]\} \\ (\not{\omega} + x \not{k} + y \not{p})/(\omega^2 + L)^4;$$

si expandemos el integrando de la expresión anterior aparecerán términos de orden  $\mathcal{O}(\omega^3)$ ,  $\mathcal{O}(\omega^2)$ ,  $\mathcal{O}(\omega^1)$  y  $\mathcal{O}(\omega^0)$ , sin embargo, ignoraremos los términos de orden  $\mathcal{O}(\omega^3)$  y  $\mathcal{O}(\omega^1)$ , ya que son antisimétricos ante el intercambio  $\omega \rightarrow -\omega$  y por lo tanto su respectiva integral es cero. Tomando en cuenta sólo los términos de orden  $\mathcal{O}(\omega^2)$  y  $\mathcal{O}(\omega^0)$ , y utilizando el cambio de variable  $y = z(1-x)$ , obtenemos:

$$I_4^\mu = \frac{i6e^3 m(1-\xi)}{(2\pi)^4} \int_E d^4\omega \int_0^1 dx \int_0^1 dz (1-z)(1-x)^2 \frac{G^\mu \omega^2 + H^\mu}{(\omega^2 + L)^4} \\ \equiv \frac{i6e^3 m(1-\xi)}{(2\pi)^4} (I_{4,G} + I_{4,H}), \quad (2.32)$$

donde

$$I_{4,G}^\mu \equiv \int_E d^4\omega \int_0^1 dx \int_0^1 dz (1-z) \frac{(1-x)^2 G^\mu \omega^2}{(\omega^2 + L)^4}, \\ I_{4,H}^\mu \equiv \int_E d^4\omega \int_0^1 dx \int_0^1 dz (1-z) \frac{(1-x)^2 H^\mu}{(\omega^2 + L)^4}, \\ G^\mu \equiv G_1^\mu x + G_0^\mu \quad y \\ H^\mu \equiv H_3^\mu x^3 + H_2^\mu x^2 + H_1^\mu x + H_0^\mu.$$

Los tensores  $G_i^\mu$ 's y  $H_i^\mu$ 's sólo dependen de  $k$ ,  $p$  y  $z$ , y no dependen de  $x$ ; por ahora no se escribirán explícitamente pues las integrales correspondientes a algunos de estos términos serán cero. Sustituyendo las expresiones anteriores en (2.32) vemos que

$$I_4^\mu \equiv \frac{i6e^3 m(1-\xi)}{(2\pi)^4} (I_{4,G,1}^\mu + I_{4,G,0}^\mu + I_{4,H,3}^\mu + I_{4,H,2}^\mu + I_{4,H,1}^\mu + I_{4,H,0}^\mu), \quad (2.33)$$

donde definimos

$$I_{4,G,j}^\mu \equiv \int_E d^4\omega \int_0^1 dx \int_0^1 dz (1-z) \frac{x^j (1-x)^2 G_j^\mu \omega^2}{(\omega^2 + L)^4}, \quad y$$

$$I_{4,H,j}^\mu \equiv \int_E d^4\omega \int_0^1 dx \int_0^1 dz (1-z) \frac{x^j (1-x)^2 H_j^\mu}{(\omega^2 + L)^4}.$$

Si en las definiciones para las  $I_{4,G,j}$ 's utilizamos la propiedad (5.44) al integrar respecto a  $\omega$  y posteriormente las propiedades (5.61) y (5.62) al integrar respecto a  $x$ , obtendremos

$$I_{4,G,j}^\mu = \begin{cases} 0 + \mathcal{O}(k^{-3} \log k^2) & j = 1 \\ \frac{\pi^2}{3k^2} \log \frac{k^2}{p^2} \int_0^1 dz (1-z) G_0^\mu + \mathcal{O}(k^{-2} \log k^2) & j = 0. \end{cases}$$

Si en las definiciones para las  $I_{4,H,j}$ 's utilizamos ahora la propiedad (5.41) al integrar sobre  $\omega$  y enseguida las propiedades (5.63) y (5.64) al integrar sobre  $x$ , llegamos a que

$$I_{4,H,j}^\mu = 0 + \mathcal{O}(k^{-2} \log k^2) \quad j = 0, 1, 2, 3.$$

Entonces, tomando sólo los términos de orden  $\mathcal{O}(k^0 \log k^2, k^{-1} \log k^2)$  tenemos que

$$I_{4,G,j}^\mu = \begin{cases} 0, & j = 1 \\ \frac{\pi^2}{3k^2} \log \frac{k^2}{p^2} \int_0^1 dz (1-z) G_0^\mu, & j = 0 \end{cases} \quad y \quad I_{4,H,j}^\mu = 0, \quad j = 0, 1, 2, 3. \quad (2.34)$$

Sustituyendo (2.34) en (2.33) obtenemos

$$I_4 = \frac{i2\pi^2 e^3 m (1-\xi)}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2} \log \frac{k^2}{p^2} \int_0^1 dz (1-z) G_0^\mu,$$

pero como sólo nos interesan términos de orden  $\mathcal{O}(k^0 \log k^2, k^{-1} \log k^2)$ , entonces basta con escribir a  $G_0^\mu$  hasta orden  $\mathcal{O}(k^1)$  (puesto que los términos de orden  $\mathcal{O}(k^0)$  en  $G_0^\mu$  generan términos de orden  $\mathcal{O}(k^{-2} \log k^2)$  en  $I_4$ , los cuales no nos interesan); a este orden tenemos que

$$G_0^\mu \equiv -k^\mu,$$

y entonces, integrando respecto a  $z$  en  $I_4$ , obtenemos

$$I_4^\mu = -\frac{ie^3 m (1-\xi)}{16\pi^2} \frac{k^\mu}{k^2} \log \frac{k^2}{p^2}. \quad (2.35)$$

Finalmente para obtener la corrección  $\Lambda^\mu$  al vértice debido al diagrama Abeliiano basta con sustituir (2.15), (2.30), (2.31) y (2.35) en (2.14), obteniendo

$$-ie\Lambda^\mu = \frac{ie^3}{16\pi^2} \left\{ \xi\gamma^\mu \log \frac{k^2}{\Lambda^2} + \frac{1}{k^2} [(1-\xi)k^\mu \not{p} - \not{p}\gamma^\mu \not{k}] \log \frac{k^2}{p^2} + m(3+\xi) \frac{k^\mu}{k^2} \log \frac{k^2}{p^2} \right\}.$$

Sin embargo, esto es en el espacio de Euclides. Para regresar al espacio de Minkowski basta con aplicar nuevamente una rotación de Wick a la expresión anterior, obteniendo

$$-ie\Lambda^\mu = \frac{ie^3}{16\pi^2} \left\{ \xi\gamma^\mu \log \frac{k^2}{\Lambda^2} - \frac{1}{k^2} [(1-\xi)k^\mu \not{p} - \not{p}\gamma^\mu \not{k}] \log \frac{k^2}{p^2} - m(3+\xi) \frac{k^\mu}{k^2} \log \frac{k^2}{p^2} \right\}. \quad (2.36)$$

Sustituyendo (2.36) en (2.6), y despejando  $\Gamma^\mu$  del resultado, tenemos entonces que el vértice completo a un lazo se escribe (con  $\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi}$ ):

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu - \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ \xi\gamma^\mu \log \frac{k^2}{\Lambda^2} - \frac{1}{k^2} [(1-\xi)k^\mu \not{p} - \not{p}\gamma^\mu \not{k}] \log \frac{k^2}{p^2} - m(3+\xi) \frac{k^\mu}{k^2} \log \frac{k^2}{p^2} \right\}, \quad (2.37)$$

esto ya en el espacio de Minkowski. Para obtener la parte transversa debemos restar de la expresión anterior el vértice longitudinal de Ball-Chiu, cuya expansión perturbativa a orden  $\mathcal{O}(\alpha)$  se obtiene escribiendo  $\mathcal{F}$  y  $\Sigma$  a este orden en (2.2):

$$\mathcal{F}(p^2) = 1 + \frac{\alpha\xi}{4\pi} \log \frac{p^2}{\Lambda^2}, \quad (2.38)$$

$$\Sigma(p^2) = m \left[ 1 - \frac{3\alpha}{4\pi} \log \frac{p^2}{\Lambda^2} \right], \quad (2.39)$$

obteniendo

$$\begin{aligned} \Gamma_{BC}^\mu(k, p) &= \gamma^\mu - \frac{\alpha\xi}{4\pi} \gamma^\mu \log \frac{pk}{\Lambda^2} \\ &\quad - \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ \frac{\xi}{2} \frac{k^\mu \not{k} + k^\mu \not{p} + p^\mu \not{k}}{k^2} - m(3+\xi) \frac{k^\mu}{k^2} \right\} \log \frac{k^2}{p^2}, \end{aligned} \quad (2.40)$$

de manera que el vértice transverso resultante es

$$\begin{aligned} \Gamma_T^\mu(k, p) &= -\frac{\alpha}{4\pi} \frac{\not{p}\gamma^\mu \not{k} - k^\mu \not{p}}{k^2} \log \frac{k^2}{p^2} \\ &\quad - \frac{\alpha\xi}{8\pi} \left\{ \gamma^\mu - \frac{k^\mu \not{k} - k^\mu \not{p} + p^\mu \not{k}}{k^2} \right\} \log \frac{k^2}{p^2}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Si sólo conservamos los términos dominantes en la aproximación  $k^2 \gg p^2$ , la expresión anterior se reduce a

$$\Gamma_T^\mu(k, p) = -\frac{\alpha\xi}{8\pi} \left\{ \gamma^\mu - \frac{k^\mu \not{k}}{k^2} \right\} \log \frac{k^2}{p^2}. \quad (2.42)$$

Notemos además que, tomando sólo ordenes dominantes en la aproximación  $k^2 \gg p^2$ , los tensores base  $T_3^\mu(k, p)$  y  $T_6^\mu(k, p)$  se escriben

$$\begin{aligned} T_3^\mu(k, p) &= q^2 \gamma^\mu - q^\mu \not{q} \stackrel{k^2 \gg p^2}{\cong} k^2 \gamma^\mu - k^\mu \not{k} = k^2 \left[ \gamma^\mu - \frac{k^\mu \not{k}}{k^2} \right], \\ T_6^\mu(k, p) &= -\gamma^\mu (k^2 - p^2) + (k + p)^\mu \not{q} \stackrel{k^2 \gg p^2}{\cong} -\gamma^\mu k^2 + k^\mu \not{k} = -k^2 \left[ \gamma^\mu - \frac{k^\mu \not{k}}{k^2} \right]. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Vemos entonces que, a órdenes dominantes en  $k$ , podemos escribir el vértice (2.42) como

$$\Gamma_T^\mu(k, p) = -\frac{\alpha\xi}{8\pi k^2} T_3^\mu(k, p) \log \frac{k^2}{p^2}, \quad (2.44)$$

ó

$$\Gamma_T^\mu(k, p) = \frac{\alpha\xi}{8\pi k^2} T_6^\mu(k, p) \log \frac{k^2}{p^2}. \quad (2.45)$$

Curtis y Pennington notaron que éste término transversal del vértice electrón-fotón es crucial para asegurar la renormalizabilidad multiplicativa del propagador del electrón. Ellos propusieron el siguiente ansatz para la parte transversa del vértice:

$$\Gamma_T^\mu(k, p) = \tau_6(k^2, p^2) T_6^\mu(k, p), \quad (2.46)$$

donde

$$\tau_6(k^2, p^2) = -\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\mathcal{F}(k^2)} - \frac{1}{\mathcal{F}(p^2)} \right] \frac{1}{d(k^2, p^2)},$$

con

$$d(k^2, p^2) = \frac{(k^2 - p^2)^2 + [\Sigma^2(k^2) + \Sigma^2(p^2)]^2}{k^2 + p^2}.$$

demostrar que (2.46) se reduce a (2.45) en el límite perturbativo es muy sencilla para el caso no masivo. En éste límite

$$\tau_6(k^2, p^2) = -\frac{1}{2} \frac{k^2 + p^2}{(k^2 - p^2)^2} \left[ \frac{1}{\mathcal{F}(k^2)} - \frac{1}{\mathcal{F}(p^2)} \right].$$

De (2.38) vemos que a orden  $\mathcal{O}(\alpha)$ , tenemos

$$\frac{1}{\mathcal{F}(p^2)} = 1 - \frac{\alpha\xi}{4\pi} \log \frac{p^2}{\Lambda^2},$$

entonces, tomando el límite  $k^2 \gg p^2$ , vemos que

$$\begin{aligned} \tau_6(k^2, p^2) &\stackrel{k^2 \gg p^2}{=} -\frac{1}{2k^2} \left[ 1 - \frac{\alpha\xi}{4\pi} \log \frac{k^2}{\Lambda^2} - 1 + \frac{\alpha\xi}{4\pi} \log \frac{p^2}{\Lambda^2} \right] \\ &= \frac{\alpha\xi}{8\pi k^2} \log \frac{k^2}{p^2}, \end{aligned}$$

que es justamente el factor que acompaña a  $T_6^\mu$  en (2.45). Nuestro objetivo en los próximos capítulos es seguir éste camino para construir un vértice no perturbativo en QCD, que reduzca a su límite perturbativo asintótico cuando el acoplamiento sea pequeño.



# Capítulo 3

## Lagrangiano de QCD

Con el descubrimiento del pión en 1947, y la identificación subsecuente de muchos otros mesones y bariones, los nucleones fueron desechados como partículas elementales. Mediante modelos y pruebas experimentales se llegó a la conclusión de que todos los hadrones están constituidos por partículas fundamentales: Los quarks.

Los quarks, al ser partículas cargadas, interactúan electromagnéticamente a través del intercambio de fotones, sin embargo, esta interacción no es lo suficientemente intensa como para mantenerlos confinados (ligados) formando hadrones<sup>1</sup>. Deben existir entonces otro tipo de interacciones responsables de mantenerlos confinados: las *interacciones fuertes*, descritas por la QCD.

Las interacciones fuertes son consecuencia de la *carga de color*, análoga a la carga eléctrica. A diferencia de esta última, la carga de color se presenta en tres tipos (en lugar de uno): *rojo*, *verde* y *azul*. Mientras que en QED los cuantos del campo electromagnético son los fotones, en QCD son los gluones; es decir, la interacción entre quarks se da a través del intercambio de gluones (*bosones de norma* en QCD), los cuales, por cierto, tienen también estructura de color-anticolor (a diferencia de los fotones, los cuales no tienen carga eléctrica), la cual tiene como consecuencia que la interacción gluón-gluón sea posible. Sin embargo la interacción entre los bosones de norma en QCD se exige que el grupo de norma asociado no sea Abelian.

En las siguientes secciones estudiaremos la construcción del lagrangiano de QCD, el cual es fundamental para describir las interacciones entre quarks y gluones, tomando un camino similar al que seguimos en la construcción del lagrangiano de QED.

---

<sup>1</sup>De acuerdo con el principio de incertidumbre, la energía necesaria para mantener confinado a un quark en una región del orden de los hadrones es mayor a la que la interacción electromagnética puede proporcionar.

### 3.1 Quarks y la simetría global $SU(3)$

Adicionalmente a los grados de libertad que introducen los colores, debemos considerar seis sabores de los quarks: Cada sabor viene en los tres colores ya mencionados. Aunque a cada sabor está asociada una masa diferente, existe sólo una masa asociada a cada uno de los tres colores de cada sabor. Introducimos entonces el lagrangiano para quarks libres

$$\mathcal{L}_0 = \bar{q}_\alpha^f(x) (i\gamma_\mu \partial^\mu - m_f) q_\alpha^f(x), \quad (3.1)$$

el cual es la versión para QCD del lagrangiano libre de Dirac en QED, donde el subíndice  $\alpha$  denota cada uno de los 3 colores, y el índice  $f$  denota cada uno de los 6 sabores; existe una suma implícita sobre los índices  $\alpha$  y  $f$ .

Así como el lagrangiano libre de Dirac en QED exhibe una invarianza ante transformaciones de fase globales  $U(1)$  teniendo como consecuencia la conservación de la corriente  $j^\mu$  y su correspondiente carga electromagnética, el lagrangiano (3.1) exhibe una simetría global  $SU(3)$ , es decir, es invariante ante transformaciones globales de la forma

$$q_\alpha^f(x) \rightarrow q_\alpha^{f'} \equiv \left[ e^{-ig \frac{\lambda_a \theta_a}{2}} \right]_{\alpha\beta} q_\beta^f(x), \quad (3.2)$$

donde  $\theta_a$  es un parámetro constante, las  $\lambda_a$ 's son las matrices de Gell-Mann (de las cuales hablaremos más adelante) y el índice  $a$  corre de 1 a 8 (para cada una de las 8 matrices de Gell-Mann). La invarianza del lagrangiano  $\mathcal{L}_0$  ante la transformación anterior implica que los quarks se transforman como representaciones fundamentales del grupo  $SU(3)$ , y esta invarianza tiene como consecuencia la conservación de la carga de color. En la siguiente sección hablaremos sobre el grupo  $SU(3)$  y las matrices de Gell-Mann.

### 3.2 $SU(N)$ y sus generadores

$SU(N)$  es el grupo de las matrices unitarias  $N \times N$  con determinante igual a uno. Cualquier elemento  $G$  que pertenece al grupo  $SU(N)$  debe entonces satisfacer:

$$G^\dagger G = GG^\dagger = 1 \quad \text{y} \quad \det(G) = 1.$$

Cada elemento  $G$  en  $SU(N)$  puede ser escrito en términos de  $N^2 - 1$  matrices hermitianas  $N \times N$  con traza nula, llamados *generadores del grupo*, de los cuales sólo  $N - 1$  son diagonales. Para  $SU(3)$  entonces existen 8 generadores de grupo, de los cuales sólo dos son diagonales. Un elemento  $G$  en  $SU(3)$  puede ser escrito en términos de estos 8 generadores como

$$G(\theta_1, \dots, \theta_8) = \exp [i\theta_a T_a],$$

donde  $a = 1, 2, \dots, 8$ , y las 8 matrices  $T_a$  son los generadores del grupo, las cuales satisfacen la relación de conmutación

$$[T_a, T_b] = if_{abc}T_c, \quad (3.3)$$

donde las  $f_{abc}$ 's son las constantes de estructura del grupo. De las dos relaciones anteriores es evidente que en general dos elementos  $G_1$  y  $G_2$  en  $SU(3)$  no conmutarán entre sí, es decir

$$G_1G_2 \neq G_2G_1.$$

En este sentido decimos que  $SU(3)$  es un grupo no Abelian.

Los generadores  $T_a$ 's pueden ser escritos como  $T_a = \frac{1}{2}\lambda_a$ , donde las  $\lambda_a$ 's son las matrices de Gell-Mann definidas como

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donde las matrices diagonales son evidentemente  $\lambda_3$  y  $\lambda_8$ .

### 3.3 Transformaciones de norma locales

De manera análoga a QED, las interacciones entre los fermiones (quarks) y los bosones (gluones) en QCD se obtienen demandando invarianza pero ante transformaciones locales de norma  $SU(3)$ . Es decir, pediremos al lagrangiano (3.1) que sea invariante ante la transformación

$$q_\alpha^f(x) \rightarrow q_\alpha^f = \left[ e^{-ig \frac{\lambda_a \theta_a(x)}{2}} \right]_{\alpha\beta} q_\beta^f(x) \equiv G_{\alpha\beta}(x) q_\beta^f(x), \quad (3.4)$$

donde, a diferencia de (3.2),  $\theta_a(x)$  es una función que depende del espacio-tiempo; de aquí que la transformación sea local. Sin embargo, el lagrangiano (3.1) no queda invariante ante esta transformación; para conseguir la invarianza deseada requerimos

introducir 8 campos de norma  $A_a^\mu(x)$  de la siguiente manera: Debemos reemplazar la derivada  $\partial^\mu$  en (3.1) por una derivada covariante  $D^\mu$  definida como

$$(D^\mu)_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}\partial^\mu - \frac{ig}{2} (\lambda_a)_{\alpha\beta} A_a^\mu(x),$$

la cual debe transformarse de manera covariante como

$$(D^\mu)_{\alpha\beta} q_\beta^f \rightarrow (D'^\mu)_{\alpha\beta} q_\beta^f = G_{\alpha\rho}(x) (D^\mu)_{\rho\beta} q_\beta^f.$$

Bajo transformaciones infinitesimales ( $\theta_a$ 's muy pequeños), los campos de norma  $A_a^\mu$  deben transformarse como

$$A_a^\mu(x) \rightarrow A'^\mu_a(x) = A_a^\mu(x) + gf_{abc}\theta_b(x)A_c^\mu(x) + \partial^\mu\theta_a(x).$$

De esta manera, el lagrangiano se reescribe como

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int},$$

donde

$$\mathcal{L}_{int} \equiv \frac{1}{2} \bar{q}_\alpha^f(x) (\lambda_a)_{\alpha\beta} \gamma_\mu q_\beta^f(x) A_a^\mu(x),$$

el cual es el término de interacción entre quarks y gluones.

Además, para poder considerar al campo  $A_\mu^a$  como el campo gluónico, necesitamos introducir su correspondiente término cinético en el lagrangiano anterior, de manera que el lagrangiano completo de QCD es

$$\mathcal{L}_{QCD} = \bar{q}_\alpha^f(x) [i\gamma_\mu D^\mu - m_f] q_\alpha^f(x) - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a(x) G_a^{\mu\nu}(x), \quad (3.5)$$

donde el segundo término del lado derecho es justamente el término cinético del campo gluónico  $G_a^{\mu\nu}(x)$ , el cual se define como

$$G_a^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu A_a^\nu(x) - \partial^\nu A_a^\mu(x) - gf_{abc} A_b^\mu(x) A_c^\nu(x).$$

El término  $-gf_{abc} A_b^\mu(x) A_c^\nu(x)$  en la expresión anterior aparece debido a la estructura no Abeliana del grupo de simetría  $SU(3)$ , y tiene como consecuencia las interacciones entre gluones, lo cual era de esperarse debido a la estructura color-anticolor de estos antes mencionada.

Aunque podemos considerar como completo al lagrangiano (3.5), si queremos que QCD defina una teoría de campos cuánticos necesitamos cuantizar el campo gluónico en una manera similar a la cuantización del campo fotónico en QED. Uno

debe entonces introducir un término a mano en el lagrangiano el cual evite inconsistencias en las restricciones del sistema, pero que a su vez no afecte la dinámica de dicho sistema. De esta manera, el lagrangiano completo de QCD se escribe como

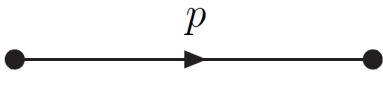
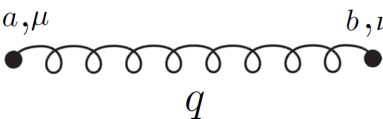
$$\mathcal{L}_{QCD} = \bar{q}_\alpha^f(x) [i\gamma_\mu D^\mu - m_f] q_\alpha^f(x) - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a(x) G_a^{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2\xi} [\partial^\mu A_\mu^a(x)] [\partial^\nu A_\nu^a(x)] , \quad (3.6)$$

donde  $\xi$  es el parámetro de norma. En normas covariantes también debemos introducir campos llamados fantasmas, pero debido a que estos campos no juegan ningún papel a nivel de un lazo en la expresión del vértice quark-gluón, evitaremos su mención por completo.

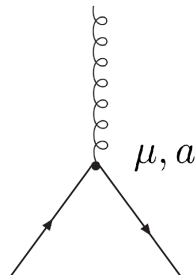
### 3.4 Reglas de Feynman

Las reglas de Feynman para QCD son similares a las de QED, con la diferencia de que para QCD deben aparecer diagramas de interacción entre gluones (además de partículas fantasma, las cuales no se abordarán en esta tesis, como acabamos de mencionar). Las reglas de Feynman son

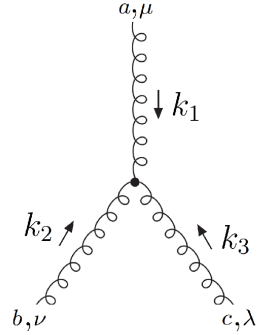
- *Propagadores*

Quark		$S_F(p) = \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2}$
Gluón		$\Delta_{\mu\nu}^{ab}(q) = -i \frac{\delta^{ab}}{q^2} \left[ \eta_{\mu\nu} + (\xi - 1) \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right]$

- *Vértice quark-gluón*

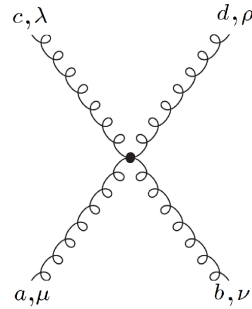
	$-gT^a \gamma^\mu$
---	--------------------

- *Vértice de 3 gluones*



$$-g f^{abc} [\eta_{\mu\nu}(k_1 - k_2)_\lambda + \eta_{\nu\lambda}(k_2 - k_3)_\mu + \eta_{\lambda\mu}(k_3 - k_1)_\nu]$$

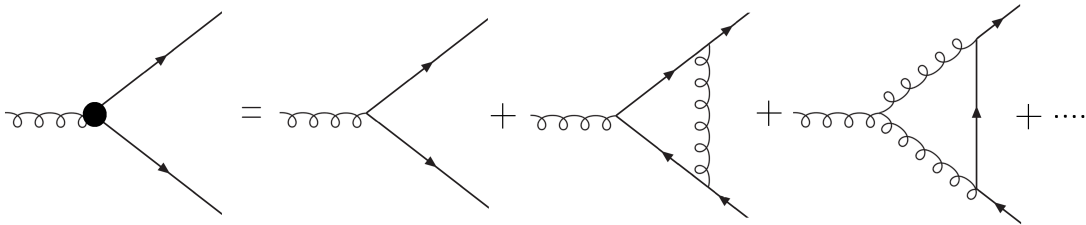
- *Vértice de 4 gluones*



$$-ig^2 [f^{abn} f^{cdn} (\eta_{\mu\lambda} \eta_{\nu\rho} - \eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\lambda}) + f^{adn} f^{bcn} (\eta_{\mu\nu} \eta_{\lambda\rho} - \eta_{\mu\lambda} \eta_{\nu\rho}) + f^{acn} f^{dbn} (\eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\lambda} - \eta_{\mu\nu} \eta_{\lambda\rho})]$$

### 3.5 El vértice quark-gluón a un lazo

Las SDE para QCD son muy parecidas en forma a las SDE para QED, pero mucho más complejas. La SDE para el vértice quark-gluón en el régimen de acoplamiento pequeño nos da una expansión perturbativa que a diferencia de QED también contiene correcciones al vértice quark-gluón que también contemplan la interacción entre bosones, en este caso gluones. De manera explícita, las correcciones a un lazo al vértice quark-gluón se escriben diagramáticamente como



El último diagrama en la figura anterior es el que incluye la interacción de 3 gluones, y es llamado *diagrama no Abelian* pues su origen se debe a la no conmutatividad de los generadores del grupo  $SU(3)$ , mientras que el segundo diagrama contado a partir del lado derecho es llamado *diagrama Abelian* pues éste también aparece en las correcciones al vértice electrón-fotón en QED cuyo grupo de simetría es Abelian.

En la figura anterior sólo mostramos diagramáticamente las correcciones al vértice quark-gluón a un lazo (*loop*), pero en realidad existe un número infinito de contribuciones extras a dos o más lazos. Cada vértice que aparece en alguna corrección contribuye con un factor  $\alpha_s = \frac{g^2}{4\pi}$  llamada constante de acoplamiento fuerte. El vértice desnudo contribuye con un factor  $\alpha_s^0$ , mientras que los diagramas Abelian y no Abelian (un lazo) contribuyen con un factor  $\alpha_s^1$ ; las siguientes correcciones contribuirán con un factor  $\alpha_s^2$ , y así sucesivamente. Esto es importante de mencionar, pues en el siguiente capítulo estudiaremos el vértice quark-gluón en el régimen perturbativo, en el cual la constante de acoplamiento fuerte es muy pequeña ( $\alpha_s \ll 1$ ). En el siguiente capítulo se calcularán las contribuciones de los diagramas sólo a un lazo.



# Capítulo 4

## Vértice quark-gluón

Este es el capítulo central de esta tesis, pues en él se muestran los cálculos realizados para obtener las contribuciones al vértice quark-gluón por parte del diagrama no Abelian, en teoría de perturbaciones, a un lazo.

Como ya mencionamos en el capítulo 2, la función de masa  $\Sigma$ , la cual nos da información sobre la generación dinámica de la masa de los fermiones (los quarks en este caso), se encuentra directamente relacionada con el propagador del quark, el cual a su vez se encuentra acoplado al propagador del gluón y al vértice quark-gluón a través de las SDE revisadas en el capítulo anterior.

La importancia de estudiar el vértice quark-gluón radica, entre otras cosas, en encontrar un *ansatz* físicamente adecuado que desacople las SDE, para poder estudiar la generación dinámica de masas (relacionada con  $\Sigma$ ) a través de la SDE para el propagador del quark.

Existen varios trabajos acerca de este vértice en la literatura, pero sin duda el más general es el trabajo de Davydychev, Osland y Saks [7], en el cual estudian las correcciones a un lazo, con piernas *off-shell*, en norma covariante y dimensiones arbitrarias. Sin embargo, los resultados para el vértice en el trabajo de Davydychev son tan complejos que utilizarlo como *ansatz* dejaría a las SDE complejas como antes, por ello nosotros tomaremos otro camino para estudiar al vértice.

Algunos trabajos correspondientes a cálculos perturbativos que podemos encontrar en la literatura se resumen en la siguiente tabla:

	Referencia	QCD
$\xi$ arbitraria, $D = 4$	Espiru, Pascual y Tarrach [19]	<i>off-shell</i> , límite simétrico $k^2 = p^2 = q^2 = -\mu^2$ ,
$\xi = 0, D = 4$	Braaten y Leveille [20]	<i>off-shell</i> , límite simétrico $k^2 = p^2 = q^2 = -\mu^2$
$\xi = 1, D = 4$	Nowak, Praszalowicz y Slominski [21]	Fermión sin masa $k^2 = p^2 = 0$ y $p^2 = q^2 = 0$
$\xi$ arbitraria, $D = 4$	Dung, Phuoc y Tarasov [22]	<i>off-shell</i> , límite simétrico $k^2 = p^2 = q^2 = -\mu^2$ , la dependencia del acoplamiento $\alpha_s$ sobre la masa de quark

En este trabajo de tesis extendemos el trabajo de Curtis y Pennington [8], [9], [10] de QED a QCD, es decir, estudiaremos el vértice quark-gluón en teoría de perturbaciones a un lazo, tomando el caso  $k^2 \gg p^2 \gg m^2$ , donde  $k$  y  $p$  son los momentos de los quarks entrante y saliente.

## 4.1 Correcciones a un lazo

En teoría de perturbaciones ( $\alpha_s \ll 1$ ), las únicas contribuciones significativas al vértice quark-gluón son el diagrama Abeliano (figura 4.1) y el diagrama no Abeliano (figura 4.2):

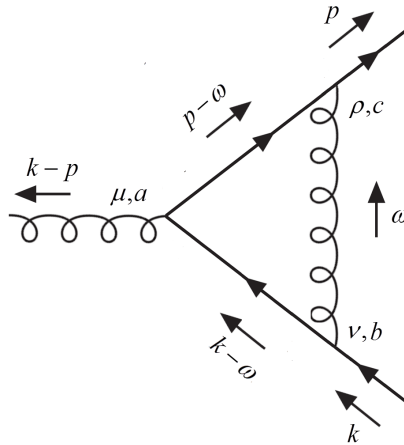


Figura 4.1: Diagrama Abeliano

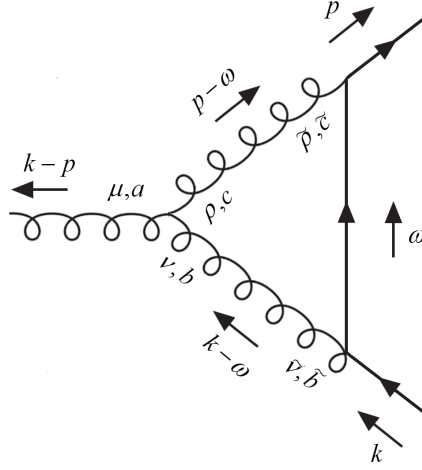


Figura 4.2: Diagrama no Abelianiano

Los factores de color son proporcionales a  $C_F - \frac{1}{2}C_A$  para el diagrama Abelianiano, y  $C_A$  para el diagrama no Abelianiano.

La contribución por parte del diagrama Abelianiano es completamente similar a la corrección a un lazo al vértice fermión-fotón en QED; la única diferencia está en el factor de color. De hecho, partiendo del vértice en QCD a un lazo podemos regresar al vértice en QED a un lazo simplemente haciendo  $C_A = 0$  y  $C_F = 1$ . Por ello, nos limitaremos a calcular sólo la contribución del diagrama no Abelianiano, pues la contribución Abelianiana ya ha sido calculada por Curtis y Pennington.

La expansión perturbativa a un lazo para el vértice quark-gluón es

$$-ig\Gamma^{\mu a}(k, p) = -igT^a\Gamma^\mu(k, p) = -igT^a\gamma^\mu - igT^a\Gamma_{gg}^\mu(k, p) - igT^a\Gamma_{ggg}^\mu(k, p), \quad (4.1)$$

donde  $\Gamma_{gg}^{\mu a} = T^a\Gamma_{gg}^\mu$  es la contribución del diagrama Abelianiano, y  $\Gamma_{ggg}^{\mu a} = T^a\Gamma_{ggg}^\mu$  es la contribución de diagrama no Abelianiano.

## 4.2 Diagrama Abelianiano

Aplicando las reglas de Feynman al diagrama Abelianiano (figura 4.1), vemos entonces que el vértice quark gluón se escribe

$$\begin{aligned} -ig\Gamma_{gg}^{\mu a} &= \int_M \frac{d^4\omega}{(2\pi)^4} (-igT^b\gamma^\nu) iS_F(k-\omega) (-igT^a\gamma^\mu) iS_F(p-\omega) (-igT^c\gamma^\rho) \Delta_{\nu\rho}^{ca}(\omega) \\ &= \frac{T^bT^aT^c}{(2\pi)^4} \int_M d^4\omega (-ig\gamma^\nu) iS_F(k-\omega) (-ig\gamma^\mu) iS_F(p-\omega) (-ig\gamma^\rho) \Delta_{\nu\rho}(\omega), \end{aligned}$$

el cual es en esencia el vértice electrón-fotón (2.7), salvo por el factor de color  $T^b T^a T^b = (C_F - \frac{1}{2}C_A) T^a$  y el acoplamiento  $g$  en lugar de  $e$ . De esta manera, podemos utilizar el resultado (2.36) obtenido en QED, considerando el factor de color y el remplazo  $e \rightarrow g$ , obteniendo

$$-ig\Gamma_{gg}^{\mu a} = \left( C_F - \frac{1}{2}C_A \right) \frac{ig^3\pi^2}{(2\pi)^4} T^a \times \left\{ \xi\gamma^\mu \log \frac{k^2}{\Lambda^2} - \frac{1}{k^2} [(1-\xi)k^\mu \not{p} - \not{p}\gamma^\mu k] \log \frac{k^2}{p^2} - m(3+\xi) \frac{k^\mu}{k^2} \log \frac{k^2}{p^2} \right\}, \quad (4.2)$$

esto tomando sólo logaritmos principales a términos dominantes  $\mathcal{O}(k^0 \log k^2)$ , y a términos subdominantes  $\mathcal{O}(k^{-1} \log k^2)$ .

### 4.3 Diagrama no Abelianiano

Al igual que para el cálculo del diagrama no Abelianiano, en las integrales en el diagrama no Abelianiano utilizaremos un corte ultravioleta para regularizar las divergencias en dichas integrales, por lo que los únicos términos que vamos a conservar en nuestros cálculos son aquellos que contengan logaritmos principales<sup>2</sup>. Además, como estamos considerando el caso  $k^2 \gg p^2 \gg m^2$ , conservaremos sólo los términos dominantes  $\mathcal{O}(k^0 \log k^2)$ , y subdominantes  $\mathcal{O}(k^{-1} \log k^2)$ .

Aplicando las reglas de Feynman al diagrama no Abelianiano (4.2), tenemos que

$$-ig\Gamma_{ggg}^{\mu a} = \int_M \frac{d^4\omega}{(2\pi)^4} (-igT^{\tilde{c}}\gamma^{\tilde{\rho}}) \Delta_{\tilde{\rho}\tilde{c}}(p-\omega) V_{abc}^{\rho\mu\nu} \Delta_{\nu\tilde{b}}^{\tilde{b}\tilde{b}}(k-\omega) (-igT^{\tilde{b}}\gamma^{\tilde{\nu}}) S_F(\omega),$$

donde  $V_{abc}^{\rho\mu\nu}$  representa el vértice de tres gluones el cual, dada la configuración de los momentos en la figura 4.2, se escribe como

$$V_{abc}^{\rho\mu\nu} = gf_{abc} [\eta^{\mu\nu}(2k-p-\omega)^\rho + \eta^{\nu\rho}(2\omega-k-p)^\mu + \eta^{\rho\mu}(2p-k-\omega)^\nu].$$

---

<sup>1</sup>Para el grupo  $SU(N)$  tenemos que

$$C_F = \frac{N^2 - 1}{2N}, \quad C_A = N,$$

de tal forma que

$$T^b T^b = C_F, \quad T^b T^a T^b = \left( C_F - \frac{1}{2}C_A \right) T^a.$$

<sup>2</sup>Como ya mencionamos en la sección 2.4, los únicos términos confiables al introducir el corte ultravioleta son aquellos que contienen logaritmos principales.

De manera explícita tenemos entonces que

$$\begin{aligned}
-ig\Gamma_{ggg}^{\mu a} &= ig^3 f_{abc} T^{\bar{c}} T^{\bar{b}} \delta^{\bar{c}c} \delta^{\bar{b}b} \int_M \frac{d^4\omega}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{\gamma^{\bar{\rho}}}{(p-\omega)^2} \left[ \eta_{\rho\bar{\rho}} + (\xi-1) \frac{(p-\omega)_\rho (p-\omega)_{\bar{\rho}}}{(p-\omega)^2} \right] \right. \\
&\quad \times [\eta^{\mu\nu} (2k-p-\omega)^\rho - \eta^{\nu\rho} (k+p-2\omega)^\mu + \eta^{\rho\mu} (-k+2p-\omega)^\nu] \\
&\quad \left. \times \frac{1}{(k-\omega)^2} \left[ \eta_{\bar{\nu}\nu} + (\xi-1) \frac{(k-\omega)_{\bar{\nu}} (k-\omega)_\nu}{(k-\omega)^2} \right] \gamma^{\bar{\nu}} \frac{\not{\omega} + m}{(\omega^2 - m^2)} \right\}, \quad (4.3)
\end{aligned}$$

en el cual tenemos que

$$\begin{aligned}
if_{abc} T^{\bar{c}} T^{\bar{b}} \delta^{\bar{c}c} \delta^{\bar{b}b} &= if_{abc} T^c T^b = (if_{abc} T^c) T^b = [T^a, T^b] T^b \\
&= T^a \underbrace{T^b T^b}_{=C_F} - \underbrace{T^b T^a T^b}_{=(C_F - \frac{1}{2}C_A)T^a} = \frac{C_A}{2} T^a,
\end{aligned}$$

Es conveniente separar la integral (4.3) en 4 integrales de la siguiente forma:

- $I_1^\mu$ : Contiene términos con denominador  $(k-\omega)^2(p-\omega)^2(\omega^2-m^2)$ ,
- $I_2^\mu$ : Contiene términos con denominador  $(k-\omega)^4(p-\omega)^2(\omega^2-m^2)$ ,
- $I_3^\mu$ : Contiene términos con denominador  $(k-\omega)^2(p-\omega)^4(\omega^2-m^2)$ ,
- $I_4^\mu$ : Contiene términos con denominador  $(k-\omega)^4(p-\omega)^4(\omega^2-m^2)$ ,

reescribiendo a la integral (4.3) como

$$-ig\Gamma_{ggg}^{\mu a} = \frac{C_A}{2} g^3 T^a \{I_1^\mu + I_2^\mu + I_3^\mu + I_4^\mu\}. \quad (4.4)$$

Explícitamente, las  $I^\mu$ 's se definen de la siguiente manera

$$I_1^\mu = \int_M \frac{d^4\omega}{(2\pi)^4} \frac{\gamma_\rho \mathcal{S}^{\mu\nu\rho} \gamma_\nu (\not{\omega} + m)}{(k-\omega)^2 (p-\omega)^2 (\omega^2 - m^2)}, \quad (4.5)$$

$$I_2^\mu = (\xi-1) \int_M \frac{d^4\omega}{(2\pi)^4} \frac{\gamma_\rho \mathcal{S}^{\mu\nu\rho} (\not{k}-\not{\omega})(k-\omega)_\nu (\not{\omega} + m)}{(k-\omega)^4 (p-\omega)^2 (\omega^2 - m^2)}, \quad (4.6)$$

$$I_3^\mu = (\xi-1) \int_M \frac{d^4\omega}{(2\pi)^4} \frac{(\not{p}-\not{\omega})(p-\omega)_\rho \mathcal{S}^{\mu\nu\rho} \gamma_\nu (\not{\omega} + m)}{(k-\omega)^2 (p-\omega)^4 (\omega^2 - m^2)}, \quad (4.7)$$

$$I_4^\mu = (\xi-1)^2 \int_M \frac{d^4\omega}{(2\pi)^4} \frac{(\not{p}-\not{\omega})(p-\omega)_\rho \mathcal{S}^{\mu\nu\rho} (\not{k}-\not{\omega})(k-\omega)_\nu (\not{\omega} + m)}{(k-\omega)^4 (p-\omega)^4 (\omega^2 - m^2)}, \quad (4.8)$$

donde definimos

$$\mathcal{S}^{\mu\nu\rho} \equiv \eta^{\mu\nu} (2k-p-\omega)^\rho + \eta^{\nu\rho} (2\omega-k-p)^\mu + \eta^{\rho\mu} (2p-k-\omega)^\nu.$$

**Integral  $I_1^\mu$** 

Aplicando una rotación de Wick en (4.5) obtenemos

$$I_1^\mu = -i \int_E \frac{d^4\omega}{(2\pi)^4} \frac{[(2 \not{k} - \not{p} - \not{\phi})\gamma^\mu + 4(2\omega - k - p)^\mu + \gamma^\mu(2 \not{p} - \not{k} - \not{\phi})](\not{\phi} + m)}{(k - \omega)^2(p - \omega)^2(\omega^2 + m^2)}.$$

Aplicando la parametrización de Feynman (5.31) a la expresión anterior, y después aplicando el cambio de variable  $y = z(1 - x)$ , obtenemos la expresión

$$I_1^\mu = -\frac{2i}{(2\pi)^4} \sum_{n=0}^2 \sum_{j=0}^2 \int_0^1 dz \int_0^1 dx (1-x) \int_E d^4\omega \frac{A_{n,j}^\mu(k, p, z) x^n \omega^j}{(\omega^2 + L)^3}, \quad (4.9)$$

donde

$$L = (1-x) \{xk^2 + z[1 - z(1-x)]p^2 - 2xzk \cdot p + (1-z)m^2\}. \quad (4.10)$$

Por el momento no es conveniente escribir explícitamente los coeficientes  $A_{n,j}^\mu$  en la expansión (4.9) pues, además de ser muy extensos, no todos contribuirán a la integral (como veremos a continuación), y de los que sí contribuyen sólo conservaremos aquellos términos que generen términos dominantes  $\mathcal{O}(k^0 \log k^2)$  y subdominantes  $\mathcal{O}(k^{-1} \log k^2)$ .

Debido a que los términos con  $j = 1$  en (4.9) son antisimétricos ante el intercambio  $\omega \rightarrow -\omega$ , su respectiva integral da cero. Usando además los resultados (5.40) y (5.43), la expresión (4.9) se reduce a

$$I_1^\mu = -\frac{\pi^2 i}{(2\pi)^4} \sum_{n=0}^2 \int_0^1 dz A_{n,0}^\mu(k, p, z) \int_0^1 dx \frac{x^n(1-x)}{L} \\ - \frac{2\pi^2 i}{(2\pi)^4} \sum_{n=0}^2 \int_0^1 dz A_{n,2}^\mu(k, p, z) \int_0^1 dx x^n(1-x) \left\{ \log \frac{\Lambda^2}{L} - \frac{3}{2} \right\}.$$

Sustituyendo los resultados (5.55), (5.59) y (5.60) en la expresión anterior, obtenemos

$$I_1^\mu = -\frac{\pi^2 i}{(2\pi)^4} \int_0^1 dz A_{0,0}^\mu(k, p, z) \frac{1}{k^2} \left( 1 + \frac{2k \cdot p}{k^2} z \right) \log \frac{k^2}{p^2} \\ - \frac{2\pi^2 i}{(2\pi)^4} \sum_{n=0}^2 \int_0^1 dz A_{n,2}^\mu(k, p, z) \int_0^1 dx x^n(1-x) \log \frac{\Lambda^2}{k^2} + \mathcal{O}(k^{-2} \log k^2).$$

En la expresión anterior necesitamos escribir a  $A_{0,0}^\mu$  hasta orden  $\mathcal{O}(k^2, k^1)$ , y a las  $A_{n,s}^\mu$ 's hasta orden  $\mathcal{O}(k^0)$ , para poder así generar términos de orden  $\mathcal{O}(k^0 \log k^2)$  y  $\mathcal{O}(k^{-1} \log k^2)$ . A estos órdenes tenemos que

$$\begin{aligned} A_{0,0}^\mu &= -4z \not{p} k^\mu - z \gamma^\mu \not{k} \not{p} + 2z \not{k} \gamma^\mu \not{p} \\ &\quad + 2m \not{k} \gamma^\mu - 4m k^\mu - m \gamma^\mu \not{k}, \\ A_{0,2}^\mu &= -\frac{3}{2} \gamma^\mu, \\ A_{1,2}^\mu &= A_{2,2}^\mu = 0. \end{aligned}$$

Integrando y tomando sólo términos dominantes y subdominantes, obtenemos finalmente

$$\begin{aligned} I_1^\mu &= \frac{i3\pi^2}{2(2\pi)^4} \gamma^\mu \log \frac{\Lambda^2}{k^2} \\ &\quad - \frac{i\pi^2}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2} \left[ \not{k} \gamma^\mu \not{p} - \frac{1}{2} \gamma^\mu \not{k} \not{p} - 2 \not{p} k^\mu + m (2 \not{k} \gamma^\mu - 4k^\mu - \gamma^\mu \not{k}) \right] \log \frac{k^2}{p^2} \\ &= \frac{i3\pi^2}{2(2\pi)^4} \gamma^\mu \log \frac{\Lambda^2}{k^2} + \frac{i\pi^2}{(2\pi)^4} \frac{3}{k^2} \left( \frac{1}{2} \gamma^\mu \not{k} \not{p} + m \gamma^\mu \not{k} \right) \log \frac{k^2}{p^2}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

### **Integral $I_2^\mu$**

Si aplicamos una rotación de Wick a la expresión (4.6), posteriormente aplicamos la parametrización de Feynman(5.32), y finalmente aplicamos el cambio de variable  $y = z(1-x)$ , obtendremos la expresión

$$I_2^\mu = \frac{i6(\xi-1)}{(2\pi)^4} \sum_{n=0}^4 \sum_{j=0}^4 \int_0^1 dz \int_0^1 dx x(1-x) \int_E d^4\omega \frac{B_{n,j}^\mu(k,p,z) x^n \omega^j}{(\omega^2 + L)^4}, \quad (4.12)$$

donde  $L$  está dado por (4.10). Las  $B_{n,j}^\mu$ 's no serán escritas explícitamente por el momento (por los mismos argumentos que para las  $A_{n,j}^\mu$ 's en el procedimiento anterior).

Conservando sólo los términos simétricos ante el intercambio  $\omega \rightarrow -\omega$ <sup>3</sup>, y

---

<sup>3</sup>Pues las integrales para términos antisimétrico ante  $\omega \rightarrow -\omega$  son cero.

aplicando los resultados (5.41), (5.44) y (5.47) en la expresión (4.12), obtendremos

$$\begin{aligned}
I_2^\mu &= \frac{i\pi^2(\xi-1)}{(2\pi)^4} \sum_{n=0}^4 \int_0^1 dz B_{n,0}^\mu(k,p,z) \int_0^1 \frac{dx x^{n+1}(1-x)}{L^2} \\
&+ \frac{i2\pi^2(\xi-1)}{(2\pi)^4} \sum_{n=0}^4 \int_0^1 dz B_{n,2}^\mu(k,p,z) \int_0^1 \frac{dx x^{n+1}(1-x)}{L} \\
&+ \frac{i6\pi^2(\xi-1)}{(2\pi)^4} \sum_{n=0}^4 \int_0^1 dz B_{n,4}^\mu(k,p,z) \int_0^1 dx x^{n+1}(1-x) \left\{ \log \frac{\Lambda^2}{L} - \frac{11}{6} \right\}.
\end{aligned}$$

Aplicando los resultados (5.55), (5.59), (5.60), (5.63) y (5.64) en la expresión anterior, obtenemos

$$\begin{aligned}
I_2^\mu &= \frac{i\pi^2(\xi-1)}{(2\pi)^4} \frac{2}{k^2} \log \frac{k^2}{p^2} \int_0^1 dz B_{0,0}^\mu(k,p,z) \\
&+ \frac{i\pi^2(\xi-1)}{(2\pi)^4} \frac{2}{k^2} \log \frac{k^2}{p^2} \sum_{n=1}^4 \int_0^1 dz B_{n,0}^\mu(k,p,z) \\
&+ \frac{i6\pi^2(\xi-1)}{(2\pi)^4} \log \frac{\Lambda^2}{k^2} \sum_{n=0}^4 \int_0^1 dz B_{n,4}^\mu(k,p,z) \int_0^1 dx x^{n+1}(1-x) + \mathcal{O}(k^{-2} \log k^2),
\end{aligned} \tag{4.13}$$

donde las  $B$ 's, escritas hasta órdenes que generen términos dominantes y subdominantes, son

$$B_{0,0}^\mu = m (k^\mu \not{k} \not{k} + k^2 \gamma^\mu \not{k}) + z (k^\mu \not{k} \not{p} + k^2 \gamma^\mu \not{k} \not{p}),$$

$$\begin{aligned}
B_{1,0}^\mu &= k^\mu \not{k} \not{k} \not{k} + k^2 \gamma^\mu \not{k} \not{k} - k^\mu \not{p} \not{k} \not{k} - p^\mu \not{k} \not{k} \not{k} - 2(k \cdot p) \gamma^\mu \not{k} \not{k} \\
&- m (k^2 \gamma^\mu \not{k} + k^\mu \not{k} \not{k}) \\
&- z (k^2 \gamma^\mu \not{p} \not{k} + 2k^2 \gamma^\mu \not{k} \not{p} + 2k^\mu \not{k} \not{k} \not{p} + k^\mu \not{k} \not{p} \not{k}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{2,0}^\mu &= -k^2 \gamma^\mu \not{k} \not{k} - k^\mu \not{k} \not{k} \not{k} + 2k^\mu \not{p} \not{k} \not{k} + 2p^\mu \not{k} \not{k} \not{k} + 4(k \cdot p) \gamma^\mu \not{k} \not{k} \\
&- m (k^2 \gamma^\mu \not{k} + k^\mu \not{k} \not{k}) \\
&+ z [k^2 \gamma^\mu \not{p} \not{k} + k^\mu \not{k} \not{p} \not{k} - k^\mu \not{p} \not{k} \not{k} - 2(k \cdot p) \gamma^\mu \not{k} \not{k} - p^\mu \not{k} \not{k} \not{k}],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{3,0}^\mu &= -k^2 \gamma^\mu \not{k} \not{k} - k^\mu \not{k} \not{k} \not{k} - k^\mu \not{p} \not{k} \not{k} - p^\mu \not{k} \not{k} \not{k} - 2(k \cdot p) \gamma^\mu \not{k} \not{k} \\
&\quad + m (k^2 \gamma^\mu \not{k} + k^\mu \not{k} \not{k}) \\
&\quad + z [k^2 \gamma^\mu \not{p} \not{k} + 2k^2 \gamma^\mu + 2k^\mu \not{k} \not{k} \not{p} + k^\mu \not{k} \not{p} \not{k} \\
&\quad \quad + 2k^\mu \not{p} \not{k} \not{k} + 4(k \cdot p) \gamma^\mu \not{k} \not{k} + 2p^\mu \not{k} \not{k} \not{k}] ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{4,0}^\mu &= k^2 \gamma^\mu \not{k} \not{k} + k^\mu \not{k} \not{k} \not{k} \\
&\quad - z [k^2 \gamma^\mu \not{p} \not{k} + k^2 \gamma^\mu \not{k} \not{p} + k^\mu \not{k} \not{k} \not{p} + k^\mu \not{k} \not{p} \not{k} \\
&\quad \quad + k^\mu \not{p} \not{k} \not{k} + 2(k \cdot p) \gamma^\mu \not{k} \not{k} - p^\mu \not{k} \not{k} \not{k}] ,
\end{aligned}$$

$$B_{0,4}^\mu = -\frac{3}{4} \gamma^\mu ,$$

$$B_{1,4}^\mu = B_{2,4}^\mu = B_{3,4}^\mu = B_{4,4}^\mu = 0 .$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en (4.16), e integrando, obtenemos a órdenes dominantes y subdominantes

$$\begin{aligned}
I_2^\mu &= -\frac{i3(\xi-1)\pi^2}{4(2\pi)^4} \gamma^\mu \log \frac{\Lambda^2}{k^2} \\
&\quad + \frac{i(\xi-1)\pi^2}{2(2\pi)^4} \frac{1}{k^2} [-k^\mu \not{p} + \gamma^\mu \not{k} \not{p} + 2m(\gamma^\mu \not{k} - k^\mu)] \log \frac{k^2}{p^2} .
\end{aligned} \tag{4.14}$$

### **Integral $I_3^\mu$**

Aplicando una rotación de Wick a la expresión (4.7), posteriormente aplicando la parametrización de Feynman(5.35), y finalmente aplicando el cambio de variable  $y = z(1-x)$ , obtendremos la expresión

$$I_3^\mu = \frac{i6(\xi-1)}{(2\pi)^4} \sum_{n=0}^4 \sum_{j=0}^4 \int_0^1 dz z \int_0^1 dx x(1-x)^2 \int_E d^4 \omega \frac{C_{n,j}^\mu(k,p,z) x^n \omega^j}{(\omega^2 + L)^4} , \tag{4.15}$$

donde  $L$  está dado por (4.10). Las  $C_{n,j}^\mu$ 's no serán escritas explícitamente por el momento.

Conservando sólo los términos simétricos ante el intercambio  $\omega \rightarrow -\omega$ , y apli-

cando los resultados (5.41), (5.44) y (5.47) en la expresión anterior, obtenemos

$$\begin{aligned}
I_3^\mu &= \frac{i(\xi-1)\pi^2}{(2\pi)^4} \sum_{n=0}^4 \int_0^1 dz z C_{n,0}^\mu(k,p,z) \int_0^1 \frac{dx x^n (1-x)^2}{L^2} \\
&+ \frac{i2(\xi-1)\pi^2}{(2\pi)^4} \sum_{n=0}^4 \int_0^1 dz z C_{n,2}^\mu(k,p,z) \int_0^1 \frac{dx x^n (1-x)^2}{L} \\
&+ \frac{i6(\xi-1)\pi^2}{(2\pi)^4} \sum_{n=0}^4 \int_0^1 dz z C_{n,4}^\mu(k,p,z) \int_0^1 dx x^n (1-x)^2 \left\{ \log \frac{\Lambda^2}{L^2} \right\}.
\end{aligned}$$

Aplicando los resultados (5.55), (5.61), (5.62), (5.65) y (5.66) en la expresión anterior, obtenemos

$$\begin{aligned}
I_3^\mu &= \frac{i(\xi-1)\pi^2}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^4} \log \frac{k^2}{p^2} \int_0^1 dz z C_{1,0}^\mu(k,p,z) \\
&+ \frac{i2(\xi-1)\pi^2}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^4} \log \frac{k^2}{p^2} \int_0^1 dz z C_{0,2}^\mu(k,p,z) \\
&+ \frac{i6(\xi-1)\pi^2}{(2\pi)^4} \log \frac{\Lambda^2}{k^2} \sum_{n=0}^4 \int_0^1 dz z C_{1,0}^\mu(k,p,z) \int_0^1 dx x^n (1-x)^2,
\end{aligned} \tag{4.16}$$

donde a órdenes que generen términos dominantes y subdominantes tenemos que

$$C_{1,0}^\mu = 0,$$

$$\begin{aligned}
C_{0,2}^\mu &= (k \cdot p) \gamma^\mu + \frac{1}{2} \not{p} \gamma^\mu \not{k} - \frac{1}{4} \not{p} \not{k} \gamma^\mu - \frac{1}{2} k^\mu \not{p} \\
&+ m \left( k^\mu \frac{1}{4} \gamma^\mu \not{k} - \frac{1}{2} \not{k} \gamma^\mu \right) \\
&+ z \left[ -(k \cdot p) \gamma^\mu - \frac{1}{2} \not{k} \gamma^\mu \not{p} - \frac{1}{2} \not{p} \gamma^\mu \not{k} + \frac{1}{4} \gamma^\mu \not{k} \not{p} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4} \not{p} \not{k} \gamma^\mu + \frac{3}{2} k^\mu \not{p} - \frac{1}{2} p^\mu \not{k} \right],
\end{aligned}$$

$$C_{0,4}^\mu = \frac{3}{4} \gamma^\mu,$$

$$C_{1,4}^\mu = C_{2,4}^\mu = C_{3,4}^\mu = C_{4,4}^\mu = 0.$$

Sustituyendo los resultado anteriores en la ecuación (4.16), e integrando, obtenemos finalmente

$$\begin{aligned}
I_3^\mu &= \frac{i3(\xi-1)\pi^2}{4(2\pi)^4} \gamma^\mu \log \frac{\Lambda^2}{k^2} \\
&+ \frac{i(\xi-1)\pi^2}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2} \left\{ \frac{1}{3} \left[ (k \cdot p) \gamma^\mu - \not{k} \gamma^\mu \not{p} - \frac{1}{2} \not{p} \gamma^\mu \not{k} + \frac{1}{2} \gamma^\mu \not{k} \not{p} \right. \right. \\
&\left. \left. - \frac{1}{4} \not{p} \not{k} \gamma^\mu + \frac{3}{2} k^\mu \not{p} - \frac{1}{2} p^\mu \not{k} \right] + m \left( k^\mu + \frac{1}{4} \gamma^\mu \not{k} - \frac{1}{2} \not{k} \gamma^\mu \right) \right\} \log \frac{k^2}{p^2} \\
&= \frac{i3(\xi-1)\pi^2}{4(2\pi)^4} \gamma^\mu \log \frac{\Lambda^2}{k^2} \\
&+ \frac{i(\xi-1)\pi^2}{3(2\pi)^4} \frac{1}{k^2} \left[ \frac{1}{2} (k \cdot p) \gamma^\mu + \frac{5}{4} \gamma^\mu \not{k} \not{p} - k^\mu \not{p} - p^\mu \not{k} \right] \log \frac{k^2}{p^2} \\
&+ \frac{i3(\xi-1)\pi^2}{4(2\pi)^4} \frac{m}{k^2} \gamma^\mu \not{k} \log \frac{k^2}{p^2}. \tag{4.17}
\end{aligned}$$

### **Integral $I_4^\mu$**

Aplicando una rotación de Wick a la expresión (4.8), posteriormente aplicando la parametrización de Feynman(5.33), y finalmente aplicando el cambio de variable  $y = z(1-x)$ , obtendremos la expresión

$$I_4^\mu = -\frac{i24(\xi-1)^2}{(2\pi)^4} \sum_{n=0}^6 \sum_{j=0}^6 \int_0^1 dz z \int_0^1 dx x(1-x)^2 \int_E d^4\omega \frac{D_{n,j}^\mu x^n \omega^j}{(\omega^2 + L)^5}.$$

Conservando sólo términos simétricos ante el intercambio  $\omega \rightarrow -\omega$ , y aplicando los resultados (5.42), (5.45), (5.48) y (5.51) en la expresión anterior, aplicando el

cambio de variable  $y = z(1 - x)$ , obtenemos

$$\begin{aligned}
I_4^\mu &= -\frac{i2(\xi - 1)^2\pi^2}{(2\pi)^4} \sum_{n=0}^6 \int_0^1 dz z D_{n,0}^\mu(k, p, z) \int_0^1 \frac{dx x^{n+1}(1-x)^2}{L^3} \\
&\quad -\frac{i2(\xi - 1)^2\pi^2}{(2\pi)^4} \sum_{n=0}^6 \int_0^1 dz z D_{n,2}^\mu(k, p, z) \int_0^1 \frac{dx x^{n+1}(1-x)^2}{L^2} \\
&\quad -\frac{i2(\xi - 1)^2\pi^2}{(2\pi)^4} \sum_{n=0}^6 \int_0^1 dz z D_{n,4}^\mu(k, p, z) \int_0^1 \frac{dx x^{n+1}(1-x)^2}{L} \\
&\quad -\frac{i24(\xi - 1)^2\pi^2}{(2\pi)^4} \sum_{n=0}^6 \int_0^1 dz z D_{n,6}^\mu(k, p, z) \int_0^1 dx x^{n+1}(1-x)^2 \left\{ \log \frac{\Lambda^2}{L} - \frac{25}{12} \right\}.
\end{aligned}$$

Sustituyendo en la expresión anterior los resultados (5.55), (5.61), (5.62), (5.65), (5.66), (5.69) y (5.70), donde a órdenes principales los coeficientes  $D_{n,j}^\mu$ 's se escriben

$$D_{1,0}^\mu = -m(1-z) [(k \cdot p)k^\mu \not{k} \not{k} - k^2 p^\mu \not{k} \not{k}],$$

$$\begin{aligned}
D_{2,0}^\mu &= -(k \cdot p)k^\mu \not{k} \not{k} \not{k} + k^2 p^\mu \not{k} \not{k} \not{k} \\
&\quad + 2m(1-z) [(k \cdot p)k^\mu \not{k} \not{k} - k^2 p^\mu \not{k} \not{k}] \\
&\quad + z [-k^2 p^\mu \not{k} \not{k} \not{k} + (k \cdot p)k^\mu \not{k} \not{k} \not{k}],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{3,0}^\mu &= 2(k \cdot p)k^\mu \not{k} \not{k} \not{k} - 2k^2 p^\mu \not{k} \not{k} \not{k} \\
&\quad - m(1-z) [(k \cdot p)k^\mu \not{k} \not{k} - k^2 p^\mu \not{k} \not{k}] \\
&\quad + 2z [k^2 p^\mu \not{k} \not{k} \not{k} - (k \cdot p)k^\mu \not{k} \not{k} \not{k}],
\end{aligned}$$

$$D_{4,0}^\mu = (1-z) [k^2 p^\mu \not{k} \not{k} \not{k} - (k \cdot p)k^\mu \not{k} \not{k} \not{k}],$$

$$\begin{aligned}
D_{0,2}^\mu &= \frac{1}{4}k^\mu \not{p} \not{k} \not{k} + \frac{1}{4}k^2 \not{p} \not{k} \gamma^\mu + \frac{1}{2}(k \cdot p)k^\mu \not{k} - \frac{1}{2}k^2 p^\mu \not{k} \\
&\quad - \frac{1}{4}m [k^\mu \not{k} \not{k} + k^2 \gamma^\mu \not{k}] \\
&\quad z \left[ -\frac{1}{2}(k \cdot p)k^\mu \not{k} + \frac{1}{2}k^2 p^\mu \not{k} - \frac{1}{4}k^\mu \not{p} \not{k} \not{k} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{4}k^2 \not{p} \not{k} \gamma^\mu - \frac{1}{4}k^2 \gamma^\mu \not{k} \not{p} - \frac{1}{4}k^\mu \not{k} \not{k} \not{p} \right],
\end{aligned}$$

$$D_{0,6}^\mu = D_{1,6}^\mu = D_{2,6}^\mu = D_{3,6}^\mu = D_{4,6}^\mu = D_{5,6}^\mu = D_{6,6}^\mu = D_{5,0}^\mu = D_{6,0}^\mu = D_{0,0}^\mu = 0.$$

Tenemos finalmente

$$\begin{aligned}
I_4^\mu &= -\frac{i(\xi-1)^2\pi^2}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^4} \left\{ \left[ \frac{1}{6}(k \cdot p)k^\mu \not{k} - \frac{1}{6}k^2 p^\mu \not{k} + \frac{1}{12}k^2 \not{p} \not{k} \gamma^\mu \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{6}k^2 \gamma^\mu \not{k} \not{p} + \frac{1}{12}k^2 k^\mu \not{p} \right] + \frac{1}{4}mk^2 [k^\mu - \gamma^\mu \not{k}] \right\} \log \frac{k^2}{p^2} \\
&= -\frac{i(\xi-1)^2\pi^2}{6(2\pi)^4} \frac{(k \cdot p)}{k^4} [k^\mu \not{k} - k^2 \gamma^\mu] \log \frac{k^2}{p^2} \\
&\quad + \frac{i(\xi-1)^2\pi^2}{12(2\pi)^4} \frac{1}{k^2} [\gamma^\mu \not{k} \not{p} + k^\mu \not{p}] \log \frac{k^2}{p^2} \\
&\quad - \frac{i(\xi-1)^2\pi^2}{4(2\pi)^4} \frac{m}{k^2} [k^\mu - \gamma^\mu \not{k}] \log \frac{k^2}{p^2}. \tag{4.18}
\end{aligned}$$

Substituyendo (4.11), (4.14), (4.17) y (4.18) en (4.4), y aplicando una rotación de Wick, obtenemos la corrección por parte del diagrama no Abeliano en el espacio de Minkowski, la cual se escribe a continuación:

$$\begin{aligned}
-ig\Gamma_{ggg}^{\mu a} &= -C_A \frac{ig^3\pi^2}{2(2\pi)^4} \frac{T^a}{k^2} \log \frac{k^2}{p^2} \left\{ \left[ \frac{1}{6}p^\mu \not{k} - \frac{1}{12}k^\mu \not{p} - \frac{1}{12} \not{p} \not{k} \gamma^\mu \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{6}\gamma^\mu \not{k} \not{p} + \frac{m}{4}(\gamma^\mu \not{k} - k^\mu) \right] \xi^2 + \left[ -\frac{1}{3} \not{k} \gamma^\mu \not{p} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{6} \not{p} \gamma^\mu \not{k} + \frac{1}{3}\gamma^\mu \not{k} \not{p} + \frac{1}{12} \not{p} \not{k} \gamma^\mu - \frac{1}{2}p^\mu \not{k} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{6}k^\mu \not{p} + \frac{m}{4}(3\gamma^\mu \not{k} - 2 \not{k} \gamma^\mu + 2k^\mu) \right] \xi \right. \\
&\quad \left. - \frac{2}{3} \not{k} \gamma^\mu \not{p} + \frac{23}{12} \not{p} k^\mu + \frac{1}{6} \not{p} \gamma^\mu \not{k} + \frac{1}{3}p^\mu \not{k} \right. \\
&\quad \left. + \frac{3m}{4}(5k^\mu - 2 \not{k} \gamma^\mu) \right\} \\
&\quad + C_A \frac{ig^3(\xi-1)\pi^2}{6(2\pi)^4} \frac{T^a}{k^2} (k \cdot p) \gamma^\mu \log \frac{k^2}{p^2} \\
&\quad + C_A \frac{ig^3(\xi-1)^2\pi^2}{12(2\pi)^4} \frac{T^a}{k^4} (k \cdot p) k^\mu \not{k} \log \frac{k^2}{p^2} \\
&\quad + C_A \frac{i3g^3\pi^2}{4(2\pi)^4} T^a \gamma^\mu \log \frac{\Lambda^2}{k^2},
\end{aligned}$$

es decir

$$\begin{aligned}
-ig\Gamma_{ggg}^{\mu a} = & -C_A \frac{ig^3\pi^2}{2(2\pi)^4} \frac{T^a}{k^2} \left\{ \left[ -\frac{1}{6}(k \cdot p)\gamma^\mu + \frac{1}{12}\gamma^\mu \not{k} \not{p} + \frac{1}{12}k^\mu \not{p} + \frac{1}{4}m(\gamma^\mu \not{k} - k^\mu) \right] \xi^2 \right. \\
& + \left[ \frac{1}{6}(k \cdot p)\gamma^\mu + \frac{3}{4}\gamma^\mu \not{k} \not{p} - k^\mu \not{p} - \frac{1}{3}p^\mu \not{k} - \frac{1}{2}m(k^\mu - \frac{5}{2}\gamma^\mu \not{k}) \right] \xi \\
& \left. + \frac{2}{3}\gamma^\mu \not{k} \not{p} + \frac{11}{12}k^\mu \not{p} + \frac{1}{3}p^\mu \not{k} + \frac{3}{2}m(\gamma^\mu \not{k} + \frac{1}{2}k^\mu) \right\} \log \frac{k^2}{p^2} \\
& + C_A \frac{ig^3(\xi-1)^2\pi^2}{12(2\pi)^4} \frac{T^a}{k^4} (k \cdot p)k^\mu \not{k} \log \frac{k^2}{p^2} \\
& + C_A \frac{i3g^3\pi^2}{4(2\pi)^4} T^a \gamma^\mu \log \frac{\Lambda^2}{k^2}. \tag{4.19}
\end{aligned}$$

En el caso de fermiones sin masa,  $m = 0$ , el resultado anterior se escribe

$$\begin{aligned}
-ig\Gamma_{ggg}^{\mu a} = & -C_A \frac{ig^3\pi^2}{2(2\pi)^4} \frac{T^a}{k^2} \left\{ \left[ -\frac{1}{6}(k \cdot p)\gamma^\mu + \frac{1}{12}\gamma^\mu \not{k} \not{p} + \frac{1}{12}k^\mu \not{p} \right] \xi^2 \right. \\
& + \left[ \frac{1}{6}(k \cdot p)\gamma^\mu + \frac{3}{4}\gamma^\mu \not{k} \not{p} - k^\mu \not{p} - \frac{1}{3}p^\mu \not{k} \right] \xi \\
& \left. + \frac{2}{3}\gamma^\mu \not{k} \not{p} + \frac{11}{12}k^\mu \not{p} + \frac{1}{3}p^\mu \not{k} \right\} \log \frac{k^2}{p^2} \\
& + C_A \frac{ig^3(\xi-1)^2\pi^2}{12(2\pi)^4} \frac{T^a}{k^4} (k \cdot p)k^\mu \not{k} \log \frac{k^2}{p^2} \\
& + C_A \frac{i3g^3\pi^2}{4(2\pi)^4} T^a \gamma^\mu \log \frac{\Lambda^2}{k^2}. \tag{4.20}
\end{aligned}$$

$$(4.21)$$

## 4.4 Resultados: Vértices transversos

Para obtener el vértice transverso debemos simplemente restar el vértice longitudinal del vértice completo, el cual obtenemos al sustituir los resultados para las contribuciones Abelianas (4.2) y no Abelianas (4.19) en la expresión (4.1). El problema es que no sabemos cuál es el vértice longitudinal.

Uno podría esperar que el vértice transverso en QCD sea precisamente el vértice de Ball-Chiu para QED (Salvo por un factor de color), pero existe un problema: El vértice de longitudinal de Ball-Chiu es una consecuencia de la IWT la cual

se debe satisfacer en QED, sin embargo en QCD es la *identidad de Ward-Slavnov-Taylor* (IWST) la que se debe satisfacer en lugar de la IWT.

La IWST [23], [24] para el vértice quark-gluón es

$$q_\mu \Gamma^\mu = G(q^2) [S_F^{-1}(k) H(k, p, q) - \bar{H}(k, p, q) S_F^{-1}(p)] , \quad (4.22)$$

donde  $q^\mu = k^\mu - p^\mu$ ,  $G(q^2)$  es una función asociada al propagador del fantasma, y  $H(k, p, q)$  (y su conjugado  $\bar{H}(k, p, q)$ ) es una función que involucra al vértice de cuatro puntos quark-quark-fantasma-fantasma completo. Además, la relación entre  $\Gamma^\mu$  y  $\Gamma^{\mu a}$  es

$$\Gamma^{\mu a} = T^a \Gamma^\mu .$$

A un lazo, la IWST puede separarse en dos identidades correspondientes a las contribuciones de los diagramas Abelianos y no Abelianos, respectivamente, de la siguiente manera

$$q_\mu \Gamma_{gg}^{\mu, (1)} = \left( C_F - \frac{1}{2} C_A \right) C_F^{-1} [S_F^{-1}(k) - S_F^{-1}(p)]^{(1)} , \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} q_\mu \Gamma_{ggg}^{\mu, (1)} &= \bar{H}^{(1)}(k, p, q) [S_F^{-1}(p)]^{(0)} - [S_F^{-1}(k)]^{(0)} H^{(1)}(k, p, q) \\ &+ \frac{1}{2} C_A C_F^{-1} [S_F^{-1}(k) - S_F^{-1}(p)]^{(1)} H^{(0)}(k, p, q) \\ &+ 2G^{(1)}(q) [S_F^{-1}(k) - S_F^{-1}(p)]^{(0)} H^{(0)}(k, p, q) , \end{aligned} \quad (4.24)$$

donde los superíndices “(0)” y “(1)” denotan contribuciones a cero loops y a un loop, respectivamente. El procedimiento detallado para obtener las identidades anteriores puede ser revisado en [7].

Notemos que la identidad (4.23) es básicamente la IWT, salvo por un factor.  $\Gamma_{gg}^{\mu, (1)}$  es la contribución Abeliana al vértice longitudinal. De la identidad (4.24) podemos obtener la contribución no Abeliana  $\Gamma_{ggg}^{\mu, (1)}$  al vértice longitudinal.

De [7] sabemos que la contribución Abeliana al vértice longitudinal, el cual satisface (4.23), es

$$\Gamma_{L\,gg}^\mu = \left( C_F - \frac{1}{2} C_A \right) \Gamma_{BC}^\mu ,$$

donde  $\Gamma_{BC}^\mu$  está dado a un loop en la ecuación (2.40). De esta manera tenemos que,

agregando el factor de color, la contribución Abeliana al vértice longitudinal es

$$\begin{aligned} \Gamma_{Lqg}^{\mu a} &= \left( C_F - \frac{1}{2} C_A \right) T^a \left\{ \gamma^\mu - \frac{\alpha_s \xi}{4\pi} \gamma^\mu \log \frac{pk}{\Lambda^2} \right\} \\ &\quad - \left( C_F - \frac{1}{2} C_A \right) T^a \frac{\alpha_s}{4\pi} \left\{ \frac{\xi}{2} \frac{k^\mu \not{k} + k^\mu \not{p} + p^\mu \not{k}}{k^2} - m(3 + \xi) \frac{k^\mu}{k^2} \right\} \log \frac{k^2}{p^2}, \end{aligned}$$

donde ahora  $\alpha_s = \frac{g^2}{4\pi}$ . Restando éste vértice longitudinal de la contribución Abeliana (4.2), obtenemos finalmente la parte transversa de la contribución Abeliana del vértice:

$$\begin{aligned} \Gamma_{Tqg}^{\mu a} &= - \left( C_F - \frac{1}{2} C_A \right) T^a \left\{ \gamma^\mu + \frac{g^2}{16\pi^2} \frac{\not{p} \gamma^\mu \not{k} - k^\mu \not{p}}{k^2} \right\} \log \frac{k^2}{p^2} \\ &\quad - \left( C_F - \frac{1}{2} C_A \right) \frac{g^2 \xi}{32\pi^2} T^a \left\{ \gamma^\mu - \frac{k^\mu \not{k} - k^\mu \not{p} + p^\mu \not{k}}{k^2} \right\} \log \frac{k^2}{p^2}. \end{aligned}$$

La contribución no Abeliana al vértice longitudinal (y al transverso) no será calculada pues esto implica tomar en cuenta las interacciones con fantasmas, lo cual quedó lejos de los alcances de esta tesis.

# Capítulo 5

## Conclusiones

Debido a la naturaleza no perturbativa de la generación dinámica de masas y el confinamiento de los quarks, es necesario encontrar un marco adecuado para el estudio de las interacciones fuertes. Una manera de hacerlo es estudiando las SDE para QCD, las cuales definen por completo la dinámica en esta QFT. Uno de los métodos más comunes para desacoplar las SDE en QCD es proponiendo un ansatz para el vértice de interacción quark-gluón. Estudiar el comportamiento asintótico del vértice quark-gluón en el régimen perturbativo nos da pistas de cómo construir un ansatz para su contraparte no perturbativa.

Estudiar el vértice fermión-bosón en teoría de perturbaciones nos permite truncar su correspondiente SDE en potencias del acoplamiento fuerte  $g$ . En este trabajo de tesis calculamos el vértice quark-gluón a un lazo en teoría de perturbaciones, tomando el límite asintótico  $k^2 \gg p^2 \gg m^2$  de momentos externos. Encontramos un punto de referencia en la construcción de ansätze no perturbativos para el vértice en QCD, es decir, obtuvimos una estructura perturbativa para el vértice quark-gluón a la cual debe reducirse su contraparte no perturbativa en el límite asintótico. En éste sentido, encontramos constricciones perturbativas sobre el vértice quark-gluón.

Para garantizar la invarianza de norma del sistema exigimos que éste satisfaga las WTI. Nosotros utilizamos la base tensorial de Ball-Chiu [6] en la construcción de la parte longitudinal del vértice y la base tensorial propuesta por Kisilerzü, Reenders y Pennington [16] para la parte transversa, las cuales son consistentes con las WTI. Sin embargo, para  $m \rightarrow 0$  las dos bases son idénticas.

A un lazo, las únicas correcciones perturbativas al vértice provienen de dos diagramas Abelianos y no Abelianos. La contribución del diagrama Abeliano en el límite asintótico  $k^2 \gg p^2$  es calculada por Curtis y Pennington en [8] para QED. Para adaptar éste resultado a QCD simplemente reemplazamos la constante de acoplamiento electromagnético  $\alpha$  por la constante de acoplamiento fuerte  $g$ , además

de introducir estructura de color. La satisfacción de la identidad de Ward para esta contribución al vértice quark-gluón es garantizada. La parte transversa correspondiente es en esencia la misma que la propuesta por Curtis y Pennington.

El trabajo original de esta tesis se centra en el cálculo de la contribución por parte del diagrama no Abelianiano en el límite asintótico antes mencionado. Para ello, nosotros seguimos el mismo camino que toman Curtis y Pennington en el cálculo perturbativo del vértice electrón-fotón. Utilizamos un *cut-off* para lidiar con divergencias ultravioletas. Sólo conservamos términos con logaritmos principales ya que, al usar el *cut-off*, únicamente estos términos son invariantes de norma e invariantes bajo transformaciones de Poincaré. Además, conservamos sólo los términos dominantes y subdominantes en ésta aproximación de logaritmos principales, es decir, conservamos los términos de orden  $\mathcal{O}(k^0 \log k^2)$  y  $\mathcal{O}(k^{-1} \log k^2)$ . La parte transversa correspondiente a esta contribución no Abelianiana involucra interacciones con fantasmas, las cuales no fueron abordadas en éste trabajo, por lo que éste cálculo queda como futura tarea.

## 5.1 Perspectivas

En QCD no sólo las WTI se deben satisfacer, si no que de manera más general se deben satisfacer las WSTI. En el capítulo 4 mostramos cómo a un lazo estas WSTI pueden separarse en dos identidades a un lazo: una para el diagrama Abelianiano y otra para el no Abelianiano. Para el primer diagrama, esta identidad resulta ser justamente la WTI, la cuál sí tomamos en cuenta. Sin embargo para el diagrama no Abelianiano la identidad resultante involucra interacciones con fantasmas. La contribución longitudinal correspondiente al diagrama no Abelianiano proviene de esta segunda identidad. Construir un vértice longitudinal (y por lo tanto un vértice transverso) en QCD consistente con las WSTI requiere tomar en cuenta las constricciones derivadas de esta segunda identidad. Este será hecho en el futuro. Una vez teniendo el límite asintótico del vértice transverso completo, los siguientes pasos serán:

- Construir un ansatz que esté de acuerdo con este límite.
- Usar dicho ansatz para estudiar invarianza de norma del condensado quiral en QCD.
- Emplear este ansatz para estudiar observables hadrónicas: masas, decaimientos, factores de forma, etc.

Otro trabajo a futuro cercano es tomar el límite asintótico  $k^2 \gg p^2$  de momentos externos en las soluciones generales derivadas en el trabajo de Davydychev [7], y de ésta manera comparar resultados.

# Apéndice A

## Identidades de las matrices $\gamma$

La relación de anticonmutación (que define el álgebra de Clifford) para las matrices  $\gamma$  de Dirac es

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}\mathbb{I}_{4\times 4}, \quad (5.1)$$

donde  $\eta^{\mu\nu}$  es la métrica de Minkowski con la convención  $(+, -, -, -)$ , y  $\mathbb{I}_{4\times 4}$  es la matriz unitaria de  $4 \times 4$ . Estas matrices  $\gamma$  satisfacen las siguientes identidades:

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = 4\mathbb{I}_{4\times 4} \quad (5.2)$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = -2\gamma^\nu \quad (5.3)$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu = 4\eta^{\nu\rho}\mathbb{I}_{4\times 4} \quad (5.4)$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu = -2\gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu.$$

Definiendo  $\not{q} \equiv q_\alpha \gamma^\alpha$  llamado *q slash*, donde  $q_\alpha$  es un cuadri-momento arbitrario, obtenemos las siguientes identidades:

- De (5.5) vemos que

$$\gamma^\nu \not{q} \gamma^\mu \not{q} \gamma_\nu = -2 \not{q} \gamma^\mu \not{q}. \quad (5.5)$$

- Si integramos respecto a  $\omega$  ( $\int d^4\omega$ ) entonces dentro del integrando se satisface

$$\omega_\alpha \omega_\beta = \frac{1}{4} \omega^2 \eta_{\alpha\beta}. \quad (5.6)$$

- Algunas otras identidades que se satisfacen si integramos respecto a  $\omega$  son

$$\begin{aligned} \not{q} \gamma^\mu \not{q} &= \omega_\alpha \omega_\beta \gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta && \stackrel{(5.6)}{=} \frac{1}{4} \omega^2 \eta_{\alpha\beta} \gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta \\ &= \frac{1}{4} \omega^2 (\gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma_\alpha) && \stackrel{(5.3)}{=} -\frac{1}{2} \omega^2 \gamma^\mu. \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned}
\psi \not{x} \gamma^\mu \psi \not{\psi} &= \omega_\nu u_\alpha \omega_\rho v_\beta \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\beta \stackrel{(5.6)}{=} \frac{1}{4} \omega^2 \eta_{\nu\rho} u_\alpha v_\beta \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\beta \\
&= \frac{1}{4} \omega^2 u_\alpha v_\beta (\gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\nu) \gamma^\beta \stackrel{(5.4)}{=} \omega^2 u_\alpha v_\beta \eta^{\alpha\mu} \gamma^\beta \\
&= \omega^2 u^\mu \not{\psi}.
\end{aligned} \tag{5.8}$$

$$\begin{aligned}
\not{x} \psi \gamma^\mu \not{\psi} \psi &= u_\alpha \omega_\nu v_\beta \omega_\rho \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\rho \stackrel{(5.6)}{=} \frac{1}{4} \omega^2 \eta_{\nu\rho} u_\alpha v_\beta \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\rho \\
&= \frac{1}{4} \omega^2 u_\alpha v_\beta \gamma^\alpha (\gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\nu) \stackrel{(5.4)}{=} \omega^2 u_\alpha v_\beta \gamma^\alpha \eta^{\mu\beta} \\
&= \omega^2 \not{x} v^\mu.
\end{aligned} \tag{5.9}$$

- De manera análoga se obtienen las siguientes identidades

$$\psi \not{x} \gamma^\mu \not{\psi} \psi = -\frac{1}{2} \omega^2 \not{\psi} \gamma^\mu \not{x} \tag{5.10}$$

$$\not{x} \psi \gamma^\mu \psi \not{\psi} = -\frac{1}{2} \omega^2 \not{x} \gamma^\mu \not{\psi} \tag{5.11}$$

$$\psi \psi \gamma^\mu \not{x} \not{\psi} = \omega^2 \gamma^\mu \not{x} \not{\psi} \tag{5.12}$$

$$\not{x} \not{\psi} \gamma^\mu \psi \psi = \omega^2 \not{x} \not{\psi} \gamma^\mu \tag{5.13}$$

$$\psi \psi \gamma^\mu \psi \psi = \omega^4 \gamma^\mu. \tag{5.14}$$

# Apéndice B

## Rotaciones de Wick

Las integrales con las que nos encontramos en este trabajo de tesis se llevan a cabo en el espacio de Minkowski, sin embargo resulta apropiado encontrar el equivalente de dichas integrales en un espacio Euclidiano 4-dimensional. Esto implica cambiar la métrica y la estructura de los objetos dentro del integrando; el método para lograrlo es llamado *rotación de Wick*, cuya motivación es el hecho de que la métrica de Minkowski y la métrica Euclidiana 4-dimensional son equivalentes si permitimos a las componentes temporales tomar valores imaginarios. Si en la métrica de Minkowski

$$ds_M^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

reescribimos la coordenada temporal como  $t \rightarrow it$  obtendremos

$$ds_M^2 = -dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = -ds_E^2,$$

donde  $ds_E^2$  es justamente la métrica Euclidiana 4-dimensional. Esta transformación en la componente temporal del cuadrivector  $x^\mu$  tiene como consecuencia la rotación (llamada rotación de Wick) de la componente temporal del cuadrimomento  $p^\mu$  hacia el eje imaginario, es decir  $p^0 \rightarrow ip^0$ . De esta forma, tras una rotación de Wick (wr) tenemos

$$p_M^2 = (p^0)^2 - (\vec{p})^2 \xrightarrow{wr} -(p^0)^2 - (\vec{p})^2 = -p_E^2.$$

Así mismo, la rotación de Wick afectará a cualquier producto interno y al jacobiano de integración: Al aplicar una rotación de Wick a nuestras ecuaciones obtendremos también

Minkowski		Euclides
$k^2$	$\xrightarrow{wr}$	$-k_E^2 \equiv -k^2$
$k \cdot p$	$\xrightarrow{wr}$	$-k_E \cdot p_E \equiv -k \cdot p$
$d^4\omega$	$\xrightarrow{wr}$	$id^4\omega_E \equiv id^4\omega$

Sin embargo no sólo los productos punto se ven afectados por una rotación de Wick, si no también la estructura de las matrices de Dirac y sus propiedades sufren un ligero cambio. Tomando en cuenta que tras una rotación de Wick  $\omega^2 \rightarrow -\omega_E^2 \equiv -\omega^2$ , de las ecuaciones (5.7)-(5.14) vemos entonces que

$$\begin{aligned} \text{Minkowski} &\rightarrow \text{Euclides} \\ \not\omega \gamma^\mu \not\omega &= -\frac{1}{2}\omega^2 \gamma^\mu \rightarrow \frac{1}{2}\omega^2 \gamma_{wr}^\mu \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\not\omega \not\psi \gamma^\mu \not\omega \not\psi = \omega^2 u^\mu \not\psi \rightarrow -\omega^2 u_{wr}^\mu \not\psi_{wr} \quad (5.16)$$

$$\not\psi \not\omega \gamma^\mu \not\psi \not\omega = \omega^2 \not\psi v^\mu \rightarrow -\omega^2 \not\psi_{wr} v_{wr}^\mu \quad (5.17)$$

$$\not\omega \not\psi \gamma^\mu \not\psi \not\omega = -\frac{1}{2}\omega^2 \not\psi \gamma^\mu \not\psi \rightarrow \frac{1}{2}\omega^2 \not\psi_{wr} \gamma_{wr}^\mu \not\psi_{wr} \quad (5.18)$$

$$\not\psi \not\omega \gamma^\mu \not\psi \not\omega = -\frac{1}{2}\omega^2 \not\psi \gamma^\mu \not\psi \rightarrow \frac{1}{2}\omega^2 \not\psi_{wr} \gamma_{wr}^\mu \not\psi_{wr} \quad (5.19)$$

$$\not\omega \not\psi \gamma^\mu \not\psi \not\omega = \omega^2 \gamma^\mu \not\psi \not\psi \rightarrow -\omega^2 \gamma_{wr}^\mu \not\psi_{wr} \not\psi_{wr} \quad (5.20)$$

$$\not\psi \not\psi \gamma^\mu \not\omega \not\omega = \omega^2 \not\psi \not\psi \gamma^\mu \rightarrow -\omega^2 \not\psi_{wr} \not\psi_{wr} \gamma_{wr}^\mu \quad (5.21)$$

$$\not\omega \not\psi \gamma^\mu \not\omega \not\psi = \omega^4 \gamma^\mu \rightarrow \omega^4 \gamma_{wr}^\mu, \quad (5.22)$$

donde el subíndice  $wr$  denota una rotación de Wick sobre las matrices o los *slashes*<sup>1</sup>. Por simplicidad en la notación omitimos éste subíndice en los cálculos, sin embargo hay que tener siempre presente durante los cálculos cuáles objetos están escritos en su representación Euclidiana (los productos punto) y cuales no (las matrices de Dirac y los *slashes*).

---

<sup>1</sup>Estos objetos deberían ser reescritos en su forma Euclidiana tras la rotación de Wick, sin embargo resulta más cómodo etiquetarlos con el subíndice  $wr$

# Apéndice C

## Parametrización de Feynman

La parametrización de Feynman relaciona expresiones en las cuales el denominador es un producto complicado de funciones, con expresiones en las cuales el denominador es una simple suma de dichas funciones. En particular, las parametrizaciones de Feynman que se ocupan en esta tesis son:

$$\frac{1}{a_1 a_2 a_3} = 2! \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \int_0^1 dx_3 \frac{\delta(1 - x_1 - x_2 - x_3)}{[a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3]^3}, \quad (5.23)$$

$$\frac{1}{a_1^2 a_2 a_3} = 3! \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \int_0^1 dx_3 \frac{x_1 \delta(1 - x_1 - x_2 - x_3)}{[a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3]^4}, \quad (5.24)$$

$$\frac{1}{a_1^2 a_2^2 a_3} = 4! \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \int_0^1 dx_3 \frac{x_1 x_2 \delta(1 - x_1 - x_2 - x_3)}{[a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3]^5}, \quad (5.25)$$

siendo las  $a_i$ 's funciones que pueden depender de algún parámetro, digamos  $\omega$  (la dependencia de este parámetro se escoge a conveniencia, para fines prácticos).

### Parametrizaciones para el diagrama Abeliano

Usando (5.23), con  $a_3 = \omega^2$ ,  $a_2 = [(p - \omega)^2 + m^2]$  y  $a_1 = [(k - \omega)^2 + m^2]$  (renombrando  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$  y  $x_3 = z$ ), reescribimos la siguiente integral:

$$\begin{aligned} & \int d^4\omega \frac{f(\omega)}{\omega^2 [(p - \omega)^2 + m^2] [(k - \omega)^2 + m^2]} \\ &= 2! \int d^4\omega \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz \frac{f(\omega) \delta(1 - x - y - z)}{[x [(k - \omega)^2 + m^2] + y [(p - \omega)^2 + m^2] + z\omega^2]^3} \\ &= 2 \int d^4\omega \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{f(\omega)}{[\omega^2 - x\omega^2 - y\omega^2 + y(p - \omega)^2 + x(k - \omega)^2 + xm^2]^3} \end{aligned} \quad (5.26)$$

Podemos reescribir el denominador de la expresión anterior de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
& \omega^2 - x\omega^2 - y\omega^2 + y(p - \omega)^2 + ym^2 + x(k - \omega)^2 + xm^2 \\
&= \omega^2 - x\omega^2 - y\omega^2 + yp^2 - 2yp \cdot \omega + y\omega^2 + xk^2 - 2xk \cdot \omega + x\omega^2 + ym^2 + xm^2 \\
&= \omega^2 - 2yp \cdot \omega - 2xk \cdot \omega + xk^2 + yp^2 + ym^2 + xm^2 \\
&= \omega^2 - 2\omega \cdot (yp + xk) + (yp + xk)^2 - (yp + xk)^2 + xk^2 + yp^2 + ym^2 + xm^2 \\
&= [\omega - (yp + xk)]^2 - y^2p^2 - 2yxk \cdot p - x^2k^2 + xk^2 + yp^2 + ym^2 + xm^2 \\
&= [\omega - yp - xk]^2 + p^2y(1 - y) + k^2x(1 - x) - 2yxk \cdot p + ym^2 + xm^2,
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \omega^2 - x\omega^2 - y\omega^2 + y(p - \omega)^2 + ym^2 + x(k - \omega)^2 + xm^2 = \omega'^2 + L, \quad (5.27)$$

donde

$$\omega' \equiv \omega - yp - xk$$

y

$$L \equiv y(1 - y)p^2 + x(1 - x)k^2 - 2xyk \cdot p + (x + y)m^2. \quad (5.28)$$

Sustituyendo (5.27) en (5.26), y reescribiendo  $f(\omega) = f(\omega' + yp + xk)$  en el numerador (con  $d\omega = d\omega'$ ), obtenemos (después de renombrar  $\omega' \rightarrow \omega$ ):

$$\int d^4\omega \frac{f(\omega)}{\omega^2 [(p - \omega)^2 + m^2] [(k - \omega)^2 + m^2]} = 2 \int d^4\omega \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{f(\omega + yp + xk)}{[\omega^2 + L]^3}. \quad (5.29)$$

Ahora, usando (5.24), con  $a_1 = \omega^2$ ,  $a_2 = [(p - \omega)^2 + m^2]$  y  $a_3 = [(k - \omega)^2 + m^2]$  (renombrando  $x_1 = z$ ,  $x_2 = y$  y  $x_3 = x$ ), reescribimos la siguiente integral:

$$\begin{aligned}
& \int d^4\omega \frac{f(\omega)}{\omega^4 [(p - \omega)^2 + m^2] [(k - \omega)^2 + m^2]} \\
&= 3! \int d^4\omega \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz \frac{zf(\omega)\delta(1 - x - y - z)}{[x[(k - \omega)^2 + m^2] + y[(p - \omega)^2 + m^2] + z\omega^2]^4};
\end{aligned}$$

de manera análoga al procedimiento para obtener la ecuación (5.26), la expresión anterior se reduce a:

$$\begin{aligned}
& \int d^4\omega \frac{f(\omega)}{\omega^4 [(p - \omega)^2 + m^2] [(k - \omega)^2 + m^2]} \\
&= 3! \int d^4\omega \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{(1 - x - y)f(\omega + yp + xk)}{[\omega^2 + L]^4}.
\end{aligned} \quad (5.30)$$

## Parametrizaciones para el diagrama no-Abeliano

Es muy sencillo demostrar, siguiendo un procedimiento similar al de arriba, que utilizando las ecuaciones (5.23), (5.24) y (5.25) con  $a_1 = (k - \omega)^2$ ,  $a_2 = (p - \omega)^2$  y  $a_3 = \omega^2 + m^2$  (renombrando  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$  y  $x_3 = z$ ), obtenemos respectivamente las siguientes parametrizaciones:

$$\int d^4\omega \frac{f(\omega)}{(k - \omega)^2 (p - \omega)^2 [\omega^2 + m^2]} = 2! \int d^4\omega \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{f(\omega + yp + xk)}{[\omega^2 + L]^3} \quad (5.31)$$

$$\int d^4\omega \frac{f(\omega)}{(k - \omega)^4 (p - \omega)^2 [\omega^2 + m^2]} = 3! \int d^4\omega \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{x f(\omega + yp + xk)}{[\omega^2 + L]^4} \quad (5.32)$$

$$\int d^4\omega \frac{f(\omega)}{(k - \omega)^4 (p - \omega)^4 [\omega^2 + m^2]} = 4! \int d^4\omega \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{xy f(\omega + yp + xk)}{[\omega^2 + L]^5} \quad (5.33)$$

donde ahora  $L$  se define como

$$L \equiv y(1 - y)p^2 + x(1 - x)k^2 - 2xyk \cdot p + (1 - x - y)m^2, \quad (5.34)$$

la cual no debemos confundir con la definición (5.28) para el diagrama Abeliano, sin embargo decidimos ocupar la misma variable puesto que en el límite  $k^2 \gg p^2 \gg m^2$  las definiciones (5.28) y (5.34) son aproximadamente iguales.

Utilizando la parametrización (5.24) con  $a_1 = (p - \omega)^2$ ,  $a_2 = (k - \omega)^2$  y  $a_3 = \omega^2 + m^2$  (renombrando  $x_1 = y$ ,  $x_2 = x$  y  $x_3 = z$ ), obtenemos:

$$\int d^4\omega \frac{f(\omega)}{(k - \omega)^2 (p - \omega)^4 [\omega^2 + m^2]} = 3! \int d^4\omega \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{y f(\omega + yp + xk)}{[\omega^2 + L]^4} \quad (5.35)$$

con  $L$  dado por (5.34).



# Apéndice D

## Integrales Euclidianas

Recordemos que, en el espacio Euclidiano de 3 dimensiones, la integral sobre todo el espacio ( $\mathbb{R}^3$ ) de una función  $f(\vec{r})$  que depende de la posición  $\vec{r}$ , se escribe en coordenadas esféricas como

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{r} f(\vec{r}) = \int_0^\infty dr r^2 \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi f(\vec{r}).$$

La generalización de esta integral al espacio Euclidiano de 4 dimensiones es

$$\int_E d^4\omega f(\vec{\omega}) = \int_0^\infty d\omega \omega^3 \int_0^\pi d\alpha \sin^2\alpha \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi f(\vec{\omega}), \quad (5.36)$$

donde  $\omega = |\vec{\omega}|$  en el lado derecho de la ecuación. Supongamos que  $f(\vec{\omega})$  es en realidad sólo función de la norma de  $\vec{\omega}$ , lo cual denotamos como  $f(\omega^2)$ ; podemos integrar entonces el lado izquierdo de la ecuación (5.36), de manera trivial, respecto a  $\varphi$ ,  $\theta$  y  $\alpha$ , obteniendo

$$\int_E d^4\omega f(\omega^2) = 2\pi^2 \int_0^\infty d\omega \omega^3 f(\omega^2).$$

Debido a que estamos integrando sobre todo el espacio, resulta conveniente tomar los límites de integración de 0 a  $\Lambda$  para  $\omega$  en el lado izquierdo de la ecuación anterior, y posteriormente tomar el límite  $\Lambda \rightarrow \infty$ ; en el contexto de esta tesis, esta técnica es llamada *corte ultravioleta* y resulta de gran utilidad para regularizar divergencias en las integrales. Aplicando el corte ultravioleta en la expresión anterior obtenemos

$$\int_E d^4\omega f(\omega^2) \stackrel{\Lambda \rightarrow \infty}{=} 2\pi^2 \int_0^\Lambda d\omega \omega^3 f(\omega^2). \quad (5.37)$$

Notando que

$$d(\omega^2) = 2\omega d\omega,$$

podemos reescribir entonces a la ecuación (5.37) como

$$\int_E d^4\omega f(\omega^2) \stackrel{\Lambda^2 \rightarrow \infty}{=} \pi^2 \int_0^{\Lambda^2} d\omega^2 \omega^2 f(\omega^2). \quad (5.38)$$

### Algunas integrales útiles

Una de las integrales con las que nos encontraremos en esta tesis es:

$$\int_E \frac{d^4\omega}{[\omega^2 + L]^3}.$$

Utilizando la ecuación (5.38) con  $f(\omega^2) = \frac{1}{[\omega^2 + L]^3}$ , vemos entonces que

$$\int_E \frac{d^4\omega}{[\omega^2 + L]^3} \stackrel{\Lambda^2 \rightarrow \infty}{=} \pi^2 \int_0^{\Lambda^2} \frac{d\omega^2 \omega^2}{[\omega^2 + L]^3}; \quad (5.39)$$

utilizando el cambio de variable  $u \equiv \omega^2$  tenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^{\Lambda^2} \frac{d\omega^2 \omega^2}{[\omega^2 + L]^3} &= \int_0^{\Lambda^2} \frac{du u}{[u + L]^3} \\ &= -\frac{1}{2} \left[ \frac{u}{[u + L]^2} \right]_0^{\Lambda^2} + \frac{1}{2} \int_0^{\Lambda^2} \frac{u}{[u + L]^2} \\ &= -\frac{\Lambda^2}{[\Lambda^2 + L]^2} - \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{[u + L]} \right]_0^{\Lambda^2} \\ &= -\frac{\Lambda^2}{[\Lambda^2 + L]^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{[\Lambda^2 + L]} + \frac{1}{2L}, \end{aligned}$$

de lo cual vemos que

$$\int_0^{\Lambda^2} \frac{d\omega^2 \omega^2}{[\omega^2 + L]^3} \stackrel{\Lambda^2 \rightarrow \infty}{=} \frac{1}{2L};$$

sustituyendo este resultado en (5.39) obtenemos finalmente que

$$\int_E \frac{d^4\omega}{[\omega^2 + L]^3} \stackrel{\Lambda^2 \rightarrow \infty}{=} \frac{\pi^2}{2L}. \quad (5.40)$$

Notemos que

$$\int_E \frac{d^4\omega}{[\omega^2 + L]^4} = -\frac{1}{3} \frac{d}{dL} \int_E \frac{d^4\omega}{[\omega^2 + L]^3} \stackrel{\Lambda^2 \rightarrow \infty}{=} -\frac{1}{3} \frac{d}{dL} \left[ \frac{\pi^2}{2L} \right],$$

de esta manera

$$\int_E \frac{d^4\omega}{[\omega^2 + L]^4} \stackrel{\Lambda^2 \rightarrow \infty}{=} \frac{\pi^2}{6L^2}. \quad (5.41)$$

Nuevamente notemos que

$$\int_E \frac{d^4\omega}{[\omega^2 + L]^5} = -\frac{1}{4} \frac{d}{dL} \int_E \frac{d^4\omega}{[\omega^2 + L]^4} \stackrel{\Lambda^2 \rightarrow \infty}{=} -\frac{1}{4} \frac{d}{dL} \left[ \frac{\pi^2}{6L^2} \right],$$

de esta manera

$$\int_E \frac{d^4\omega}{[\omega^2 + L]^5} \stackrel{\Lambda^2 \rightarrow \infty}{=} \frac{\pi^2}{12L^3}. \quad (5.42)$$

De manera similar podemos obtener los siguientes resultados útiles en esta tesis:

$$\int_E \frac{d^4\omega \omega^2}{[\omega^2 + L]^3} \stackrel{\Lambda^2 \rightarrow \infty}{=} \pi^2 \left\{ \log \frac{\Lambda^2}{L} - \frac{3}{2} \right\} \quad (5.43)$$

$$\int_E \frac{d^4\omega \omega^2}{[\omega^2 + L]^4} \stackrel{\Lambda^2 \rightarrow \infty}{=} \frac{\pi^2}{3L} \quad (5.44)$$

$$\int_E \frac{d^4\omega \omega^2}{[\omega^2 + L]^5} \stackrel{\Lambda^2 \rightarrow \infty}{=} \frac{\pi^2}{12L^2} \quad (5.45)$$

$$\int_E \frac{d^4\omega \omega^4}{[\omega^2 + L]^3} \stackrel{\Lambda^2 \rightarrow \infty}{=} \pi^2 \left\{ \Lambda^2 - 3L \log \frac{\Lambda^2}{L} + \frac{5L}{3} \right\} \quad (5.46)$$

$$\int_E \frac{d^4\omega \omega^4}{[\omega^2 + L]^4} \stackrel{\Lambda^2 \rightarrow \infty}{=} \pi^2 \left\{ \log \frac{\Lambda^2}{L} - \frac{11}{16} \right\} \quad (5.47)$$

$$\int_E \frac{d^4\omega \omega^4}{[\omega^2 + L]^5} \stackrel{\Lambda^2 \rightarrow \infty}{=} \frac{\pi^2}{4L} \quad (5.48)$$

$$\int_E \frac{d^4\omega \omega^6}{[\omega^2 + L]^3} \stackrel{\Lambda^2 \rightarrow \infty}{=} \pi^2 \left\{ \frac{\Lambda^4}{2} - 3L\Lambda^2 + 6L^2 \log \frac{\Lambda^2}{L} - \frac{7L^2}{2} \right\} \quad (5.49)$$

$$\int_E \frac{d^4\omega \omega^6}{[\omega^2 + L]^4} \stackrel{\Lambda^2 \rightarrow \infty}{=} \pi^2 \left\{ \Lambda^2 - 4L \log \frac{\Lambda^2}{L} + \frac{13L}{3} \right\} \quad (5.50)$$

$$\int_E \frac{d^4\omega \omega^6}{[\omega^2 + L]^5} \stackrel{\Lambda^2 \rightarrow \infty}{=} \pi^2 \left\{ \log \frac{\Lambda^2}{L} - \frac{25}{12} \right\}. \quad (5.51)$$



# Apéndice E

## Integrales $\int dx \int dz$

En éste apéndice se calcularán algunas de las integrales respecto a los parámetros de Feynman que aparecen en éste trabajo de tesis. Para ello es conveniente definir

$$L \equiv y(1-y)p^2 + x(1-x)k^2 - 2xyk \cdot p + \tilde{a}(x+y)m^2 + \tilde{b}m^2, \quad (5.52)$$

donde  $\tilde{a}$  y  $\tilde{b}$  son parámetros <sup>2</sup> tales que, cuando  $\tilde{a} = 1$  y  $\tilde{b} = 0$  recuperamos la expresión (5.28) para L en el diagrama Abeliano, mientras que cuando  $\tilde{a} = -1$  y  $\tilde{b} = 1$  recuperamos la expresión (5.28) para L en el diagrama no-Abeliano. Sin embargo, en éste trabajo de tesis utilizamos el cambio de variable  $y = z(1-x)$ , por lo que (5.52) se reescribe como

$$L = a + bx + cx^2, \quad (5.53)$$

donde  $a = p^2z - p^2z^2 + m^2z + \tilde{b}m^2$ ,  $b = k^2 - 2k \cdot pz - p^2z + 2p^2z^2 + (\tilde{a} - z)m^2$  y  $c = -k^2 + 2k \cdot pz - p^2z^2$ . Entonces, en el límite  $k^2 \gg (p^2, m^2)$  es claro que

$$\log L = \log(a + bx + cx^2) \approx \log(k^2x - k^2x^2) = \log[k^2x(1-x)],$$

entonces, a primeros órdenes

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy x^j y^l \log L &= \int_0^1 dx \int_0^1 dz z^l x^j (1-x)^{l+1} \log L \\ &\approx \int_0^1 dx \int_0^1 dz z^l x^j (1-x)^{l+1} \log[k^2x(1-x)] \\ &\approx \int_0^1 dx \int_0^1 dz z^l x^j (1-x)^{l+1} \log k^2. \end{aligned} \quad (5.54)$$

---

<sup>2</sup>es conveniente la introducción de estos parámetros pues, como veremos a lo largo de éste apéndice, a órdenes dominantes en  $k$  las integrales no dependerán de dichos parámetros, por lo que podremos usar los resultados aquí obtenidos tanto para el caso Abeliano como para el caso no-Abeliano.

Similarmente es posible mostrar que

$$\int_0^1 dx x^j (1-x)^l \log \frac{\Lambda}{L} \approx \int_0^1 dx x^j (1-x)^l \log \frac{\Lambda}{k^2} \quad (5.55)$$

A partir de ahora quedará sobreentendido que, cuando queramos escribir una expresión  $H(k, p, m)$  a primeros órdenes en  $k$ , simplemente escribiremos la expansión de Taylor de  $H$  para  $p$  y  $m$  alrededor de cero<sup>3</sup> hasta términos lineales en  $p$  y  $m$ , es decir

$$H(k, p, m) \approx \sum_{j,k=0}^{j,k=1} \left[ \frac{\partial^{j+k} H}{\partial p^j \partial m^k} \right]_{p,m=0} p^j m^k.$$

## Resultados preliminares

A continuación presentamos algunos resultados preliminares que serán de gran utilidad para las expresiones que integraremos más adelante. Primero definimos

$$\Delta \equiv 4ac - b^2,$$

donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son las funciones definidas en (5.53). A primeros órdenes en  $k$  tenemos que

$$\Delta = -k^4 + 4k^2 k \cdot pz + \mathcal{O}(k^2).$$

A partir de ahora debemos tener presente que sólo estamos interesados en términos que contengan logaritmos principales ( $\log k^2$ ), pues son estos términos los que nos interesan en la tesis. El primer resultado preliminar que necesitamos es el siguiente:

$$\log \left( \frac{b + 2cx - \sqrt{-\Delta}}{b + 2cx + \sqrt{-\Delta}} \right) \Big|_{x=0}^{x=1} = 2 \log \left( \frac{k^2}{p^2} \right), \quad (5.56)$$

esto considerando sólo logaritmos principales. Otro resultado preliminar, considerando sólo logaritmos principales, es:

$$\log L \Big|_{x=0}^{x=1} = 0. \quad (5.57)$$

## Integrales útiles

En [18] vemos que

$$\int_0^1 \frac{dx}{L} = \frac{1}{\sqrt{-\Delta}} \log \left( \frac{b + 2cx - \sqrt{-\Delta}}{b + 2cx + \sqrt{-\Delta}} \right) \Big|_{x=0}^{x=1}.$$

---

<sup>3</sup>Dado que estamos en el límite  $k^2 \gg (p^2, m^2)$ , podemos considerar  $p^2, m^2 \rightarrow 0$ .

Entonces, tomando  $\frac{1}{\sqrt{-\Delta}}$  a primeros órdenes en  $k$  y utilizando (5.56), obtenemos

$$\int_0^1 \frac{dx}{L} = \frac{2}{k^2} \left( 1 + \frac{2k \cdot p}{k^2} z \right) \log \frac{k^2}{p^2}. \quad (5.58)$$

Algunas otras integrales obtenidas de [18] son:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x dx}{L} &= \frac{1}{2c} \log L \Big|_0^1 - \frac{b}{2c} \int_0^1 \frac{dx}{L} \\ \int_0^1 \frac{x^2 dx}{L} &= \frac{1}{c} - \frac{b}{2c^2} \log L \Big|_0^1 + \frac{b^2 - 2ac}{2c^2} \int_0^1 \frac{dx}{L} \\ \int_0^1 \frac{x^3 dx}{L} &= \frac{1}{2c} - \frac{b}{c^2} + \frac{b^2 - ac}{2c^3} \log L \Big|_0^1 - \frac{b(b^2 - 3ac)}{2c^2} \int_0^1 \frac{dx}{L} \\ \int_0^1 \frac{dx}{L^2} &= \frac{b + 2cx}{\Delta L} \Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{2c}{\Delta} \int_0^1 \frac{dx}{L} \\ \int_0^1 \frac{x dx}{L^2} &= -\frac{2a + bx}{\Delta L} \Big|_{x=0}^{x=1} - \frac{b}{\Delta} \int_0^1 \frac{dx}{L} \\ \int_0^1 \frac{x^2 dx}{L^2} &= \frac{ab + (b^2 - 2ac)x}{c\Delta L} \Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{2a}{\Delta} \int_0^1 \frac{dx}{L} \\ \int_0^1 \frac{x^3 dx}{L^2} &= \frac{1}{2c^2} \log L \Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{a(2ac - b^2) + b(3ac - b^2)x}{c^2\Delta L} \Big|_{x=0}^{x=1} - \frac{b(6ac - b^2)}{2c^2\Delta} \int_0^1 \frac{dx}{L} \\ \int_0^1 \frac{dx}{L^3} &= \frac{b + 2cx}{\Delta} \left\{ \frac{1}{2L^2} + \frac{3c}{\Delta L} \right\} \Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{6c^2}{\Delta^2} \int_0^1 \frac{dx}{L} \\ \int_0^1 \frac{x dx}{L^3} &= -\frac{2a + bx}{2\Delta L^2} \Big|_{x=0}^{x=1} - \frac{3b(b + 2cx)}{2\Delta^2 L} \Big|_{x=0}^{x=1} - \frac{3bc}{\Delta^2} \int_0^1 \frac{dx}{L} \\ \int_0^1 \frac{x^2 dx}{L^3} &= -\frac{ab + (b^2 - 2ac)x}{2c\Delta L^2} \Big|_{x=0}^{x=1} - \frac{(2ac + b^2)(b + 2cx)}{2c\Delta^2 L} \Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{2ac + b^2}{\Delta^2} \int_0^1 \frac{dx}{L} \\ \int_0^1 \frac{x^3 dx}{L^3} &= -\left( \frac{x^2}{c} + \frac{abx}{c\Delta} + \frac{2a^2}{c\Delta} \right) \frac{1}{2L^2} \Big|_{x=0}^{x=1} - \frac{3ab}{2c\Delta} \int_0^1 \frac{dx}{L}, \end{aligned}$$

y adicionalmente las fórmulas de recurrencia

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^j dx}{L^n} &= -\frac{x^{j-1}}{(2n - j - 1)cL^{n-1}} \Big|_{x=0}^{x=1} - \frac{(n - j)b}{(2n - j - 1)c} \int_0^1 \frac{x^{j-1} dx}{L^n} \\ &\quad + \frac{(j - 1)a}{(2n - j - 1)c} \int_0^1 \frac{x^{j-2} dx}{L^n}. \end{aligned}$$

Esta expresión no sirve para  $j = 2n - 1$ ; para este caso utilizamos

$$\int_0^1 \frac{x^{2n-1} dx}{L^n} = \frac{1}{c} \int_0^1 \frac{x^{2n-3} dx}{L^{n-1}} - \frac{a}{c} \int_0^1 \frac{x^{2n-3} dx}{L^n} - \frac{b}{c} \int_0^1 \frac{x^{2n-2} dx}{L^n}.$$

Si tomamos los coeficientes de las expresiones anteriores sólo a primeros órdenes en  $k$ , nos daremos cuenta que no generan logaritmos principales, entonces de (5.57) y (5.58) vemos que, considerando sólo los términos que generen dichos logaritmos principales, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x dx}{L} &= -\frac{b}{2c} \int_0^1 \frac{dx}{L} \\ \int_0^1 \frac{x^2 dx}{L} &= \frac{b^2 - 2ac}{2c^2} \int_0^1 \frac{dx}{L} \\ \int_0^1 \frac{x^3 dx}{L} &= -\frac{b(b^2 - 3ac)}{2c^2} \int_0^1 \frac{dx}{L} \\ \int_0^1 \frac{dx}{L^2} &= \frac{2c}{\Delta} \int_0^1 \frac{dx}{L} \\ \int_0^1 \frac{x dx}{L^2} &= -\frac{b}{\Delta} \int_0^1 \frac{dx}{L} \\ \int_0^1 \frac{x^2 dx}{L^2} &= \frac{2a}{\Delta} \int_0^1 \frac{dx}{L} \\ \int_0^1 \frac{x^3 dx}{L^2} &= -\frac{b(6ac - b^2)}{2c^2 \Delta} \int_0^1 \frac{dx}{L} \\ \int_0^1 \frac{dx}{L^3} &= \frac{6c^2}{\Delta^2} \int_0^1 \frac{dx}{L} \\ \int_0^1 \frac{x dx}{L^3} &= -\frac{3bc}{\Delta^2} \int_0^1 \frac{dx}{L} \\ \int_0^1 \frac{x^2 dx}{L^3} &= \frac{2ac + b^2}{\Delta^2} \int_0^1 \frac{dx}{L} \\ \int_0^1 \frac{x^3 dx}{L^3} &= -\frac{3ab}{2c\Delta} \int_0^1 \frac{dx}{L}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^j dx}{L^n} &= -\frac{(n-j)b}{(2n-j-1)c} \int_0^1 \frac{x^{j-1} dx}{L^n} + \frac{(j-1)a}{(2n-j-1)c} \int_0^1 \frac{x^{j-2} dx}{L^n} \\ \int_0^1 \frac{x^{2n-1} dx}{L^n} &= \frac{1}{c} \int_0^1 \frac{x^{2n-3} dx}{L^{n-1}} - \frac{a}{c} \int_0^1 \frac{x^{2n-3} dx}{L^n} - \frac{b}{c} \int_0^1 \frac{x^{2n-2} dx}{L^n}. \end{aligned}$$

Escribiendo los coeficientes sólo a primeros órdenes en  $k$  y sustituyendo (5.58) en las expresiones anteriores obtenemos entonces

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{L} &= \frac{2}{k^2} \left( 1 + \frac{2k \cdot p}{k^2} z \right) \log \frac{k^2}{p^2} & j = 0 \\ \int_0^1 \frac{x^j dx}{L} &= \frac{1}{k^2} \left( 1 + \frac{2k \cdot p}{k^2} z \right) \log \frac{k^2}{p^2} & j \geq 1 \\ \int_0^1 \frac{x^j dx}{L^2} &= 2(2-j) \frac{1}{k^4} \left( 1 + \frac{4k \cdot p}{k^2} z \right) \log \frac{k^2}{p^2} & j = 0, 1 \\ \int_0^1 \frac{x^j dx}{L^2} &= (2-j) \frac{1}{k^4} \left( 1 + \frac{4k \cdot p}{k^2} z \right) \log \frac{k^2}{p^2} & j \geq 2 \\ \int_0^1 \frac{x^j dx}{L^3} &= (j-4)(j-3) \frac{1}{k^6} \left( 1 + \frac{6k \cdot p}{k^2} z \right) \log \frac{k^2}{p^2} & j = 0, 1, 2, 3 \\ \int_0^1 \frac{x^j dx}{L^3} &= \frac{(j+4)(j+5)}{2} \frac{1}{k^6} \left( 1 + \frac{6k \cdot p}{k^2} z \right) \log \frac{k^2}{p^2} & j \geq 4. \end{aligned}$$

A partir de las expresiones anteriores es fácil deducir los siguientes resultados útiles para los cálculos en esta tesis:

$$\int_0^1 \frac{(1-x) dx}{L} = \frac{1}{k^2} \left( 1 + \frac{2k \cdot p}{k^2} z \right) \log \frac{k^2}{p^2} \quad (5.59)$$

$$\int_0^1 \frac{x^j (1-x) dx}{L} = 0 \quad j \geq 1 \quad (5.60)$$

$$\int_0^1 \frac{(1-x)^2 dx}{L} = \frac{1}{k^2} \left( 1 + \frac{2k \cdot p}{k^2} z \right) \log \frac{k^2}{p^2} \quad (5.61)$$

$$\int_0^1 \frac{x^j (1-x)^2 dx}{L} = 0 \quad j \geq 1 \quad (5.62)$$

$$\int_0^1 \frac{x^j (1-x) dx}{L^2} = \frac{2}{k^4} \left( 1 + \frac{4k \cdot p}{k^2} z \right) \log \frac{k^2}{p^2} \quad j = 0, 1 \quad (5.63)$$

$$\int_0^1 \frac{x^j (1-x) dx}{L^2} = \frac{1}{k^4} \left( 1 + \frac{4k \cdot p}{k^2} z \right) \log \frac{k^2}{p^2} \quad j \geq 2 \quad (5.64)$$

$$\int_0^1 \frac{x^j (1-x)^2 dx}{L^2} = 0 \quad j = 0, 2, 3, \dots \quad (5.65)$$

$$\int_0^1 \frac{x^j (1-x)^2 dx}{L^2} = \frac{1}{k^4} \left( 1 + \frac{4k \cdot p}{k^2} z \right) \log \frac{k^2}{p^2} \quad j = 1 \quad (5.66)$$

$$\int_0^1 \frac{x^j (1-x) dx}{L^3} = \frac{2(3-j)}{k^6} \left(1 + \frac{6k \cdot p}{k^2} z\right) \log \frac{k^2}{p^2} \quad j = 0, 1, 2, 3 \quad (5.67)$$

$$\int_0^1 \frac{x^j (1-x) dx}{L^3} = \frac{(3-j)}{k^6} \left(1 + \frac{6k \cdot p}{k^2} z\right) \log \frac{k^2}{p^2} \quad j \geq 4 \quad (5.68)$$

$$\int_0^1 \frac{x^j (1-x)^2 dx}{L^3} = \frac{2}{k^6} \left(1 + \frac{6k \cdot p}{k^2} z\right) \log \frac{k^2}{p^2} \quad j = 0, 1, 2 \quad (5.69)$$

$$\int_0^1 \frac{x^j (1-x) dx}{L^3} = \frac{1}{k^6} \left(1 + \frac{6k \cdot p}{k^2} z\right) \log \frac{k^2}{p^2} \quad j \geq 3. \quad (5.70)$$

Es importante notar que estos resultados no dependen de los parámetros  $\tilde{a}$  y  $\tilde{b}$  que introdujimos para diferencial las  $L$ 's de los casos Abelianos y no-Abelianos; esto quiere decir que los resultados anteriores son válidos para ambos casos.

# Bibliografía

- [1] F.J. Dyson, Phys. Rev. **75** (1949) 1736.
- [2] J. Schwinger, Proc. Nat. Acad. Sc. PNAS **37** (1951) 452.
- [3] J.C. Ward, Phys. Rev. **78** (1950) 182.
- [4] H.S. Green, Proc. Phys. Soc. (London) **A66**(1953) 873.
- [5] Y. Takahashi, Nouvo Cimento **6** (1957) 371.
- [6] James S. Ball and Ting-Wai Chiu, Phys. Rev. **D22** (1980) 2542.
- [7] A.I. Davydychev, P. Osland and L. Saks, Phys. Rev. **D63** (2001) 014022.
- [8] D.C. Curtis and M.R. Pennington, Phys. Rev. **D42** (1990) 4165.
- [9] D.C. Curtis and M.R. Pennington, Phys. Rev. **D44** (1991) 536.
- [10] D.C. Curtis, M.R. Pennington and D.A. Walsh, Phys. Lett. **B249** (1990) 528.
- [11] Zhi-Hua Dong, Herman J. Munczek and C.D. Roberts, Phys. Lett. **B333** (1994) 536-544.
- [12] A. Bashir and M.R. Pennington, Phys. Rev. **D50** (1994) 7679.
- [13] A. Bashir and M.R. Pennington, Phys. Rev. **D53** (1996) 4694-4697.
- [14] A. Kisilersü and M.R. Pennington, Phys. Rev. **D79** (2009) 125020.
- [15] A. Bashir, R. Bermudez, L. Chang and C.D. Roberts, Phys. Rev **C85** (2012) 045205.
- [16] A. Kisilersü, M. Rennders and M.R. Pennington, Phys. Rev. **D52** (1995) 1242-1259.
- [17] A. Bashir, A. Kisilersü and M.R Pennington, Phys. Rev. **D57** (1998) 1242-1249.

- [18] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products*. Academic Press (2000), p.78-19.
- [19] D. Espiru, P. Pascual and R. Tarrach, J. Phys. **G7** (1981) 1591.
- [20] E. Braaten and J.P. Leveille, “*Effective Charges and Expansion Parameters in QCD*”, UM-HE-81-22, C81-03-25 (1981).
- [21] M.A. Nowak, M. Praszalowicz and W. Slominski, Annals Phys. **166** (1986) 443.
- [22] L.V. Durg, H.D. Phuoc and O.V. Tarasov, Sov. J. Nucl. Phys. **50** (1989) 1072; Yad. Fiz. **50** (1989) 1726.
- [23] J.C. Taylor, Nucl. Phys. **B33** (1971) 436.
- [24] A.A. Slavnov, Theor. Math. Phys. **10** (1972) 99.