



Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

División de Estudios de Posgrado de la Facultad de
Ingeniería eléctrica

**UNA NUEVA FORMULACIÓN DE DOMINIO
ARMÓNICO EXTENDIDO EN EL DOMINIO
DEL TIEMPO PARA EL ANÁLISIS DE
CONVERTIDORES DE POTENCIA**

TESIS

Que para obtener el título de:
MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA

Presenta:
Ing. Rubén Rodríguez Flores

Director de tesis:
Dr. J. Jesús Rico Melgoza

Morelia, Michoacán, Febrero 2019





**UNA NUEVA FORMULACIÓN DE DOMINIO ARMÓNICO EXTENDIDO EN EL
DOMINIO DEL TIEMPO PARA EL ANÁLISIS DE CONVERTIDORES DE POTENCIA**

Los miembros del Jurado de Examen de Grado **aprueban** la **Tesis de Maestría en Ingeniería Eléctrica** de **Rubén Rodríguez Flores**

Dr. Fernando Ornelas Tellez
Presidente del Jurado

Dr. J. Jesús Rico Melgoza
Director de Tesis

Dr. Norberto García Barriga
Vocal

Dr. Claudio Rubén Fuerte Esquivel
Vocal

Dr. Abner Israel Ramírez Vázquez
Revisor Externo (CINVESTAV-Guadalajara)

Dr. Juan Anzures Marín
Director de la Facultad de Ingeniería Eléctrica - UMSNH
(Por reconocimiento de firmas)

DEDICATORIA

*Agradezco primeramente a Dios, por permitirme llegar a esta etapa de mi vida
y poder cumplir una mas de mis metas.*

*Agradezco a mi padre y madre por el apoyo y confianza que me brindaron. Así
como la formación que me dieron, ayudándome a salir adelante y siempre
motivandomé.*

*A mis hermanos, gracias por formar parte de mi vida en todos los sentidos y
saber que puedo contar con ustedes en todo momento.*

A mi novia, gracias por estar a mi lado apoyandomé en las buenas y malas.

A mis familiares que me brindaron su apoyo para que tuviera esta preparación.

*Quiero agradecer al Dr. J. Jesús Rico Melgoza por todas sus enseñanzas,
consejos y amistad durante todo el tiempo que trabajamos juntos.*

*Agradezco a los profesores del posgrado, ya que de ellos obtuve parte de
formación profesional académica con la que cuento.*

*A todos los amigos que hice durante mi periodo de maestría, gracias por su
amistad y por todos los buenos momentos que compartieron conmigo.*

*A mis sinodales, gracias por las observaciones y aportaciones tan valiosas para
la culminación de esta tesis.*

*Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por el
apoyo económico durante el periodo de maestría.*

Resumen

Esta tesis presenta una re-formulación del dominio armónico extendido (EHD, por sus siglas en inglés) y una nueva metodología llamada dominio armónico extendido doble (DEHD, por sus siglas en inglés) para el análisis de sistemas conmutados, con especial referencia a sistemas convertidores de potencia. Estas metodologías tienen como piedra angular el uso de las series de Fourier para la aproximación de funciones periódicas y la linealización de Carleman. Con base en estas series ortogonales y esta linealización, se logra una transformación del espacio de estado que representa a los sistemas de electrónica de potencia en una formulación de sistemas lineales de parámetro variante (LPV, por sus siglas en inglés) en el dominio de tiempo, de tal manera que conserva las variables de espacio de estado originales en el modelo integrado reformulado. Es decir, que la metodología no requiere un cambio en el sistema de coordenadas.

A diferencia del modelo de dominio armónico extendido (EHD) convencional y el modelo de espacio de estado armónico (HSS, por sus siglas en inglés), que son formulaciones en el dominio de la frecuencia. El EHD lineal invariante con el tiempo y el doble EHD logran varias ventajas, las cuales serán analizadas: 1) las operaciones de conmutación son sustituidas por funciones continuas suaves que facilitan el análisis numérico de los sistemas bajo estudio, 2) puesto que la formulación está basada en series de Fourier, se pueden deducir índices de calidad de la energía dinámicos que juegan un papel importante en la evaluación del desempeño de sistemas de electrónica de potencia, 3) la formulación de sistemas LPV puede ser interpretada bajo la teoría de sistemas bilineales, lo que abre la posibilidad a la aplicación de teorías de control para este tipo de sistema, 4) finalmente debe mencionarse que la teoría de sistemas LPV ofrece un marco para la extensión de conceptos fundamentales de la teoría de sistemas lineales a sistemas no lineales.

En este trabajo se abordará el concepto de estabilidad armónica que es de interés en la comunidad de electrónica de potencia. Finalmente, se incluyen ejemplos ilustrativos destinados a resaltar las principales etapas teóricas del método, así como demostrar la validez y aplicabilidad de estas técnicas.

Palabras Clave: EHD, DEHD, Series de Fourier, Linealización de Carleman y Convertidores de Electrónica de Potencia.

Abstract

This thesis presents a re-formulation of the extended harmonic domain (EHD, for its acronym in English) and a new methodology called dual extended harmonic domain (DEHD, for its acronym in English) for the analysis of switched systems, with special reference to systems power converters. These methodologies have as their cornerstone the use of the Fourier series for the approximation of periodic functions and the linearization of Carleman. Based on these orthogonal series and this linearization, a transformation of the state space representing the power electronics systems is achieved in a formulation of linear systems of variant parameter (LPV) in the time domain, in such a way that it preserves the original state space variables in the reformulated integrated model. That is, the methodology does not require a change in the coordinate system.

Unlike the conventional extended harmonic domain (EHD) model and the harmonic state space model (HSS), which are formulated in the frequency domain. The linear EHD invariant with time and the double EHD achieve several advantages, which will be analyzed: 1) the switching operations are replaced by smooth continuous functions that facilitate the numerical analysis of the systems under study, 2) since the formulation is Based on Fourier series, one can deduce dynamic energy quality indices that play an important role in the evaluation of the performance of power electronics systems, 3) the formulation of LPV systems can be interpreted under the theory of bilinear systems, what opens the possibility to the application of theories of control for this type of system, 4) finally it must be mentioned that the theory of LPV systems offers a framework for the extension of fundamental concepts from the theory of linear systems to non-linear systems.

In this work the concept of harmonic stability that is of interest in the power electronics community will be addressed. Finally, illustrative examples are included to highlight the main theoretical stages of the method, as well as to demonstrate the validity and applicability of these techniques.

Contenido

Dedicatoria	III
Resumen	V
Abstract	VII
Contenido	IX
Lista de Figuras	XI
Lista de Tablas	XIII
Lista de Acrónimos y Símbolos	XV
1. Introducción	1
1.1. Planteamiento del Problema	2
1.2. Estado del Arte	3
1.3. Objetivos de la Tesis	5
1.3.1. Objetivo General	5
1.3.2. Objetivos Particulares	6
1.4. Justificación	6
1.5. Hipótesis	7
1.6. Metodología	7
1.7. Descripción de Capítulos	8
1.8. Publicaciones	9
2. Matemáticas Preliminares: Teoría de Matrices Operacionales para la Serie Trigonométrica de Fourier	11
2.1. Aproximación por Series de Fourier	12
2.1.1. Ejemplo	13
2.2. Matriz Operacional de Diferenciación	14
2.2.1. Ejemplo	16
2.3. Matriz Operacional de Desfasamiento	17
2.3.1. Ejemplo	18
2.4. Matriz Operacional de Producto	19
2.4.1. Ejemplo	24
2.5. Conclusiones	24

3. Formatos del Dominio Armónico Extendido	25
3.1. Formatos de Sistemas Conmutados	26
3.2. Dominio Armónico Extendido Una Re-formulación LPV	27
3.2.1. Ejemplo	31
3.3. Doble Dominio Armónico Extendido	35
3.3.1. Ejemplo	38
3.4. Análisis de Estabilidad en Sistemas LPV	40
3.4.1. Ejemplo	40
3.5. Conclusiones	41
4. Modulación de Ancho de Pulso en EHD	43
4.1. Modulación del Seguimiento de Borde de una Frecuencia Constante	44
4.2. Señal Moduladora de Ancho de Pulso PWM Sinusoidal: Caso Bipolar	45
4.3. Conclusiones	52
5. Casos de Estudio	53
5.1. Ecuación de Mathieu	53
5.2. Convertidor Boost	58
5.3. STATCOM Trifásico	63
5.4. Conclusiones	68
6. Conclusiones y Trabajos Futuros	69
6.1. Conclusiones Generales	69
6.2. Trabajos Futuros	70
Referencias	71

Lista de Figuras

2.1. Desfasamiento de la función periódica de Mathieu.	19
3.1. Función periódica $\sigma(t)$	31
3.2. Variación de los coeficientes de Fourier: (a) Coeficiente $a_1(t)$ y (b) Coeficiente $b_1(t)$	32
3.3. Respuesta de las variables de estado del sistema: (a) variable de estado $x_1(t)$ y (b) variable de estado $x_2(t)$	34
3.4. Diagrama de Flujo.	36
4.1. Parametrización de la señal PWM a través de la serie de Fourier.	44
4.2. Proceso de un PWM sinusoidal, (a) señales de entrada y (b) Señal de conmutación PWM $\sigma(t)$	46
4.3. Coeficiente de Fourier posterior a una aproximación por series de Fourier: (a) a_0 y (b) a_1	47
4.4. Los tiempos de conmutación dentro de un período de la señal portadora se determinan utilizando: (a) muestreo natural, (b) muestreo regular y (c) muestreo regular asimétrico.	49
5.1. Respuesta en dominio del tiempo de los espacios de estado de la ecuación de Mathieu.	57
5.2. Diagrama de estabilidad para la ecuación de Mathieu.	58
5.3. Diagrama del convertidor Boost.	58
5.4. Señal PWM de un ciclo de trabajo que cambia de 50% a 60%.	59
5.5. Simulación en el dominio del tiempo de un simple convertidor Boost.	60
5.6. Validación del modelo ante presencia de transitorios.	61
5.7. Valores característicos del convertidor Boost.	62
5.8. Diagrama un STATCOM trifásico.	63
5.9. Funciones de conmutación del STATCOM: (a) PWM para la fase a , (b) PWM para la fase b y (c) PWM para la fase c	64
5.10. Espectro armónico de PWM_{AB}	65
5.11. Posición $A[1, 1]$ posterior a la aplicación DEHD con dimensión $\mathbb{R}^{121 \times 121}$	66
5.12. Simulación en el dominio del tiempo del STATCOM trifásico: (a) corriente de la fase a , (b) corriente de la fase b , (c) corriente de la fase c y (d) voltaje del capacitor V_{dc}	67

Lista de Tablas

5.1. Coeficientes de Fourier para las expansiones en serie de los elementos de la matriz $A(t)$	55
5.2. Parametros del convertidor Boost.	59
5.3. Coeficientes de Fourier de la función de conmutación $s(t)$	60

Lista de Acrónimos y Símbolos

Lista de Acrónimos

EHD	Extended Harmonic Domain.
DEHD	Double Extended Harmonic Domain.
GAVM	Generalized Average Value Models.
HSS	Harmonic State Space.
LTP	Linear Time-Periodic.
LPV	Linear Parameter-Varying.
LTI	Linear Time-Invariant.
TD	Time Domain.
PE	Power Electronic.
PEC	Power Electronic Converter.
PWM	Pulse Width Modulation.
STATCOM	Static Compensator.

Lista de Símbolos

A	Matriz característica del sistema.
F	Función de forzamiento.
$\sigma(t)$	Función periódica.
N_h	Numero de armónicos.
ω	Velocidad angular.
D	Matriz de diferenciación.
ϕ	Ángulo de desfase.
\otimes	Producto Kronecker.
θ	Parámetro variante.
T	Periodo fundamental.
T_s	Periodo de la función triangular portadora.
S	Matriz de rotación.
X	Vector de variables de estado.
\mathcal{X}	Vector de variables de estado de refundición.

Capítulo 1

Introducción

La electrónica de potencia (PE, por sus siglas en inglés) es la tecnología asociada con una conversión eficiente, control y acondicionamiento de la energía eléctrica por medios estáticos a partir de fuentes disponibles de energía, y se logra a partir de dispositivos semiconductores basados en PE. En el año de 1948, se da inicio a la primera revolución electrónica con la invención del transistor de silicio desarrollado por Bardeen, Bratain y Schockley en Bell Telephone Laboratories [Rashid, 2011]. Diez años más tarde en 1958, General Electric Company desarrolló un tiristor comercial dando pie a la segunda revolución electrónica y consecuente al comienzo de una nueva era de electrónica de potencia [Rashid, 2011]. Desde entonces, se han introducido muchos tipos diferentes de dispositivos semiconductores de potencia y técnicas de conversión. Actualmente esta tecnología se ha utilizado ampliamente en aplicaciones de la vida diaria, desarrollándose con respecto a niveles de energía, en aplicaciones de muy baja potencia como lo son los equipos electrónicos portátiles y a muy alta potencia en sistemas de conversión y transmisión de energía eléctrica. Logrando en pocas décadas un gran avance en las tecnologías industriales, de transporte, aeroespacial, comercial y residencial. Dado que su uso principal está relacionado con el manejo de energía, hay una constante investigación y desarrollo tecnológico enfocado en dar solución y mejorar la eficiencia energética en todos los niveles de potencia.

Los sistemas eléctricos de potencia modernos, y sobre todo en aquellos que utilizan fuentes de energía renovable del sol, el viento o las mareas, la PE es utilizada para la conver-

sión de energía por medio de diferentes configuraciones eléctricas. De esta manera, las redes eléctricas heredadas dominadas dinámicamente por máquinas eléctricas están evolucionando como sistemas de potencia basados en PE, impulsados por la adopción a gran escala de convertidores electrónicos de potencia para generaciones renovables y aplicaciones de ahorro de energía [Blaabjerg *et al.*, 2017, Ferreira, 2016]. Esta transformación radical allana el camino hacia redes eléctricas modernas con alta flexibilidad, sostenibilidad y eficiencia mejorada, pero también plantea nuevos desafíos en complejidad de operación, estabilidad, control y calidad de energía del sistema de potencia [Kroposki, 2017].

Los convertidores de electrónica de potencia (PEC, por sus siglas en inglés) son sistemas de gran complejidad y altamente no-lineales. Tal que la presencia de PEC en la red ha originado fenómenos como inestabilidades atribuibles a la distorsión de las formas de onda de voltaje y corriente ocasionados por los procesos de conmutación de los elementos de estado sólido como diodos, tiristores e IGBTs. En la literatura se han descrito casos prácticos de dichos fenómenos. Por ejemplo, las afectaciones del sistema ferroviario suizo causado por los armónicos generados debido a la interacción eléctrica de locomotoras nuevas con los inversores de voltaje corriente alterna a corriente directa utilizada por los mismos [Mollerstedt y Bernhardsson, 2000]. La referencia [Harnefors *et al.*, 2016] reporta fenómenos similares en convertidores de alto voltaje. Finalmente las referencias [Li, 2018] y [Messo *et al.*, 2014] discuten varias interacciones armónicas, como las generadas por la interconexión de fuentes renovables y las redes de suministro eléctrico convencionales.

1.1. Planteamiento del Problema

La adopción a gran escala de los PEC y cargas no lineales han provocado que la calidad de la energía en la red decaiga, ya que introducen frecuencias distintas superpuestas a formas de onda de tensión/corriente de frecuencia fundamental modificando las formas de onda puramente sinusoidales de magnitud y frecuencia constantes. Estos efectos producidos en la calidad de la energía pueden obtenerse mediante un estudio que otorgue a detalle la distorsión de la forma de onda, de manera que, un análisis de la dinámica de armónicos revele información completa para comprender los fenómenos de calidad de energía. Sin embargo, se

han reportado escasas metodologías enfocadas a los efectos de calidad de energía, las cuales revelen información de la distorsión en la forma de onda ocasionada por los PEC. Buscando atender esta problemática, una revisión de las escasas metodologías existentes se presenta en el estado del arte; más sin embargo, el desarrollar una teoría unificada para el análisis de sistemas de PE es de interés para la comunidad de electrónica de potencia. Ya que, el análisis de la dinámica de armónicos en redes conmutadas juega un papel importante; debido a que permite estudiar los riesgos potenciales de resonancia armónica, vibración mecánica en transformadores, el parpadeo (flicker), entre otros [la Rosa, 2006, Acha y Madrigal, 2001].

1.2. Estado del Arte

La inclusión de PEC en redes eléctricas de potencia ha producido impacto positivo y negativo dentro de la calidad de energía. De manera que, se han desarrollado múltiples publicaciones sobre el análisis de PEC, en mayor número a una frecuencia fundamental. En esas publicaciones, los convertidores se simplifican con base en conmutación promedio representados a través de fuentes de voltaje controlables a una frecuencia fundamental. Esta consideración no permite un estudio armónico detallado [Lei *et al.*, 2012]. Por otro lado, se han desarrollado pocos estudios que se centren en la evaluación de la calidad de energía en redes conmutadas, por ejemplo, [Hwang *et al.*, 2016, Lazaroiu *et al.*, 2010] tienen como base herramientas de software de transitorios electromagnéticos (EMT, por sus siglas en inglés); sin embargo, esos estudios requieren una rutina de post-procesamiento basada en la transformada rápida de Fourier en ventana (WFFT, por sus siglas en inglés) para obtener la dinámica de las frecuencias armónicas. Otra manera de obtener un estudio de evaluación de calidad de energía se reporta en [Golovanov *et al.*, 2004], este estudio se lleva a cabo a partir de datos experimentales en estado estacionario.

Tradicionalmente, las redes conmutadas se simulan a través de técnicas de dominio de tiempo (TD, por sus siglas en inglés); sin embargo, como consecuencia de los fenómenos de conmutación, deben emplearse pasos de tiempo muy pequeños que conducen tanto a grandes tiempos de simulación como a recursos computacionales excesivos. Este inconveniente se ha aliviado mediante el empleo de modelos de valor promedio generaliza-

dos (GAVM, por sus siglas en inglés) al costo de la incapacidad de mostrar información de onda [Sanders *et al.*, 1991]. Los modelos de dominio armónico extendido (EHD, por sus siglas en inglés) proporcionan un método alternativo para simulaciones transitorias de armónicos, proporcionando la dinámica de los armónicos paso a paso [Rico *et al.*, 2003]. El EHD se ha empleado para modelar diferentes sistemas eléctricos y electrónicos, incluidos los sistemas fotovoltaicos y de generación eólica [Vargas y Ramirez, 2016, Vargas *et al.*, 2018], y para obtener soluciones de estado estacionario en una única operación matriz/vector [Arrillaga *et al.*, 1995, Ramirez y Rico, 2016]. Sin embargo, independientemente de su función, detalles de construcción y aplicación, los convertidores de potencia comparten propiedades cualitativas del sistema general que abren la posibilidad de estudiarlos bajo una perspectiva teórica común, tales como promediación generalizada [Sanders *et al.*, 1991], modelos de muestra de datos [Mollerstedt y Bernhardsson, 2000], sistema dinámico mixto-lógico [Ren *et al.*, 2015], lineales por partes [Pettit y Wellstead, 1995], y modelos complementarios [Vasca *et al.*, 2009]. Desde una perspectiva muy amplia, los sistemas PE también se pueden ver como sistemas híbridos dinámicos porque incluyen eventos continuos y discretos [Mariethoz *et al.*, 2010]. Además, los sistemas PE son una clase particular de sistemas híbridos, concretamente sistemas conmutados [Sun y Ge, 2005], que constan de varios subsistemas y reglas que indican cuándo cambiar entre ellos. Se han desarrollado potentes herramientas de diversas disciplinas; una compilación recomendada de estas herramientas se puede encontrar en [Sun y Ge, 2005].

Actualmente el Dr. Rico y colaboradores trabajan en presentar una metodología que proporciona la solución en dominio del tiempo sin necesidad de transformaciones de coordenadas, inspirado en la linealización de Carleman, donde los productos de funciones y estados trigonométricos se sumergen/refunden en variables de estado adicionales, dejando el estado original intacto. Además, es basado en aproximaciones por series de Fourier consiguiendo la dinámica de los armónicos para análisis transitorio y a su vez, una representación de sistemas LPV (o LTI, cuando el parámetro variante se mantiene constante) es obtenida para aprovechar la teoría desarrollada para estos sistemas. Así como la aplicación del control óptimo y de la estabilidad basada en conceptos de sistemas LTI, en particular mediante el cálculo de valores característicos. Siguiendo este desarrollo basado en la re-formulación

del EHD, presentan una nueva metodología basada en una doble implementación del EHD re-formulado para sistemas de PE con múltiples variaciones dentro de un periodo global del sistema, llamando a esta metodología como dominio armónico extendido doble (DEHD, por sus siglas en inglés). El desarrollo de la teoría de sistemas LPV, permite una integración más eficiente de fuentes renovables, tales como la energía solar y eólica, interconectados a través de PE, para lograr una operación altamente eficiente de redes eléctricas modernas e inteligentes. Parte de la metodología desarrollada se ha publicado en [Morfin-Magaña *et al.*, 2018], el cual muestra una implementación de control predictivo a un convertidor Boost.

En este trabajo, se lleva a cabo la implementación de las metodologías EHD re-formulado y DEHD, las cuales son analizadas y aplicadas a sistemas periódicos, por consiguiente los PEC son clasificados en sistemas lineales de tiempo periódico (LTP) y tratados dependientemente del sistema, por la re-formulación del EHD o DEHD para la construcción de una representación de sistemas lineales de parámetro variante (LPV). Ésta representación es obtenida considerando un vector de parámetros variantes del sistema permaneciendo de manera simbólica. De tal manera que es posible obtener una representación de sistemas lineales de tiempo invariante (LTI), cuando los parámetros simbólicos del sistema se mantienen constantes.

1.3. Objetivos de la Tesis

1.3.1. Objetivo General

El objetivo general de esta tesis es el análisis, modelo y simulación de sistemas de PE. Este análisis se llevará a cabo utilizando alguna de las recientes metodologías de dominio armónico (re-formulación EHD o DEHD) para obtener una representación de sistemas LPV (o LTI, si los parámetros del sistema se consideran invariantes). Además de que estas metodologías permiten el análisis dinámico de los armónicos en estado transitorio, la representación obtenida abre la posibilidad de nuevos estudios de acuerdo a la teoría LPV. En este trabajo, se obtendrá un análisis de estabilidad mediante el uso de la metodología tan conocida de analizar los valores característicos. Implementar EHD re-formulado a la ecuación de Mathieu y a la aplicación industrial del convertidor elevador (convertidor Boost,

mayormente conocido por su nombre en inglés). Finalmente, mostrar la metodología DEHD en la aplicación industrial de un STATCOM en su forma trifásica, para completar uno de los alcances de la re-formulación EHD.

1.3.2. Objetivos Particulares

- Implementar las recientes metodologías EHD y DEHD en el software *Mathematica*[®].
- Obtener el modelo en espacio de estados de la ecuación de Mathieu, el convertidor elevador (Convertidor Boost) y del STATCOM trifásico, de tal manera que estén representados como sistemas LTP.
- Aproximar la función periódica de cada sistema mediante las series de Fourier; PWM de frecuencia constante para el convertidor elevador y PWM sinusoidal para el STATCOM trifásico.
- Implementar la re-formulación EHD y realizar un análisis de estabilidad a la ecuación de Mathieu y al convertidor Boost.
- Implementar la re-formulación EHD y el DEHD al STATCOM trifásico con motivo de mostrar ventajas y desventajas en sistemas con alto margen de variaciones periódicas.

1.4. Justificación

Es notable que el área de electrónica de potencia es muy activa en la actualidad, debido a que, las fuentes de potencia y los convertidores conmutados son un requisito para los aparatos eléctricos modernos. Con base en esto, los consumidores buscan soluciones más eficientes, ligeras, compactas y de menor consumo energético. Una herramienta que encara este tipo de retos es la electrónica de potencia, la cual ha desarrollado una multiplicidad de soluciones tecnológicas a nivel industrial. Es de reconocer que para mantener el desarrollo de estos avances es urgente contar con nuevos conocimientos y teorías de sistemas que sustenten y potencien el desarrollo de los sistemas de PE. Una revisión bibliográfica al marco teórico hacía evidente que no existía una teoría unificada para el análisis de sistemas de electrónica

de potencia que permitiera una optimización y mayor control. Sin embargo, recientemente se trabaja en presentar metodologías constituidas por la re-formulación EHD y el DEHD, las cuales muestran ser un logro de esta teoría unificada para el análisis de sistemas de PE, las cuales conservan parámetros del sistema de manera simbólica. Debido a esto, este trabajo se desarrolla con motivo de evidenciar las ventajas y desventajas de la metodología presentada.

1.5. Hipótesis

Es posible desarrollar una formulación de EHD en el dominio del tiempo donde las variables de estado del sistema original se mantengan disponibles sin la necesidad de transformaciones de coordenadas y éstas muestren una forma de onda detallada. Al mismo tiempo que se logren formulaciones invariantes en el tiempo o de parámetro variante que abran la posibilidad para la aplicación de teorías bien desarrolladas en estos marcos de estudio. Además que la formulación sea práctica, de tal manera que una doble implementación sea lograda para sistemas de mayor complejidad periódica. Por otra parte, que la formulación permita realizar análisis de estabilidad en el dominio del tiempo mediante la aplicación de teorías para la formulación obtenida, el cual concluya la estabilidad del sistema, en particular de sistemas de electrónica de potencia.

1.6. Metodología

Se revisará el estado del arte. En esta revisión se espera fundamentar el panorama global y particular del trabajo de tesis. Se estudiará la reciente investigación acerca de la re-formulación EHD así como su doble implementación (el DEHD). Se obtendrá la aproximación a la función periódica simple de la ecuación de Mathieu, se aplicará el EHD re-formulado y bajo la representación LPV, la solución será validada y un análisis de estabilidad será comparado con resultados existentes. Debido al tipo de periodicidad en las aplicaciones de PE, la aproximación de la señal de conmutación para el convertidor Boost, es obtenida mediante la comparación de una señal de frecuencia constante con una señal diente de sierra. Teniendo la señal aproximada se procederá a implementar el EHD re-formulado y obtener

su solución validada respecto a sistemas conmutados. Además, se presenta un análisis de estabilidad acotado respecto al parámetro variante. Para el STATCOM trifásico, el EHD re-formulado y su doble implementación (el DEHD) serán aplicados con fin de evidenciar ventajas y desventajas de las metodologías en este tipo de sistemas. La aproximación del PWM para este sistema es obtenida comparando una señal sinusoidal sin desfaseamiento con una señal triangular, esto solo para obtener la aproximación del PWM de la fase a , pero con el aprovechamiento de la matriz de rotación presentada, basta multiplicar el PWM de la fase a por la matriz de rotación presentada con respecto al desfaseamiento que se requiera obtener para el PWM en la fase b y c . La implementación de estas metodologías proporciona una representación LPV con análisis dinámico de armónicos en tiempo transitorio evidente, la solución para parámetros constantes (LTI) es obtenida y análisis de estabilidad acotado al parámetro variante en el sistema.

1.7. Descripción de Capítulos

La introducción y revisión del estado del arte, así como el planteamiento del problema y su justificación se presentaron en este capítulo. La descripción por capítulos restantes se describe a continuación.

El Capítulo 2 presenta la teoría de matrices operacionales basado en las series trigonométricas de Fourier, así como algunas propiedades con enfoque en el desarrollo de la metodología EHD re-formulado. Además, se presentan algunos ejemplos para demostración de estas teorías.

El Capítulo 3 presenta las metodologías EHD re-formulado y DEHD como marco de trabajo para los sistemas conmutados, tratados como sistemas LTP. En este mismo capítulo se da el enfoque para determinar la estabilidad del sistema para valores acotados del parámetro variante. Además, se presentan dos ejemplos para clarificar la implementación de las metodologías presentadas.

En el Capítulo 4 la periodicidad del sistema es analizado. Para este análisis, se presentan dos técnicas de modulación de ancho de pulso (PWM, por sus siglas en inglés) para aplicaciones de PE, el de frecuencia constante y el PWM sinusoidal.

Los casos de estudio se presentan en el Capítulo 5. Primeramente, la representación EHD y DEHD son validados respecto a modelos conmutados. El enfoque de sistemas LPV es llevado a cabo y el análisis de estabilidad acotado es mostrado para la ecuación de Mathieu y para el convertidor elevador.

Finalmente, en el Capítulo 6 se presentan las conclusiones generales de esta investigación y se mencionan posibles trabajos futuros.

1.8. Publicaciones

1. “Model Predictive Control for Linear Parameter-Varying Systems”
Rodrigo Morfin-Magaña, Ruben Rodriguez-Flores, Serafin Ramos-Paz, J. Jesus Rico-Melgoza and Fernando Ornelas-Tellez.
Publicado en 2018 IEEE International Autumn Meeting on Power, Electronics and Computing (ROPEC 2018). Ixtapa, Mexico.

Capítulo 2

Matemáticas Preliminares: Teoría de Matrices Operacionales para la Serie Trigonométrica de Fourier

En este capítulo, se presentan algunas de entre muchas propiedades que se han descubierto en el análisis de sistemas dinámicos mediante expansiones de series ortogonales. Algunas propiedades se han usado para resolver problemas de identificación y optimización de sistemas dinámicos; además, se han desarrollado muchas matrices operativas basadas en diversas funciones ortogonales, como Laguerre, Legendre, Fourier, Chebyshev y block pulse. Ya que, las funciones ortogonales se ocupan de reducir varios problemas de los sistemas dinámicos al resolver ecuaciones algebraicas.

Las propiedades ortogonales presentadas en este capítulo, son tratadas de manera que un vector pueda ser representado en forma matriz; debido a que, la transformación presentada por el EHD sea presentada en una expansión del sistema. Además, la expansión es tratada de manera que el coeficiente a_0 de la serie de Fourier se encuentre en primera posición para que en el desarrollo de la metodología EHD, la variable de estado del sistema original posterior a la expansión del EHD sea ubicada en primera posición para una fácil disposición.

2.1. Aproximación por Series de Fourier

Las series trigonométricas fueron desarrolladas por primera vez por Joseph Fourier [Stewart, 2007], y son una expansión de la función periódica $\sigma(t)$ en términos de una suma infinita de senos y cosenos. El cálculo y estudio de series de Fourier se conoce como análisis armónico y es extremadamente útil como una forma de dividir una función periódica arbitraria en un conjunto de términos simples que pueden ser conectados, resueltos individualmente y luego recombinados para obtener la solución del problema original o una aproximación a él con la precisión deseada. Las series de Fourier están definidas por

$$\sigma(t) = a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} [a_j \cos(j \omega t) + b_j \sin(j \omega t)], \quad (2.1)$$

donde $\sigma(t)$ es una función periódica, a_0 , a_j , b_j son los coeficientes de Fourier y $\omega = \frac{2\pi}{T}$ es la velocidad angular con periodo T . A pesar de obtener una representación exacta, esta suma infinita requiere una alta eficiencia computacional, sin embargo la serie de Fourier puede ser truncada hasta N_h , donde N_h es el numero de armónicos considerados para la aproximación. Los coeficientes de esta serie son

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T \sigma(t) dt \\ a_j &= \frac{2}{T} \int_0^T \sigma(t) \cos(j \omega t) dt \\ b_j &= \frac{2}{T} \int_0^T \sigma(t) \sin(j \omega t) dt \end{aligned} \quad (2.2)$$

Para un número finito de términos, la función (2.1) truncada se puede representar en forma de vector como

$$\sigma(t) = \mathcal{A} \gamma(t) \quad (2.3)$$

donde

$$\mathcal{A} = \left(a_0 \mid \mathbf{a} \mid \mathbf{b} \right), \quad (2.4)$$

$$\mathbf{a} = \left(a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_{N_h} \right) \quad (2.5)$$

$$\mathbf{b} = \left(b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_{N_h} \right) \quad (2.6)$$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos(\omega t) \\ \vdots \\ \cos(N_h \omega t) \\ \sin(\omega t) \\ \vdots \\ \sin(N_h \omega t) \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

con $\gamma(t) \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ para $m = 2N_h + 1$.

2.1.1. Ejemplo

La función periódica de la ecuación de Mathieu es utilizada para demostración de la teoría mencionada en esta sección.

$$\sigma(t) = a - 2b \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \quad (2.8)$$

Entonces (2.8) puede ser aproximada por la serie de Fourier truncada considerando hasta el tercer armónico como,

$$\sigma(t) = \mathcal{A}\gamma(t)$$

$$\sigma(t) = \begin{pmatrix} a & -2b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \\ \cos\left(\frac{4\pi}{T}t\right) \\ \cos\left(\frac{6\pi}{T}t\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \\ \sin\left(\frac{4\pi}{T}t\right) \\ \sin\left(\frac{6\pi}{T}t\right) \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

$$\sigma(t) = a - 2b \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

con coeficientes de Fourier $a_0 = a$, $a_1 = -2b$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$, $b_1 = 0$, $b_2 = 0$ y $b_3 = 0$. Cuando la multiplicación de (2.9) es realizada se obtiene la semejanza entre la función (2.8) y su aproximación (2.9). En este caso la aproximación es igual a la función periódica debido

a que la periodicidad es una función contenida en la serie de Fourier.

2.2. Matriz Operacional de Diferenciación

Para lograr la transformación del EHD re-formulado es necesario la diferenciación de la serie de Fourier. En la diferenciación de la serie de Fourier, \mathcal{A} es un vector de valores constantes y puede apartarse de esta diferencial tal como se muestra

$$\frac{d}{dt}\mathcal{A}\gamma(t) = \mathcal{A}\frac{d}{dt}\gamma(t) \quad (2.10)$$

de esta manera, la diferenciación de la serie de Fourier es obtenida mediante la diferencial de $\gamma(t)$

$$\mathcal{A}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} 1 \\ \cos(\omega t) \\ \vdots \\ \cos(N_h\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ \vdots \\ \sin(N_h\omega t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{N_h} \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{N_h} \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega\sin(\omega t) \\ \vdots \\ -N_h\omega\sin(N_h\omega t) \\ \omega\cos(\omega t) \\ \vdots \\ N_h\omega\cos(N_h\omega t) \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Los valores constantes obtenidos de la diferenciación son transferidos al vector \mathcal{A} y el vector factorizado de la diferencial es reorganizado al vector original $\gamma(t)$

$$\frac{d}{dt}\mathcal{A}\gamma(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -a_1\omega \\ \vdots \\ -a_{N_h}N_h\omega \\ b_1\omega \\ \vdots \\ b_{N_h}N_h\omega \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} 1 \\ \sin(\omega t) \\ \vdots \\ \sin(N_h\omega t) \\ \cos(\omega t) \\ \vdots \\ \cos(N_h\omega t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b_1\omega \\ \vdots \\ b_{N_h}N_h\omega \\ -a_1\omega \\ \vdots \\ -a_{N_h}N_h\omega \end{pmatrix}^\top \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \cos(\omega t) \\ \vdots \\ \cos(N_h\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ \vdots \\ \sin(N_h\omega t) \end{pmatrix}}_{\gamma(t)}. \quad (2.12)$$

De manera similar, \mathcal{A} se puede reorganizar al formato inicial obteniendo una nueva matriz D llamada matriz de diferenciación. Esta es obtenida mediante el despeje de los valores obtenidos por la derivación, tal como se muestra

$$\underbrace{\left(\begin{array}{c|cc} a_0 & \mathbf{a} & \mathbf{b} \end{array} \right)}_{\mathcal{A}} \frac{d}{dt} \mathcal{A} \gamma(t) = \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\omega & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -N_h \omega \\ \hline 0 & \omega & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & N_h \omega & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right)}_D \underbrace{\left(\begin{array}{c} 1 \\ \cos(\omega t) \\ \vdots \\ \cos(N_h \omega t) \\ \hline \sin(\omega t) \\ \vdots \\ \sin(N_h \omega t) \end{array} \right)}_{\gamma(t)} \quad (2.13)$$

$$\frac{d}{dt} \mathcal{A} \gamma(t) = \mathcal{A} D \gamma(t) \quad (2.14)$$

Del análisis, se observa la propiedad de las series de Fourier para la diferenciación de $\gamma(t)$,

$$\frac{d}{dt} \gamma(t) = D \gamma(t) \quad (2.15)$$

donde $D \in \mathbf{R}^{(m \times m)}$ con $m = 2N_h + 1$. En forma general, para n variables de estado $\dot{\Gamma}(t) = \mathbb{D}\Gamma(t)$, con $\Gamma(t) \in \mathbf{R}^{nm}$. Enfatizando que la matriz de diferenciación es para una variable de estado por lo que para n variables, se tiene

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \gamma(t) \\ \gamma(t) \\ \vdots \\ \gamma(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma(t) \\ \gamma(t) \\ \vdots \\ \gamma(t) \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

donde $\mathbf{0}$ es una matriz nula de dimensión apropiada y $\mathbb{D} \in \mathbf{R}^{nm \times nm}$ es la matriz bloque de diferenciación del sistema general.

La matriz D permite obtener los coeficientes de diferenciación de Fourier los cuales son invariantes en el tiempo, esta matriz basta con ser obtenida una sola vez con la aproximación armónica que se desee y un periodo T fijo. Para propósitos posteriores, será útil

definir a \mathbb{D}_k , como la k -ésima matriz de la matriz \mathbf{D} .

2.2.1. Ejemplo

La matriz de diferenciación permite obtener la diferencial de una función. Como demostración la función periódica de la ecuación de Mathieu es utilizada. La diferencial de (2.8) es obtenida como

$$\frac{d}{dt}\sigma(t) = 2b \frac{2\pi}{T} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right). \quad (2.17)$$

Sin embargo, la matriz de diferenciación solo es formada por la matriz D mediante (2.13).

Por lo tanto, la diferencial es obtenida mediante la multiplicación,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{A}\gamma(t) &= \begin{pmatrix} a & -2b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2\pi}{T} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{4\pi}{T} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6\pi}{T} \\ 0 & \frac{2\pi}{T} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4\pi}{T} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{6\pi}{T} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_D \begin{pmatrix} 1 \\ \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \\ \cos\left(\frac{4\pi}{T}t\right) \\ \cos\left(\frac{6\pi}{T}t\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \\ \sin\left(\frac{4\pi}{T}t\right) \\ \sin\left(\frac{6\pi}{T}t\right) \end{pmatrix} \\ \frac{d}{dt}\mathcal{A}\gamma(t) &= \begin{pmatrix} a & -2b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2\pi}{T} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \\ -\frac{4\pi}{T} \sin\left(\frac{4\pi}{T}t\right) \\ -\frac{6\pi}{T} \sin\left(\frac{6\pi}{T}t\right) \\ \frac{2\pi}{T} \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \\ \frac{4\pi}{T} \cos\left(\frac{4\pi}{T}t\right) \\ \frac{6\pi}{T} \cos\left(\frac{6\pi}{T}t\right) \end{pmatrix} \\ \frac{d}{dt}\mathcal{A}\gamma(t) &= 2b \frac{2\pi}{T} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \end{aligned} \quad (2.18)$$

Note que existe igualdad en las ecuaciones (2.17) y (2.18) debido a que la periodicidad es una función contenida en la serie de Fourier como se menciona en la sección 2.1.1. La igualdad

existe cuando la serie de de Fourier aproxima de manera exacta a la función periódica.

2.3. Matriz Operacional de Desfasamiento

Una función de retardo $\sigma(\omega t + \phi)$ se puede definir como la traducción de la función $\sigma(t)$ en un ángulo ϕ y se puede expresar en términos de los coeficientes de Fourier. Por lo tanto, de serie de Fourier en su forma vector (2.3) se tiene,

$$\sigma(\omega t + \phi) = \mathcal{A} \begin{pmatrix} 1 \\ \cos(\omega t + \phi) \\ \vdots \\ \cos(N_h \omega t + N_h \phi) \\ \sin(\omega t + \phi) \\ \vdots \\ \sin(N_h \omega t + N_h \phi) \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

donde la suma de ángulos puede ser tratada por las bien conocidas identidades trigonométricas de suma y diferencia de ángulos

$$\begin{aligned} \sin(\omega t \pm \phi) &= \sin(\omega t) \cos(\phi) \pm \cos(\omega t) \sin(\phi) \\ \cos(\omega t \pm \phi) &= \cos(\omega t) \cos(\phi) \mp \sin(\omega t) \sin(\phi) \end{aligned} \quad (2.20)$$

sustituyendo (2.20) en la ecuación (2.19), se obtiene la expresión (2.21)

$$\sigma(\omega t + \phi) = \mathcal{A} \begin{pmatrix} 1 \\ \cos(\omega t) \cos(\phi) - \sin(\omega t) \sin(\phi) \\ \vdots \\ \cos(N_h \omega t) \cos(N_h \phi) - \sin(N_h \omega t) \sin(N_h \phi) \\ \sin(\omega t) \cos(\phi) + \cos(\omega t) \sin(\phi) \\ \vdots \\ \sin(N_h \omega t) \cos(N_h \phi) + \cos(N_h \omega t) \sin(N_h \phi) \end{pmatrix}, \quad (2.21)$$

es posible despejar las funciones trigonométricas $\cos(j\omega t)$ y $\sin(j\omega t)$ de manera que $\gamma(t)$ mantenga el mismo formato. Derivado de estas operaciones se genera una nueva matriz S , llamada matriz de desfaseamiento,

$$\sigma(\omega t + \phi) = \mathcal{A} \underbrace{\left(\begin{array}{c|ccc|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cos(\phi) & \cdots & 0 & -\sin(\phi) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \cdots & \cos(N_h\phi) & 0 & \cdots & -\sin(N_h\phi) \\ \hline 0 & \sin(\phi) & \cdots & 0 & \cos(\phi) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \cdots & \sin(N_h\phi) & 0 & \cdots & \cos(N_h\phi) \end{array} \right)}_S \underbrace{\left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline \cos(\omega t) \\ \vdots \\ \hline \cos(N_h\omega t) \\ \hline \sin(\omega t) \\ \vdots \\ \hline \sin(N_h\omega t) \end{array} \right)}_{\gamma(t)} \quad (2.22)$$

$$\sigma(\omega t + \phi) = \mathcal{A} S \gamma(t) \quad (2.23)$$

La matriz de desfaseamiento $S \in \mathbb{R}^{m \times m}$ puede ser representada en modo practico por

$$S = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & S_1 & -S_2 \\ \hline \mathbf{0} & S_2 & S_1 \end{array} \right) \quad (2.24)$$

donde $\mathbf{0}$ es un vector de ceros con dimensiones apropiadas, S_1 y S_2 son matrices diagonales con diagonales $[\cos(\phi), \dots, \cos(N_h\phi)]$ y $[\sin(\phi), \dots, \sin(N_h\phi)]$, respectivamente. Note que es posible obtener una función desfasada con la matriz de desfaseamiento a partir de una función aproximada sin necesidad de calcular nuevamente la serie de Fourier.

2.3.1. Ejemplo

La función $\sigma(t)$ puede ser desfasada utilizando la matriz de desfaseamiento. La función periódica de Mathieu (2.8) con periodo $T = 2\pi$ es utilizada para demostración continuando con la aproximación de hasta el tercer armónico. La función periódica puede

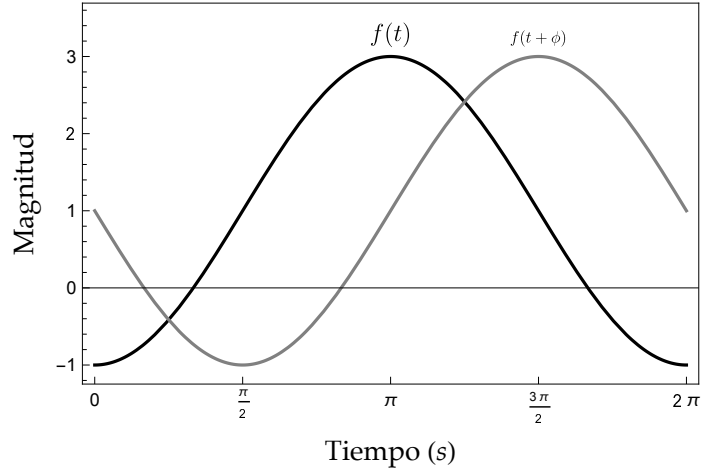


Figura 2.1: Desfasamiento de la función periódica de Mathieu.

ser desfasada $\phi = -90^\circ = -\frac{\pi}{2}$ mediante (2.24) con la matriz de desfasamiento,

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) & 0 & 0 & -\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) & 0 & 0 & -\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) & 0 & 0 & -\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ 0 & \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & 0 & 0 & \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & 0 & 0 & \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & 0 & 0 & \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

En la Figura 2.1 se muestra la señal periódica $\sigma(t)$ y el desfasamiento obtenido mediante la multiplicación de la matriz de desfasamiento como se muestra en (2.23). Note que el punto más bajo de $\sigma(t)$ se encuentra en cero y de $\sigma(t+\phi)$ se encuentra en $\frac{\pi}{2}$, mostrando un retraso de la señal de 90° .

2.4. Matriz Operacional de Producto

Una propiedad útil del vector $\gamma(t)$ es que la matriz del resultante del producto $\gamma(t)\gamma^T(t)$ mantiene la identidad [Razzaghi, 1990], esto se debe a que el vector $\gamma(t)$ es un

vector ortogonal obtenido por la serie de Fourier [Strang, 2007],

$$\gamma(t) \gamma^\top(t) \mathcal{A}^\top = [\mathcal{A}] \gamma(t) \tag{2.26}$$

cuando todos los términos en $\gamma(t) \gamma^\top(t)$ con frecuencias mayores que $N_h \omega$ son truncados, y donde $[\mathcal{A}]$ denota una matriz operativa de producto cuyas entradas se toman ordenadamente de un vector de fila \mathcal{A} . Matemáticamente es posible deducir la matriz $[\mathcal{A}]$ con ayuda de las identidades trigonométricas de paso (de producto a suma). Primeramente, el desarrollo de la multiplicación $\gamma(t) \gamma^\top(t) \mathcal{A}^\top$ es realizado tal como se muestra,

$$\gamma(t) \gamma^\top(t) \mathcal{A}^\top = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\cos(\omega t)}{\cos(N_h \omega t)} \\ \vdots \\ \frac{\sin(\omega t)}{\sin(N_h \omega t)} \end{pmatrix} \left(1 \mid \cos(\omega t) \cdots \cos(N_h \omega t) \mid \sin(\omega t) \cdots \sin(N_h \omega t) \right) \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{N_h} \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{N_h} \end{pmatrix} \tag{2.27}$$

del producto $\gamma(t) \gamma^\top(t)$ se tiene,

$$\gamma(t) \gamma^\top(t) = \begin{pmatrix} 1 & \cos(\omega t) & \cdots & \cos(N_h \omega t) & \sin(\omega t) & \cdots & \sin(N_h \omega t) \\ \cos(\omega t) & \cos(\omega t) \cos(\omega t) & \cdots & \cos(\omega t) \cos(N_h \omega t) & \cos(\omega t) \sin(\omega t) & \cdots & \cos(\omega t) \sin(N_h \omega t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos(N_h \omega t) & \cos(N_h \omega t) \cos(\omega t) & \cdots & \cos(N_h \omega t) \cos(N_h \omega t) & \cos(N_h \omega t) \sin(\omega t) & \cdots & \cos(N_h \omega t) \sin(N_h \omega t) \\ \sin(\omega t) & \sin(\omega t) \cos(\omega t) & \cdots & \sin(\omega t) \cos(N_h \omega t) & \sin(\omega t) \sin(\omega t) & \cdots & \sin(\omega t) \sin(N_h \omega t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sin(N_h \omega t) & \sin(N_h \omega t) \cos(\omega t) & \cdots & \sin(N_h \omega t) \cos(N_h \omega t) & \sin(N_h \omega t) \sin(\omega t) & \cdots & \sin(N_h \omega t) \sin(N_h \omega t) \end{pmatrix}, \tag{2.28}$$

donde se puede observar que existen productos entre funciones trigonométricas de manera que se pueden aplicar las identidades trigonométricas de paso de producto a suma que se muestran en (2.29).

$$\begin{aligned}
\cos(x) \cos(y) &= \frac{1}{2} \cos(x+y) + \cos(x-y) \\
\cos(x) \sin(y) &= \frac{1}{2} \sin(x+y) - \sin(x-y) \\
\sin(x) \sin(y) &= \frac{1}{2} \cos(x-y) - \cos(x+y) \\
\sin(x) \cos(y) &= \frac{1}{2} \sin(x+y) + \sin(x-y)
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Posteriormente de aplicar las identidades (2.29), también se desarrolla la multiplicación por \mathcal{A}^T ,

$$\gamma(t) \gamma^T(t) \mathcal{A}^T = \left(\begin{array}{c} a_0 + a_1 \cos(\omega t) + \dots + a_{N_h} \cos(N_h \omega t) + b_1 \sin(\omega t) + \dots + b_{N_h} \sin(N_h \omega t) \\ \hline a_0 \cos(\omega t) + \frac{a_1}{2} [\cos(2\omega t) + 1] + \dots + \frac{a_{N_h}}{2} [\cos((1+N_h)\omega t) + \cos((1-N_h)\omega t)] + \\ \frac{b_1}{2} [\sin(2\omega t)] + \dots + \frac{b_{N_h}}{2} [\sin((1+N_h)\omega t) - \sin((1-N_h)\omega t)] \\ \vdots \\ a_0 \cos(\omega t) + \frac{a_1}{2} [\cos((N_h+1)\omega t) + \cos((N_h-1)\omega t)] + \dots + \frac{a_{N_h}}{2} [\cos(2N_h \omega t) + 1] + \\ \frac{b_1}{2} [\sin((N_h+1)\omega t) - \sin((N_h-1)\omega t)] + \dots + \frac{b_{N_h}}{2} [\sin(2N_h \omega t)] \\ \hline a_0 \sin(\omega t) + \frac{a_1}{2} [\sin(2\omega t)] + \dots + \frac{a_{N_h}}{2} [\sin((1+N_h)\omega t) + \sin((1-N_h)\omega t)] + \\ \frac{b_1}{2} [1 - \cos(2\omega t)] + \dots + \frac{b_{N_h}}{2} [\cos((1-N_h)\omega t) - \cos((1+N_h)\omega t)] \\ \vdots \\ a_0 \sin(N_h \omega t) + \frac{a_1}{2} [\sin((N_h+1)\omega t) + \sin((N_h-1)\omega t)] + \dots + \frac{a_{N_h}}{2} [\sin(2N_h \omega t)] + \\ \frac{b_1}{2} [\cos((N_h-1)\omega t) - \cos((N_h+1)\omega t)] + \dots + \frac{b_{N_h}}{2} [1 - \cos(2N_h \omega t)] \end{array} \right) \tag{2.30}$$

En (2.30) se observan funciones con frecuencias mayores a $N_h \omega$, las cuales son canceladas por cuestión de truncamiento resultando en una aproximación. También es posible notar frecuencias negativas cuando $N_h > 1$, pero estas frecuencias pueden ser positivas al ser

tratadas con las identidades para ángulos opuestos

$$\begin{aligned} \sin(-x) &= -\sin(x) \\ \cos(-x) &= \cos(x). \end{aligned} \tag{2.31}$$

La identidad mencionada del producto $\gamma(t) \gamma^\top(t)$ se puede demostrar cuando (2.28) es tratada por las identidades trigonométricas de (2.29) y (2.31).

Finalmente, cuando las frecuencias negativas se cambiaron a positivas por (2.31) y las frecuencias mayores a $N_h \omega$ fueron truncadas, el vector resultante contiene sumas de funciones trigonométricas, las cuales se pueden despejar para obtener de manera independiente el vector en formato original $\gamma(t)$,

$$\gamma(t) \gamma^\top(t) \mathcal{A}^\top = \left(\begin{array}{c|ccc|ccc} a_0 & a_1 & \cdots & a_{N_h} & b_1 & \cdots & b_{N_h} \\ \hline \frac{a_1}{2} & \frac{a_0 - a_2}{2} & \cdots & \frac{a_{N_h-1}}{2} & \frac{b_2}{2} & \cdots & \frac{b_{N_h-1}}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \frac{a_{N_h}}{2} & \frac{a_{N_h-1}}{2} & \cdots & a_0 & -\frac{b_{N_h-1}}{2} & \cdots & 0 \\ \hline \frac{b_1}{2} & \frac{a_2}{2} & \cdots & -\frac{b_{N_h-1}}{2} & a_0 - \frac{a_2}{2} & \cdots & \frac{a_{N_h-1}}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \frac{b_{N_h}}{2} & \frac{a_{N_h-1}}{2} & \cdots & 0 & a_0 \frac{a_{N_h-1}}{2} & \cdots & a_0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline \cos(\omega t) \\ \vdots \\ \hline \cos(N_h \omega t) \\ \hline \sin(\omega t) \\ \vdots \\ \hline \sin(N_h \omega t) \end{array} \right) \tag{2.32}$$

$$\gamma(t) \gamma^\top(t) \mathcal{A}^\top = [\mathcal{A}] \gamma(t) \tag{2.33}$$

La estructura de la matriz $[\mathcal{A}]$ se puede obtener de forma practica como

$$[\mathcal{A}] = \frac{1}{2} (\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2). \tag{2.34}$$

Aquí \mathcal{A}_1 es una matriz simétrica obtenida como

$$\mathcal{A}_1 = \left(\begin{array}{c|cc} a_0 & \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \hline \mathbf{a}^\top & M_a & M_b \\ \hline \mathbf{b}^\top & -M_b & M_a \end{array} \right) \tag{2.35}$$

$$\begin{aligned}
M_a &= \begin{pmatrix} 2a_0 & a_1 & \cdots & a_{N_h-1} \\ a_1 & 2a_0 & \cdots & a_{N_h-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N_h-1} & a_{N_h-2} & \cdots & 2a_0 \end{pmatrix} \\
M_b &= \begin{pmatrix} 0 & b_1 & \cdots & b_{N_h-1} \\ -b_1 & 0 & \cdots & b_{N_h-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -b_{N_h-1} & -b_{N_h-2} & \cdots & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{2.36}$$

y \mathcal{A}_2 es obtenida por

$$\mathcal{A}_2 = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \hline 0 & G_a & G_b \\ \hline 0 & G_b & -G_a \end{array} \right) \tag{2.37}$$

con

$$G_a = \begin{pmatrix} a_2 & a_3 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \text{ y } G_b = \begin{pmatrix} b_2 & b_3 & \cdots & 0 \\ b_3 & b_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{2.38}$$

La matriz de coeficientes $[\mathcal{A}]$ en su forma general para n variables de estado es definida \mathbb{A} y es formada por las propias matrices de coeficientes $[\mathcal{A}]$.

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} [\mathcal{A}]_{1,1} & [\mathcal{A}]_{1,2} & \cdots & [\mathcal{A}]_{1,n} \\ [\mathcal{A}]_{2,1} & [\mathcal{A}]_{2,2} & \cdots & [\mathcal{A}]_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [\mathcal{A}]_{n,1} & [\mathcal{A}]_{n,2} & \cdots & [\mathcal{A}]_{n,n} \end{pmatrix} \tag{2.39}$$

donde $[\mathcal{A}]_{k,1}$ hace referencia a la a la matriz producto o expansión de la posición $(k, 1)$ de la matriz característica del sistema original. Para propósitos de notación, una de su k -ésima fila para n variables de estado es

$$\mathbb{A}_k = \left([\mathcal{A}]_{k,1} \quad [\mathcal{A}]_{k,2} \quad \cdots \quad [\mathcal{A}]_{k,n} \right). \tag{2.40}$$

2.4.1. Ejemplo

Recurriendo a la misma función periódica de la ecuación de Mathieu. La matriz operacional producto para una aproximación armónica $N_h = 3$ es,

$$[\mathcal{A}] = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & b_1 & b_2 & b_3 \\ \frac{a_1}{2} & a_0 + \frac{a_2}{2} & \frac{a_1+a_3}{2} & \frac{a_2}{2} & \frac{b_2}{2} & \frac{b_1+b_3}{2} & \frac{b_2}{2} \\ \frac{a_2}{2} & \frac{a_1+a_3}{2} & a_0 & \frac{a_1}{2} & \frac{-b_1+b_3}{2} & 0 & \frac{b_1}{2} \\ \frac{a_3}{2} & \frac{a_2}{2} & \frac{a_1}{2} & a_0 & \frac{-b_2}{2} & \frac{-b_1}{2} & 0 \\ \frac{b_1}{2} & \frac{b_2}{2} & \frac{-b_1+b_3}{2} & -\frac{b_2}{2} & a_0 - \frac{a_2}{2} & \frac{a_1-a_3}{2} & \frac{a_2}{2} \\ \frac{a_3}{2} & \frac{b_1+b_3}{2} & 0 & -\frac{b_1}{2} & \frac{a_1+a_3}{2} & 0 & -\frac{a_1}{2} \\ \frac{b_3}{2} & \frac{b_2}{2} & \frac{b_1}{2} & 0 & \frac{a_2}{2} & \frac{a_1}{2} & a_0 \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

donde los coeficientes de (2.41) son sustituidos por los coeficientes de la serie de Fourier en (2.9). Por lo tanto, la matriz para este caso específico resulta como,

$$[\mathcal{A}] = \begin{pmatrix} a & -2b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b & a & -b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & a & -b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & -b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b & a & -b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b & a \end{pmatrix}. \quad (2.42)$$

2.5. Conclusiones

En este capítulo fue desarrollada la teoría de matrices operacionales con principal enfoque a funciones periódicas mediante el uso de series de Fourier. Las cuatro secciones analizadas son características base para el desarrollo de la metodología Dominio Armónico Extendido. De tal manera que, fue utilizada una función periódica simple como ejemplo para propósitos de clarificar y demostrar esta teoría.

Capítulo 3

Formatos del Dominio Armónico Extendido

Mediante el EHD se han reportado variedad de trabajos desde su presentación en 2003 [Rico *et al.*, 2003] hasta la reducción de la dimensión del sistema con base en la selección de armónicos [Vargas *et al.*, 2018]. Sin embargo, una re-formulación del mismo es el marco teórico de esta propuesta de investigación basada en EHD y DEHD demostrando ser útiles para atacar problemas de control y determinación de estabilidad en sistemas de electrónica de potencia. El marco de referencia EHD re-formulado tiene la característica de permitir que sus parámetros sean variantes con el tiempo derivando en sistemas LPV [Morfin-Magaña *et al.*, 2018]. En la formulación original del EHD, la transformación es válida solo cuando dichos parámetros se mantienen constantes. En contraste, los sistemas LPV se refieren a sistemas lineales cuyo espacio de estado depende de un parámetro no estacionario y exógeno. Los sistemas no lineales de tiempo variante son generalmente difíciles de analizar o controlar; sin embargo, existe una teoría de control bien conocida para los sistemas de tiempo variante, para cuando se exhiben un comportamiento híbrido [Bettanti y Colaneri, 2009].

3.1. Formatos de Sistemas Conmutados

Uno de los principales desafíos en el análisis de los sistemas de PE es su naturaleza híbrida debido a la presencia de interruptores de semiconductores que inducen diferentes modos de operación y que operan a una frecuencia de conmutación alta. Debido a esta naturaleza, los sistemas de PE no se pueden analizar directamente utilizando enfoques tradicionales como la teoría lineal y presentan un potencial significativo de mejora. Por lo tanto, la naturaleza fundamental de los sistemas de PE implica la aplicación de los avances en las metodologías de sistemas híbridos que se han presentado en los últimos años [Niamsup, 2009].

Un sistema híbrido generalmente se puede describir mediante la ecuación de estado [Sun y Ge, 2005]:

$$\dot{x}(t) = g_{\sigma(t)} x(t) \quad (3.1)$$

o cuando el campo vectorial g es lineal por partes y evoluciona de forma no autónoma como

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)} x(t) + F(t) \quad (3.2)$$

donde $x(t) \in R^n$ es el vector de estado definido como $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_n(t) \end{bmatrix}^T$. En (3.2), $F(t) \in R^n$ son las funciones de forzamiento y $\sigma(t)$ es la señal de conmutación, la cual es una función de tiempo constante que representa la dinámica de tiempo discreto y alterna entre subsistemas de forma $\mathcal{I} = 1, 2, \dots, N_s$, donde $N_s > 1$ es el número de subsistemas. $A_{\sigma(t)}$ es una matriz de dimensiones apropiadas que determina la dinámica continua. Los estudios sobre sistemas conmutados pueden centrarse en la dinámica continua o en la dinámica discreta. El enfoque de la función de conmutación, bien conocido en el análisis de PE [Marouchos, 2006], se centra en la dinámica continua de los sistemas de PE. Permite una descripción unificada que representa, en cualquier momento t , un conjunto de sistemas LTI que alterna entre ellos de forma cíclica. En consecuencia, el sistema (3.2) puede escribirse como

$$\dot{x}(t) = A(\sigma(t)) x(t) + F(t). \quad (3.3)$$

Es importante resaltar que en las siguientes derivaciones no se asume ninguna restricción de

periodicidad en $F(t)$ y puede o no ser dependiente de las funciones de conmutación. Además, las diferencias entre (3.2) y (3.3) no son solo visibles; mientras que, por ejemplo, $A_{\sigma(t)}$ indica un conjunto finito de matrices, $A(\sigma(t))$ define una matriz única como una función de $\sigma(t)$. Este documento se centra en el modelado y análisis de sistemas representados por (3.3).

3.2. Dominio Armónico Extendido Una Re-formulación LPV

Hay varias formas en que los sistemas generales no lineales y los sistemas conmutados (3.3) pueden representarse en formatos LPV. Un enfoque estándar para este problema es una aproximación a través de la serie de Taylor para diferentes puntos de operación bajo la consideración de parámetros que varían lentamente [Shamma, 1988]. Otros enfoques como [Packard y Kantner, 1996] usan transformaciones no lineales. En este trabajo, las representaciones de LPV se logran mediante la linealización de Carleman [Rugh, 2002], donde los productos de los estados y las funciones trigonométricas se definen en nuevas variables de espacio de estado, denominadas aquí variables de co-estados. Para la derivación del EHD, consideremos un sistema conmutado de la forma (3.3), que puede ser escrito como un sistema LTP en su forma general,

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + F(t) \quad (3.4)$$

donde $F(t)$ es un vector de forzamiento dependiente del tiempo y $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz periódica que cumple la condición de periodicidad definida como

$$A(t + T) = A(t) \quad (3.5)$$

con el valor T mas pequeño que valida la igualdad, llamado período fundamental del sistema.

Mediante la idea de las linealizaciones de Carleman se puede obtener un nuevo vector de variables de estado, llamado de co-estados, tal como se muestra,

$$[\mathcal{X}(t)] = X(t) \otimes \gamma(t) \quad (3.6)$$

esto se logra con el uso del producto Kronecker para generar una base estándar del vector

de variables de estado del sistema original. El producto Kronecker logra una transformación lineal de productos tensoriales constituyendo una base donde $X(t)$ y $\gamma(t)$ son sub-espacios vectoriales [Strang, 2007].

Sin embargo, por motivos de simplicidad, el análisis es llevado al caso escalar representado para la variable de estado $x_k(t)$, donde k hace referencia a la posición de estado que se está analizando y toma valores $k = 1, \dots, n$. Por lo tanto, el producto Kronecker del valor escalar $x_k(t)$ y el vector $\gamma(t)$, resulta en un producto de escalar por vector

$$[\mathcal{X}(t)]_k = x_k(t) \gamma(t) \quad (3.7)$$

cabe recordar que el producto de escalar por vector o viceversa mantiene la propiedad de mantener el vector con la misma dirección, este producto solo puede variar la magnitud si es diferente del valor unitario o el sentido si tiene signo negativo. Por otro lado, observe que para cada variable de estado $x_k(t)$ se obtiene un vector de variables de co-estados $[\mathcal{X}]_k(t) \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ con $m = 2N_h + 1$, provocando el crecimiento dimensional. En (3.8) se ejemplifica para una variable de estado en posición k

$$[\mathcal{X}(t)]_k = \begin{pmatrix} \mathcal{X}_1(t) \\ \mathcal{X}_2(t) \\ \vdots \\ \mathcal{X}_{N_h+1}(t) \\ \mathcal{X}_{N_h+2}(t) \\ \vdots \\ \mathcal{X}_{2N_h+1}(t) \end{pmatrix}_k = \begin{pmatrix} x_k(t) \\ x_k(t) \cos(\omega t) \\ \vdots \\ x_k(t) \cos(N_h \omega t) \\ x_k(t) \sin(\omega t) \\ \vdots \\ x_k(t) \sin(N_h \omega t) \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

De manera similar el sistema escalar puede ser definido del sistema general (3.4), aplicando la aproximación por series de Fourier en forma vector (2.3) descrita en la sección 2.1 a la función periódica de (3.4), se obtiene,

$$\dot{x}_k(t) = \mathcal{A} \gamma(t) x_k(t) + f_k(t) \quad (3.9)$$

donde $f_k(t)$ es una función escalar correspondiente a la k -ésima posición del vector de forzamiento $F(t)$.

Además, una propiedad que se puede rescatar de la series de Fourier es que, $\gamma(t)$ es una representación de una matriz ortogonal rectangular. Por lo tanto, es posible obtener una transformación ortogonal del sistema basado en la transposición de éste [Birkhoff y Maclane, 1977]. Esta transformación es manipulada en el proceso del EHD para obtener las propiedades de las series ortogonales; tal como las mencionadas en el capítulo II. Note que (3.8) también mantiene la propiedad de ser ortogonal,

$$[\mathcal{X}(t)]_k^\top = x_k(t) \gamma^\top(t) \quad (3.10)$$

note que $x_k(t)$ es un valor escalar y por lo tanto no se ve afectado por la transposición.

Con base en las nuevas variables de estado (variables de co-estados), se puede formar un nuevo sistema dinámico a partir de la diferenciación. Diferenciando (3.10) respecto al tiempo se tiene,

$$[\dot{\mathcal{X}}(t)]_k^\top = \dot{x}_k(t) \gamma^\top(t) + x_k(t) \dot{\gamma}^\top(t) \quad (3.11)$$

A continuación, observe que en la ec. (3.11) se tiene la dinámica del estado original $\dot{x}_k(t)$, el cual puede ser sustituido por (3.9),

$$[\dot{\mathcal{X}}(t)]_k^\top = \mathcal{A} \gamma(t) x_k(t) \gamma^\top(t) + f_k(t) \gamma^\top(t) + x_k(t) \dot{\gamma}^\top(t) \quad (3.12)$$

donde $f_k(t)$ y $x_k(t)$ no son afectados por la transposición al ser escalares, así como pueden ser re-ubicados dentro del producto de matrices. Regresando el sistema a su base ortogonal original,

$$[\dot{\mathcal{X}}(t)]_k = \gamma(t) \gamma^\top(t) \mathcal{A} x_k(t) + f_k(t) \gamma(t) + \dot{\gamma}(t) x_k(t) \quad (3.13)$$

note que $\gamma(t) \gamma^\top(t) \mathcal{A} = [\mathcal{A}] \gamma(t)$ tal como se dedujo en (2.26) en la sección 2.4 y en (2.15) de la sección 2.2 se deduce $\dot{\gamma}(t) = D \gamma(t)$. Sustituyendo en (3.13) para k se tiene,

$$[\dot{\mathcal{X}}(t)]_k = [\mathcal{A}]_k \gamma(t) x_k(t) + D_k \gamma(t) x_k(t) + f_k(t) \gamma(t) \quad (3.14)$$

por ultimo, son agrupadas $x_k(t) \gamma(t)$ y sustituidas por $[\mathcal{X}(t)]_k$ por parte de las variables de co-estados,

$$[\dot{\mathcal{X}}(t)]_k = ([\mathcal{A}]_k + D_k) [\mathcal{X}(t)]_k + f_k(t) \gamma(t). \quad (3.15)$$

El sistema puede ser escrito para su forma general de n variables de estado, de la forma

$$\dot{\mathcal{X}}(t) = (\mathbb{A} + \mathbb{D}) \mathcal{X}(t) + F(t) \otimes \gamma(t) \quad (3.16)$$

donde \mathbb{A} está definida en (2.39) y \mathbb{D} en (2.16). Las variables de co-estados en forma general están dadas en (3.17) con propósito de mostrar la ubicación de las variables de interés (variables de estado original),

$$\mathcal{X}(t) = \begin{pmatrix} \mathcal{X}_1(t) \\ \mathcal{X}_2(t) \\ \vdots \\ \mathcal{X}_{N_h+1}(t) \\ \mathcal{X}_{N_h+2}(t) \\ \vdots \\ \mathcal{X}_{2N_h+1}(t) \\ \hline \mathcal{X}_{(2N_h+1)+1}(t) \\ \mathcal{X}_{(2N_h+1)+2}(t) \\ \vdots \\ \mathcal{X}_{(k-1)(2N_h+1)+1}(t) \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_1(t) \cos(\omega t) \\ \vdots \\ x_1(t) \cos(N_h \omega t) \\ x_1(t) \sin(\omega t) \\ \vdots \\ x_1(t) \sin(N_h \omega t) \\ \hline x_2(t) \\ x_2(t) \cos(\omega t) \\ \vdots \\ x_k(t) \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

note que las variables de estado del sistema $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ se encuentran a disposición directa en las variables de co-estados $\mathcal{X}_1(t), \mathcal{X}_{(2N_h+1)+1}(t), \dots, \mathcal{X}_{(k-1)(2N_h+1)+1}(t)$ para $k = 1, \dots, n$. Y cada producto en la forma $x_k(t) \cos(j\omega t)$ y $x_k(t) \sin(j\omega t)$ con $j = 1, \dots, N_h$ está incrustado en una nueva variable de estado $\mathcal{X}_\alpha(t)$ y $\mathcal{X}_\beta(t)$, con $\alpha = (k-1)(2N_h+1) + j$ y $\beta = (k-1)(2N_h+1) + (N_h+1) + j$, respectivamente.

3.2.1. Ejemplo

Solo para fines demostrativos de la implementación del DEHD, un sistema de periodicidad compleja es propuesto. El sistema en variables de estado es,

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \sigma(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

donde $f(t)$ es una entrada escalón unitario; de manera que, este ejemplo es enfocado en la función periódica de la matriz característica

$$\sigma(t) = \begin{cases} \sigma_1(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right), & 0 < t < \frac{T}{2} \\ \sigma_2(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right), & \frac{T}{2} < t < T \end{cases} \quad (3.19)$$

note que la mitad del periodo T tiene un comportamiento sinusoidal a frecuencia $T_s = \frac{T}{2}$ y la otra mitad del periodo tiene comportamiento cosenoidal a la misma frecuencia. En la Figura 3.1 ha de observarse la señal periódica $\sigma(t)$.

La función periódica puede ser aproximada mediante una serie de Fourier para este caso, $N_{h_1} = 3$. Sin embargo, se quiere mostrar el proceso de implementación del EHD. Por lo tanto, la función periódica es aproximada por dos series de Fourier para $\sigma_1(t)$ en el intervalo de tiempo $0 < t < \frac{T}{2}$ y para $\sigma_2(t)$ en $\frac{T}{2} < t < T$. Por lo tanto, las series de Fourier para estas funciones periódicas son,

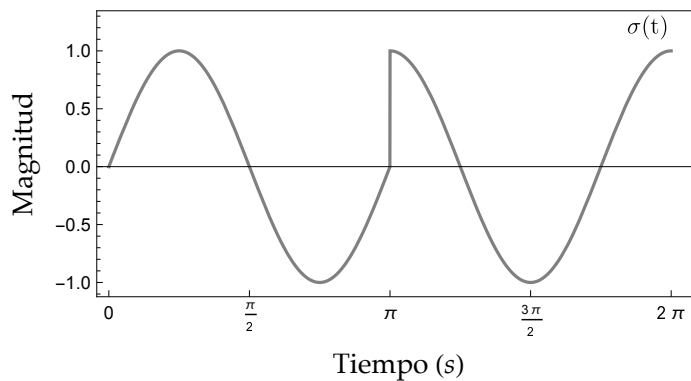


Figura 3.1: Función periódica $\sigma(t)$.

$$\begin{aligned}\sigma_1(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \sigma_2(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \gamma_1(t)\end{aligned}\quad (3.20)$$

con

$$\gamma_1(t) = \left(1 \quad \cos\left(\frac{2\pi}{T_s}t\right) \quad \cos\left(\frac{4\pi}{T_s}t\right) \quad \cos\left(\frac{6\pi}{T_s}t\right) \quad \sin\left(\frac{2\pi}{T_s}t\right) \quad \sin\left(\frac{4\pi}{T_s}t\right) \quad \sin\left(\frac{6\pi}{T_s}t\right) \right)^T. \quad (3.21)$$

Note que los coeficientes de Fourier a_1 y b_1 tienen una variación dentro del periodo fundamental T y los coeficientes a_0 , a_2 , a_3 , b_2 y b_3 se mantienen en cero sin sufrir cambios. Los comportamientos de a_1 y b_1 son mostrados en la Figura 3.2. Por lo tanto, la expansión del elemento $A[2, 2]$ mediante EHD resulta en la matriz que aproxima la función periódica

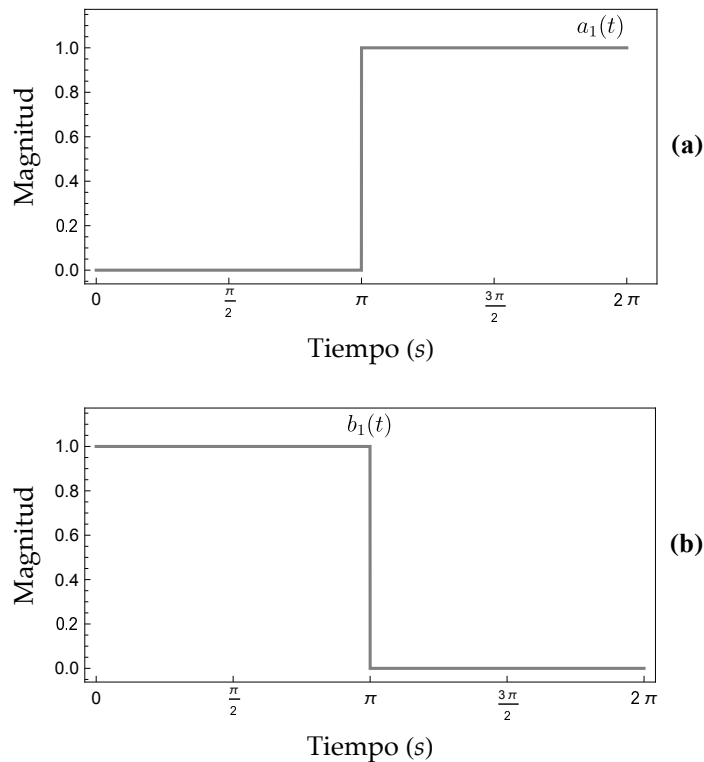


Figura 3.2: Variación de los coeficientes de Fourier: (a) Coeficiente $a_1(t)$ y (b) Coeficiente $b_1(t)$.

$\sigma(t)$ compuesta por los coeficientes obtenidos por la serie de Fourier.

$$\sigma(t) = A[2, 2] = \begin{pmatrix} 0 & a_1(t) & 0 & 0 & b_1(t) & 0 & 0 \\ \frac{a_1(t)}{2} & 0 & \frac{a_1(t)}{2} & 0 & 0 & \frac{b_1(t)}{2} & 0 \\ 0 & \frac{a_1(t)}{2} & 0 & \frac{a_1(t)}{2} & -\frac{b_1(t)}{2} & 0 & \frac{b_1(t)}{2} \\ 0 & 0 & \frac{a_1(t)}{2} & 0 & 0 & -\frac{b_1(t)}{2} & 0 \\ \frac{b_1(t)}{2} & 0 & -\frac{b_1(t)}{2} & 0 & 0 & \frac{a_1(t)}{2} & 0 \\ 0 & \frac{b_1(t)}{2} & 0 & -\frac{b_1(t)}{2} & -\frac{a_1(t)}{2} & 0 & \frac{a_1(t)}{2} \\ 0 & 0 & \frac{b_1(t)}{2} & 0 & 0 & \frac{a_1(t)}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

La expansión del coeficiente $A[1, 1]$ es una matriz cuadrada nula, el coeficiente $A[1, 2]$ resulta en una matriz diagonal de unos y $A[2, 1]$ en la negativa de la matriz resultante de $A[1, 2]$. Todas estas matrices de dimensión $\mathbb{R}^{7 \times 7}$.

La matriz de diferenciación es formada de acuerdo a la velocidad angular con la que se desarrollo la primera serie de Fourier, $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_s}$ en éste caso. Siguiendo la estructura de la matriz de diferenciación mostrada en (2.13) y para el caso de dos variables de estado se obtiene,

$$\mathbb{D} = \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2\pi}{T_s} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{4\pi}{T_s} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6\pi}{T_s} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\pi}{T_s} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4\pi}{T_s} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{6\pi}{T_s} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2\pi}{T_s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{4\pi}{T_s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6\pi}{T_s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2\pi}{T_s} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4\pi}{T_s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6\pi}{T_s} & 0 & 0 \end{array} \right) \quad (3.23)$$

de dimensión $\mathbb{R}^{14 \times 14}$. Por último, el vector de forzamiento es obtenido mediante el producto

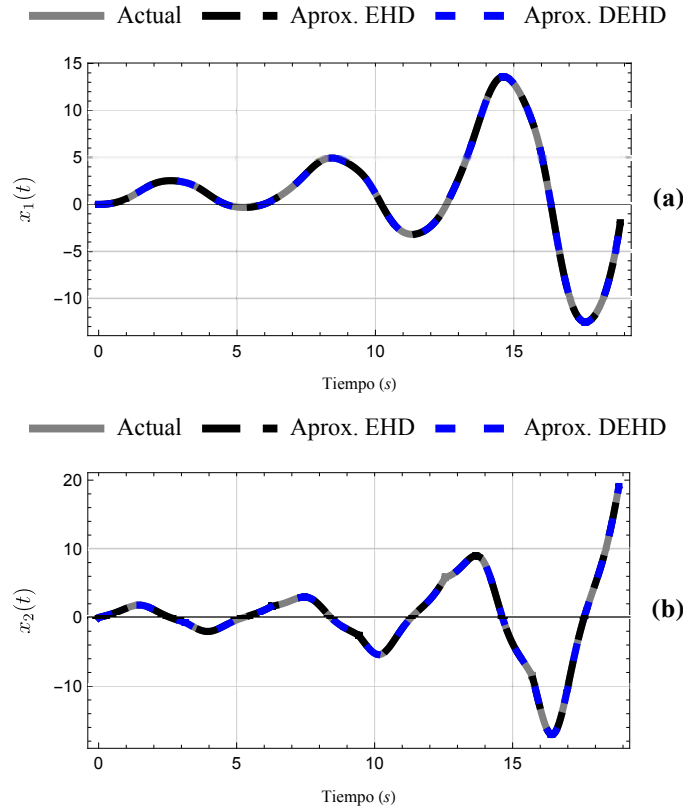


Figura 3.3: Respuesta de las variables de estado del sistema: (a) variable de estado $x_1(t)$ y (b) variable de estado $x_2(t)$.

Kronecker, tal como se indica en (3.16), donde la velocidad angular es $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_s}$.

Con base en lo anterior, la nueva representación del sistema es obtenida usando (3.16). La Figura 3.3 muestra la respuesta en el tiempo de las variables de estado $x_1(t) = \mathcal{X}_1(t)$ y $x_2(t) = \mathcal{X}_8(t)$, obteniendo la aproximación prácticamente indistinguible con aproximación armónica $N_{h_1} = 3$. Observe que el sistema tiende a ser inestable.

Note que posterior a la implementación de la metodología EHD, el sistema mantiene coeficientes con comportamiento periódico. Sin embargo, esta nueva representación obtenida tiene una característica de comportamiento lineal por tramos de los coeficientes de Fourier que están variando con el tiempo, tal como se observa en la Figura 3.2. De esta manera es posible obtener el comportamiento del sistema en el dominio del tiempo. Sin embargo, se requiere realizar un estudio de estabilidad y para lograrlo es necesario hacer una doble implementación del EHD o mejor llamado DEHD.

3.3. Doble Dominio Armónico Extendido

Existen dispositivos de PE con mayor complejidad periódica, tales que una implementación EHD no es suficiente para llegar a la representación LPV, debido a que la matriz característica resultante tiene dependencia del tiempo $\mathbb{A}(t)$ y es conformada por series de Fourier. A pesar de ello, el grado de complejidad de periodicidad es reducido con una implementación EHD, de tal manera que es posible obtener la solución del sistema usando otras técnicas como lineal por partes o las mencionadas en el marco teórico.

Sin embargo, el punto fuerte de esta metodología es basado en poder realizar análisis de estabilidad y la representación obtenida mediante una implementación EHD aún no lo permite. El diagrama de flujo de la Figura 3.4 muestra una descripción más detallada de como lograr una doble implementación del EHD; cabe mencionar que, mediante la primera implementación del EHD es posible obtener una simulación (ver sección 3.2.1). Sin embargo, el DEHD permitirá realizar análisis de estabilidad al sistema que originalmente es periódico. Derivado de ello, una doble implementación del EHD puede lograrse siguiendo la metodología presentada en la sección 3.2, donde (3.16) es considerada como un nuevo sistema de mayor dimensión $n(2N_{h_1} + 1)$ y la periodicidad de la nueva matriz característica es dada por la variación de los coeficientes de Fourier dentro del período fundamental. Note que la nueva matriz característica $\mathbf{A}(t)$ y el nuevo vector de forzamiento $\mathbb{F}(t)$ están compuestos por

$$\mathbf{A}(t) = \mathbb{A}(t) + \mathbb{D} \quad (3.24)$$

$$\mathbb{F}(t) = F(t) \otimes \gamma(t) \quad (3.25)$$

por lo tanto, el nuevo sistema

$$\dot{\mathcal{X}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathcal{X}(t) + \mathbb{F}(t). \quad (3.26)$$

El DEHD está basado en una doble implementación del EHD presentado, cabe hacer énfasis en que la primera implementación del EHD puede realizarse a una frecuencia angular ω_1 y la segunda implementación puede ser una aproximación para una frecuencia distinta llamada ω_2 . El sistema (3.26) es analizado de manera similar al EHD presentado,

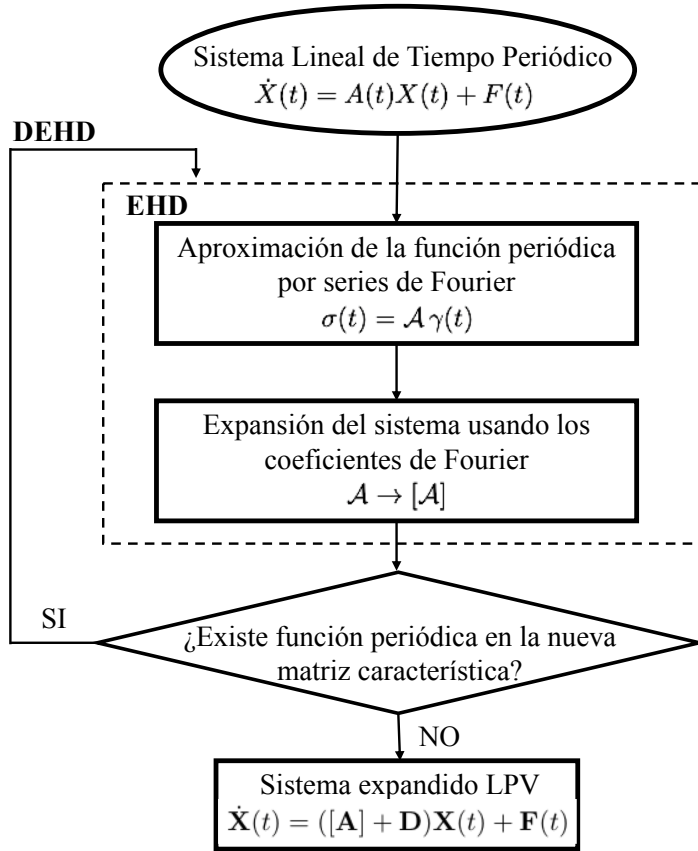


Figura 3.4: Diagrama de Flujo.

basándose en el caso escalar

$$\dot{\mathcal{X}}_h(t) = \mathbf{A}_h(t)\mathcal{X}_h(t) + \mathbf{F}_h(t) \quad (3.27)$$

donde $h = 1, \dots, (n-1)(m_1)(m_2)$ para $m_1 = 2N_{h_1} + 1$ y $m_2 = 2N_{h_2} + 1$, $\{m_1, N_{h_1}\}$ y $\{m_2, N_{h_2}\}$ son usados para hacer distinción entre la aproximación armónica deseada para la primera implementación del EHD y la segunda implementación, respectivamente. Note que para cada implementación del EHD se puede tener una aproximación deseada, pero en consecuencia de una mejor aproximación la dimensión del sistema crecerá en $\mathcal{X}(t) \in \mathbb{R}^{(n-1)(m_1)(m_2)}$, o bien, si el número total de aproximación armónica es considerado $N_{h_1} = N_{h_2}$ la dimensión del sistema resultante será $\mathcal{X}(t) \in \mathbb{R}^{(n-1)m_1^2}$.

Finalmente, el sistema resultante de DEHD mantiene la estructura de (3.16),

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = ([\mathbf{A}] + \mathbf{D})\mathbf{X}(t) + \mathbf{F}(t) \quad (3.28)$$

donde

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_i(t) \\ \mathbf{X}_{(m_1)+i}(t) \\ \vdots \\ \mathbf{X}_{m_1(N_{h_2}+1)+i}(t) \\ \mathbf{X}_{m_1(N_{h_2}+2)+i}(t) \\ \vdots \\ \mathbf{X}_{(m_1)(m_2)}(t) \\ \hline \mathbf{X}_{(m_1)(m_2)+i}(t) \\ \mathbf{X}_{(m_1)(m_2)+(m_1)+i}(t) \\ \vdots \\ \mathbf{X}_{(k-1)(m_1)(m_2)+i}(t) \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{X}_1(t) \\ \mathcal{X}_1(t) \cos(\omega_2 t) \\ \vdots \\ \mathcal{X}_1(t) \cos(N_{h_2} \omega_2 t) \\ \mathcal{X}_1(t) \sin(\omega_2 t) \\ \vdots \\ \mathcal{X}_1(t) \sin(N_{h_2} \omega_2 t) \\ \hline \mathcal{X}_2(t) \\ \mathcal{X}_2(t) \cos(\omega_2 t) \\ \vdots \\ \mathcal{X}_k(t) \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

note que $\mathcal{X}_1(t) \in \mathbb{R}^{m_1}$ e i es el contador con valores de $1, \dots, m_1$. Además, la nueva matriz de diferenciación

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbb{D}_2 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbb{D}_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbb{D}_2 \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

donde $\mathbb{D}_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$ corresponde a la segunda aproximación a frecuencia ω_2 para una aproximación armónica N_{h_2} . De la misma manera es definido $\gamma_2(t)$ para $\mathbf{F}(t)$, la obtención de éste vector es similar que (3.25), la diferencia radica en los parámetros de la segunda implementación del EHD

$$\mathbf{F}(t) = \mathbb{F}(t) \otimes \gamma_2(t). \quad (3.31)$$

Cabe mencionar que la matriz \mathbf{A} es calculada de la misma manera, donde los coeficientes

armónicos a utilizar son obtenidos en una implementación de las series de Fourier aplicado a la variación de cada coeficiente armónico en el periodo T (Descrito a detalle en 4.2).

3.3.1. Ejemplo

Retomando la representación del modelo posterior al EHD. Donde una doble implementación del EHD es necesaria para lograr la representación LPV que dependa únicamente de los parámetros de control y poder realizar estudios de estabilidad acotada para el parámetro de control variante.

La respuesta de las variables de estado obtuvieron una aproximación prácticamente indistinguible con $N_{h_1} = 3$ para EHD, más sin embargo para realizar el DEHD es necesario utilizar $N_{h_1} = 5$ y $N_{h_2} = 3$ para obtener aproximación prácticamente indistinguible. Ya que usando $N_{h_1} = 3$ y $N_{h_2} = 3$ no presenta buena aproximación prácticamente. Completando los coeficientes faltantes de la serie de Fourier con $N_{h_1} = 5$ del EHD se obtiene $a_4 = a_5 = b_4 = b_5 = 0$, sin presentar variaciones dentro del periodo fundamental T .

Retomando que existe variación de los coeficientes de Fourier en la matriz característica (3.22). Esta variación dentro del periodo fundamental puede ser aproximada mediante otra serie de Fourier aplicada a cada coeficiente de la primer serie de Fourier. Los coeficientes $a_0, a_2, a_3, a_4, a_5, b_2, b_3, b_4$ y b_5 de la primera serie de Fourier no presentaron variación dentro del periodo fundamental, por lo tanto, los coeficientes de la segunda serie de Fourier para cada uno, son ceros. Sin embargo, los coeficientes $a_1(t)$ y $b_1(t)$ tienen un comportamiento tal como se muestra en la Figura 3.2 y pueden ser aproximados mediante la serie de Fourier con $N_{h_2} = 3$,

$$\begin{aligned} a_1(t) &= \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 & -0.63662 & 0 & -0.212207 \end{pmatrix} \gamma_2(t) \\ b_1(t) &= \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.63662 & 0 & 0.212207 \end{pmatrix} \gamma_2(t) \end{aligned} \quad (3.32)$$

con

$$\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} 1 & \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) & \cos\left(\frac{4\pi}{T}t\right) & \cos\left(\frac{6\pi}{T}t\right) & \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) & \sin\left(\frac{4\pi}{T}t\right) & \sin\left(\frac{6\pi}{T}t\right) \end{pmatrix}^T. \quad (3.33)$$

La expansión de la segunda implementación resulta en la aproximación de los coeficientes

$a_1(t)$ y $b_1(t)$. La aproximación del coeficiente $a_1(t)$ está dada por la matriz expandida

$$a_1(t) = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 & -0.63662 & 0 & -0.212207 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & -0.424413 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.212207 & 0 & -0.31831 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.31831 & 0 \\ -0.31831 & 0 & 0.212207 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & -0.424413 & 0 & 0.31831 & 0 & 0.5 & 0 \\ -0.106103 & 0 & -0.31831 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

y el coeficiente $b_1(t)$ por la matriz expandida

$$b_1(t) = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.63662 & 0 & 0.212207 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.424413 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & -0.212207 & 0 & 0.31831 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & -0.31831 & 0 \\ 0.31831 & 0 & -0.212207 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.424413 & 0 & -0.31831 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0.106103 & 0 & 0.31831 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}. \quad (3.35)$$

Para el resto de las posiciones del sistema EHD, donde tiene valor de cero son expandidos a una matriz nula y donde se tiene un valor constante son expandidos por una matriz diagonal de la misma constante. La nueva matriz característica obtenida por EHD de dimensión $\mathbb{R}^{11 \times 11}$ resulta en una matriz de dimensión $\mathbb{R}^{154 \times 154}$.

La nueva matriz de diferenciación es formada por una diagonal de matrices tal como se muestra en (3.30) para $2(2 * 5 + 1) = 22$ variables de estado resultantes de la primera expansión. Y \mathbb{D}_2 es formada como (2.13) con $\omega_2 = \frac{2\pi}{T}$. Resultando en una matriz de dimensión $\mathbb{R}^{154 \times 154}$, al igual que la matriz característica. Y el vector de forzamiento expandido por el EHD, vuelve a ser expandido con el producto Kronecker con diferencia que el vector $\gamma(t)$ es a velocidad angular $\omega_2 = \frac{2\pi}{T}$.

La respuesta en el tiempo de las variables de estado ($x_1(t) = \mathcal{X}_1(t)$ y $x_2(t) = \mathcal{X}_{78}(t)$, para el DEHD) tienen el comportamiento mostrado en la Figura 3.3.

3.4. Análisis de Estabilidad en Sistemas LPV

El marco de referencia LPV de la nueva re-formulación EHD permite diferentes formas para obtener la estabilidad de los sistemas periódicos. Sin embargo en este trabajo, el análisis de estabilidad es obtenido mediante el bien conocido análisis de los eigen-valores de la representación LPV para un valor de θ dado dentro de un intervalo. De ésta manera la estabilidad se obtiene de manera similar a un sistema LTI

$$\det(sI - A(\theta)) = 0 \quad (3.36)$$

donde I es la matriz identidad de dimensión adecuada, s es el valor característico a encontrar para un valor de θ dado.

El sistema es globalmente estable para un valor de θ dado, cuando la parte real de los eigen-valores del sistema se mantiene negativo. Y es estable para un intervalo de θ , cuando el numero infinito de puntos existentes entre el intervalo de θ son analizados mediante los eigen-valores. Sin embargo, un muestreo puede ser capaz de mostrar el comportamiento de los polos y así concluir si el sistema es estable. Por lo tanto, el sistema es estable cuando la parte real de los eigen-valores del sistema se mantiene negativo ante la variación de θ dentro de un intervalo. Si existiese un eigen-valor con parte real positiva o cero, el sistema será considerado inestable.

3.4.1. Ejemplo

El análisis de estabilidad propuesto es implementado para el sistema teórico analizado en este capítulo, resultando en eigen-valores con parte real positiva. Algunos eigen-valores del sistema son,

$$\begin{pmatrix} 8.88178 \times 10^{-16} \pm 13.9699 i \\ -1.66533 \times 10^{-15} \pm 12.9536 i \\ 0.182756 \pm 11.9754 i \\ -0.182756 \pm 11.9754 i \\ -4.44089 \times 10^{-16} \pm 11.9537 i \\ -0.187292 \pm 10.9737 i \\ \vdots \\ 0.181725 \pm 0.00351 i \\ -0.181725 \pm 0.00351 i \end{pmatrix}. \quad (3.37)$$

El análisis de estabilidad resulta en 74 de 158 polos con parte real positiva. Concluyendo que el sistema es inestable tal como se observa en el comportamiento de las variables de estado en la Figura 3.3.

3.5. Conclusiones

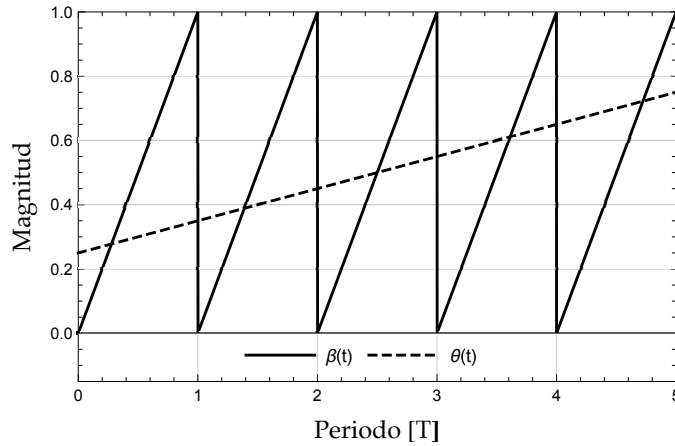
La re-formulación del EHD y DEHD fueron presentadas teóricamente mediante el uso de las series de Fourier y linealizaciones de Carleman. Como resultado, una representación de sistemas LPV es lograda conservando las variables de estado del sistema original sin la necesidad de cambios en el sistema de coordenadas.

Un ejemplo de un sistema de complejidad periódica es presentado para clarificar la implementación del EHD re-formulado y posteriormente su doble implementación DEHD. Se observo que, la aproximación lograda hace que la simulación sea prácticamente indistinguible en el EHD con aproximación armónica igual a tres, sin embargo el DEHD necesito que la primera aproximación armónica del EHD sea igual a cinco y la segunda igual a tres para el DEHD, para obtener una aproximación prácticamente indistinguible. Además es presentado un análisis de estabilidad para sistemas LPV e implementado al sistema posterior al DEHD. Es demostrado que el EHD es suficiente para obtener la solución en sistemas de PE de periodicidad compleja y que un análisis de estabilidad puede ser logrado cuando el DEHD es obtenido para estos sistemas.

Capítulo 4

Modulación de Ancho de Pulso en EHD

El modelado de las señales de conmutación $\sigma(t)$ es crucial en los sistemas conmutados. Las señales de conmutación hacen que los sistemas conmutados se distingan de otros tipos de sistemas dinámicos y se pueden clasificar desde diferentes perspectivas. Una clase importante de señales de conmutación se conoce como modulación de ancho de pulso (PWM, por sus siglas en inglés). Los controladores PWM están diseñados para producir un flujo o tren de pulsos que tienen un componente fundamental como forma de onda de referencia objetivo. El uso de formas de onda PWM se usa ampliamente en dispositivos PE, con la excepción de los convertidores resonantes. Los cambios rápidos en las señales de PWM aseguran que los dispositivos de potencia semiconductores se encienden o se apagan para producir las transferencias de energía eléctrica deseadas. En la metodología propuesta en este documento, los modelos LPV de sistemas PE, en el nuevo EHD, dependen en gran medida de representaciones matemáticas parametrizadas de la función de conmutación $\sigma(t)$, es decir, señales PWM. Esta sección presenta el análisis espectral parametrizado de dos técnicas de PWM que se utilizarán en los casos de estudio de este documento. Los coeficientes de Fourier se obtienen en términos de parámetros de modulación. Para una descripción más completa, se dirige al lector a la referencia [Sun, 2012].



(a) Señales de entrada PWM

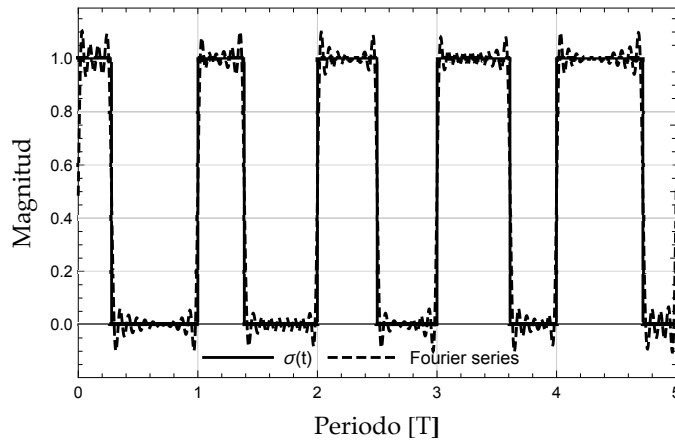
(b) Exacta y Aprox. $\sigma(t)$

Figura 4.1: Parametrización de la señal PWM a través de la serie de Fourier.

4.1. Modulación del Seguimiento de Borde de una Frecuencia Constante

Los convertidores DC-DC se conmutan según una señal PWM que se produce mediante la comparación de una señal portadora de frecuencia constante y una referencia dada a un proceso conocido como modulación del borde posterior. Este proceso de modulación se representa en la Figura 4.1 (a); donde, $\theta(t)$ es una referencia posiblemente móvil y $\beta(t)$ es una señal de diente de sierra de frecuencia constante ω . La Figura 4.1 (b) muestra la señal de PWM y su aproximación de Fourier.

El contenido espectral de una señal PWM es muy importante cuando se definen modelos LPV a través de la metodología EHD. La magnitud de cada coeficiente de Fourier puede, en principio, calcularse mediante métodos numéricos o parametrizarse en términos de parámetros de modulación como la amplitud o la fase mediante de, por ejemplo, funciones de Bessel [Sun, 2012]. Aquí, se pueden encontrar ideas adicionales.

Si el período de la señal portadora es T y el ciclo de trabajo dependiente del tiempo es $\theta(t)$, la función de conmutación producida por una señal de modulación de borde de salida de frecuencia constante $\sigma(t)$ puede expresarse mediante una serie trigonométrica como (2.1) con coeficientes de Fourier

$$\begin{aligned} a_0 &= \theta(t) \\ a_j &= \frac{\sin(j 2\pi \theta(t))}{j\pi} \\ b_j &= \frac{2 \sin(j \pi \theta(t))^2}{j\pi} \end{aligned} \quad (4.1)$$

La Figura 4.1 (b) también muestra la aproximación con el mismo comportamiento prácticamente al comparar con una señal de PWM simulada con (2.1). Se ha elegido una referencia de señal móvil para mostrar que la parametrización de Fourier también funciona bajo tales circunstancias. El modelo de señal considera solo diez armónicos para obtener una precisión aceptable.

4.2. Señal Moduladora de Ancho de Pulso PWM Sinusoidal: Caso Bipolar

En este proceso de modulación, se usa una señal de modulación sinusoidal como referencia para producir una serie de pulsos; el ancho de cada pulso se establece de acuerdo con la amplitud M de la señal de modulación en ese intervalo de tiempo. La Figura 4.2 muestra un proceso de PWM sinusoidal. La Figura 4.2 (a) muestra la señal de referencia $r(t)$ y la portadora $\beta(t)$. Mediante una comparación de estas señales es obtenida la señal de PWM $\sigma(t)$ mostrada en Figura 4.2 (b). En estas figuras, el período T de la señal de referencia se ha dividido en el número de la frecuencia moduladora m_f (numero de períodos

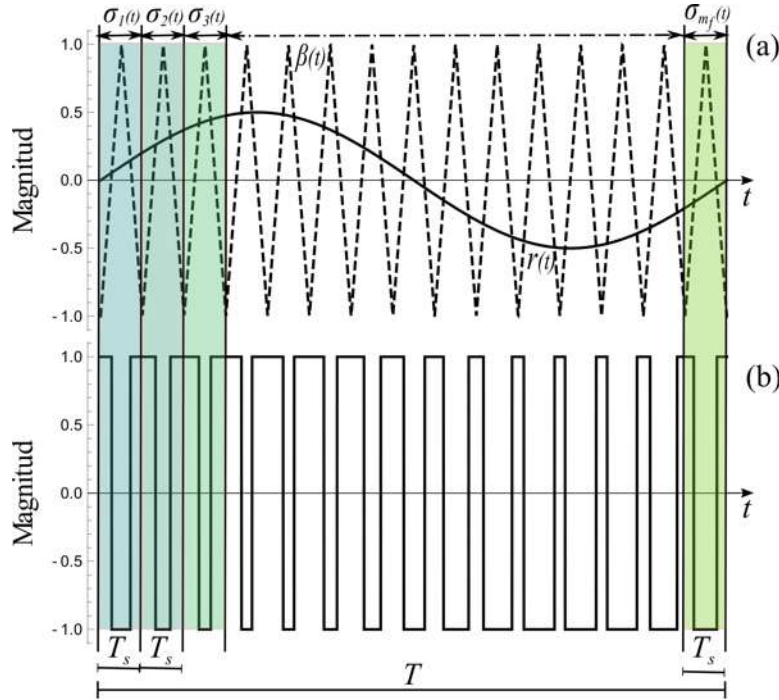


Figura 4.2: Proceso de un PWM sinusoidal, (a) señales de entrada y (b) Señal de conmutación PWM $\sigma(t)$

de conmutación dentro de un periodo fundamental; quince, en este caso), el tiempo obtenido es llamado T_s que a su vez corresponde al periodo de la señal de la portadora $\beta(t)$. La Figura 4.2 (a) también muestra aproximaciones de Fourier para cada periodo de conmutación T_s , donde

$$\sigma(t) = \sum_{md=1}^{m_f} \sigma_{md}(t). \quad (4.2)$$

En consecuencia, la señal $\sigma(t)$ puede entenderse como una señal que conmuta entre diferentes modos periódicos, cuyo análisis espectral puede llevarse a cabo de forma independiente. La forma de onda de cada modo tendrá un conjunto diferente pero constante de coeficientes de Fourier. Como ejemplo, una variación de la magnitud del coeficiente a_0 y a_1 entre modos o sector se ilustra en la Figura 4.3 (a) y (b) respectivamente. Obsérvese que la variación de los coeficientes en el periodo de conmutación T_s es por partes constante y periódica en sí misma; y por lo tanto, susceptible de ser aproximado por una serie de Fourier del período T . Por lo tanto, los sistemas con reglas de conmutación dictadas por los controladores PWM

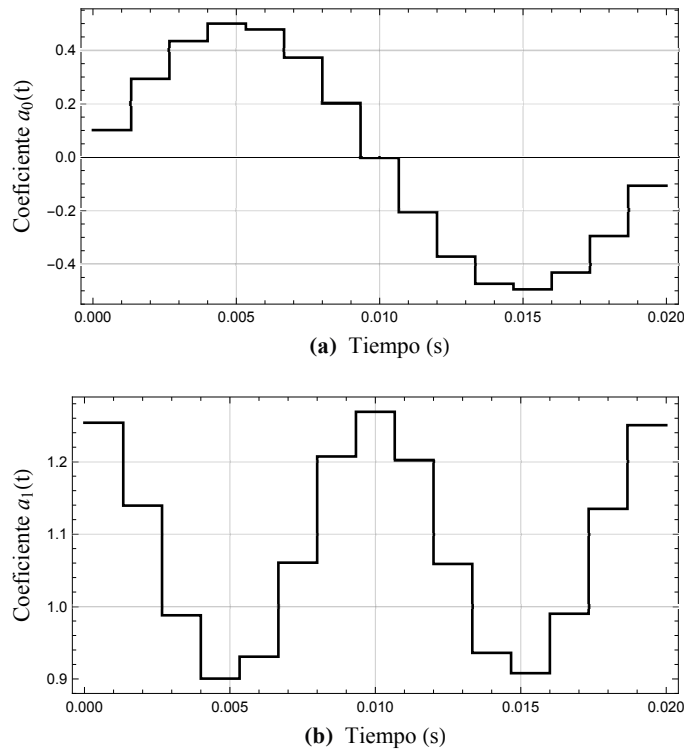


Figura 4.3: Coeficiente de Fourier posterior a una aproximación por series de Fourier: (a) a_0 y (b) a_1 .

pueden estudiarse de manera efectiva mediante enfoques armónicos ampliados dobles.

La parametrización de las funciones de conmutación de modo en aplicaciones PWM sinusoidales está mucho más implicada que en el caso presentado en la Subsección 4.1. En este caso, se deben tener en cuenta dos parámetros: la fase y la amplitud de la señal de modulación. La determinación de los componentes armónicos de una forma de onda PWM es una tarea bastante compleja. Aunque, en principio, tales componentes de frecuencia se pueden hacer numéricamente mediante el uso de la transformada de Fourier rápida, se prefieren los enfoques analíticos, especialmente en los casos en que las frecuencias de la señal portadora son muy altas. Afortunadamente, la caracterización de la función de conmutación en PWM sinusoidal se ha descrito en detalle en varias referencias. Uno de los métodos analíticos más conocidos fue desarrollado por Black y presentado como una teoría en su libro [Black, 2013]. Este método ha sido ampliamente utilizado y su teoría utiliza el método para determinar que el método de Black transforma un problema con señales en dos dimensio-

nes en un problema de tres dimensiones en el que las series dobles de Fourier desempeñan un papel central. La referencia [Holmes y Lipo, 2003] muestra el Black en detalle y lo usa para analizar el espectro de varias configuraciones de convertidor. Sin embargo, el enfoque de Black puede ser intrínsecamente algebraico y se han explorado otras alternativas. Por ejemplo, el método de la sumatoria es una alternativa que puede considerarse más compacta ya que no utiliza la noción de serie doble de Fourier. El enfoque de la recapitulación para encontrar los espectros de frecuencia de varias configuraciones de inversores PWM ha sido presentado en [Cox, 2009] y numéricamente comparado con el enfoque de Black en [Ainslie-Malik, 2013]. Otro enfoque que evita el uso de grandes series dobles de Fourier ha sido presentado por [Segundo-Ramirez y Medina, 2009]. Curiosamente, la parametrización dada en [Segundo-Ramirez y Medina, 2009] es válida para los regímenes transitorios y estacionarios y ha influido en los desarrollos descritos en este trabajo. En este trabajo, las ideas geométricas del método de sumatoria así como las incluidas en el método de Black se utilizan para desarrollar un nuevo método analítico en el análisis espectral de formas de onda PWM.

El ingrediente principal del análisis espectral de señales PWM es el cálculo de los tiempos de conmutación. La Figura 4.2 se puede usar para calcular dichos tiempos de conmutación. Ésta muestra cómo el ancho y la localización del pulso de conmutación depende de la señal portadora y del proceso de muestreo utilizado. También muestra las diferencias entre el muestreo natural y el digitalizado. El análisis espectral basado en el muestreo natural considera los tiempos exactos en los que coinciden la señal de referencia transportada y la del objetivo. En el muestreo digitalizado, se acepta la aproximación de las conmutaciones exactas.

La Figura 4.4 (a) también ilustra el caso de los tiempos de conmutación natural. En el proceso de PWM digitalizado, las referencias de los objetivos se aproximan como funciones de escalera dadas a los efectos de muestra y retención. De acuerdo con los tiempos de muestra, los pulsos de PWM pueden ser regulares o asimétricos. En la Figura 4.4 (b), la onda de referencia $r(t)$ se muestrea al inicio de cada período de conmutación mdT_s para determinar una función constante por partes $S_u(t)$, la cual determina una función de

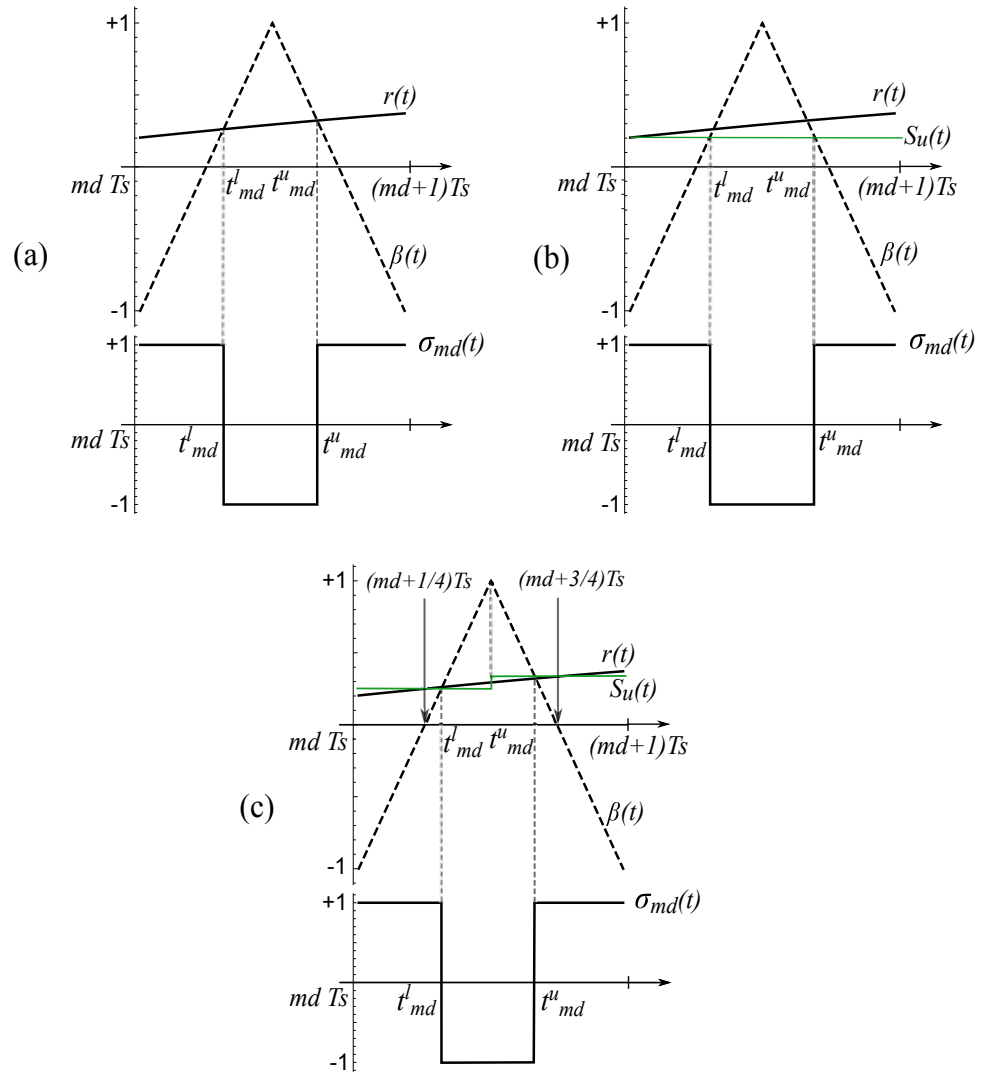


Figura 4.4: Los tiempos de conmutación dentro de un período de la señal portadora se determinan utilizando: (a) muestreo natural, (b) muestreo regular y (c) muestreo regular asimétrico.

conmutación $\sigma_{md}(t)$ que contiene

$$\sigma_{md}(t) = \begin{cases} -1, & t_{md}^l < t < t_{md}^u \\ +1, & t_{md}^u < t < t_{md+1}^l \end{cases} \quad (4.3)$$

donde md es cualquier número entero y los tiempos de conmutación t_{md}^l y t_{md}^u son los tiempos

cuando $S_u(t) = \beta(t)$, y se puede mostrar que estos se dan explícitamente como

$$\begin{aligned} t_{md}^l &= mdT_s + \frac{T_s}{4}(1 + S_u(mdT_s)) \\ t_{md}^u &= mdT_s + \frac{T_s}{4}(3 - S_u(mdT_s)) \end{aligned} \quad (4.4)$$

donde $S_u(mdT_s)$ es el valor de la señal referencia $r(t)$ en el tiempo mdT_s .

La función $r(t)$ también se puede muestrear como una aproximación en los momentos $t_1 = (md + 1/4)T_s$ y $t_2 = (md + 3/4)T_s$ que produce un impulso asimétrico de tren, tal como se muestra en la Figura 4.4 (c). Los tiempos de conmutación en este caso se dan explícitamente como

$$\begin{aligned} t_{md}^l &= \left(md + \frac{1}{4} \right) T_s + \frac{1}{4} M T_s \sin \left(\frac{\pi (4md + 1)}{2m_f} \right) \\ t_{md}^u &= \left(md + \frac{3}{4} \right) T_s - \frac{1}{4} M T_s \sin \left(\frac{\pi (4md + 3)}{2m_f} \right) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Además, los coeficientes de Fourier en cada modo periódico se pueden expresar como

$$\begin{aligned} a_{md}^0 &= \frac{1}{2} M \sin \left(\frac{\pi (4md + 1)}{2m_f} \right) + \frac{1}{2} M \sin \left(\frac{\pi (4md + 3)}{2m_f} \right) \\ a_{md}^j &= \frac{1}{n\pi} \left(\sin(2\pi n(md + 1)) - \sin(2\pi n md) \right) - \frac{2}{n\pi} \sin \left(\frac{n\pi}{2} \left(3 + 4md - M \sin \left(\frac{\pi(4md + 3)}{2m_f} \right) \right) \right) \\ &\quad + \frac{2}{n\pi} \sin \left(\frac{n\pi}{2} \left(1 + 4md + M \sin \left(\frac{\pi(4md + 1)}{2m_f} \right) \right) \right) \\ b_{md}^j &= \frac{1}{n\pi} \left(\cos(2\pi n md) - \cos(2\pi n(md + 1)) \right) + \frac{2}{n\pi} \cos \left(\frac{n\pi}{2} \left(3 + 4md - M \sin \left(\frac{\pi(4md + 3)}{2m_f} \right) \right) \right) \\ &\quad - \frac{2}{n\pi} \cos \left(\frac{n\pi}{2} \left(1 + 4md + M \sin \left(\frac{\pi(4md + 1)}{2m_f} \right) \right) \right) \end{aligned} \quad (4.6)$$

En las ecuaciones anteriores, el subíndice y el superíndice significan modo y orden armónico, respectivamente. Obsérvese que en la derivación de los coeficientes de Fourier anteriores, se ha supuesto que la señal de modulación se sincroniza en el tiempo $t = 0$. Si la onda de señal estaba en un ángulo de fase constante con la onda portadora, hay un desplazamiento de fase y los coeficientes deben verse afectados por este cambio de fase. Los coeficientes de Fourier de la señal desplazada dicen que $\sigma(t - \phi)$ son los coeficientes de Fourier de la señal $\sigma(t)$

multiplicados por una matriz operativa de desfaseamiento (2.24). Habiendo calculado todos los coeficientes de Fourier correspondientes a cada modo PWM, las variaciones entre los modos (véase la Figura 4.3, por ejemplo) pueden sintetizarse mediante una serie de Fourier del período fundamental T . En general, el coeficiente constante $a_{j_1}(t)$ a trozos tiene una Fourier expansión de la forma

$$a_{j_1}(t) = \alpha_{0,j_1}(t) + \sum_{j_2=1}^{N_{h_2}} [\alpha_{j_2,j_1}(t) \cos(j_2 \omega t) + \beta_{j_2,j_1}(t) \sin(j_2 \omega t)] \quad (4.7)$$

donde los coeficientes de Fourier para la variación de a_0 en del periodo fundamental T son

$$\begin{aligned} \alpha_{0,0} &= \sum_{md=1}^{m_f} \frac{2a_{md}^0}{m_f} \\ \alpha_{j_2,0} &= \sum_{md=1}^{m_f} \left[\frac{a_{md}^0}{\pi} \sin\left(\frac{2\pi m}{m_f} + \frac{2\pi}{m_f}\right) - \frac{a_{md}^0}{\pi} \sin\left(\frac{2\pi m}{m_f}\right) \right] \\ \beta_{j_2,0} &= \sum_{md=1}^{m_f} \left[-\frac{a_{md}^0}{\pi} \cos\left(\frac{2\pi m}{m_f} + \frac{2\pi}{m_f}\right) + \frac{a_{md}^0}{\pi} \cos\left(\frac{2\pi m}{m_f}\right) \right] \end{aligned} \quad (4.8)$$

para $j_1 = 1, \dots, N_{h_1}$ y $j_2 = 1, \dots, N_{h_2}$ correspondientes a la primera y segunda aproximación, respectivamente.

Se pueden derivar representaciones similares para la aproximación de cambios entre cada conjunto $b_{md}^{j_1}$. Esto es,

$$b_{j_1}(t) = \bar{\alpha}_{0,j_1}(t) + \sum_{j_2=1}^{N_{h_2}} [\bar{\alpha}_{j_2,j_1}(t) \cos(j_2 \omega t) + \bar{\beta}_{j_2,j_1}(t) \sin(j_2 \omega t)] \quad (4.9)$$

donde los coeficientes de Fourier se pueden calcular con las expresiones (4.8) con los conjuntos objetivo, reemplazado por $b_{md}^{j_1}$. Tenga en cuenta que de (4.5) a (4.7) se han parametrizado completamente en términos de todos los factores de modulación. Se puede obtener una expresión más simplificada si se considera que parámetros tales como m_f , T y T_s se fijan en un sistema dado. En el tratamiento de las señales de PWM, se han definido dos conjuntos de coeficientes de Fourier. Conjuntos de coeficientes: $a_{md}^{j_1}$ y $b_{md}^{j_1}$ tienen en cuenta las variaciones de tiempo impuestas por la función del operador y tienen un período de T_s . Por otro lado,

los conjuntos de coeficientes: α_{j_2, j_1} , β_{j_2, j_1} , $\bar{\alpha}_{j_2, j_1}$ y $\bar{\beta}_{j_2, j_1}$ tienen en cuenta las variaciones de tiempo impuestas por la modulación o las referencias de destino con periodo T . La interacción de ambos comportamientos que varían en el tiempo da como resultado la señal PWM. Al igual que en el método de Black, la representación completa de la señal PWM viene dada por una serie doble de Fourier, pero se muestra de una manera totalmente nueva. Esta representación es

$$\begin{aligned} \sigma(t) = & \sum_{j_1=0}^{N_{h_1}} \sum_{j_2=0}^{N_{h_2}} \alpha_{j_2, j_1}(t) \cos(j_2 \omega_2 t) \cos(j_1 \omega_1 t) + \sum_{j_1=0}^{N_{h_1}} \sum_{j_2=1}^{N_{h_2}} \beta_{j_2, j_1}(t) \sin(j_2 \omega_2 t) \cos(j_1 \omega_1 t) \\ & + \sum_{j_1=1}^{N_{h_1}} \sum_{j_2=0}^{N_{h_2}} \bar{\alpha}_{j_2, j_1}(t) \cos(j_2 \omega_2 t) \sin(j_1 \omega_1 t) + \sum_{j_1=1}^{N_{h_1}} \sum_{j_2=1}^{N_{h_2}} \bar{\beta}_{j_2, j_1}(t) \sin(j_2 \omega_2 t) \sin(j_1 \omega_1 t) \end{aligned} \quad (4.10)$$

donde $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_s}$ y $\omega_2 = \frac{2\pi}{T}$.

Una diferencia explícita entre el enfoque de Black y el representado por (4.10) es que los últimos no usan las funciones de Bessel que exigen más esfuerzo computacional.

4.3. Conclusiones

Un PWM de frecuencia constante es obtenido de manera que conserve parámetros simbólicos, tales como, las variables de control. Con el mismo sentido, se presenta un PWM sinusoidal donde las variables de control de este PWM son establecidas como parámetros variantes. Este último con ventaja de utilizar la matriz de desfaseamiento para adelantar o atrasar la señal PWM.

El PWM presentado está basado en una doble implementación de la serie de Fourier, produciendo que un menor costo computacional comparado a la aproximación del PWM mediante una sola aplicación de la serie de Fourier cuando se manejan altas frecuencias de conmutación. Por ejemplo, una aproximación de Fourier para una señal PWM a alta frecuencia requiere un elevado número de contenido armónico para su análisis; más sin embargo, una doble implementación de la serie de Fourier tal como se implemento resulta en una cantidad menor para su aproximación.

Capítulo 5

Casos de Estudio

En este capítulo se aborda la implementación de la re-formulación EHD para la ecuación de Mathieu, con propósito de validar el análisis de estabilidad implementado. Por otro lado, también es aplicado en dispositivos de electrónica de potencia, como lo es el convertidor elevador (convertidor Boost) y el STATCOM trifásico. En el STATCOM, la aplicación del EHD mantiene un sistema periódico, el cual para fines de simulación es posible combinar con la técnica por partes (piecewise). Sin embargo, la implementación del Dominio Armónico Extendido Doble (DEHD), es aplicada para lograr la transformación a sistema invariante y aprovechar las ventajas de la teoría existente [Chen, 2012].

5.1. Ecuación de Mathieu

Un sencillo sistema teórico de segundo orden es usado para ilustrar la metodología propuesta, dado como

$$\ddot{x}(t) + \frac{2\pi}{T}\xi\dot{x}(t) + f_1(t)x(t) = u(t) \quad (5.1)$$

De (5.1) se obtiene el sistema en representación de variables de estados,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -f_1(t) & -\frac{2\pi}{T}\xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ &= A(t)X(t) + F(t) \end{aligned} \quad (5.2)$$

donde f_1 es un parámetro variante en el tiempo con comportamiento periódico obtenido por,

$$f_1(t) = a - 2b \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \quad (5.3)$$

T es el periodo y $u(t)$ es una entrada externa (o una perturbación) con comportamiento periódico,

$$u(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \quad (5.4)$$

El modelo EHD puede construirse fácilmente considerando que cada elemento de la matriz $A(t)$ puede aproximarse mediante una serie de Fourier con los coeficientes presentados en la Tabla 5.1 para $N_h = 3$. En consecuencia $[A(1, 1)]$, $[A(1, 2)]$, $[A(2, 1)]$ y $[A(2, 2)]$ son las matrices de coeficientes correspondientes a cada $A(k, c)(t)$ elementos de $A(t)$ y cada $[A(k, c)] \in \mathbb{R}^{(2N_h+1) \times (2N_h+1)}$ para todo k, c , donde $[A(1, 1)] = \mathbf{0}$, $[A(1, 2)] = I$, $[A(2, 2)] = (-\frac{2\pi}{P}\xi)I$,

$$[A(2, 1)] = \begin{pmatrix} -a & 2b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & -a & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & -a & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & -a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & -a \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

$$\mathbb{A}(\theta) = \begin{pmatrix} [A(1, 1)] & [A(1, 2)] \\ [A(2, 1)] & [A(2, 2)] \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

y I es una matriz de identidad de dimensión $m = 2N_h + 1$ ($m = 7$ en este caso). Además,

Tabla 5.1: Coeficientes de Fourier para las expansiones en serie de los elementos de la matriz $A(t)$.

Coeficiente	$A[1, 1]$	$A[1, 2]$	$A[2, 1]$	$A[2, 2]$
a_0	0	1	$-a$	$-\frac{2\pi}{T}\xi$
a_1	0	0	$2b$	0
a_2	0	0	0	0
a_3	0	0	0	0
b_1	0	0	0	0
b_2	0	0	0	0
b_3	0	0	0	0

para este caso, la matriz \mathbb{D} es una matriz de diferenciación de bloques dada por

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

donde D es la matriz de diferenciación obtenida de (2.15).

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2\pi}{T} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{4\pi}{T} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6\pi}{T} \\ 0 & \frac{2\pi}{T} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4\pi}{T} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{6\pi}{T} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

Finalmente de la ec. (3.25)

$$\mathbb{F}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ u(t) \\ \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)u(t) \\ \cos\left(\frac{4\pi}{T}t\right)u(t) \\ \cos\left(\frac{6\pi}{T}t\right)u(t) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)u(t) \\ \sin\left(\frac{4\pi}{T}t\right)u(t) \\ \sin\left(\frac{6\pi}{T}t\right)u(t) \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

con $\mathbf{0} = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$.

La representación obtenida mediante el EHD es desarrollada en (3.16), donde $\mathbf{A} = \mathbb{A} + \mathbb{D}$. En (5.10) se muestra una representación de un sistema LPV, donde θ es un vector parámetros variantes compuesto por (a, b) .

$$\mathbf{A}(\theta) = \left(\begin{array}{cccccc|cccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2\pi}{T} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{4\pi}{T} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6\pi}{T} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\pi}{T} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4\pi}{T} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{6\pi}{T} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline -a & 2b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & -a & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\xi & 0 & 0 & -\frac{2\pi}{T} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & -a & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\xi & 0 & 0 & -\frac{4\pi}{T} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & -a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\xi & 0 & 0 & -\frac{6\pi}{T} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a & b & 0 & 0 & \frac{2\pi}{T} & 0 & 0 & -2\xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & b & -a & b & 0 & 0 & 0 & \frac{4\pi}{T} & 0 & 0 & -2\xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & -a & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6\pi}{T} & 0 & 0 & -2\xi \end{array} \right) \quad (5.10)$$

La Figura 5.1 muestra el plano de fase $x_1(t)$ y $x_2(t)$ obtenido por simulación directa de (5.2) y su correspondiente representación en el dominio del tiempo (3.16); existe una aproximación prácticamente indistinguible, ya que no hay una diferencia entre la solución aproximada y la solución numérica tradicional. La simulación es obtenida para los valores fijos $T = \pi$, $\xi = 0.2$, $a = 2$ y $b = 1$.

Por otro lado, un análisis de estabilidad es llevado a cabo desde la representación obtenida, donde los parámetros a y b son variados en el intervalo de $[-1, 25]$ y $[-15, 15]$, respectivamente. Para asegurar una estabilidad global se consideraron mil puntos de análisis entre cada intervalo resultando en 1000×1000 puntos analizados y mostrados en la Figura 5.2, donde los puntos en negro representan inestabilidad del sistema y los blancos representan la parte estable.

En [Collado, 2018] reporta un análisis de estabilidad usando la técnica de Arnold

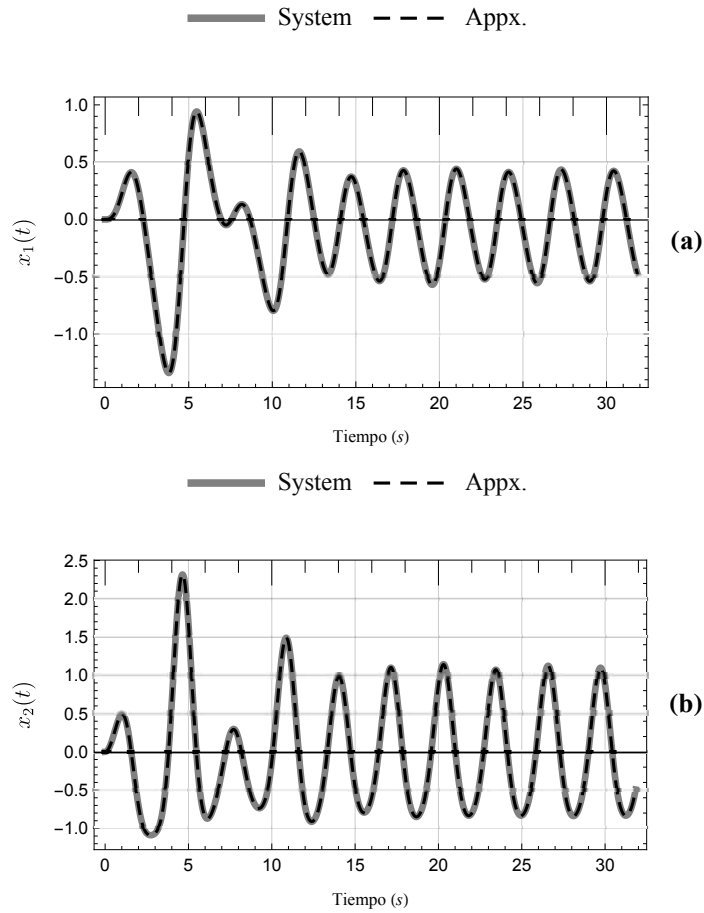


Figura 5.1: Respuesta en dominio del tiempo de los espacios de estado de la ecuación de Mathieu.

Tonges, de la misma manera el análisis obtiene regiones de estabilidad con 1000×1000 puntos analizados. En términos de esfuerzo computacional, la examinación directa de los valores propios de la matriz \mathbf{A} ha demostrado ser bastante eficiente, ya que solo se requirieron 2 horas para calcular el mismo mapa de estabilidad reportado en [Collado, 2018], el cual se obtuvo después de 20 horas de trabajo computacional en una PC de escritorio Dell Intel core 2 duo 2.8 GHz 4GB ram. Los cálculos reportados en este trabajo se obtuvieron con una computadora portátil MacBook Pro 2009 con Intel core 2 duo 2.66 GHz 4GB de RAM.

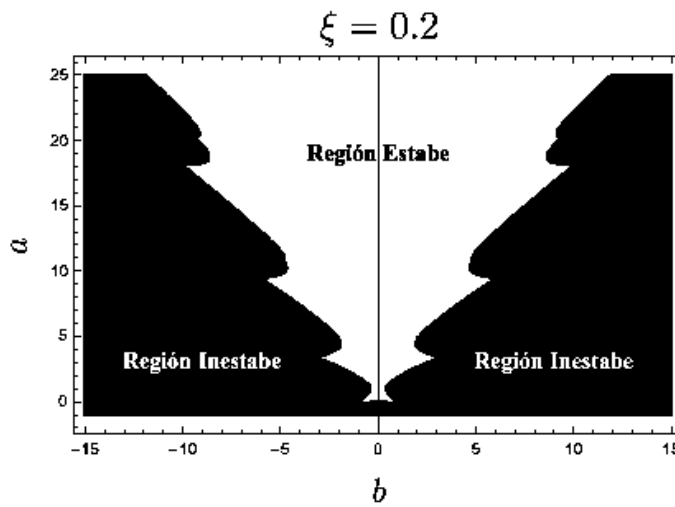


Figura 5.2: Diagrama de estabilidad para la ecuación de Mathieu.

5.2. Convertidor Boost

En esta sección, el convertidor elevador simple de la Figura 5.3 se va a linealizar mediante el EHD. Los datos para realizar simulaciones en el dominio del tiempo se muestran en la Tabla 5.2. El modelo del convertidor es considerado siempre en modo continuo. Los modelos de los interruptores son bastante realistas ya que se considera que el interruptor tiene una pequeña resistencia cuando se enciende, y es prácticamente un circuito abierto cuando se apaga. El diodo tiene una caída de tensión directa de 0.8 V y una resistencia de 0.0001Ω cuando está ENCENDIDO.

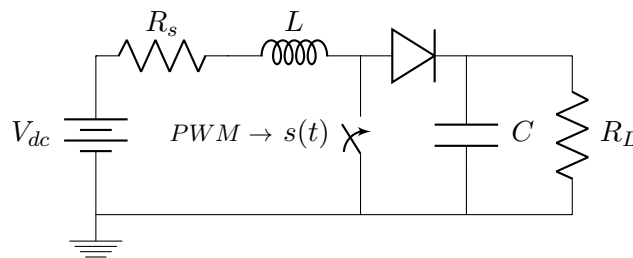


Figura 5.3: Diagrama del convertidor Boost.

Tomando en cuenta el diagrama de la Figura 5.3, es obtenido el modelo en espacio de estados con las variables de estado $X(t) = [i_L(t) \quad v_C(t)]$. La función $s(t)$ enciende y

Tabla 5.2: Parametros del convertidor Boost.

Componente/parámetro	valor
Voltaje de entrada, V_{cd}	48 V
Resistencia interna de la fuente, R_s	0.1 Ω
Inductancia, L	12 mH
Capacitancia, C	15 μ F
Resistencia interna del interruptor (ON), R_i	0.0001 Ω
Caída de voltaje del diodo, V_d	0.8 V
Resistencia interna del diodo (ON), R_d	0.0001 Ω
Periodo de conmutación, T	100 μ s

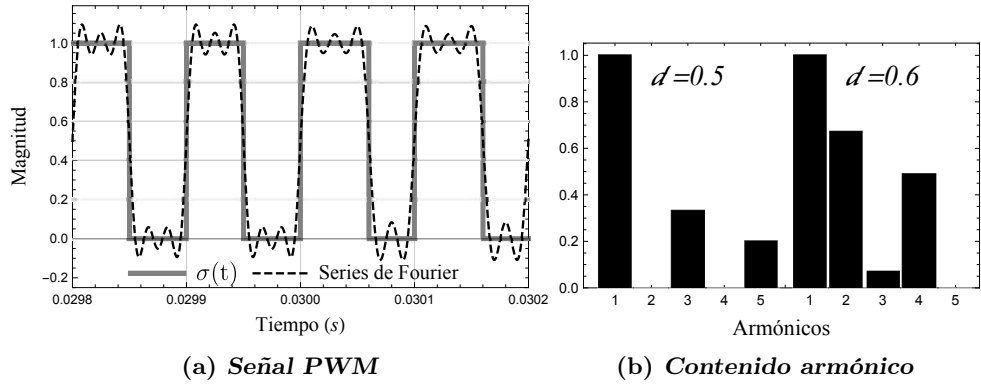


Figura 5.4: Señal PWM de un ciclo de trabajo que cambia de 50 % a 60 %.

apaga el transistor, esta conmutación vuelve periódico el sistema descrito por la matriz $A(t)$ y la excitación $F(t)$.

$$\begin{aligned}
 A(t) &= \begin{pmatrix} \frac{R_i s(t) - R_s - (1-s(t))R_d}{L} & -\frac{1-s(t)}{L} \\ \frac{1-s(t)}{C} & \frac{-1}{C R_L} \end{pmatrix} \\
 f(t) &= \begin{pmatrix} \frac{(1-s(t))V_d + V_{dc}}{L} \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

Utilizando la formulación presentada en el capítulo IV para un PWM de frecuencia constante. La función de conmutación es aproximada por $N_h = 5$ para un ciclo de trabajo inicial de $d = 50\%$ y cambia a 60% después de $0.03s$. La Figura 5.4 (a) muestra la señal de conmutación y la aproximación usando (4.1) y la Figura 5.4 (b) muestra el contenido armónico para cada ciclo de trabajo utilizado. Además, es posible apreciar el cambio del ciclo de trabajo en el

Tabla 5.3: Coeficientes de Fourier de la función de conmutación $s(t)$.

Coeficientes de $s(t)$	
$a_0 \rightarrow d(t)$	
$a_1 \rightarrow \frac{1}{\pi} \sin(2\pi d(t))$	$b_1 \rightarrow \frac{1}{\pi} (1 + \cos(2\pi d(t)))$
$a_2 \rightarrow \frac{1}{2\pi} \sin(4\pi d(t))$	$b_2 \rightarrow \frac{1}{2\pi} (1 + \cos(4\pi d(t)))$
$a_3 \rightarrow \frac{1}{3\pi} \sin(6\pi d(t))$	$b_3 \rightarrow \frac{1}{3\pi} (1 + \cos(6\pi d(t)))$
$a_4 \rightarrow \frac{1}{4\pi} \sin(8\pi d(t))$	$b_4 \rightarrow \frac{1}{4\pi} (1 + \cos(8\pi d(t)))$
$a_5 \rightarrow \frac{1}{5\pi} \sin(10\pi d(t))$	$b_5 \rightarrow \frac{1}{5\pi} (1 + \cos(10\pi d(t)))$

tiempo 0.03s debido a que la corriente y el voltaje presentan un transitorio para llegar al nuevo valor de estado estable.

Es muy importante notar que en esta aplicación, las matrices en el modelo EHD resultante dependen no linealmente del parámetro de control (ciclo de trabajo), tal como se muestra en (4.1). La Tabla 5.3 muestra los coeficientes de Fourier para la aproximación de $N_h = 5$, donde $\theta(t)$ de (4.1) representa el ciclo de trabajo $d(t)$.

Además, en la Tabla 5.3 es posible notar que la función de conmutación depende

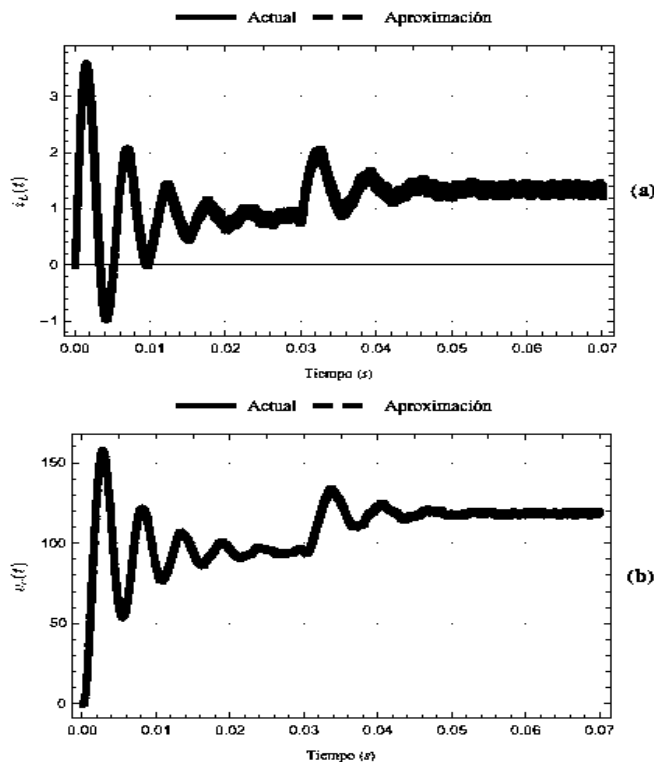


Figura 5.5: Simulación en el dominio del tiempo de un simple convertidor Boost.

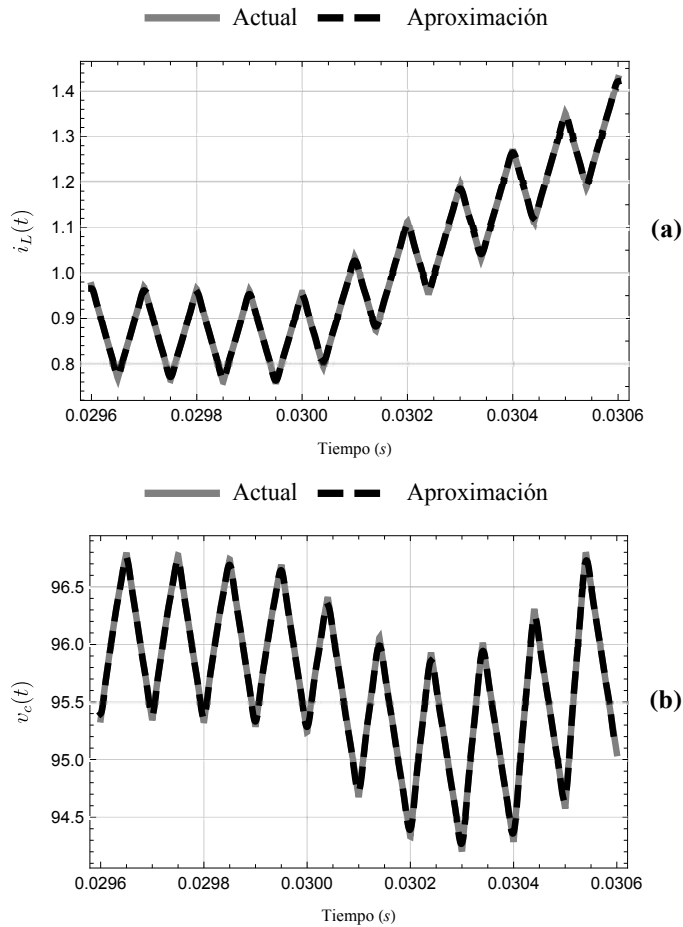


Figura 5.6: Validación del modelo ante presencia de transitorios.

exclusivamente del ciclo de trabajo como una representación LPV. Una de las ventajas de esta representación es que para el análisis de simulación, el ciclo de trabajo comienza en 50% y posteriormente (en 0.03s), cambia a un ciclo de trabajo del 50% (ver Figura 5.4). El cambio del ciclo de trabajo se puede apreciar en la Figura 5.5 que muestra la simulación de la respuesta en el tiempo del convertidor. La diferencia de las señales es cuantificado mediante la obtención del error entre las señales actual y la aproximación EHD con valor de 240.05×10^{-6} .

Un acercamiento a la Figura 5.5 es mostrado en Figura 5.6. La Figura 5.6 muestra que la aproximación lograda es prácticamente indistinguible en respuesta transitoria, al comparar por simulación directa y la solución en el dominio del tiempo en el marco EHD

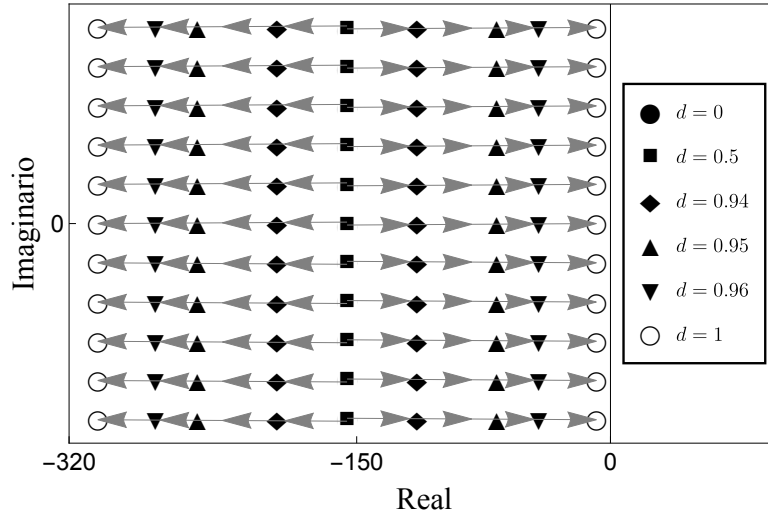


Figura 5.7: Valores característicos del convertidor Boost.

del sistema (5.11). En esta figura, se aprecia la respuesta de las variables de estado ante el cambio del ciclo de trabajo en $0.03s$, tres periodos anteriores a este tiempo, el sistema estaba llegando al estado estable y posterior a $0.03s$ se muestra el transitorio debido al cambio del ciclo de trabajo.

Finalmente, un análisis de estabilidad es mostrado en la Figura 5.7 donde el ciclo de trabajo $d(t)$ es variado en el intervalo $[0\%, 100\%]$. La dirección de las flechas indican el sentido del movimiento de los polos conforme varia el ciclo de trabajo, el análisis de la parte real de los eigen-valores inicia en 0% y aumenta hasta 100% . El sistema es considerado estable para la variación de $d(t) = 0\%, \dots, 100\%$. Note que el sistema en el marco de referencia EHD tiene dimensión $2N_h + 1 = 22$. Por lo tanto, en la Figura 5.7 se muestra la ubicación de los 22 polos para cada valor $d(t)$, donde cada valor $d(t)$ se gráfica con diferente marcador. Cuando $d(t)$ se aproxima al 0% , la parte real de los polos de este sistema convergen en -150 aproximadamente y cuando se aproxima al 100% , la parte real de los polos se ubican aproximadamente en -316 y -8 observando que se aproximan al cero.

5.3. STATCOM Trifásico

En esta sección, un compensador de potencia reactiva (STATCOM) es analizado en su forma trifásica. La Figura 5.8 muestra el diagrama del STATCOM, el cual es linealizado mediante el DEHD. Sin embargo, es mostrada la representación en espacio de estados al aplicar EHD.

Considere que la señal de conmutación del par de interruptores $Tr_1 - Tr_4$ es $s_a(t)$, así como el resto son $s_b(t) = Tr_3 - Tr_6$ y $s_c(t) = Tr_5 - Tr_2$. Cabe señalar que los tiristores se encienden con un voltaje de 1 y se apagan con 0 y deben de cumplir que cuando los $Tr_{1,3,5} = 1$ el resto $Tr_{2,4,6} = 0$ y viceversa, de tal manera que siempre $Tr_{1,3,5} + Tr_{2,4,6} = 1$ cada uno con su respectivo par de interruptores. De ésta manera, la aproximación propuesta del PWM con conmutación por voltaje bipolar mostrado en la sección 4.2, es implementada.

Las señales de conmutación de la Figura 5.9 consideran solo cinco armónicos con $N_{h_1} = N_{h_2}$ para obtener una precisión aceptable y una frecuencia moduladora m_f de quince. Cabe mencionar que en convertidores trifásicos, el m_f debe ser impar y múltiplo de 3 para que en éste se puedan observar los armónicos característicos de un convertidor trifásico [Mohan *et al.*, 2009]. La Figura 5.10 muestra el espectro armónico entre fases a y b para

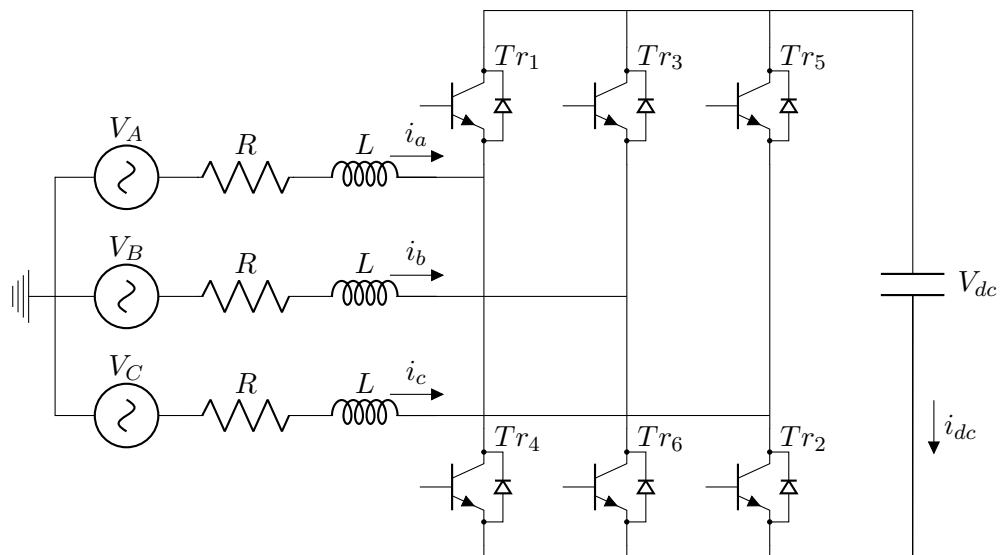


Figura 5.8: Diagrama un STATCOM trifásico.

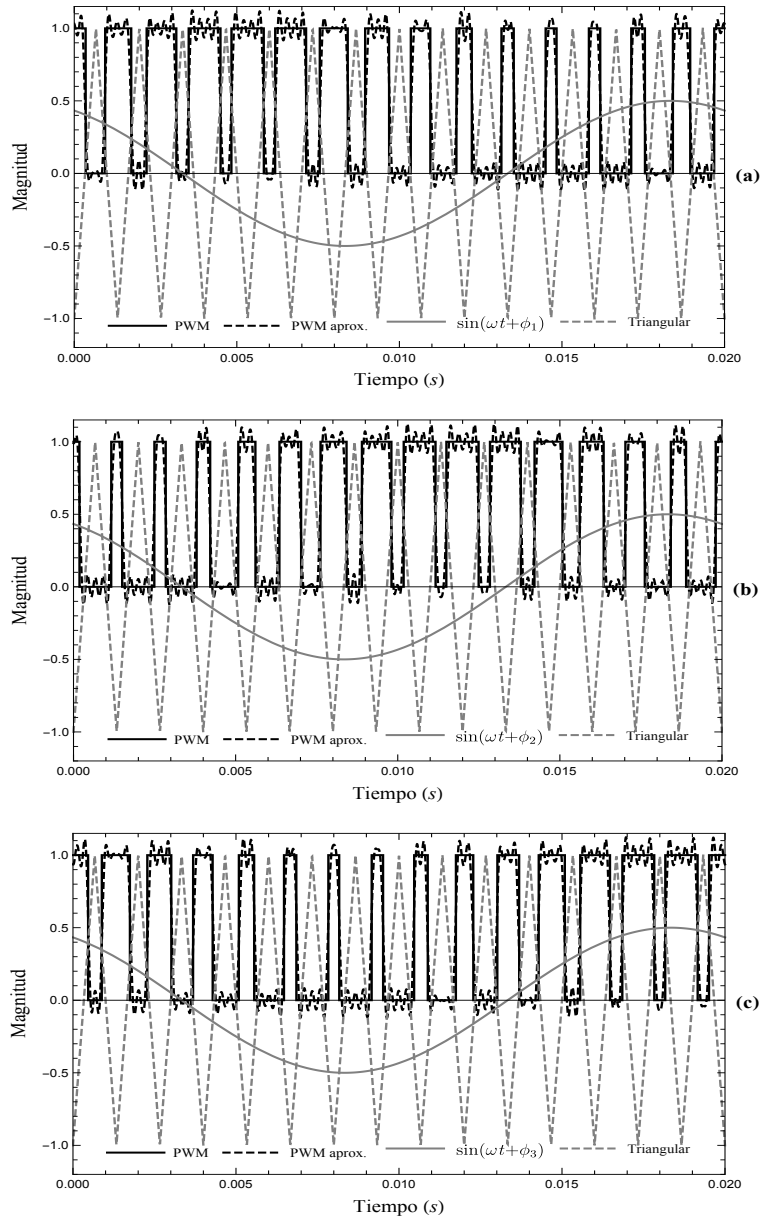
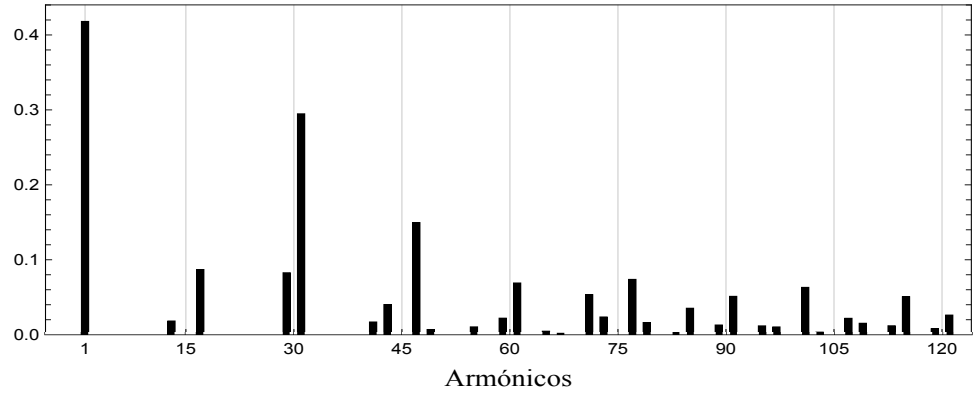


Figura 5.9: Funciones de conmutación del STATCOM: (a) PWM para la fase a , (b) PWM para la fase b y (c) PWM para la fase c .

obtener los armónicos característicos (en $(k m_f \pm 2)$ para k impar y $(k m_f \pm 1)$ para k par) del PWM trifásico, tal como se reporta en [Mohan *et al.*, 2009]. Por otra parte, en la sección 2.3, con los coeficientes de Fourier del PWM de la fase a multiplicado a la matriz de desfase se obtiene el PWM de la fase b y c con ϕ desfasado -120° y 120° , respectivamente para

Figura 5.10: Espectro armónico de PWM_{AB}

cada fase. La amplitud de la señal de referencia $r(t)$ es $M = 0.5$ para cada fase. Además, los PWM mostrados en la Figura 5.9 serán utilizados para la simulación del STATCOM trifásico, cada uno respecto a su fase correspondiente.

El modelo de espacio de estados para el diagrama de la Figura 5.8 está dado como,

$$A(t) = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & 0 & 0 & -\frac{s_a(t)}{L_a} \\ 0 & -\frac{R_b}{L_b} & 0 & -\frac{s_b(t)}{L} \\ 0 & 0 & -\frac{R_c}{L_b} & -\frac{s_c(t)}{L_c} \\ \frac{s_a(t)}{C} & \frac{s_b(t)}{C} & \frac{s_c(t)}{C} & 0 \end{bmatrix} \quad x(t) = \begin{bmatrix} i_a(t) \\ i_b(t) \\ i_c(t) \\ V_{dc}(t) \end{bmatrix} \quad f(t) = \begin{bmatrix} \frac{V_A}{L_a} \\ \frac{V_B}{L_b} \\ \frac{V_C}{L_c} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

donde $s_a(t)$, $s_b(t)$ y $s_c(t)$ corresponden a la conmutación para cada fase del sistema trifásico y V_A , V_B y V_C corresponden a voltajes de entrada.

En el capítulo 4.2 se observó que, una aplicación del EHD continúa manteniendo valores periódicos, debido a que la aproximación es para cada periodo de la señal portadora T_s . Por lo tanto, la matriz característica tiene la cantidad m_f de variaciones dentro del periodo fundamental de la señal de referencia T . Por lo tanto, los coeficientes para el EHD son obtenidos de la primer serie de Fourier (4.6) para un periodo T_s , donde la variación está dada por $md = 0, \dots, m_f - 1$ con frecuencia moduladora $m_f = 15$.

Es de notar que el DEHD en este sistema desenvuelve en $([A]+D)$, donde esta suma representa la matriz característica con una dimensión $n m_1 m_2$ (para n dimensión inicial del sistema), en éste caso la dimensión del sistema posterior al DEHD es de $4(2*5+1)(2*5+1) =$

484. Una característica de la nueva representación obtenida es que $([\mathbf{A}] + \mathbf{D})$ es altamente dispersa como se observa en 5.11, donde las secciones en blanco representan valores nulos. La Figura 5.11 muestra el resultado posterior al DEHD del elemento $A[1, 1]$ (matriz inicial del sistema), el mismo comportamiento mantiene el elemento $A[2, 2]$ y $A[3, 3]$. Por otra parte, los elementos inicialmente con valor de 0, posteriormente al DEHD resultan matrices nulas de dimensión apropiada y el resto de los elementos de la matriz inicial (elementos con acción de conmutación) mantienen matrices llenas. Por lo tanto, las técnicas de dispersidad pueden ser usadas para beneficio de análisis en el EHD y DEHD.

La simulación en dominio del tiempo es mostrada en la Figura 5.12 donde es comparada con simulación directa de (5.12) con diferencia promedio de 0.0201. Una característica que debe resaltarse en la Figura 5.12 es que las corrientes de cada fase, así como el voltaje del capacitor muestran un rizado característico. Sin embargo, el alto rizado obtenido se debe al uso de una frecuencia de conmutación baja. La simulación es obtenida para una resistencia de $R = 0.051 \Omega$, inductancia de $L = 270 \mu H$ y capacitancia de $C = 4950 \mu F$, ante una entrada de voltajes desbalanceados $V_A = \sin(\frac{2\pi}{T}t + 0^\circ)$, $V_B = 0.9 \sin(\frac{2\pi}{T}t - 118^\circ)$ y

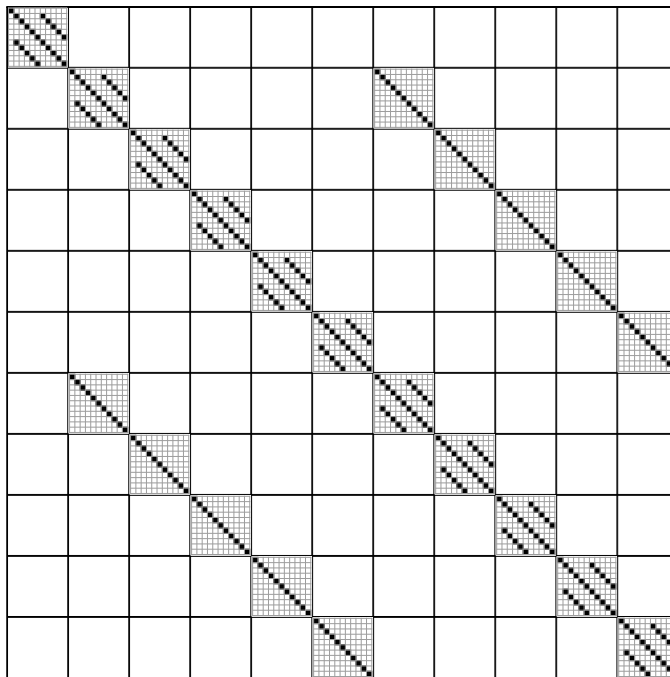


Figura 5.11: Posición $A[1, 1]$ posterior a la aplicación DEHD con dimensión $\mathbb{R}^{121 \times 121}$.

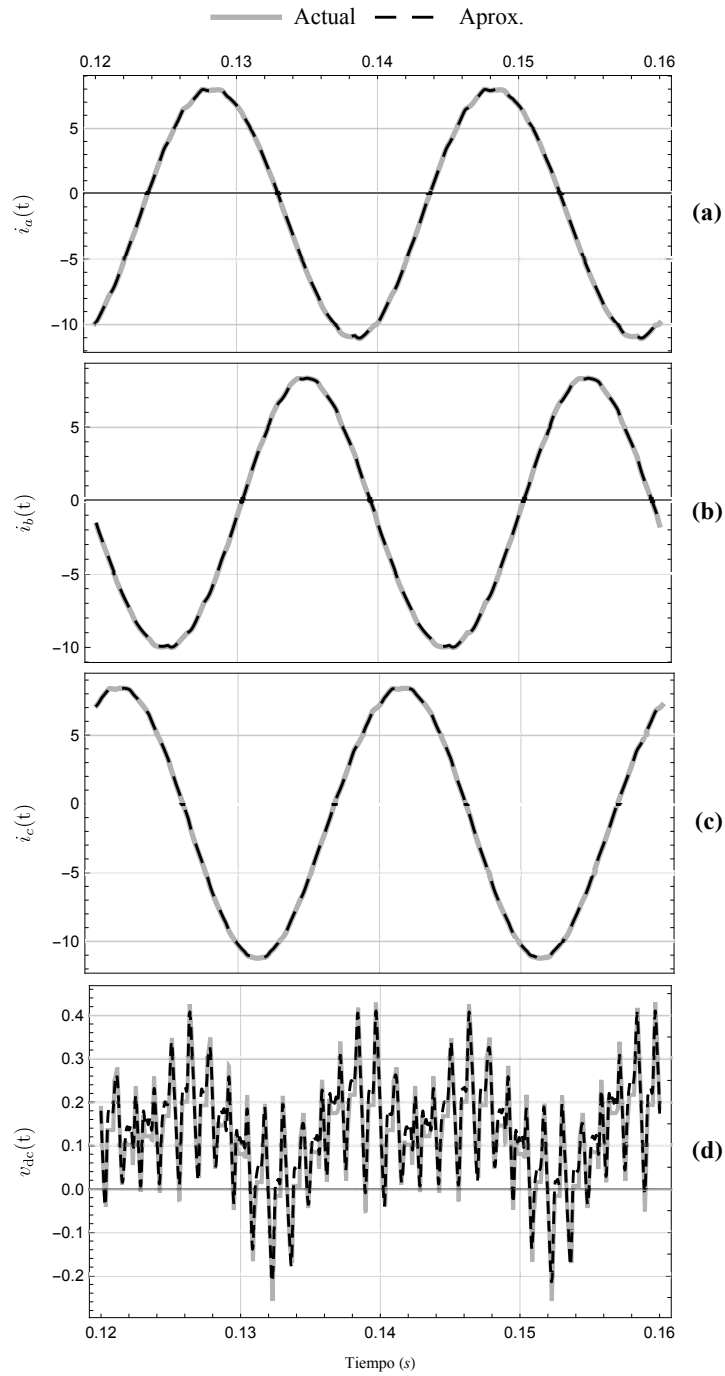


Figura 5.12: Simulación en el dominio del tiempo del STATCOM trifásico: (a) corriente de la fase a , (b) corriente de la fase b , (c) corriente de la fase c y (d) voltaje del capacitor V_{dc} .

$V_C = 1.02 \sin(\frac{2\pi}{T} + 121^\circ)$ a frecuencia $f = 50 \text{ Hz}$ o bien periodo fundamental $T = \frac{1}{50} \text{ s}$. Por lo tanto, la frecuencia de la función portadora triangular es $f_s = 750 \text{ Hz}$ o bien $T_s = \frac{1}{750} \text{ s}$.

El análisis de estabilidad mediante la metodología propuesta para el modelo del STATCOM indica estabilidad en el sistema cuando la magnitud y el ángulo de la señal de referencia $r(t)$ de la fase a son analizados para los intervalos $[0, 1.5]$ y $[-120^\circ, 120^\circ]$ respectivamente. Para este análisis, la magnitud M es analizada en su rango lineal de 0 a 1 y con sobremodulación de 1 a 1.5. La sobremodulación causa que el voltaje de salida contenga un mayor contenido armónico en comparación con el rango lineal y que los armónicos con amplitudes dominantes en el rango lineal tal vez no sean dominantes durante la sobremodulación [Mohan *et al.*, 2009]. A pesar de esto, el sistema se presenta estable para la variación del PWM de una fase dentro de los intervalos mencionados de la señal de referencia.

5.4. Conclusiones

Se logró aplicar el EHD a la ecuación de Mathieu, el convertidor Boost y al STATCOM trifásico. En los tres sistemas se muestra que, la aproximación lograda en las simulaciones sea prácticamente indistinguible en las respuestas de las variables de estado en el tiempo aun cuando los parámetros de control son variados. Sin embargo, el EHD solo permitió realizar análisis de estabilidad para los primeros dos sistemas debido a que el STATCOM trifásico aún conservaba parámetros variantes en el tiempo dentro de la matriz característica. Por lo tanto, el DEHD es implementado para lograr realizar estudio de estabilidad en este sistema.

Las representaciones obtenidas posteriormente a la implementación del EHD y DEHD son calculadas solo una vez debido a su representación simbólica que permite realizar diferentes estudios sin estar recalculando la representación LPV. Del mismo modo, el análisis de estabilidad aprovecha esta ventaja, sin embargo los eigen-valores deben ser analizados para cada parámetro que sea variado.

En este capítulo, es demostrado el uso de estas metodologías en dispositivos de electrónica de potencia, obteniendo el modelo de la dinámica del sistema en espacio de estados. Asimismo, estas metodologías se pueden implementar en sistemas eléctricos de potencia que incluyen dispositivos de electrónica de potencia; en general, para cualquier sistema que contenga funciones periódicas dentro de la matriz característica del modelo en espacio de estados.

Capítulo 6

Conclusiones y Trabajos Futuros

6.1. Conclusiones Generales

En este trabajo son analizadas las dos nuevas metodologías: Dominio Armónico Extendido (EHD) y Dominio Armónico Extendido Doble (DEHD), para el estudio de sistemas conmutados con especial referencia a los componentes de PE. Los sistemas de conmutación periódica, y en particular, los convertidores de potencia de conmutación se han estudiado utilizando una nueva formulación del EHD. Se ha demostrado que mediante el uso de esta metodología, los sistemas conmutados pueden transformarse en sistemas LPV, lo que abre la posibilidad de aplicar técnicas de sistemas lineales como los cálculos directos de estado estable, la evolución dinámica de armónicos y el análisis de estabilidad. De la representación general de LPV de los sistemas conmutados, se han derivado dos formatos EHD: el EHD invariante en el tiempo y el EHD periódico. Éstos tienen características destacadas que pueden ser explotadas analíticamente.

Una de las ventajas que presenta la nueva formulación EHD es que se pueden mantener ciertos parámetros simbólicos θ , tales como parámetros de control obteniendo una representación LPV. Para posteriormente puedan ser utilizados para realizar control.

El EHD re-formulado permite realizar una doble implementación en sistemas con periodicidad de mayor complejidad. En este caso, la doble implementación o llamado DEHD fue logrado para un STATCOM trifásico, donde el desfaseamiento de las fases es logrado

mediante una sencilla multiplicación de los coeficientes de Fourier por la matriz de desfaseamiento.

El PWM sinusoidal propuesto permite el análisis de manera más compacta debido a que es propuesto con base en una aproximación permitiendo el uso de variables simbólicas que posteriormente puedan ser controladas. Sin embargo, la aproximación lograda hace que la simulación sea prácticamente indistinguible a bajas y altas frecuencias.

Los análisis de estabilidad presentados están basados en la técnica tan conocida del análisis de los eigen-valores para cada parámetro de control θ que se desee analizar. La obtención de la estabilidad de un dispositivo de PE es obtenida para un intervalo de operación de θ ; por lo que, el análisis de los eigen-valores es repetido para un considerado número de puntos intermedios del intervalo de θ . De tal manera que se pueda concluir la estabilidad del sistema.

6.2. Trabajos Futuros

1. Uso de técnicas de dispersidad para operaciones matriciales.
2. Análisis de controlabilidad y observabilidad para sistemas periódicos con representación LPV lograda mediante EHD.
3. Aplicar técnicas de control clásico, así como de control óptimo a la representación obtenida por EHD.
4. Análisis de estabilidad utilizando otras técnicas para sistemas LPV, tales como estabilidad relativa, estabilidad de corto tiempo o estabilidad en dominio de la frecuencia.
5. Estudios de estimación de estado en EHD.

Referencias

- [Acha y Madrigal, 2001] Acha E., Madrigal M. *Power systems harmonics*. Wiley, Hoboken, NJ, USA, 2001.
- [Ainslie-Malik, 2013] Ainslie-Malik G.R. *Mathematical analysis of pwm processes*. Tesis Doctoral, Ph.D. dissertation, University of Nottingham, 2013.
- [Arrillaga *et al.*, 1995] Arrillaga J., Medina A., Lisboa M.L.V., Sanchez P., Cavia M.A. “The harmonic domain: a frame of reference for power system harmonic analysis.” *IEEE Transactions on Power Systems* 10, páginas 433–440, 1995.
- [Bettanti y Colaneri, 2009] Bettanti S., Colaneri P. *Periodic systems*. London: Springer, 2009.
- [Birkhoff y Maclane, 1977] Birkhoff G., Maclane S. *A survey of modern algebra*. Macmillan publishing Inc. New York, fourth edición, 1977.
- [Blaabjerg *et al.*, 2017] Blaabjerg F., Yang Y., Yang D., Wang X. “Distributed power generation and protection.” *Proceedings of the IEEE*, tomo vol. 105(no. 7):páginas 1311–1331, 2017.
- [Black, 2013] Black H.S. *Modulation theory*. Literary Licensing, 2013.
- [Chen, 2012] Chen C.T. *Linear System Theory and Design*. Oxford University Press, fourth edición, 2012.

- [Collado, 2018] Collado M.J. *New Perspectives and Applications of Modern Control Theory*, capítulo Hill Equation: From 1 to 2 Degrees of Freedom, página 43–71. Springer, 2018.
- [Cox, 2009] Cox S.M. “Voltage and current spectra for a single-phase voltage source inverter.” *IMA Journal of Applied Mathematics*, tomo Vol. 74(No. 5):páginas 782–805, 2009.
- [Ferreira, 2016] Ferreira B. “Understanding the challenges of converter networks and systems: better opportunities in the future.” *IEEE Power Electronics Mag.*, tomo vol. 3(no. 2):páginas 46–49, 2016.
- [Golovanov *et al.*, 2004] Golovanov N., Lazaroiu G.C., Roscia M., Zaninelli D. “Steady state disturbance analysis in PV systems.” *2004 IEEE Power Eng. Soc. Gen. Meet.*, páginas 1952–1957, 2004.
- [Harnefors *et al.*, 2016] Harnefors L., Wang X., Yepes A., Blaabjerg F. “Passivity-based stability assessment of grid-connected VSCs-An overview.” *IEEE J. Emerging Sel. Topics Power Electron.*, tomo Vol. 4(No. 1):páginas 116–125, 2016.
- [Holmes y Lipo, 2003] Holmes D.G., Lipo T.A. *Pulse width modulation for power converters: principles and practice*. NewYork: IEEE Press, 2003.
- [Hwang *et al.*, 2016] Hwang P.I., Jang G., Moon S.I., Ahn S.J. “Three-phase steady-state models for a distributed generator interfaced via a current-controlled voltage-source converter.” *IEEE Transactions on Smart Grid*, tomo Vol. 7:páginas 1694–1702, 2016.
- [Kroposki, 2017] Kroposki B. “Achieving a 100% renewable grid: operating electric power systems with extremely high levels of variable

- renewable energy.” *IEEE Power & Energy Mag.*, tomo vol. 15(no. 2):páginas 61–73, 2017.
- [la Rosa, 2006] la Rosa F.D. *Harmonics and power systems*. CRC Press, USA, 2006.
- [Lazaroiu *et al.*, 2010] Lazaroiu G.C., Tironi E., Popescu M.O., Ghita O., Dumbrava V. “Transient analysis of DG interfaced low voltage dc system.” En “ICHQP 14th International Conference Harmonic Quality Power,” 2010.
- [Lei *et al.*, 2012] Lei T., Ozakturk M., Barnes M. “Modelling and analysis of DFIG wind turbinesystem in PSCAD/EMTDC.” En “6th IET International Conference on Power Electronics, Machines and Drives (PEMD),” páginas 27–29. 2012.
- [Li, 2018] Li C. “Unstable operation of photovoltaic inverter from field experiences.” *IEEE Transactions On Power Delivery*, tomo Vol. 33(No. 2), 2018.
- [Mariethoz *et al.*, 2010] Mariethoz S., Almer S., Baja M., Beccuti A.G., Patino D., Wernrud A., Buisson J., Cormerais H., Geyer T., Fujioka H., Jonsson U.T., Kao C.Y., Morari M., Papafotiou G., Rantzer A., Riedinger P. “Comparison of hybrid control techniques for buck and boost dc-dc converters.” *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, tomo Vol. 18(No. 5):páginas 1126–1145, 2010.
- [Marouchos, 2006] Marouchos C. *The switching function: analysis of power electronic circuits*. London: IEE, 2006.
- [Messo *et al.*, 2014] Messo T., Jokipii J., Aapro A., Suntio T. “Time and frequency-domain evidence on power quality issues caused by grid-

- connected three-phase photovoltaic inverters.” En “Proc. 16th Eur. Conf. Power Electron. Appl.”, páginas 1–9. 2014.
- [Mohan *et al.*, 2009] Mohan N., Undeland T., Robbins W. *Electrónica de potencia convertidores, aplicaciones y diseño*. The McGraw-Hill Companies, Inc., third edición, 2009.
- [Mollerstedt y Bernhardsson, 2000] Mollerstedt E., Bernhardsson B. “Out of control because of harmonics - an analysis of the harmonic response of an inverter locomotive.” *IEEE Control Systems*, tomo Vol. 20(No. 4):páginas 70–81, 2000.
- [Morfin-Magaña *et al.*, 2018] Morfin-Magaña R., Rodriguez-Flores R., Ramos-Paz S., Rico-Melgoza J.J., Ornelas-Tellez F. “Model Predictive Control for Linear Parameter-Varying Systems.” *IEEE International Autumn Meeting on Power, Electronics and Computing ROPEC*, 2018.
- [Niamsup, 2009] Niamsup P. “Stability of time-varying switched systems with time-varying delay.” *Nonlinear Analysis: HybridSystems*, tomo Vol. 3(No. 4):páginas 631–639, 2009.
- [Packard y Kantner, 1996] Packard A., Kantner M. “Gain scheduling the lpv way.” En “Proceedings of 35th IEEE Conference on Decision and Control,” tomo Vol. 4, páginas 3938–3941. 1996.
- [Pettit y Wellstead, 1995] Pettit N.B.O.L., Wellstead P.E. “Analyzing piecewise linear dynamical systems.” *IEEE Control Systems*, tomo Vol. 15(No. 5):páginas 43–50, 1995.
- [Ramirez y Rico, 2016] Ramirez A., Rico J.J. “Harmonic/state model-order reduction of nonlinear networks.” *IEEE Trans. Power Deliv.* 31, páginas 1379–1387, 2016.

- [Rashid, 2011] Rashid M.H. *Power electronics handbook: devices, circuits, and applications*. Elsevier Inc., 3rd. edition edición, 2011.
- [Razzaghi, 1990] Razzaghi M. “Optimal control of linear time-varying systems via fourier series.” *Journal of Optimization Theory and Applications*, tomo Vol. 65(No. 2):páginas 375–384, 1990.
- [Ren *et al.*, 2015] Ren H.P., Zheng M.M., Li J. “A simplified mixed logical dynamic model and model predictive control of boost converter with current reference compensator.” *IEEE 24th International Symposium on Industrial Electronics (ISIE)*, páginas 61–65, 2015.
- [Rico *et al.*, 2003] Rico J.J., Madrigal M., Acha E. “Dynamic harmonic evolution using the extended harmonic domain.” *IEEE Transactions on Power Delivery*, tomo Vol. 18(No. 2):páginas 587–594, 2003.
- [Rugh, 2002] Rugh W. *Nonlinear system theory: the volterra/wiener approach*. London: Johns Hopkins University Press, 2002.
- [Sanders *et al.*, 1991] Sanders S.R., Noworolski J.M., Liu X.Z., Verghese G.C. “Generalized averaging method for power conversion circuits.” *IEEE Transactions on Power Electronics*, tomo Vol. 6(No. 2):páginas 251–259, 1991.
- [Segundo-Ramirez y Medina, 2009] Segundo-Ramirez J., Medina A. “Modeling of facts devices based on spwm vses.” *IEEE Transactions on Power Delivery*, tomo Vol. 24(No. 4):páginas 1815–1823, 2009.
- [Shamma, 1988] Shamma J. *Analysis and design of gain scheduled control systems*. Tesis Doctoral, Ph.D. dissertation, Massachusetts Institute of Technology, Department of Mechanical Engineering,, 1988.
- [Stewart, 2007] Stewart J. “Calculus, Sixth Edition.” 2007.

- [Strang, 2007] Strang G. *Álgebra lineal y sus aplicaciones*. Thomson Learning, fourth edición, 2007.
- [Sun, 2012] Sun J. *Pulse-width modulation*. London: Springer, 2012.
- [Sun y Ge, 2005] Sun Z., Ge S.S. *Switched linear systems control and design*. London: Springer, 2005.
- [Vargas *et al.*, 2018] Vargas U., Ramirez A., Lazaroiu G.C. “Flexible extended harmonic domain approach for transient state analysis of switched systems.” *Electric Power Systems Research 155*, páginas 40–47, 2018.
- [Vargas y Ramirez, 2016] Vargas U., Ramirez A. “Extended harmonic domain model of a wind turbine generator for harmonic transient analysis.” *IEEE Transactions on Power Delivery*, tomo Vol. 31(No. 3):páginas 1360–1368, 2016.
- [Vasca *et al.*, 2009] Vasca F., Iannelli L., Camlibel M.K., Frasca R. “A new perspective for modeling power electronics converters: complementarity framework.” *IEEE Transactions on Power Electronics*, tomo Vol. 24(No. 2):páginas 456–468, 2009.